Vad säger matematikbetyget?

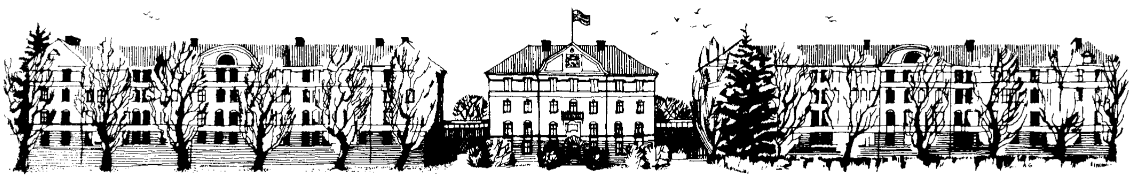
en kvantitativ studie av 2 079 elevers betyg i årskurs nio

Staffan Stenhag

U.U.D.M. Report 2007:20
ISSN 1101–3591

Filosofie Licentiatavhandling
i matematik

som framläggs för offentlig granskning
den 2 maj, kl 13.15, sal 64119
på Polacksbacken i Uppsala



Department of Mathematics
Uppsala University

INNEHÅLL

FÖRORD

När jag associerades till forskarskolan i matematikdidaktik, med start hösten 2001, anade jag inte att det jag gett mig in på var ett projekt som skulle sträckas ut under en så lång tidsperiod som nu blivit fallet. I min enfald trodde jag att min då 15-åriga erfarenhet som matematiklärare skulle vara en bra utgångsposition och att mina förkunskaper skulle göra vissa genvägar möjliga. Det jag nu har lärt mig är att genvägarna är få och att forskning kräver ett stort mått av både arbete och tålamod.

När det nu är dags att summera den här tiden blir min slutsats att det är mötet med för mig nya personer som ändå gjort resan mödan värd. Jag tänker då främst på två personer; min huvudhandledare professor Sten Kaijser vid matematiska institutionen samt docent Bo Johansson vid institutionen för lärarutbildning, båda verksamma vid Uppsala Universitet. Stens skarpa intellekt har gjort att det alltid varit intressant att ta del av hans synpunkter och Bosses rättframma och kristallklara kritik har varit både rolig och utmanande att försöka bemöta. Jag vill rikta ett stort tack till Er båda!

Utöver dessa två personer som varit direkt inblandade i arbetsprocessen vill jag tacka ett antal personer som hjälpt mig med finansieringen. I kronologisk ordning: Lars Höök, Torgny Söderman, båda prefekter vid SLU-Skogsmästarskolan under olika tidsperioder, samt Jan-Erik Hällgren, dekanus vid fakulteten för skogsvetenskap vid SLU.

Bland tomtar och troll,
i Skogsmästarskolans övre strömflygel,
mars 2007

Staffan Stenhag

1. INTRODUKTION

Intresset i detta arbete koncentreras kring frågeställningar som har att göra med vilka effekter studier i matematik har på oss människor. Vad lär man sig förutom matematik när man studerar matematik? Ligger det något i påståendet att matematik skärper den intellektuella förmågan, eller ligger motiven för skolmatematiken huvudsakligen i den praktiska användning man har av ämnet i det dagliga livet? Hur är studieresultaten i matematik besläktade med andra studieresultat i skolan?

Arbetet består av två delar. Den första delen grundas på litteraturstudier och här är målet att översiktligt skildra hur matematikämnet motiverats under olika historiska epoker, men även hur det motiveras i dagens skola. Ett särskilt intresse ägnas frågan om matematikämnet har en formalbildande effekt. I studiens andra del används olika statistiska metoder för att granska hur studieresultaten i matematik på grundskolan är besläktade med studieresultaten i andra skolämnen.

1.1 VARFÖR SKA MAN STUDERA MATEMATIK?

Mycket har skrivits och mycket har sagts om varför matematik är ett viktigt skolämne. I en artikel i *Mathematical Handbook of mathematics education* (1996) granskar professor Mogens Niss (f. 1944) argumenten för matematik i skolan. Han menar att frågan om varför vi studerar matematik är en synnerligen viktig didaktisk fråga som ständigt måste studeras:

> Therefore, we continually need updated descriptive/analytic studies to uncover, in concrete and specific terms, the actual justification and the goals of mathematics education in different countries/cultures, and we continually need normative studies to discuss, on theoretical and empirically sound foundations, the justification and goals on mathematics education in a world marked by constant change /…/

(Niss, 1996, sid 45)

Niss skriver även att ett argument för att studera matematik helt enkelt är skoltraditionen, och motståndet mot förändringar. Varför ska man förändra något som alltid funnits och ansetts fungera väl?

> Since mathematics education has been around for quite a while, it is probably good for something. Besides they have it in all other countries too. Perhaps it would cause serious damage to our society if we reduced it or removed it from the curriculum.

(Niss, 1996, sid 14)

Naturligtvis är inte traditionsargumentet det allenarådande i debatten om varför matematik är ett viktigt skolämne. Niss anger i artikeln tre huvudsakliga argument för matematikämnet: i) för att bidra till den socioekonomiska samhällsutvecklingen, ii) för att bevara vår kultur och iii) för att förse individen med de nödvändiga kunskaper som krävs för att klara av privat- och arbetsliv. I den svenska debatten förs huvudsakligen punkt i) och iii) fram, medan det klassiska bildningsargumentet tonas ned (Engström, 2005). Matematik ska läsas för att det är nyttigt.

Trots att samhället idag på många områden förändras snabbt verkar det inte finnas några stora planer på att reformera ämnesinnehållet i matematik. I primärskolans matematikkurser har innehållet varit förhållandevis konstant under i stort sett 150 år (NCM, 2003). Visserligen gjordes försök med den ”nya matematiken” under 1960-talet, men detta har inte lämnat några tydliga spår i dagens styrdokument. År 2006 får alltså högstadieeleverna i stort sett lära sig samma matematik som man gjorde när den nioåriga grundskolan infördes 1962. I senaste revideringen år 2000 av den gällande läroplanen på grundskolan, Lpo -94, vidtogs i princip inga förändringar alls beträffande innehållet i matematikkursen. Det fanns förslag om att flytta målen för algebra, ekvationer och funktioner till gymnasieskolan för att ge plats åt mer vardagsnära matematik i grundskolan, men detta avfärdades (Skolverket, 2000 b). Förändringarna uteblev trots att exempelvis informationstekniken har stärkts enormt de senaste decennierna.

Under 1800-talet skedde motsvarande genomgripande förändringar när vår nation gick från att vara bonde- till att bli industrisamhälle. De grundläggande principerna i dagens skolsystem, som t.ex. ämnesindelningen, härstammar från denna tid (Richardson, 2004). Det sägs att vi nu är på väg in i en ny typ av samhälle; ett informationsrikt kunskapssamhälle där de flesta arbetsföra inte ägnar sig åt produktion i basnäringarna, utan istället lägger sin tid i en allt större tjänstesektor. Om nu huvudsyftet med matematikundervisningen verkligen är att förse individen med nyttiga och direkt tillämpbara kunskaper kan man med fog fråga sig varför inte curriculum har förändrats i takt med samhällsutvecklingen.

Per Fibæk Laursen skriver i sin bok *Kognition och Lärande* (2005) att den mest grundläggande frågeställningen i didaktiken gäller utbildningens *innehåll*. Andra former av pedagogisk verksamhet utanför skolan, som t.ex. familjers fostran av sina barn, har inte alls på samma sätt ett tydligt tema kring vilket det pedagogiska umgänget organiseras. Det är undervisningens innehåll som ger skolan mål och mening och det är därför så oerhört viktigt att valet av lärostoff kan motiveras.

Som matematiklärare får man ofta frågan av de studerande om varför de ska lära sig det ena eller det andra. Alltför ofta ställs tyvärr frågan utifrån ett perspektiv med en kritisk grundton: ”Vad ska det här vara bra för?”. Att så är fallet kan hänga samman med att information i vårt moderna samhälle inte längre är en bristvara utan tvärt om något där tillgången upplevs som i det närmaste oändlig. För den rationelle eleven är det tiden som är den begränsande faktorn. I den sovring som med nödvändighet måste göras vill eleven därför ständigt ha svar på frågan om varför just denna kunskap ska erövras.

En personlig iakttagelse, efter mer än tjugo år som matematiklärare, är att individer som når framgång i matematik också tenderar att nå studieframgång i andra teoretiska ämnen. På det högskoleprogram vid Sveriges Lantbruksuniversitet, Skogsmästarprogrammet, där jag själv undervisar gav en mindre undersökning vid handen att sambandet är starkt mellan det resultat studenterna presterar på ett tidigt matematikprov och deras totala studieresultat mätt i högskolepoäng.

Efter två års studier kan man maximalt ha uppnått 80 högskolepoäng (hsp) på programmet, men i gruppen med svagt matematikresultat på det inledande testet är det en väldigt liten andel studenter som når 75 poäng eller mer (se tabell 1.1.1).

TABELL 1.1.1. Studieresultat för olika grupper indelade efter resultat på ett prov i matematik under första terminen. Data från Skogsmästarprogrammet 2003 (mätt efter fyra terminers studier, september 2005).

Resultat på prov i matematik termin ett	Antal personer	Andel i gruppen med 75 eller fler högskolepoäng efter fyra terminer
Deltog ej	4	0,0 %
0 – 10	6	33,3 %
10 – 20	12	66,7 %
20 – 30	20	90,0 %

Kort sammanfattat: Ju sämre resultat på det inledande matematikprovet, desto mindre sannolikhet för en effektiv student (mätt som förmågan att klara av kurser på programmet). Frågan är vad detta egentligen beror på. Det är knappast brister i matematikkunskaperna i sig, eftersom mönstret går igen även i de kurser som helt saknar beräkningar. En möjlig förklaring är att det inledande matematikprovet helt enkelt mäter graden av studiemotivation. En student som är osäker på om hon hamnat på rätt utbildning kanske tenderar att inte bry sig så mycket om hur det går och denna osäkerhet går sedan igen i övriga kurser. En alternativ förklaring är att de som nått goda kunskaper i matematik på tidigare utbildningsnivåer samtidigt tillägnat sig en generell studieteknik som de har nytta av utöver ämnesgränsen i samtliga kurser. Det är den senare av dessa två möjliga förklaringar som fokuseras i denna uppsats.

För att studera matematik på grundskolan med framgång krävs noggrannhet och självdisciplin. Noggrannheten ligger i ämnets inneboende natur, medan självdisciplinen krävs för att under lösningsfasen av ett problem kontinuerligt och envist ställa och besvara den metakognitiva frågan om man är på väg mot problemets lösning. Det kritiska tänkandet, självkontrollen och eftertanken är centrala aktiviteter i matematikstudier som svårligen kan rationaliseras bort. Matematik handlar ju till syvende och sist om att nå just förståelse.

Kan det vara så att studier i matematik i sig har en formalbildande effekt, eller är det bara så att ämnet utgör ett tydligt avgränsat område där det är förhållandevis enkelt för en lärare att avgöra en motiverad elevs studiekapacitet? Om något av dessa antaganden är riktigt, oavsett vilket, borde en konsekvens bli att elever som når höga betyg i matematik på grundskolan också i hög utsträckning får höga betyg i övriga ämnen. Om detta stöds av empiri är en sak som ska undersökas i detta arbete.

1.2 Syfte

Syftet med föreliggande avhandling är att:

- Studera hur matematikämnets ställning i skolplaner motiverats under olika tidsepoker. Ett särskilt intresse ägnas åt att syna argumenten om matematikämnets praktiska nytta och dess formalbildande effekt.

- Undersöka matematikbetygens möjlighet att fungera som indikator på en individs generella studiekompetens. Målet är också i denna del att testa olika statistiska metoder för att genomlysa de likheter, skillnader och samband som finns mellan betygsutfallen i olika ämnen på individnivå.

1.3 Forskningsstrategi

Arbetet består i princip av två delar. I den första delen är ambitionen att översiktligt studera vad som skrivits om matematik som skolämne i modern och förfluten tid. Framförallt inriktas studierna mot hur argumenten under olika tidsepoker formulerats för att ge matematikämnet den betydande plats som det haft, och fortfarande har, i vårt utbildningssystem. Ett särskilt intresse ägnas vad som är utmärkande för lärande i matematik i relation till andra läsämnen på grundskolan, och hur detta återspeglas i kursplaner och betygskriterier. Här studeras också vad som i tidigare forskning sagts om hur matematisk kunskap kan bedömas och hur studieresultat kan prediceras.

Parallellt med litteraturstudierna genomförs en statistisk analys av ett stort antal grundskolebetyg för årskurs nio. I denna analys är målet att genomlysa de statistiska samband som finns mellan betyget i matematik och andra ämnesbetyg. Den underliggande forskningsfrågan är att undersöka om grundskolans matematikbetyg kan användas för att predicera studieresultat i andra teoretiska ämnen. Målet med arbetet är att med hjälp av vedertagna statistiska metoder vetenskapligt undersöka detta. Samtidigt finns ett annat underordnat mål med denna del, nämligen att inför kommande forskning pröva och studera olika statistiska verktyg och jämföra deras lämplighet för den här typen av analys.

1.4 Disposition

Dispositionen följer i princip de två delar av arbetet som presenterats under rubriken forskningsstrategi ovan. Efter denna introduktion följer först i kapitel två och tre en allmän översikt av för studien relevanta forskningsresultat.

Kapitel två behandlar, utifrån ett läroplansteoretiskt perspektiv, matematikämnet som det genom historien tett sig och idag ter sig i svensk skola. Här presenteras en översikt av hur argumenten för skolmatematik formulerats under olika historiska epoker. Kapitel tre behandlar teorier kring hur vi människor når matematisk kunskap med ett särskilt fokus på konstruktivism. Vidare ges här en översikt av olika metoder och modeller för att bedöma graden av matematisk förståelse. Här tas också frågor upp kring hur studieframgång kan mätas och prediceras.

Efter teoriöversikten i kapitel två och tre följer i kapitel fyra och fem en beskrivning av den statistiska analys som genomförts i detta arbete. Först beskrivs upplägget av studien och därefter det utfall som de olika analysverktygen givit. Det är sammanlagt 2 079 individers slutbetyg i årskurs nio på grundskolan som analyserats. Urvalet består av de elever som gick ut nionde klass i Västmanlands län år 2003. Målet är en deskriptiv statistisk analys av hur betygsutfallen i de olika ämnena förhåller sig till varandra, med ett särskilt fokus på matematik-ämnet.

Avhandlingen avslutas i kapitel sex med en diskussion kring de framkomna resultaten tecknad i relief mot den teoretiska bakgrund som presenterats i de inledande kapitlen.

2. ARGUMENTEN FÖR MATEMATIK I SKOLAN

I den artikel av Mogens Niss som refererades i det inledande kapitlet nås följande slutsats om vilka motiven för matematik i skolan är:

> Analyses of mathematics education from historical and contemporary perspectives show that in essence there are just a few types of fundamental reasons for mathematics education. They include the following:
>
> - Contributing to the technological and socio-economic development of society at large, either as such or in competition with other societies/countries;
>
> - Contributing to society's political and cultural maintenance and development, again either as such or in competition with other societies/countries;
>
> - Providing individuals with prerequisites which may help them to cope with life in the various spheres in which they live: education or occupation; private life; social life; life as a citizen.
>
> (Niss, 1996, sid 13)

Central är alltså den för samhället och individen nyttiga matematiken. Matematik anses vara en förutsättning för att klara sig i ett modernt postindustriellt samhälle. I många sammanhang förs begreppet "mathematical literacy" fram som beskrivning på individens förmåga att kunna känna igen och använda matematik i de situationer som man kan möta i såväl yrkes- som privatliv. En person med låg matematisk kompetens anses i linje med detta resonemang inte vara tillräckligt utvecklingsbar och attraktiv på arbetsmarknaden och riskerar dessutom att få svårigheter att såväl delta i den samhälleliga debatten som att hävda sin rätt i sitt privatliv (Mouwitz et al, 2003 ; Engström, 2005).

Ytterligare ett argument som förts fram är att matematikstudier indirekt är nyttiga genom att de främjar den intellektuella utvecklingen. Ämnet skulle enligt denna teori kunna fungera som en form av "hjärngymnastik". Än idag bär våra kursplaner för matematik i grundskolan spår av denna syn på matematiken som indirekt nyttig genom att den anses kunna träna upp den intellektuella kapaciteten (Linde, 2003).

I detta kapitel ges en summarisk översikt av hur man under olika historiska epoker argumenterat för matematikämnets plats på skolschemat.

2.1 ETT LÄROPLANSTEORETISKT PERSPEKTIV

En vedertagen metod för att studera hur olika samhällen präglar skolans undervisning i såväl innehåll som form finns i den läroplansteoretiska forskningen. Här granskas de skrivna läroplanerna samt villkoren för det pedagogiska tänkandet och arbetet. Forskningen ligger i linje med den internationella motsvarigheten ”curriculum theory” och belyser såväl förutsättningarna för utbildning i form av ramfaktorer som själva undervisningsprocessen. I Sverige har bl.a. förre generaldirektören för skolverket, Ulf P. Lundgren (f. 1942), gjort insatser på området. Beträffande den klassiska läroplansteorin räknas pedagogen John Dewey (1859 – 1952) som en viktig bidragsgivare.

De olika läroplansteorier som finns har enlig Lundgren (1979) i huvudsak inriktat sig på att försöka besvara följande frågor:

- Hur formuleras mål för undervisningen?
- Hur väljs innehållet ut?
- Hur organiseras utbildningen?
- Vilken undervisningsmetod är den bästa för att undervisa på ett givet stoff?

Spjälkar man upp dessa frågor kan man enligt Lundgren beskriva en övergripande struktur bestående av tre nivåer. Den första nivån handlar om hur den historiska utvecklingen påverkar uppfattningar om läroplanens syfte, innehåll och funktion. Som exempel kan nämnas ideologiernas påverkan på utbildningens metodik. Den andra nivån behandlar frågor om hur utbildningarna styrs. Det kan t.ex. gälla hur det konkreta utvecklandet av en läroplan går till. Den tredje nivån slutligen handlar om hur utbildningen realiseras innanför de befintliga ramarna. En central fråga här är vad utbildningen leder till i praktiken.

> /…/ utbildningen styrs inte bara av ideologiska dokument som anger vad som skall vara utbildningens syfte, utan än mer av vad som direkt i det omgivande samhället definieras som vetande. I den process där detta tar gestalt omformas inte bara detta vetande till en serie inlärningstillfällen, utan också själva aktiviteterna för inlärning ger i sin tur en inlärning. Man lär sig t ex inte bara vad matematik är utan också vad matematik har för värde; man lär sig inte bara vad matematik har för värde utan också om sin egen förmåga i förhållande till matematik; man lär sig inte bara om sin egen förmåga i förhållande till matematik utan också hur man ska uppfatta kunskap och vad som är kunskap värd att veta.
>
> (Lundgren, 1979, sidan 18 - 19)

Bakom varje läroplan finns enligt Lundgren vissa grundläggande principer vilka han benämner *läroplanskod*. Denna kod formas av existerande materiella och kulturella villkor, samt av olika föreställningar om utbildning och pedagogik. När Dewey i artikeln *Skolan och samhället* (1899) kategoriserar syftet med utbildningar i den västerländska historien använder han klasserna: i) moral, ii) bildning, iii) disciplin och iv) praktisk nytta. Något förenklat menar han att målet med skolans verksamhet långsamt förskjutits från medeltidens moral över upplysningstidens bildning till industrialismens praktiska nytta. I stort stämmer detta med den analys Lundgren gör nästan hundra år senare. Han hävdar att tyngdpunkten i moderna tiders utbildningar alltmer förskjutits mot en rationell läroplanskod.

2.2 Matematik som vetenskaplig förebild

Skrivkonstens genombrott för ca 5 000 år sedan möjliggjorde att sätta erfarenheter och idéer på pränt och därmed bevara och kommunicera dessa över tid. Omkring 500 f.Kr. började grekiska filosofer att samla och systematisera olika typer av vetande. En kunskapsbank byggdes upp som sedan kom att fungera som en språngbräda för nya generationer av tänkare. Vetenskapen blir en kumulativ process. Den utbildningskultur som föddes i det antika Grekland vid denna tid präglar i mångt och mycket våra universitet och skolor än idag (Ambjörnsson, 1997). Världsbilden som undervisades var också den starkt påverkad av pythagoréernas idéer, alltså en världsbild som i grund och botten baserades på matematik.

Platon (427 – 347 f.Kr.) var med om att bygga upp den kanske mest kända skolan, *Akademia*. Han beskriver i dialogen *Staten* hur ungdomar ska fostras till att bli morgondagens styresmän. Detta är ett av de äldsta kända exemplen på en utbildningsplan. Enligt Platons skiss skulle de utvalda unga männen efter några års studier i gymnastik och musik, från 20 till 30 års ålder, bedriva de fem pythagoreiska studierna i aritmetik, plangeometri, rymdgeometri, astronomi och harmonilära. Som påbyggnad på dessa studier i matematik skulle följa fem års studier i dialektik, den särskilda logik som Platon utvecklat i sina dialoger. Först som 50-åringar skulle de som utbildats vara mogna för de högsta statliga ämbetena.

Enligt Platon är meningen med matematikstudierna inte primärt den praktiska nytta man kan ha av kunskaperna, utan främst att göra den framtida samhällseliten, de s.k. väktarna, mottagliga för de yttersta tingen. I bok 7 av *Staten* utspelas följande dialog mellan jaget, filosofen Sokrates, och Platons bror, Glaukon.

- Då passar det bra, Glaukon, att lagstifta om denna vetenskap och övertala dem som ska sköta de högsta uppgifterna i staten att studera matematik och tillägna sig det, men inte som folk i allmänhet, utan så pass noggrant att de kan betrakta talens natur med blotta tanken. De ska inte öva sig i det för att kunna köpa och sälja som köpmän och krämare, utan för krigets skull, och för att själen själv lättare ska vändas från blivande till sanning och vara.
- Det har du alldeles rätt i, sade han.
- Och dessutom, sade jag – nu när den matematiska vetenskapen har kommit på tal slår det mig hur raffinerad den är och hur mångsidigt användbar den är för det som vi är ute efter, förutsatt att man bedriver den för kunskapens skull, inte för att schackra.

Platon, ca 370 f.Kr.
Översättning Jan Stolpe, 2003. Sid 308 – 309.

Som Platon såg det ska vi alltså studera matematik för att vinna sann kunskap och inte för att nå ekonomiska fördelar. Lite längre fram i dialogen diskuteras hur urvalet av den elit som ska bedriva dessa studier ska ske.

- En annan sak! Har du lagt märke till att de som av naturen är bra på räkning eller slutledning är snabba att lära sig praktiskt taget alla vetenskaper, men att de som är långsamma ändå alltid förkovrar sig och ökar något i snabbhet om de skolas och övas i räkning, även om de inte får ut något annat av det?
- Ja så är det, sade han.
- Och dessutom tror jag inte att det blir så lätt att hitta några andra studier – inte många i alla fall – som kräver större möda än det här av den som studerar och övar.
- Nej.
- Av alla dessa skäl måste vi ta med det här ämnet, men det är de människor som är dugligast till naturen som ska utbildas i det.
- Jag håller med, sade han.

Platon, ca 370 f.Kr.
Översättning Jan Stolpe, 2003. Sid 310.

Tanken att matematikövningar i sig skulle ha en gynnsam effekt på intellektets utveckling finns alltså redan här ca 400 f.Kr. Även så hypotesen om att de som är bra i matematik har lätt för att ”lära sig praktiskt taget alla vetenskaper” vilket, om det är sant, implicerar att matematikprestationer skulle kunna fungera som ett urvalsinstrument för vidare studier.

Alltsedan den här tiden har också matematik funnits med som ett självklart inslag i den västerländska utbildningstraditionen. Enligt Lundgren är antikens syn på matematik utmärkande för den klassiska läroplanskoden:

> Den skönhet och den magi som ligger i ordningen och formerna hos talen innebar, att matematiken blev en kunskap med ett egenvärde. Genom att undervisa barnet om denna matematik gav man ett instrument med vars hjälp ordning och harmoni kunde förstås. /…/ I det ögonblick matematik etableras som en nödvändig del av undervisningen kom också matematisk kunskap att påverka den vetenskapliga, ekonomiska och kulturella utvecklingen, vilket i sin tur allt fastare förankrar matematiken i utbildningen. En viss föreställning om vetande kommer, genom att den realiseras i uppfostran och utbildning, alltid att ge konsekvenser för såväl samhällsutveckling som pedagogisk utveckling.
>
> (Lundgren, 1979, sidan 28)

Enligt Lundgren blir följaktligen matematik själva urbilden av vetande. När denna föreställning får acceptans påverkar detta i sin tur det omgivande samhället genom de tillämpningar matematik får där.

En av Platons lärjungar var Aristoteles (384 – 322 f.Kr.). Aristoteles förmodligen viktigaste insats för eftervärlden är skapandet av en systematik för vetenskapligt arbete och tänkande. Enligt Aristoteles ska varje ny naturvetenskap byggas upp med matematiken som förebild och bestå av väldefinierade begrepp och ett deduktivt system av satser. Carl von Linné (1707 – 78) säger mer än 2 000 år senare att hans främsta lärofader är Aristoteles och dennes metod att skapa klassifikationssystem och argumentera vetenskapligt. Aristoteles tankestruktur kom alltså att ha inverkan på den akademiska världen under en mycket lång tidsperiod framöver (Sandström, 1995).

Ett verk som mycket starkt kom att präglas av Aristoteles idéer om hur en vetenskap ska formuleras är Euklides banbrytande verk Elementa (o. 300 f.Kr.). Skriften sammanfattar de matematiska framsteg som de grekiska filosoferna hade gjort vid denna tid, men den innehåller även bidrag som stammar från den äldre babyloniska kulturen. Detta verk fick så småningom en mycket stor spridning. En utgåva från 300-talet har legat till grund för översättningar till arabiska (800-talet), latin (1100-talet) och engelska (1702). Den första översättningen till svenska av Elementa, omfattande de första sex böckerna, gjordes av Mårten Strömer och utkom 1744 (Rodhe, 2002). Långt in på 1950-talet användes Elementa som matematiklärobok i svenska skolor.

2.3 MATEMATIK FÖR ATT KUNNA SKÅDA GUD

Under de första århundradena e.Kr. sprider sig kristendomen över världen. Kyrkan kommer nu under en lång följd av århundraden att bli den drivande kraften i hur utbildning utformas och förändras. Moralen blir central i utbildningen och vi får en moraliskt formad läroplanskod. Vetenskapligt och kulturellt gör kyrkofadern Augustinus (354 – 430) en stor insats genom att lyfta in den nyplatonska filosofin i ett kristet sammanhang. Enligt Augustinus ska man läsa matematik för att det skärper sinnet och gör att man kan förstå den gudomliga sanningen.

Kring år 1100, parallellt med att de första universiteten bildas i Paris och Bologna, påbörjas en omfattande översättning av främst Aristoteles texter till latin. Enligt Aristoteles är världen evig, men enligt kristendomen är den skapad av Gud. Denna motsättning fick till följd att Aristoteles texter var bannlysta på universitet och klosterskolor ända fram till 1200-talet. Lärorna ansågs som ogudaktiga och förbjöds flera gånger vid universitetet i Paris. Den som till sist löste denna akademiska knut var Thomas av Aquino (1225 – 74). Han lät filosofin bli en stödvetenskap till teologin och lyckas därmed åter få filosofin rumsren. Filosofins – och därmed också matematikens – uppgift sägs nu vara att lyfta fram och belysa Guds skapelse tydligare. I den s.k. skolastiken bildas en syntes av den kristna trosläran och den antika filosofin. Genom att studera världen med vetenskapliga metoder tror man sig kunna komma närmare Gud och kanske t.o.m. lyckas bevisa hans existens (Sandström, 1995).

På universiteten kom Platons idéer att trängas bort av Aristoteles. Enligt den senare var logiken viktigare än matematiken. Som en följd av detta får ämnena filosofi och teologi ett större utrymme än vad matematikämnet får på universiteten. Platons idéer kom under hela medeltiden att spela en undanskymd roll. Mot slutet av 1200-talet innebar studier vid universitetet att man knöts till någon av de fyra klassiska fakulteterna: teologi, juridik, medicin eller filosofi. Matematiken inordnades under filosofin, men hade ett obetydligt utrymme. I kursplanerna från Paris 1255 nämns över huvud taget inte de matematiska ämnena. Något hundratal år senare står dock både astronomi och matematik på dagordningen. Enligt förebild från Platons Akademia delas de akademiska ämnena upp i quadrivium (aritmetik, harmonik, geometri och astronomi, sfärik) och trivium som främst omfattade verbal förmåga (grammatik, retorik, och dialektik/logik). Denna uppdelning kom att bestå långt in på 1700-talet (Thompson, 1996).

Kyrkans makt utmanades i och med reformationen. Grogrunden för en förändring var god. Katolska kyrkans roll hade under en längre tid försvagats. Uppkomsten av nationalstater med eget språk och utbildningsbehov gav tillsammans med boktryckarkonsten nya förutsättningar för utbildning. Martin Luthers (1483 – 1546) lilla katekes spreds över Europa. För att varje människa skulle förstå sin syndiga natur måste hon undervisas och reformationen ställde därmed indirekt krav på läskunnighet och undervisning. För den internationella och intellektuella eliten förblev dock latin det gångbara språket (Sandström, 1995).

2.4 MATEMATIK FÖR DESS NYTTA

Under slutet av 1500-talet vann humanismen mark och ställde sig i opposition till skolastiken. Kunskapsintresset blev härmed mer praktiskt orienterat och inspirerades av den romerska kulturen. De humanistiska studierna skulle inriktas på grammatik, poesi, historia och moralfilosofi. Det är dock viktigt att betona att humanismen vid denna tid inte på något sätt stod i motsättning till naturvetenskaperna. Tvärtom var humanismen inspirerad av idéer kring det formella bildningsvärdet av matematik och litteratur.

Under 1600-talet sker idémässigt många banbrytande saker på det vetenskapliga fältet. Filosofiskt sker en omorientering i riktning mot en mer empiriskt grundad kunskapsteori. En glidning äger rum bort från skolastiken och dess syn på naturvetenskaper som enbart stödläror för kristendomen. Istället blir vetenskapens mål att förstå naturens lagbundenhet och att därmed ge människan förmåga att tämja den. Vetenskaplig kunskap skulle enligt den nya tidens idéer främst nås genom kontrollerade experiment. Läroplanskoden blir enligt Lundgren mer realistisk (ibid.).

I mitten av 1600-talet förde Johan Amos Comenius (1592 – 1670) fram idéer om en skola för alla, uppdelad i olika etapper. Detta är dock något som i Sverige först kom att realiseras ett par hundra år senare i samband med folkskolereformen. Filosofiskt var Comenius starkt influerad av nyplatonismen och källan till all kunskap ansåg han låg hos å ena sidan sinnesförnimmelserna och å andra sidan Bibeln.

För adeln som klass var ett öppet skolsystem inte något önskvärt. Detta stånd önskade själv kunna fylla statens behov av kvalificerad arbetskraft och såg inte med blida ögon på att ofrälse personer efter fullgjord utbildning kunde få makt och inflytande i statsapparaten. I Sverige ledde detta till att en utbildningsstrategi formulerades där adeln, enligt den gudomliga samhällsordningen, påstods äga en naturlig fallenhet för studier. Den adliga strategin syftade tydligt till att försvåra andra gruppers inträde i samhällseliten (Winberg, 2003).

Den vetenskapliga och industriella revolutionen under 1700- och 1800-talet och med den det ökade handelsutbytet länderna emellan, parallellt med framväxten av en allt större och mer komplicerad statsapparat, skapade nya behov av utbildningar. I Berlin grundades vid mitten av 1700-talet en ekonomisk-matematisk realskola. Innehållet i utbildningen var direkt inriktat på den praktiska nyttan, alltså den kunskap man ansågs ha nytta av i handelsyrken. I takt med ökat utbyte med andra länder växer det också fram önskemål om mer undervisning i tyska och franska istället för i de klassiska språken grekiska och latin (Sandström, 1995).

2.5 MATEMATIK FÖR DESS FORMALBILDANDE EFFEKT

I funderingar som egentligen primärt handlade om vilken kunskap som skulle anses som nyttig, fördes tanken fram att studier i bl.a. matematik och latin *indirekt* är nyttiga för att utveckla intellektet. Som tysken Herder (1744 – 1803) uttryckte saken: ”Är kniven en gång slipad, kan man skära allehanda ting därmed” (citerad i Sandström, 1995). Vissa ämnen skulle alltså vara särskilt lämpliga att studera eftersom de skärper elevens förmåga till insikt. En av de första kända läroplanerna i det moderna Europa skrevs år 1760 i England av kemisten Joseph Priestley (1733 – 1804). I hans plan hade matematiken en särställning och Priestley ansåg att matematik skulle ingå som allmän grund i alla utbildningar, just för att ämnet är nyttigt och därmed viktigt (Wyndham, Riesbeck & Schoultz, 2000).

Förutom humanisterna Herder och Humboldt (1767 – 1835) är senare i historien även Spencer (1820 – 1903) inne på tankegångar om att undervisning i matematik och naturvetenskap är nyttigt för formandet av intellektet. Spencer ansåg att humaniora hade ett direkt skadligt inflytande på den studerande, då det fostrade till en auktoritetstro. De naturvetenskapliga ämnena däremot ansåg Spencer ge upphov till självständighet, ihärdighet och ärlighet. Mot humanisternas tankar om att formalbildning ger bättre tankeförmåga vände sig Herbart (1776 – 1841). Han såg primärt lärarens uppdrag vara att överföra kunskaper till eleverna om människans kulturarv. Detta skulle göras genom att undervisa i klassisk litteratur, historia, matematik och naturvetenskap. Herbart är en representant för uppfattningen att undervisning verkar fostrande och att skolans mål är att fostra moraliskt högtstående samhällsmedborgare. Senare kom Herbart att bli mycket inflytelserik i 1800-talets uppbyggnad av skola och undervisning. Han gjorde dessutom stora insatser för att ge ämnet pedagogik en vetenskaplig status (Sjöstrand, 1945).

En viktig principiell fråga i 1800-talets svenska skoldebatt gällde om det var statens uppgift att utbilda personer för det privata näringslivet. Detta ansågs långt ifrån som självklart. De konservativa politikerna argumenterade för att staten endast skulle ta ansvar för utbildning av offentliga personer (ämbetsmän, präster, vetenskapsmän, och konstnärer). Det är dock de liberala idéerna som vinner mark. Liberalerna hävdade att näringslivets utveckling låg i statens och allmänhetens intresse.

Central i denna dispyt kom latinets ställning i gymnasieskolan att bli. De liberala företrädarna krävde en modernisering av skolans innehåll med större plats för de naturvetenskapliga ämnena och moderna språk. Mot detta argumenterade de konservativa att latinstudierna – liksom studier i matematik – i sig innebar en speciell förståndsträning och intellektuell utveckling. På de svenska läroverken hade man vid sekelskiftet mellan 1800- och 1900-talet stora problem med att lära eleverna latin. Detta gjorde att upp till 75 procent av eleverna i en årskull aldrig kunde få ut någon examen från läroverken (Richardson, 2004). Enligt Lundgren (1979) dominerade under denna epok den klassiska läroplanskoden på läroverken. Man tog sikte på en skola som skulle ge klassisk bildning men samtidigt skulle fostra eleven till att inte väja för ansträngning.

> Studiet av latin och grekiska uppfattades som en väg för att ge goda vanor, att lära arbetsamhet och uthållighet, träna argumenta-tionsteknik och minne
>
> (Lundgren, 1979, sidan 38 – 39)

Bland liberaler och socialister kom målet så småningom att bli inriktat på en gemensam enhetsskola. Dessa grupper betraktade ofta kyrkans negativa hållning till förändringar av skolsystemet som ett försök att hålla de breda massorna kvar på samhällets botten. Symptomatisk för den tidens debatt är Adolf Hedins skrift från 1883 med den talande titeln *Om latinherraväldet*.

I och med pragmatismens genombrott i början av 1900-talet ifrågasattes också matematikens formalbildande effekt. Enligt pragmatismens bärande idé är ett påståendes mening detsamma som dess praktiska konsekvenser. Det är alltså enbart det som fungerar i praktiken som är väsentligt. Behavioristen Thorndike försökte i början av 1900-talet med sina inlärningspsykologiska experiment vederlägga teorin om nyttan med de formella disciplinerna i skolan. Enligt Thorndike innebar varje enskild ny kunskap att det bildades en självständig associationskedja hos individen. Varje ny kunskapsinhämtning skulle därmed vara oberoende och isolerad från äldre kunskap och den tidigare kunskapen därmed utan nytta för individen (*The fundamentals of learning*, Thorndike, 1932). Mot detta invände Vygotsky:

> Våra undersökningar visade att den intellektuella utvecklingen hos barnet varken bestäms eller fullbordas i enlighet med något ämnessystem. Det går inte till så att aritmetiken isolerat och oavhängigt utvecklar vissa funktioner och skriftspråket andra. Skilda ämnen visar sig ofta ha en psykologisk grundval som till vissa delar är gemensam. Medvetandegörandet och förmågan att lära sig spelar en lika viktig roll när det gäller inlärningen av grammatik som av skriftspråk. Vi möter dem också vid inlärningen av aritmetik och de kommer även att stå i centrum för vår uppmärksamhet vid en analys av vetenskapliga begrepp. Barnets abstrakta tänkande utvecklas på alla lektioner, och dess utveckling faller inte alls isär i olika fåror som motsvarar de ämnen som skolundervisningen uppdelas i.
>
> (Vygotsky, 1934, sidan 327)

Vygotsky betraktar alltså den intellektuella utvecklingen som åtminstone delvis ämnesoberoende där struktureringen av en typ av information kan generaliseras och ge effekter på andra områden. Detta har på senare tid inspirerat forskare till att studera s.k. metakognition (se vidare avsnitt 3.3).

2.6 MATEMATIK FÖR ATT KLARA VARDAGEN

Enligt Niss (1996) var huvudskälet för matematik från medeltiden och fram till början av 1800-talet främst att bevara det politiska, ideologiska och kulturella arvet från tidigare generationer. Successivt blir dock nyttoargumentet för att skapa förutsättningar för socio-ekonomisk utveckling i samhället allt viktigare. Utbildningsrevolutionen under 1800-talet, när de breda folklagren plötsligt skulle ges undervisning i matematik, är som nämnts nära kopplad till industrialiseringen och den växande handeln länderna emellan. Denna matematik är dock i stora stycken väsensskild från den matematik som undervisats på universiteten. Den ekonomiskt inriktade matematiken syftade ofta till att utbilda ”mänskliga kalkylatorer” för kommersiella ändamål medan den akademiska matematiken hade helt andra mål.

I det tidiga 1800-talet var kopplingen mellan å ena sidan den postelementära teoretiska matematiken och å andra sidan den handelsinriktade matematiken fortfarande väldigt svag. På universiteten krävdes studier i matematik av alla, oavsett inriktning. Anledningen till detta grundades enligt Niss i två antaganden:

i) att matematisk träning främjade utvecklingen av mental disciplin och kapacitet.

ii) att matematik som en ren och tillämpad vetenskap representerade en unik och överlägsen mänsklig prestation med vilken utbildade borde vara bekanta.

Inspirerad av pragmatismens idéer formulerar John Dewey slagordet ”learning by doing”. Dewey kom, enligt Sandström (1995), att ha stort inflytande på västerländska utbildningar under 1900-talet. Fokus kom därmed att förflyttas bort från matematikens estetiska, bildande och personlighetsdanande värden mot den praktiska matematik individen ansågs ha nytta av i vardagen.

I Niss genomgång av kursplaner i matematik från 1900-talet kan man se att synen på matematikämnets förmåga att skärpa elevens intellekt varierat genom åren. Under vissa tider har just matematikens karaktärsdanande egenskaper framhållits som viktigast medan det under andra tider främst varit ämnets praktiska och vardagliga nytta som lyfts fram som det väsentliga. Niss argumenterar bl.a. för att satsningen på den ”nya matematiken” i början på 1960-talet i viss mån grundade sig på ett förmodat framtida behov av samhällsmedborgare med större intellektuell kapacitet; högre abstraktionsförmåga, mer precis användning av språket, större förmåga till logiskt och analytiskt tänkande etc.

> Such abilities were considered significant not only as regards to the formation of personality, but also in relation to the flexible maintenance of jobs, the conditions and nature of which were seen as changing more rapidly than ever before. Thus, *understanding* was emphasized as the predominant goal of mathematics teaching at all levels, from kindergarten to university.
>
> (Niss, 1996, sid 31)

I boken *Problemlösning som metafor och praktik* (Wyndham et al, 2000) granskas hur matematikämnet behandlas och hur det beskrivs i olika moderna svenska styrdokument. Man noterar att begreppet *problemlösning* i dessa dokument numera fått en speciell position. Författarna menar att modernismen med rötter i den europeiska upplysningen under de senaste decennierna ersatts av ett postmodernistiskt tillstånd. Med modernism avses här den positiva framtidstro som föddes under 1700-talet, där vetenskap och rationell kunskap ansågs utveckla och förbättra samhället och människans villkor. Modernismens motiv för kunskap var i första hand folkupplysning med ”mänsklighetens frihet” som mål och i andra hand kunskap som ett mål i sig med ”anden” som huvudperson. I det postmoderna samhället däremot är inte dessa argument längre giltiga för att motivera kunskap. I stället ser man kunskap som något som primärt ska vara rationellt funktionell och i denna mening nyttig.

I en artikel från 1986, *Mathematics as a school subject*, diskuterar Dörfler och McLone dilemmat för läraren när målen med skolmatematiken inte kan motiveras med en direkt nytta.

> The dilemma for mathematical educators in considering the place of mathematics in the school curriculum can be described thus. On the one hand, the increased technological demands of society and the development of science require highly trained mathematicians who can apply themselves to a variety of problems /…/ on the other hand the basic mathematical requirement for employment is unlikely to grow beyond general arithmetic skill (often with aid of calculator) and the interpretation of charts, tables, graphs etc.; indeed, not much beyond the needs of everyday life /…/
>
> (Dörfler & McLone, 1986, sid 57)

Författarna konstaterar också att innehållet i kursplanerna i matematik skiljer sig oerhört lite åt mellan olika länder och att dessa planer förändrats minimalt över tiden. Den ”nya matematiken” har lämnat få spår i 1980-talets kursplaner. De anar dock en trend där geometrin tappar mark till förmån för statistik och sannolikhetsteori, och tror att detta kan hänga ihop med datorns genombrott. De varnar för en utveckling där matematiken tappar kontakten med sina geometriska rötter och de efterlyser mer empirisk forskning kring frågan om vilken effekt matematikstudier har på de studerande.

Utöver de två huvudsakliga argumenten för matematik i skolan – nyttoargumentet och det formalbildande argumentet – noterar författarna att matematik har en särställning i skolan som urvalsinstrument.

> Mathematics is one of many subjects but it nevertheless is in a unique position, because of its highly differentiating effect. There are the talented students and the under-achievers, there is the necessity for remedial teaching, there are minimal competencies and many other features which demonstrate the quite peculiar position of the subject mathematics at school. Mathematics is therefore a tool for selection,

> possibly to a greater extent than other subjects; a role that is tacitly accepted by many teachers, students and also parents. Success in mathematics is widely considered to be a proof of intellectual ability and lack of success is interpreted accordingly as lack of the abilities necessary not only for good achievement in mathematics but also in other fields. This view is widely held even though there is also the conviction that the actual content to be learned in mathematics is of rather minor importance for later activities either at work or in private life.
>
> (Dörfler & McLone, 1986, sid 71)

Romberg har i en artikel från 1992, *Problematic features of School Mathematics Curriculum*, redovisat argumenten för matematikämnets berättigande. Han menar att ämnet främst motiveras med att det fyller ett långsiktigt funktionellt behov för individen och samhället; matematikstudierna ska ge eleven förutsättningarna för att bli en produktiv samhällsmedborgare. Vid sidan av detta huvudsakliga motiv anger Romberg ytterligare fem: i) det förbättrar den generella tankeförmågan, ii) det ställer krav på nyttig ansträngning, iii) det skänker individen en upplevelse av matematikens skönhet, iv) det producerar matematiker åt samhället samt v) det ger förståelse för matematikens bidrag till västerlandets demokratiska kultur. Romberg menar att dessa argument var för sig inte räcker för att motivera matematikämnets ställning, men att de sammantaget gör det klart att matematik är ett viktigt skolämne.

Romberg menar dock att även om man ser matematiken som nyttig måste man fråga sig hur mycket matematikstudier som behövs för alla i samhället.

> Although there is no doubt that many occupations depend on mathematical training, it is also true that those who finally apply a relatively sophisticated mathematics will be a small minority among those who will apply mathematics at all.
>
> (Romberg, 1992, sid 756)

I avhandlingen *Varför undervisning i matematik?* har Maria Bjerneby Häll (2002) undersökt argumenten för matematik i dagens skola hos blivande högstadielärare. I sin analys av lärarstudenternas svar har hon identifierat tio återkommande huvudargument för matematik:

- För att klara det vardagliga livet – idag och som vuxen
- Med tanke på utbildning och yrke i en framtid
- För att kunna ta tillvara dina egna intressen
- Med tanke på samhällets behov och krav

- För att utveckla tänkandet
- Det är roligt och stärker självförtroendet
- Det behövs för många andra skolämnen
- Det tillhör allmänbildningen
- Det är ett viktigt kunskapsområde
- Det kommer på provet

(Bjerneby Häll, 2002, sid 136 ff)

Av dessa tio argument är det de tre första, att klara vardag och yrkesliv samt att ta tillvara sina egna intressen, de som är mest frekvent förekommande hos lärarkandidaterna i undersökningen. Med andra ord är det nyttoargument för individ och för samhälle som dominerar, medan det socio-kulturella argumentet hamnar i kulissen. I rapportens diskussionsdel betonar författaren att synen på vad som är nyttig kunskap inte är konsistent utan varierar från individ till individ.

> Samtidigt som de funktionella motiven dominerar starkt i undersökningens resultat representeras 'nyttoargumentet' för olika lärarstudenter av skilda innehåll och förmågor. Vad som betraktas som nyttig, användbar matematikkunskap och för vilka elever denna kunskap är nyttig varierar således.

(Bjerneby Häll, 2002, sid 136 ff)

Vilka argument för då matematiklärare fram under sina första år i yrket? Bjerneby Häll har i sin avhandling från 2006: *Allt har förändrats och allt är sig likt: En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning* fortsatt följa lärarstudenterna ut i arbetslivet för att se om, och i så fall hur, deras argument förändras som yrkesverksamma lärare. Hon finner att för de som undervisar i den senare delen av grundskolan blir de nationella proven i årskurs nio väldigt styrande. De nyblivna lärarnas huvudsakliga mål blir att försöka hinna förbereda sina elever så väl som möjligt för dessa prov. Trots att de under sin lärarutbildning har en bred repertoar av argument för matematik blir nu ”det kommer på provet” det som i praktiken kommer att användas flitigast.

Ragnhild Swahn menar i sin avhandling *Gymnasieelevers inflytande i centrala undervisningsfrågor* (2006) att målen i matematik främst motiveras av skolan med att ge behörighet till fortsatta studier på högskola och universitet. De elever som redan under gymnasietiden vet att de ska studera vidare kan stimuleras av detta, medan den grupp som inte ser en sådan framtid istället ofta upplever matematikstudierna som ett tråkigt obligatorium utan något värde.

Samtidigt hävdar didaktiker som t.ex. dansken Per Fibæk Laursen att man i allmänhet övervärderar skolans möjlighet att ge direkt tillämpbara kunskaper i arbetslivet.

> Vetande, kunskap och färdigheter är situationsbetingade, vilket betyder att de är knutna till ett bestämt sammanhang. Det man lär sig i skolan, bär skolans prägel. Skolans särskilda uppgift och möjlighet består i att ge elever en grundläggande förståelse av symboler och av relationer mellan symboler. Förståelse och användande av nedskrivna symboler kan svårligen läras utan undervisning.
>
> (Fibæk Laursen, 2005, sid 54 – 55)

Skolans uppgift anser han alltså främst vara att förse eleverna med bildning i ett symbolspråk som både krävs för att förstå äldre generationer och ge förutsättning för intellektuell utveckling.

2.7 Samhällets officiella syn på matematik i skolan

Lars Mouwitz, Göran Emanuelsson och Bengt Johansson skriver i *Baskunnande i matematik* (2003) att matematik är ett av skolans viktigaste och mest mångfasetterade ämnen. Misslyckade studier i matematik menar de leder till stängda utbildningsvägar, sämre möjlighet till kompetensutveckling och reell demokrati. Just att ge eleverna demokratisk kompetens lyfts av författarna fram som ämnets kanske viktigaste uppgift. De hävdar att i matematisk problemlösning tränas eleverna att strukturera sitt tänkande och lära sig argumentera för sina idéer och att de i gruppdiskussioner får träning i demokrati och erfarenhet av ”det förnuftiga samtalets möjlighet”.

Denna retorik verkar ha imponerat på politiker och beslutfattare. Det finns idag generellt en stark tilltro till att baskunskaper i matematik är viktigt för såväl individens som landets framtid. Att så är fallet märks också i den satsning från statsmakternas sida som görs i grundskolan för att få alla elever godkända i matematik, men även i läroplanen för gymnasieskolan från 1994 där matematik definieras som ett kärnämne, och därmed alla utbildningsprogram måste omfatta åtminstone A-kursen i matematik.

Vidare märks det i den satsning på kompetensutvecklingsprogram i matematik och matematikdidaktik för lärare som NCM, *Nationellt centrum för matematikutbildning*, gjort för utbildningsdepartementet och som redovisas i boken med den talande titeln *Hög tid för matematik* (NCM, 2001). Regeringen tillsatte också under 2003 en särskild matematikdelegation som kom med sitt betänkande under 2004 (*Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*, SOU 2004:97). Utredningen innehåller flera förslag på hur matematikämnet och matematikundervisningen kan stärkas rakt igenom hela utbildningssystemet.

Parallellt pågår en debatt om skolans egentliga uppgift. Är de icke godkända eleverna samhällets eller individernas misslyckande? I debattskriften *Skolan – ett svenskt högriskprojekt* (red: Enkvist, 2003) hävdas att svenska elever inte når kunskapsmålen trots att mycket stora personella och ekonomiska resurser satsas på skolan. Man ifrågasätter om inte Sverige i omsorgens och likhetens namn infört förändringar som gett motsatt effekt. I boken vänder sig Ulf Persson, professor i matematik vid Chalmers Tekniska Högskola, mot att matematikämnet måste ges praktisk vardagsanknytning. Det är istället de ”onaturliga” kunskaper som eleven inte kan få i vardagen som är skolans främsta uppgift att bibringa eleven, resonerar han.

> Konsten att räkna är en intellektuell färdighet och förstår man hur man skall göra, kan man själv ta reda på hur saker och ting förhåller sig. Den som kan räkna är med andra ord mindre beroende av yttre auktoriteter. Denna intellektuella kontroll utövas visserligen inom ett snävt område, men man ska ändå inte underskatta dess betydelse för ett barns intellektuella utveckling. Det är en källa till intellektuellt självförtroende som utgör ett stöd för eleven i hans eller hennes framtida utveckling och som sådan går den långt utöver den marginellt praktiska fördel som räknefärdighet i sig själv innebär.
>
> (Persson, 2003, sid 70)

Kritik har också riktats mot gymnasieskolan för de svårigheter som uppstått med att på ett rättvist sätt rangordna de sökande till högskolan. Med målrelaterade betyg, som dessutom i efterhand kan läsas upp med kompletteringar, hamnar i vissa fall samtliga antagna på högsta möjliga betygsmedelvärde (20,0). Detta gör att äldre kullar med ungdomar, som haft tid att komplettera sina betyg, slår ut de som kommer direkt från gymnasiet, vilket i sin tur leder till att dessa nya kullar ”i onödan” tvingas läsa upp sina betyg. Konsekvensen blir att genomströmningshastigheten i utbildningssystemet minskar. Vidare kan gymnasister idag planera sina kurser så att de istället för att läsa svåra kurser i t.ex. matematik och språk väljer andra, enklare kurser och därmed lättare når höga betyg.

Ensamutredaren, Lars Lustig, skriver i betänkandet *Tre vägar till den öppna högskolan*:

> /…/ett målrelaterat betygssystem lämpar sig inte särskilt väl för rangordnande ändamål. /…/ Den frågeställning jag brottats med är därför denna: hur kunna rädda kvar gymnasiebetygen vid antagningen till högskolan mot bakgrund av deras brister som rättssäkert och tillförlitligt urvalsinstrument?

(SOU 2004:29, sidan 20)

Som lösning föreslår Lustig ett system där man inte ska kunna läsa upp betyg, med undantag för betyget ”icke godkänd”. Vidare ska vid beräkningen av betygsmedelvärden vissa ämnen ges en större vikt än andra. Vilka ämnen som ska tilldelas ökad betydelse ska dock variera med utbildningens inriktning.

En personlig reflektion är att denna förändring i antagningsregler innebär att det från samhällets sida inte i första hand är kunskapernas *innehåll* som ses som det viktiga, utan istället genomströmningshastigheten och individens förmåga att på begränsad tid klara svåra teoretiska kurser och nå höga betyg. Ansåg man att det väsentliga var kursinnehållet skulle ju de med de högsta betygen – oavsett om de skaffat sig dessa kunskaper på kort eller lång tid – vara de som gavs bäst ranking i systemet.

Matematikämnets vikt lyfts också fram i flera andra sammanhang. I den av närings- och utbildningsdepartementet gemensamt utgivna rapporten *Innovativa Sverige. En strategi för tillväxt genom förnyelse* (Ds 2004:36) beskrivs vilka åtgärder som krävs för att säkerställa att svensk utbildning och forskning framgent ska hålla världsklass. I denna rapport är det endast *ett* specifikt skolämne som lyfts fram, nämligen matematik. I rapporten anges att det behövs insatser för att främja goda kunskaper i matematik och intresse för naturvetenskapliga och tekniska utbildningar. Man betonar i rapporten att:

> Intresset för matematik bör stimuleras i hela utbildningssystemet, från förskolan till högskolan, och matematikundervisningen utvecklas så att dess praktiska betydelse i arbets- och vardagslivet tydliggörs.

(Departementsskrifter, 2004, sid 18)

Trots en god arbetsmarknad visar dagens studenter generellt ett minskat intresse för ingenjörsutbildningar, något som representanter för svenskt näringsliv framhåller som bekymmersamt (Högskoleverket, 2003). Parallellt med detta går debattens vågor höga om huruvida de studenter som antagits till universitet och högskolor på senare år saknar de grundläggande kunskaper i matematik som behövs för att de ska kunna tillgodogöra sig innehållet i kurserna. Många högskolor som utbildar högskoleingenjörer har samtidigt sänkt behörighetskraven i matematik för att bredda rekryteringsbasen och på så sätt kunna fylla sina utbildningsplatser. Istället för att kräva gymnasiekursen Matematik D ställs endast krav på C-kursen. Högskoleverket (2003) välkomnar i sin utvärdering av ingenjörsutbildningar utvecklingen där fler kan söka till programmen, men betonar samtidigt vikten av att upprätthålla kvaliteten och se till att alla studenter får tillräckliga kunskaper i matematik.

> Flera lärosäten har ökat sina möjligheter att rekrytera studenter till ingenjörsutbildningarna genom att förändra förkunskapskraven och anta elever från gymnasiets samhällsvetarprogram med förkunskaper motsvarande matematik C. Idén är i sig mycket god, men Högskoleverket vill betona att det är viktigt att se till att dessa studenter får tillräckliga kunskaper i matematik, fysik och kemi för att kunna tillgodogöra sig ingenjörsutbildningens teknikinnehåll.
>
> (Högskoleverket, 2003, sid 12)

I den landsomfattande utvärdering av ingenjörsutbildningar som startade på Högskoleverkets initiativ 2001 konstateras att flera lärosäten inte har tillräckligt mycket matematik i sina kursplaner för att de ska tillåtas kalla sina utexaminerade studenter för ingenjörer. Om inte åtgärder vidtas kommer dessa lärosäten att tappa examensrätten för högskoleingenjörer. Bedömargruppen skriver i sin slutrapport angående ämnet matematik bl.a. att:

> Studenternas kunskaper i analys från gymnasiets kurs D måste befästas och fördjupas. Räknefärdigheten och begreppsförståelsen måste förbättras. Derivator och integraler skall beräknas och kunna tolkas och användas i tekniska sammanhang. Att förstå meningen med differentialekvationer och innebörden av deras lösning är andra viktiga färdigheter för en ingenjör.
>
> (Högskoleverket, 2003, sid 124)

Bedömargruppen framhäver ingenjörens faktiska och direkta behov av goda matematikkunskaper, men är också inne på att ämnet har positiva bieffekter:

> En bieffekt av matematikstudier är den ständigt återkommande träningen i förmågan att utifrån givna förutsättningar med hjälp av logiska

> resonemang dra korrekta slutsatser. Den förbättring av denna förmåga som matematikstudier ger är en underskattad bieffekt som blivande ingenjörer, utan att vara medvetna om det, använder i alla möjliga andra sammanhang.
>
> (Högskoleverket, 2003, sid 125)

Övertygelsen om att matematik är ett viktigt ämne finns dock inte bara hos de som arbetar med och granskar ingenjörsutbildningar. Ett exempel på detta finns i en debattartikel i Göteborgs-Posten 2004-05-03. Här anför utbildningsansvariga för både LO och Svenskt näringsliv att man i debatten glömt bort eleverna på de yrkesinriktade gymnasieprogrammen. Man skriver att de lärare med traditionell akademisk utbildning som idag undervisar på dessa program inte fullt ut förmår att ge eleverna en god utbildning. Man önskar därför utbilda matematiklärare som i större utsträckning har förmåga att bygga vidare på en äldre tradition av ”yrkesmatematik”. I artikeln skrivs vidare:

> Vi menar att det borde ställas andra krav, inte mindre men mer realistiska och funktionella krav, på eleverna i de yrkesförberedande programmen. Den som inte förstår innebörden i de metoder som använts eller de beräkningar som utförs kommer att få problem när det inom yrket utvecklas nya metoder som en följd av ny teknologi och nya material.
>
> (Göteborgs-Posten, 2004-05-03)

Från skilda representanter för samhället finns alltså tydligt artikulerat behovet av god utbildning i matematik. Få verkar anse att ämnet är överflödigt och även i rena yrkesutbildningar hävdas behovet av adekvat matematikundervisning.

2.8 Sammanfattning och diskussion

Varför finns matematik på schemat i dagens skola? Den översikt jag gjort ger vid handen att argumenten för matematik skiftat genom utbildningshistorien. I takt med att hela utbildningsväsendet förändrats i pragmatisk riktning, från att fostra moraliskt högtstående och klassiskt bildade personer till att ge eleven nyttiga kunskaper, så har också försvaret för matematikämnet förändrats. Idag motiveras matematikämnets status inte längre med att det är en väg till Gud, utan främst med att det anses ge nyttig och tillämpbar kunskap. Det är intressant att konstatera att medan exempelvis latinets ställning i utbildningssystemet undergrävts och raserats de senaste 150 åren så har matematikämnets ställning bestått och snarast förstärkts.

Kunskapen i matematik anses i vårt samhälle både nyttig i vardagslivet, för att individen ska kunna hävda sin rätt i ett demokratiskt samhälle, men också nyttig i samhällsutvecklingen och en förutsättning för att individen ska vara attraktiv på arbetsmarknaden (Mouwitz et al, 2003). Om man hårdgranskar dessa argument är det dock tveksamt om de håller, vilket såväl Dörfler & McLone (1986) som Romberg (1992) är inne på. Det är svårt att motivera matematikkunskaper, utöver de allra mest basala, med dess omedelbara nytta (se även Fibæk Laursen, 2005). Hur ”nyttig” är exempelvis kunskapen i algebra? Hur många gånger behöver man som privatperson eller arbetstagare – utanför skolans domän – någonsin ställa upp en ekvation? Detta till trots utgör algebran en icke oväsentlig del av kursplanen i matematik för den obligatoriska grundskolans högstadium.

Demokratiargumentet (se t.ex. Mouwitz et al), att matematik är en förutsättning för att kunna verka i ett demokratiskt samhälle, verkar också grumligt. Måste man verkligen i det rättssamhälle där vi lever kunna räkna för att räknas? Om matematikämnet så direkt var knutet till just demokratibegreppet, varför har det då existerat och varit viktigt i länder med andra styrelseskick som exempelvis det nazistiska Tyskland eller det kommunistiska Kina? Det har undervisats i matematik i alla typer av samhällen oavsett om samhällsordningen varit kapitalistisk eller kommunistisk och helt oavsett om styrelseskicket varit diktatur, meritokrati eller demokrati. I alla samhällen där det finns kunskap i matematik pågår det också undervisning i ämnet.

Så varför är då matematik ett viktigt ämne om nu majoriteten av befolkningen inte har någon direkt nytta av det i vardagen? Det svar Niss refererar (1996) – eftersom det funnits med i alla tider och finns i alla länder, så fyller det förmodligen någon funktion – är ett sätt att kringgå frågan. Hur motiverar vi dagens ungdomar att studera matematik? Forskning av såväl Bjärneby-Häll (2006) som Swahn (2006) visar att vi motiverar matematiken främst med att den är nödvändig för fortsatta studier. På grundskolan behövs den för att vi senare ska klara gymnasiet och på gymnasiet behövs den för att vi ska klara av högskolan. Matematikern Reuben Hersh går i sin bok *What is mathematics, really?* (1997) så långt att han besvarar frågan i titeln om vad matematik egentligen är med att ”matematik det är det som vi lär oss i skolan”. Punkt slut.

Matematik är alltså en del av vår utbildningskultur och bör därför behärskas. När vi ska kommunicera med andra i vårt samhälle förutsätts en viss grundnivå av kunskaper i olika ämnen; kunskaper som alla förutsätts ha. Lika gärna som vi ska ha vissa faktakunskaper i geografi, historia och biologi så ska vi också känna till vissa matematiska begrepp. Matematiken är en del av vår kultur och därför ska vi tillägna oss dess språk och dess symboler så vi har gemensamma referenspunkter i en diskussion med andra.

En kultur kan inte förändras över en natt. Att försöken med att införa den nya matematiken i Lgy 65 och Lgr 69 misslyckades, kan delvis hänga samman med att lärare och föräldrar svårligen kunde acceptera ett skifte av referenspunkter för vad som är nyttig matematisk kunskap. Att vetenskapliga auktoriteter som Bruner (f. 1915) hävdade det rättmätiga i en omdaning hjälpte föga. Traditionens makt är stark och kursplanerna i matematik har, åtminstone beträffande innehåll i grundskolan, i princip varit skrivna i sten sedan dess.

Är då kunskap i matematik väsenslik kunskaper i faktaämnen? Enligt Persson (2003) ger matematikkunskaper oss ett intellektuellt verktyg som gör det möjligt att kontrollera hur saker och ting förhåller sig. Han anser att denna transparents i kunskapsbygget är betydelsefull för barnets intellektuella utveckling. Vi är därmed framme vid ytterligare ett ofta använt argument för matematik i skolan: Träning i matematik utvecklar den intellektuella förmågan. Är detta sant eller en efterhandskonstruktion? Den historiska översikten visar att meningarna tydligt gått isär här. På ena sidan finns bl.a. Platon, Herder samt Vygotsky som anser att studier i matematik formar intellektet och på den andra sidan bl.a. Herbart och Thorndike som anser att så inte är fallet. Moderna pedagoger verkar inte riktigt våga ta ställning – det saknas helt enkelt evidens. Enligt Linde (2003) bär dock de svenska kursplanerna i matematik ändå vissa spår av denna uppfattning.

Lundgren (1979) skriver att man i skolan inte bara får lära sig matematik utan också att denna matematiska kunskap betingar ett högt värde. Matematikkunskaper har helt enkelt en hög status i vårt samhälle. Detta märks inte minst i den officiella retoriken från politiker och makthavare där det ständigt betonas hur viktigt ämnet är. En orsak till detta kan vara matematikämnets starkt differentierande effekt, vilket gör det till ett verktyg som kan användas för selektion (Dörfler & McLone, 1986). För att studera matematik med framgång krävs noggrannhet och disciplin. Enligt mitt sätt att se det är matematikstudier i huvudsak en kumulativ process där ett resultat bygger på ett annat och där det krävs verklig förståelse på en nivå innan man kan nå nästa. Denna förståelse kan man knappast fuska sig till, utan den kräver arbete och reflektion.

Matematikämnet bör därmed kunna nyttjas av samhället som indikator på studieförmåga.

Sammanfattningsvis är det möjligt att urskilja två huvudtyper av argument för matematik i grundskolan:

i. *Nyttoargumentet.* För att kunna klara sig i det moderna samhället behövs kunskaper i matematik. Individer med dessa kunskaper ger i sin tur samhället förutsättningar för att utvecklas vidare. Genom att lära sig matematik får individen tillgång till ett internationellt standardiserat vetenskapligt språk och ges förutsättningar för att fatta rationella och välgrundade beslut. Matematik är sin abstrakta form till trots ett mycket användbart verktyg för att göra olika analyser och prognoser. Detta är attraktiva kunskaper för både individ och samhälle.

ii. *Bildningsargumentet.* När vi ska kommunicera med andra i vårt samhälle förutsätts en viss grundnivå av kunskaper i olika ämnen; kunskaper som alla förutsätts ha. Lika gärna som vi ska ha vissa faktakunskaper i geografi, historia och biologi så ska vi också känna till vissa matematiska begrepp. Matematiken är helt enkelt en del av vår kultur och därför ska vi tillägna oss dess språk och dess symboler så vi har gemensamma referenspunkter i en diskussion med andra.

Utöver dessa två direkta argument för matematik kan man i debatten ana åtminstone två indirekta:

iii. *Formalbildningsargumentet.* Studier i matematik skolar intellektet. På samma sätt som gymnastik tränar kroppen tränar problemlösning i matematik upp tankeförmågan.

iv. *Selektionsargumentet.* Matematikämnet har selektiva egenskaper i den meningen att olika individer lyckas bemästra det olika väl. Detta gör att samhället kan använda det som urvalsinstrument till vidare studier. Även om studier i matematik inte skulle stärka tankeförmågan så utgör ändå ämnet ett område där individens intellektuella kapacitet kan *bedömas*. För att studera matematik med framgång krävs noggrannhet och disciplin, egenskaper som är efterfrågade av många arbetsgivare och utbildningsanordnare.

De två sistnämnda argumenten är indirekta i den meningen att de är curriculumoberoende avseende ämnesinnehåll. Här tillskrivs inte matematikkunskaperna i sig ett egenvärde, utan matematikämnet ges istället betydelse genom att det utgör en arena där individens intellektuella kapacitet kan utvecklas och/eller testas.

Om minst ett av de två sista argumenten ovan håller så borde följa att elever som når höga betyg i matematik också i hög grad når goda studieresultat i andra ämnen. I föreliggande avhandling kommer detta att undersökas empiriskt med statistiska metoder. Är de så att de som klarar sig bra i skolmatematiken också når framgång i andra skolämnen?

3. MATEMATIKLÄRANDE OCH BEDÖMNING AV FÖRSTÅELSE

I detta avsnitt presenteras först pedagogiska och psykologiska teorier kring hur lärande och begreppsbildning i matematik går till, med ett särskilt fokus på konstruktivistiska modeller. Enligt de pedagoger som företräder konstruktivismen finns ingen kunskap oberoende av subjektet, utan kunskap är något som förutsätter en aktiv konstruktion av individen. Att betona just det konstruktivistiska perspektivet på lärande känns naturligt eftersom det idag är det som präglar det mesta av undervisning och styrdokument i svensk skolan (se t.ex. Riis, 2000). Det konstruktivistiska sättet att betrakta lärande har också inspirerat flera matematikdidaktiker.

I detta kapitel avhandlas också vad tidigare forskning visat om sambandet mellan lärande i matematik och lärande i allmänhet. Här jämförs olika metoder för att bedöma graden av matematisk förståelse samt olika mätinstruments förmåga att predicera studieframgång. Särskilt granskas de mätproblem som finns med betyg, eftersom detta är det instrument som kommer att användas i denna uppsats.

3.1 BEGREPPSBILDNING I MATEMATIK

En av konstruktivismens förgrundsgestalter är Jean Piaget (1896 – 1980). Enligt Piaget sker människans kognitiva utveckling genom hennes fysiska manipulation av omvärlden. Tänkandet, som av Piaget betraktas som interioriserad handling, frigörs successivt från själva handlingsprocessen. Därmed utvecklas individens förmåga till att föra logiska resonemang och dra slutsatser. Genom att lära sig resonera logiskt får individen en rationell förståelse för sin omvärld (Piaget, 1965, 1971).

Pedagogen Lev Vygotsky (1896 – 1934) vänder sig mot den strikta uppdelning i åldersstadier som Piaget beskriver. Det centrala är enligt Vygotsky istället den kultur som individen vistas i. Vygotskys intresse fokuseras huvudsakligen på individens språkutveckling och på hur individens begreppsbildning påverkar hennes förmåga att tänka (Vygotsky, 1934). I dagsläget, när lärarens och samarbetsklimatets betydelse för lyckade skolresultat alltmer betonas, menar många att forskningsutvecklingen ligger mer i linje med Vygotskys än med Piagets tänkande (se t.ex. Arfwedson, 1994).

Begreppsbildningsprocessen ses av Vygotsky som en komplicerad akt av generalisering. Den sker i mötet mellan den kunskap barnet redan har i sina spontana begrepp, och den kunskap barnet möter i skolan i form av vetenskapliga begrepp. Den pedagogiska konsekvensen blir att en teoretisk undervisning som enbart utgår från de vetenskapliga begreppen i praktiken blir ofruktbar.

> Den lärare som försöker gå denna väg uppnår vanligen inget annat än ett tomt inlärande av ord, en naken verbalism som simulerar och imiterar en närvaro av dessa begrepp hos barnet men i själva verket bara döljer tomhet. Barnet tillägnar sig i detta fall inte begrepp utan ord, det använder sig mer av minnet än av tänkandet och visar sig osäkert inför varje försök att på ett medvetet sätt använda sig av sin kunskap.
>
> (Vygotsky, 1934, sid 256)

Enligt Vygotsky kräver en genuin begreppsbildning att de spontana och vetenskapliga begreppen kopplas samman. Han illustrerar denna utveckling med ett experiment som visar hur aritmetisk kunskap övergår i algebraisk kunskap. Vid övergång från en nivå till en annan kan man iaktta ett kognitivt språng och en kraftig omstrukturering av begreppets relation till objektet och en förändring av relationerna mellan olika begrepp. I exemplet som återges nedan, där förbegreppet är aritmetik och det nya begreppet är algebra, skriver han:

> Förbegreppet är en talabstraktion av ett föremål och en på denna grundad generalisering av föremålets numeriska egenskaper. Begreppet är en abstraktion av ett tal och en på denna grundad generalisering av alla möjliga talrelationer. /…/ Jämfört med den generalisering av föremålens numeriska egenskaper som förekommer i de aritmetiska begreppen är en generalisering av egna aritmetiska operationer och tankar något högre och nytt. Men det nya begreppet och den nya generaliseringen kan bara uppstå på grundval av de föregående.
>
> (Vygotsky, 1934, sid 369)

Flera pedagoger verksamma inom den matematiska domänen har inspirerats av den kognitiva pedagogikens grundidéer; att kunskap inte enkelt kan ackumuleras, utan aktivt byggs upp inom människan genom en förening och sammansmältning av nya och gamla erfarenheter; att kunskap inte existerar färdig och klar att hämta in, utan att den bara nås genom ett aktivt byggande. Detta ställningstagande är inte oproblematiskt för alla matematiker, eftersom det på ett kunskapsteoretiskt plan strider mot Platons syn på matematiken som en idévärld existerande oberoende av människan.

De holländska matematiklärarna Pierre van Hiele och Dina van Hiele-Geldof inspirerades under 1950-talet av den framväxande gestaltpsykologin och Piagets idéer om hur kunskap konstrueras. De utvecklade en hierarkisk modell för detta helt grundad på matematisk geometri (Van Hiele, 1959).

I geometrin startar kunskapsbygget med gestalter som räta linjer, trianglar, rektanglar och kvadrater. Individen lär sig identifiera dessa former genom deras visuella likheter och olikheter. Genom interaktion med andra lär sig sedan individen att isolera några av figurernas egenskaper; t.ex. ”en rektangel har fyra sidor och fyra räta vinklar”, ”en kvadrat har fyra räta vinklar och fyra sidor som är lika långa”. Från dessa egenskaper byggs relationer genom deduktion ”om en figur är en kvadrat så är den också en rektangel”, ”om en triangel har två lika långa sidor så är också två av dess vinklar lika stora”. Definitionerna verbaliseras och distanseras från figuren och kan slutligen uttryckas på ett axiomatiskt sätt och därmed utgöra grundvalen för logisk deduktion.

Matematikern David Tall (1991) har byggt vidare på detta resonemang och menar att handlingen att räkna ”ett, två, tre,...” börjar med en enkel memorering av en ramsa, vilket så småningom övergår i en process och i nästa stadium leder till en konceptuell uppfattning om räknande. Handlingen *att räkna* övergår så småningom i begreppet *tal*. Genom diverse strategier där individen lär sig räkna elementen i två olika mängder utvecklas så småningom begreppet summa. Ofta benämns processen och begreppet med samma ord. Tall argumenterar för att framgångsrika matematiker förstår denna dualitet och klarar att hantera detta på ett flexibelt sätt.

> Our cognitive studies have shown the manifold differences between the formal definitions of concepts and the images we use in our minds to work with these concepts. They show how the complexity of the subjects demands a “chunking” of information in an efficient way so that it can be easily handled, and this is linked to the appropriate use of symbolism for a given context and the appropriate meaning which the individual links to that symbol.
>
> (Tall, 1991, sid 252)

Detta leder Tall till att slå ihop de engelska termerna ”process” och ”concept” i den nya termen ”procept” vilken han menar är central för lärandet i matematik.

Anna Sfard var redan tidigare inne på samma linje i en berömd artikel: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Här argumenterar hon för att processen är en bas och en förutsättning för att förstå objekten. Ett argument för detta anser hon vara sättet på vilket olika matematiska begrepp utvecklats. Hon urskiljer tre stadier som hon anser även kan återfinnas när en individ lär sig något:

> In the light of the same analysis, our model of learning can now be refined along similar lines: if the conjecture on operational origins of mathematical object is true, then first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into an autonomous entity should emerge, and finally the ability to see this new entity as an integrated, object-like whole must be acquired. We shall call these stages in concept development interiorization, condensation and reification.
>
> (Sfard, 1991, sid 18)

I första steget – interiorization (lånat från Piaget) – blir subjektet bekant med den process som eventuellt ska komma att utvecklas till ett begrepp. I det andra steget – condensation – trycks processen ihop så att den blir mer lätthanterlig och så att subjektet klarar att hantera den effektivare. I det tredje och sista steget inträffar det stora skiftet i kognitiv bemärkelse när subjektet plötsligt ser och klarar att hantera processen på ett helt nytt sätt; som en produkt istället för en process.

Både Tall och Sfard är starkt och uttalat influerade av Piaget och hans teorier om matematiskt tänkande (Piaget, 1971; Piaget 1973). Piaget menar att varje kunskapsstadium har en figurativ och en operativ aspekt, där den senare är det som leder vidare till en kognitiv utveckling. Barnets räknande stammar inte från objektens fysiska egenskaper utan från barnets *hantering* av objekten. Denna handling – räknandet – blir så småningom interioriserad. Detta resonemang verkar stämma väl med Tall och Sfards tal om matematiska objekt och processer som två sidor av samma mynt.

Sammanfattningsvis har två av 1900-talets främsta pedagogiska förgrundsgestalter, Piaget och Vygotsky, lånat många exempel från matematikområdet när de byggt upp sina teorier. Enligt Piaget skapar barnet genom sitt aktiva handlande en provisorisk modell av sin omvärld som i takt med nya erfarenheter ständigt måste omprövas ”ackommoderas”. Genom ackommodationen kan nya kunskapsstrukturer organiseras på högre kognitiva nivåer. Detta generella utvecklingsmönster går också igen när barnet lär sig behärska olika matematiska metoder.

Vygotsky accentuerar språkets betydelse betydligt mer än Piaget. Här är det begreppsbildningen som tack vare undervisningen skapar progressionen i den intellektuella utvecklingen.

Däremot ser inte heller Vygotsky lärandet som något domänspecifikt, utan anser att barnets förmåga till abstrakt tänkande utvecklas generellt, oavsett vilket ämne det tillämpas på. Om Piaget och Vygotskys teorier är riktiga talar alltså mycket för att en bedömning av en individs kognitiva förmåga på *ett* teoretiskt område, exempelvis på matematikområdet, också är giltig när man vill uppskatta hennes potential inom *andra* ämnesområden.

3.2 Språk, läsförståelse och matematik

I den moderna matematikdidaktiska litteraturen betonas språkets betydelse för begreppsbildning som oerhört central (Grauberg, 1998; Malmer 1999; Henderson & Miles 2001). Både skriftspråket och matematiken bygger på kommunikation i form av symboler. En elev med dyslexiproblem, som kastar om symbolerna/tecknen i ett ord eller ett tal, får problem både i ämnet svenska och i ämnet matematik. Enligt Lundberg & Sterner (2004) finns det forskning som visar att räkning och läsning utnyttjar samma minnessystem i långtidsminnet. Detta innebär att elever som har svårt att automatisera läsning också kan ha svårt att automatisera räkning.

Även om en grundskoleelev med lässvårigheter klarar den rena aritmetiken väl så kan benämnda tal ställa henne inför en mängd olika problem. Dessa kan ha att göra med att identifiera vad som är givet i uppgiften men även med att avgöra vad som efterfrågas. Ytterligare svårigheter kan uppstå om eleven vid genomläsningen missar småord som är väsentliga för sammanhanget. Flera forskare menar att det finns en liknande koppling mellan delar och helhet i språket som mellan delar och helhet i matematiken (Geary, 1993, 2000).

Möllehed (2001) har konstaterat att elever som misslyckas på denna typ av uppgifter ofta inte förstår själva innebörden i texten. Detta kan leda till att de väljer fel räknesätt. Eftersom eleverna inte förstår sammanhanget mellan de olika delarna i texten, väljs beräkningarna slumpmässigt och utan koppling till uppgiftens innehåll. Enligt studien berodde ungefär 60 procent av de fel eleverna gjorde på matematikuppgifterna på brister i kognitiv förmåga, 15 procent berodde på slarvfel och endast resterande 25 procent på brister i det rent matematiska kunnandet. Oförmågan att ta till sig texten i problemet var den vanligaste förklaringen till misslyckandena.

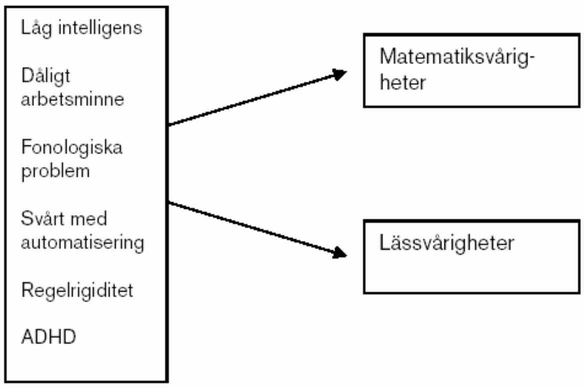
Lundberg (1984) för in begreppet ”schema”, lånat från Skemp (1978), där schema är en psykologisk term för att beskriva en mental struktur. Enligt teorin använder läsaren scheman på två sätt: i) för att gruppera och organisera lässtoffet och indikera när en episod är till ända och ii) för att försöka komma ihåg vad hon har läst. En aktiv läsning förutsätter en slags medvetenhet om de egna tankeprocesserna och den egna inlärningen. En sådan medvetenhet (jfr. metakognition) innebär att man kan värdera sin förståelse under läsningen så att man vet vad man förstår, men även vad man inte förstår. Lundberg redovisar undersökningar där elever med lässvårigheter ofta har en passiv hållning till texten. De försöker inte relatera det lästa till tidigare kunskaper, har svårt att utnyttja tillgänglig information och undviker att gå tillbaka i texten för att söka relevanta fakta.

Förmågan att avkoda text är dock som regel inte knuten till begåvning. Många studier visar att korrelationen mellan intelligens och ordavkodningsförmåga inte brukar vara högre än + 0,30. Detta innebär att endast omkring 9 procent av spridningen förklaras av en gemensam varians (Lundberg & Sterner, 2004).

I Pisa, *Programme for International Student Assesment*, har det gjorts undersökningar där målet är att bedöma i vilken utsträckning 15-åringar kan analysera, resonera och föra fram sina tankar och idéer på ett konstruktivt sätt samt om de har förutsättningar för att fortsätta lära sig under resten av sitt liv. I Pisa finns ett mycket starkt samband på individnivå mellan prestationer på matematikdelen och prestationer på ord- och läsförståelsedelen.

> När korrelationen mellan resultaten i läsning och matematik blir uppemot + 0,85 som i PISA, kan man undra om proven faktiskt mäter samma sak, nämligen läsförståelse. Matematikuppgifter som gör anspråk på att vara autentiska problemlösningssituationer bäddas tydligen in i en verbal informationsmassa som lässvaga får svårt att forcera. Därigenom hindras vissa elever från att visa sin verkliga matematiska kompetens.
>
> (Lundberg & Sterner, 2004, sid 6)

I samma artikel spekulerar författarna i om sambandet mellan elevers resultat i läsförståelse och matematik kan förklaras av olika gemensamt bakomliggande orsaker. De skulle alltså inte direkt behöva påverka varandra, utan endast vara konsekvenser av samma problem. Några förslag på sådana möjliga orsaker listas i figur 3.2.1.



FIGUR 3.2.1. Sambandet mellan läs- och matematiksvårigheter är indirekt och beror på gemensamt bakomliggande faktorer.
Källa: Lundberg & Sterner, 2004, sid 3.

Lundberg & Sterner menar ändå att en möjlig förklaring till det statistiska sambandet är att elever som misslyckas med att lära sig läsa förlorar sitt kognitiva mod och får en negativ självbild. Detta kan i sin tur påverka resultaten i matematik.

> En sådan negativ självbild kan lätt sprida sig utanför det område där det stora nederlaget inträffat, t.ex. till inlärningen av matematik. Att förstå hur man räknar kräver mobilisering av mental energi och fokuserad uppmärksamhet. För att befästa färdigheten krävs ihärdig övning. En elev fylld av missmod, uppgivenhet och utanförskap kan inte förväntas ge sig i kast med matematiken med lust och energi.
>
> (Lundberg & Sterner, 2004, sid 4)

Per Fröjd har i sin nyligen framlagda doktorsavhandling (2005) granskat läsförmågan hos ett stort antal elever på en högstadieskola i Borås 2000 – 2002. Han menar att läsförmågan generellt håller på att försämras hos svenska elever. En anledning till detta anser han vara teven och dataspelens påverkan på de unga. Ungdomarna är, tror Fröjd, inte längre villiga att genomgå den tidskrävande och tålamodsprövande process som krävs för att de ska bli duktiga läsare. De spenderar istället sin tid på andra medier där de enklare uppnår en direkt stimulans.

Fröjd har också i sin avhandling analyserat sambandet mellan läsförmåga och betyg. Resultaten ger vid handen att betygen i allmänhet stiger med ökad läsförmåga. Sambandet är dock inte så starkt som Fröjd initialt trott. Hela 71 % av de elever som i hans undersökning bedömdes ha mycket låg läsförståelse lyckades ändå nå betyget godkänt i svenska. Förvånansvärt många lyckades t.o.m. nå överbetyg. Fröjd förklarar detta med svagheter i betygssystemet och anser ändå att undersökningen ger stöd för Vygotskys teorier om språk som en betydande faktor för lärande.

En summering ger vid handen att många forskare är inne på ett nära samband mellan läsning och den matematik som undervisas på skolans högstadium. Just detta samband, som det tar sig uttryck i relationen mellan betygen i svenska och matematik, är en sak som ska studeras i denna avhandlings empiriska del.

3.3 LÄRANDE OCH METAKOGNITION

Det är ett faktum att vissa individer lyckas och att andra misslyckas i den svenska skolan. Vad är det då som ger framgångsrika elever deras framgång? Utöver de sociala faktorer som i flera sammanhang lyfts fram som förklaringsgrund för studieprestationer, ett perspektiv som inte kommer att användas i föreliggande studie, har också begreppet metakognitiv förmåga introducerats för att förklara skillnader i prestation.

Metakognition är en samlande term för en kognition av andra ordningen; individens medvetna förståelse av och kunskap om sina egna kognitiva processer; hennes reglerade ”tankar om tankar”. Många forskare har hävdat att lärande hänger intimt samman med förmågan att organisera, övervaka och modifiera inlärningsstrategier i relation till graden av framgång i lärandet (Brown et al, 1983).

Enligt Weinert (1987) handlade den pedagogiska forskningen under 1900-talet i huvudsak om sju punkter: i) minneskapacitet, ii) erfarenhet av textinlärning, iii) motivation, iv) social påverkan, v) relationen mellan personlighet och inlärning, vi) generell studiekompetens och vii) utvecklingsskillnader i inlärningsförmåga. Man sökte efter en mätbar faktor som beskrev individens inlärningsförmåga, men denna visade sig vara svårfångad. I samband med att Piagets och Vygotskys teorier slog igenom i mitten av seklet började istället individens ursprungliga kunskapsbas och hennes förmåga att använda kognitiva strukturer att användas för att förklara skillnader i utfall. Termen metakognition används aldrig av Vygotsky, men mycket av de grundproblem han tar upp med termer som självreglering, kontroll och övervakning av tänkandet skulle vi idag definiera som metakognition.

Utan metakognitiv förmåga skulle det i skolmatematiken vara omöjligt att lösa s.k. ”benämnda uppgifter”, uppgifter där det först krävs att eleven läser och tolkar en text innan hon kan börja räkna. Lösningsgången förutsätter att ett antal strategiska frågor ställs: ”Vad efterfrågas?”, ”Vilka data är givna”, ”Hur kan dessa användas för att nå lösningen?”, ”Verkar svaret rimligt?”. Just transformationssteget från textproblem till lämpligt lösningsschema är svårt för många individer att ta. Samtidigt som dessa processer pågår kontrolleras och övervakas de samtidigt metakognitivt: ”Är tillgängliga data tillräckliga”, ”Vilket blir nästa steg?”. Om data eller förmåga saknas är det naturligtvis mer ekonomiskt att ge upp än att lägga tid på att försöka lösa något olösligt. Det är en viktig skillnad på att ”inte kunna” och att ”vara medveten om att man inte kan” (Schoenfeld, 1992).

I en studie om metakognition och intelligens kunde författarna dra slutsatsen att graden av abstraktionsförmåga i matematisk talförståelse är en signifikant prediktor på förmågan att lösa problem på ett intelligenstest (Glaser & Pellegrino, 1987). Även i andra ämnen har metakognition visat sig vara av intresse. Särskilt beträffande läsförståelse där forskning påvisat mätbara effekter i resultat efter det att eleverna undervisats i metoder för metakognition. Kopplingen mellan läsförståelse, matematik och metakognition observerades tidigt av bl.a. Thorndike:

> Understanding a paragraph is like solving a math problem. It consists of selecting the right elements of the situation and putting them together in the right relations, and also with the right amount of weight or influence or force for each. The mind is assailed as it were by every word in the paragraph. It must select, repress, soften, emphasize, correlate, and organize, all under the influence of the right mental set or purpose or demand.
>
> (Thorndike, 1917, sidan 329)

Det finns flera exempel på studier som visar på samband mellan metakognitiva strategier och prestationer i matematik. Generellt kan sägas att när experter ska lösa ett problem inom en domän så tenderar de att inordna nya fakta i strukturer, medan noviser inte har tillgängliga scheman för att göra detta. Duktiga problemlösare ger strukturen i ett problem särskild uppmärksamhet, medan de som är sämre lägger mer energi på ytliga detaljer (Krutetski, 1976; Silver, 1979). Schoenfeld (1992) har visat att duktiga problemlösare ständigt är medvetna om, och övervakar, sitt lösningsförfarande samtidigt som de anstränger sig för att ur sin erfarenhetsbank hitta ändamålsenliga analogier och lösningsmetoder.

Kan då metakognitiva strategier läras ut? Mycket tyder på det. Det finns belägg för att kombinationen av kognitiva och metakognitiva strategier samt en lärares explicita undervisning, genom samtal och modellering, hjälper eleverna att utveckla förmågan till problemlösning (Montague, 1992, 1997; Wikström, 1997).

3.4 Bedömning av matematisk förståelse

Modern pedagogisk forskning har visat att oavsett ämnets karaktär är det helt avgörande för undervisningens effektivitet hur mycket tid, omsorg och intresse läraren använder för att göra innehållet meningsfullt och förståeligt för eleverna (Fibæk Laursen, 2005). Forskningsresultat visar också att innehållet ofta har en helt annan betydelse för eleverna än vad läraren föreställt sig. För att göra en rättvis bedömning av om en elev tillgodogjort sig ett moment i en kurs måste tydliga mål med kursavsnittet artikuleras. I det följande kommer det att argumenteras för att dessa tydliga och mätbara mål är lättare att formulera i matematik än i många andra teoretiska ämnen. Åtminstone om målen ska ligga på en någorlunda hög kognitiv nivå.

I detta avsnitt beskrivs först vad som idag menas med matematiskt kunnande och därefter följer en översikt av olika taxonomier som kan användas för att bedöma och gradera graden av matematisk förståelse. Går det för en lärare att på ett rättvist sätt ställa en tillförlitlig diagnos för hur mycket – eller hur lite – en elev begriper?

3.4.1 Hur definieras matematiskt kunnande?

Från mitten av 1980-talet fram till idag har tyngdpunkten i vad man avser med matematiskt kunnande förskjutits något. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) anger i sina *Principles and Standards* (2000) fem matematiska processer som genom hela skoltiden följer eleven. Dessa är: i) problemlösningsförmåga, ii) argumentationsförmåga, iii) kommunikationsförmåga, iv) förmåga att se samband och v) representationsförmåga.

Tanken är att dessa processer ska användas både för att generera ny kunskap och tillämpa gammal kunskap. Historiskt sett har betoningen i svensk skolmatematik förflyttats från tillämpning av färdiga algoritmer och resultat av typen rätt/fel till mer av kreativ problemlösning och kommunikation. Istället för att träna en given och färdig algoritm läggs tiden på att hitta *olika* vägar till lösningen. Det är alltså ofta inte resultatet i sig som är det viktiga, utan vägen dit (se t.ex. Runesson, 1999).

I *Baskunnande i matematik* (NCM, 2003) presenteras, med grund i tidigare forskning, och i samklang med dagens svenska kursplaner, en beskrivning av åtta olika aspekter på vad en generell ämneskompetens i matematik innebär. Kompetenserna har en dubbel innebörd, det handlar både om konsten att använda och att utveckla matematisk kunskap. Punkterna är som följer.

- *Produktivt förhållningssätt*: Att se matematik som meningsfull, användbar och värdefull tillsammans med en stark tilltro till den egna förmågan att utöva matematik i vardagsliv, samhällsliv, kommande studier och yrkesliv. Denna kompetens utgör en självklar förutsättning för att ett matematikkunnande ska kunna vara ett livsprojekt.

- *Omdömesförmåga*: Att kunna se matematikens roll, värde och egenvärde i ett historiskt kulturellt och samhälleligt helhetsperspektiv samt att kunna se och bedöma matematikens användning inom andra verksamheter.

- *Begreppsförståelse*: Att begripa innebörden av matematiska begrepp och operationer och kunna se hur dessa bildar sammanhängande nätverk.

- *Behärskande av procedurer*: Att på ett flexibelt, precist och effektivt sätt tillämpa olika slags procedurer och algoritmer. Denna aspekt av kompetens är viktig inte minst i ett samspel med begreppslig förståelse och som en grund för problemlösning.

- *Kommunikationsförmåga*: Att i tal och skrift och på andra sätt kunna diskutera och argumentera kring frågeställningar i matematik.

- *Problemlösningsförmåga*: Att formulera, modellera, representera och lösa matematiska problem – såväl inommatematiska som från vardagsliv och tillämpningar i yrkesliv och andra ämnen.

- *Argumentationsförmåga*: Att tänka logiskt och reflektera, samt förklara, troliggöra och berättiga matematiska påståenden.

- *Hjälpmedelskompetens*: Att känna till och kunna använda miniräknare och andra hjälpmedel i vid mening där så är lämpligt samt känna till hjälpmedlens möjligheter och begränsningar.

(NCM, 2003, sid 23)

I artikelns avslutning finns följande mening med som nog kan sägas vara representativ för samhällets officiella syn på skolmatematik idag.

> En satsning på att förbättra elevers baskunnande i matematik är en satsning på ökad demokratisk kompetens och på ökade reella möjligheter för individen till ett livslångt lärande.
>
> (NCM, 2003, sid 26)

Granskar man uttalandet kritiskt kan det finnas anledning att fråga sig om det i en demokrati verkligen förutsätts att individen kan räkna för att hon ska räknas. Ger studier i matematik verkligen en ökad demokratisk kompetens? Vidare, vilka individer fortsätter inte att lära sig under större delen av sitt liv? Menar man inte egentligen att baskunnande i matematik ger ökade möjligheter till ett *skolbundet* livslångt lärande?

Oavsett invändningarna kan man konstatera att matematik på grundskolan är mer än bara räkning. I de följande avsnitten ska olika sätt för att bedöma graden av matematiskt kunnande presenteras och jämföras.

3.4.2 SOLO

SOLO-taxonomin är utvecklad av två australiensiska forskare på 1980-talet (Biggs och Collis, 1982) med en ursprunglig intention att besvara frågan om det överhuvudtaget går att bedöma på vilken kognitiv nivå en elev står. Konstruktörerna började med att söka efter elevarbeten som tydligt kunde representera de olika åldersstadierna i den utvecklingsprocess som Piaget beskrivit. De kom dock fram till att några sådana generella, till ålder knutna, nivåer är svåra att spåra i elevarbeten. Deras undersökningar visade att en elev som presterade på en hög kognitiv nivå ena dagen, inte alls behövde göra det nästa dag. Prestationerna skilde sig åt både över tid och mellan olika ämnen.

Som lösning på detta problem började de skilja på å ena sidan den hypotetiska kognitiva strukturnivån hos individen och å andra sidan den faktiska responsen som gavs på en viss uppgift. Eftersom den senare (SOLO – structure of the observed learning outcome) är mätbar, valde man att inrikta forskningen på denna. I SOLO-taxonomin bedöms det arbete som en elev presterar tillhöra någon av följande fem nivåer.

1. *Prestructural.* Studenten undviker frågan.

2. *Unistructural.* Svaret baseras endast på *en* relevant aspekt och utmärks av dogmatiska konklusioner.

3. *Multistructural.* Flera aspekter i problemet beaktas, men inkonsekvenser förbigås utan beaktande.

4. *Relational.* Data som kontrasterar placeras i ett schema som kan gälla i den aktuella kontexten.

5. *Extended abstract.* Studenten känner igen exemplet från andra strukturer och klarar att koppla detta till mer generella fall. Hypoteser om icke givna exempel kan ges och slutsatsen hållas öppen.

Stegen i denna klassificering anses gälla generellt och oberoende av ämne. Biggs och Collis (ibid.) presenterar också i sin bok en mer specifik SOLO-metodik för olika ämnen. I matematik koncentrerar de sig särskilt på siffror och operationer. De exemplifierar med följande problem i figur 3.4.1.

Problem: Vad står symbolen ▲ för i följande påstående:
3 + 4 = 4 + ▲

* * *

SOLO-nivå	*Elevsvar*
Prestructural	"Haven't learnt those yet."
Unistructural	"3, because there is no 3 on the other side"
Multistructural	"5, because 4 is one more than 3 and 5 is one more than 4."
Relational	"3, because 3 + 4 = 7 and 4 + 3 = 7"
Extended abstract	"3, because, if we are given that the symbols have there usual meaning, the operation of addition is commutative and thus the missing number has to be 3."

FIGUR 3.4.1. Ett exempel på bedömning av elevsvar i SOLO.
Källa: Biggs & Collis, 1982, sid 85.

Författarna menar också att det inte är värt att begära att alla ska nå den högsta SOLO-nivån, extended abstract, i matematik eftersom:

> When one considers the enormous effort required to raise the level of functioning from the relational to extended abstract in this content area it is totally unrealistic to expect that all student will achieve or wish to achieve the upper level of responding.
>
> (Biggs & Collis, 1982, sid 91)

Sammanfattningsvis går det alltså med SOLO-taxonomin att fastställa om ett elevsvar i matematik ligger på en hög eller låg kognitiv nivå. Biggs & Collis menar vidare att matematikämnet skiljer sig från andra skolämnen i så motto att det inte är rimligt att förvänta sig att alla elever kan nå den högsta SOLO-nivån, eftersom det skulle medföra orimligt höga krav på dem.

3.4.3 KURSPLANER OCH BETYGSKRITERIER

Sedan mitten av 1990-talet har vi ett målrelaterat betygssystem i Sverige på såväl grundskola som gymnasium. Det relativa betygssystem som rådde dessförinnan hade från elever, föräldrar och lärare utsatts för hård kritik för att det ledde till en konkurrenssituation mellan elever, vilket i sin tur påverkade skolklimatet på ett negativt sätt (Andersson, 1999).

Det nu rådande målrelaterade betygssystemet lider också av flera nackdelar. Hur ska en kvalificerad och samtidigt rättvis bedömning kunna göras av huruvida en elev förstått ett komplicerat fenomen? I Sverige överlåts problemet i mångt och mycket på den enskilde ämnesläraren. Till stöd har hon ett antal dokument med kursmål och betygskriterier utfärdade av Skolverket. Enligt anvisningarna är dock inte kursmålen absolut formulerade, utan uppstår i samband med realiseringen i en dialog mellan elever och lärare:

> Målen blir färdiga först när den processen är genomförd, när lärare och elever har tagit ställning till vilket stoff och vilka metoder som främjar lärandet.
>
> (Skolverket, 2000 a, sidan 10)

Ragnhild Swahn (2006) har visat att i praktiken blir elevernas inflytande på gymnasiet gällande arbetsformer och innehåll ytterst begränsat. Hon menar bl.a. att arbetssättet i matematik är väl inarbetat och sällan problematiseras, kanske för att det vilar på en lång tradition som både elever och lärare är vana vid. Hon ser stora svårigheter för läraren att göra något åt detta i och med att kursplanerna, och de på dessa baserade läroböckerna, är så strikta och detaljerade. Att frångå detta mönster skulle också kunna innebära problem för eleverna på kommande kurser. Ämnesstruktur, kursplan och lärobok hänger i matematik intimt samman och ger fasta ramar för undervisningen.

Maria Bjerneby Häll ger en likartad bild i sin avhandling (2006). De nyblivna matematiklärarna inriktar sin undervisning mot det nationella provet. De ser läromedlen som ett stöd för att ”hinna med kursen”, men upplever samtidigt en besvikelse över att inte hinna med att förnya undervisningen i överensstämmelse med de idéer som de hade före sin yrkesdebut.

Göran Linde gör i sin bok *Kunskap och betyg* (2003), på uppdrag av Skolverket, en utvärdering av gällande svenska kursplaner och betygskriterier. Han menar att det sätt på vilket kunskaper bedöms intimt hör samman med hur dessa kunskaper väljs ut, organiseras och förmedlas. Därmed kan ett betygssystem aldrig vara neutralt i förhållande till innehållsfrågorna. Linde betonar också att man bör ställa samma krav på betygsättning som på mätningar i forskning, nämligen att de ska ha såväl hög validitet och som hög reliabilitet. Betygen ska alltså enkelt uttryckt mäta rätt saker och bedömningarna ska vara stabila från en lärare till en annan.

Enligt Linde (ibid.) grundas de svenska kursplanerna i matematik i en pragmatisk uppfattning om vetande. Matematikämnets ställning motiveras genom att relatera till dess användning och nytta. Ämnets karaktär av mänskligt konstruerad artefakt lyfts fram. Matematik skall anses vara en mänsklig konstruktion och inte som något givet av Gud med existens oberoende av subjektet. I kursplanerna anses kunskap *om* matematik vara lika viktigt som kunskap *i* matematik. Individen ska reflektera över vad matematik är; men även över hur och var det kan användas.

Aristoteles använde sig av fyra kvalitativt olika kunskapsbegrepp: techne (behärskandet av en praktik), episteme (vetande om begrepp fakta och relationer), fronesis (omdömesgillt handlande utifrån kunskaper, erfarenheter och etiska överväganden), noesis (filosofisk reflektion om den egna kunskapens ursprung och grund). I sin bok har Linde använt dessa för att karakterisera de svenska måldokumenten (Skolverket, 2000 a) i fyra ämnen, bland dem matematik. Resultatet av ämnesjämförelsen presenteras i nedanstående tabell.

TABELL 3.4.1. De av Aristoteles kunskapsformer som, enligt Linde (2003), gett avtryck i Skolverkets kursplanedokument från år 2000.

Form	Matematik	Engelska	Samhällsk	Religion
Techne	Betonas	Betonas		
Episteme	Finns med			
Fronesis	Finns med	Finns med	Betonas	Betonas
Noesis	Betonas	Nämns		

I de jämförda texterna så har alltså matematikämnet ett mer komplext och varierat förhållande till de olika kunskapsformerna än vad de övriga ämnena har. Linde tycker sig ana att värderingen av målen grundas i en delvis disparat kunskapssyn. Ämnet engelska är praktiskt orienterat mot kommunikation. I matematik däremot hänvisar man både till den praktiska nyttan och till den filosofiska och vetenskapsteoretiska reflektionen där matematik betraktas som en av människan konstruerad artefakt. I ämnena samhällskunskap och religionskunskap framhålls istället främst det omdömesgilla handlandet grundat i etisk reflektion, kunskap och erfarenhet.

Som matematikämnet framträder i måldokumenten är det enligt Linde uttalat konstruktivistiskt. Han menar att ett sådant konstruktivistiskt synsätt är förenligt med ett rationalistiskt sätt att uppfatta tillägnandet av kunskap, nämligen att kunskap nås med hjälp av förnuft och inte främst grundas i bearbetning av sinnesdata. Linde anser emellertid att matematiken i kursplanerna också beskrivs som ett verktyg för förståelse med hänvisning till vardagsliv och problemlösning.

> I så motto betraktas kunskap som någonting som vinns med hjälp av sinnena. Men matematiken bedrivs också som en mänsklig konstruktion och som ett medel för att skärpa tänkandet. Det kan vara möjligt att spåra ett rationalistiskt drag i den hållningen.
>
> Linde, 2003, sid 37

Linde lämnar dock med en reservation i sin bedömning; hans slutsatser bör betraktas som subjektiva och grundade på den förförståelse och erfarenhet han själv äger. En annan bedömare hade alltså kunnat komma fram till en annan kategorisering.

3.4.4 Betyg relativt andra sätt att bedöma kunskap

Flera forskningsrapporter har visat på skillnader mellan å ena sidan resultat på nationella prov och internationella kunskapsmätningar och å andra sidan betygsutfall (Skolverket, 2001; OECD, 2000). Elever som når höga betyg kan ändå prestera dåligt vid dessa centralstyrda test och vice versa. Per Fröjd (2005) visar i sin studie att korrelationen mellan betyg i svenska och läsförmåga är väldigt svag. I den grupp elever som av honom klassats som mycket svaga läsare fick hela 71 procent betyget godkänt eller högre i svenska. Fröjd ser detta som en bekräftelse på att det i vissa fall är andra faktorer än färdigheter och kunskaper i läsning och skrivning som bestämmer betyget i svenska.

I detta har Fröjd stöd hos bl.a. Christina Wikström (2005) som studerat det svenska betygsystemet och dragit följande slutsats:

> The conclusion is that the Swedish grading model involves several sources of error, which causes problems with both reliability and validity issues.
>
> (Wikström, 2005, sid 42)

Denna formulering skulle lika väl ha kunnat stå i den kompetensutredning som publicerades 1968: *Studieprognos och studieframgång* (Marklund, Henrysson & Paulin, 1968). I denna presenteras och analyseras en sammanställning av ett 60-tal vetenskapliga undersökningar om sambandet mellan gymnasiebetyg och framgång i senare studier. Forskningsstudierna som är genomförda 1955 – 1965 grundas samtliga på det gamla betygssystemet med bokstavsbetyg A – C. Författarna konstaterar att betygen lider av irreliabilitet och att de till för stor del avgörs av lärare på subjektiva grunder. Man konstaterar att reliabiliteten, och därmed även prognosvärdet, är högre i s.k. skrivämnen där betyget är starkt beroende av resultat på centrala prov; alltså i ämnen som matematik och språk.

> Underlaget för en betygsättning är större i skrivämnen än i de övriga. Detta återspeglar sig också i betygsättningen. Skrivämnesbetygen har större spridning än de övriga betygen. De är också mer reliabla. Och det visar sig nu, att de även har starkare korrelation med framgångskriterierna. Man kan alltså predicera studieframgång bättre med hjälp av skrivämnesbetyg än med övriga betyg. Detta gäller oavsett vilket kriterium man har. När man i en undersökning korrelerade studentbetyget i historia med senare studieframgång i historia, fick man t o m ett negativt samband.
>
> Om alltså skrivämnen går före icke-skrivämnen i fråga om prognosvärde, så gäller för de förra, att betygen i matematik och fysik ger säkrare prognos än betygen i språk och svensk skrivning.
>
> Marklund et al, 1968, sid 196

Peter Nyström diskuterar i rapporten *Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper* (1998) om kvalitet i elevprestationer överhuvud taget kan mätas och värderas. Genom att göra kvalitetsbedömningar av elevarbeten med tre olika modeller – Skolverkets betygskriterier, Van Hieles nivåer av matematiskt tänkande samt SOLO-taxonomin – kan reliabiliteten i modellerna undersökas. Elevarbetena i studien utgörs av några öppna uppgifter på det nationella provet (gymnasieskolans kurs A i matematik). Nyströms slutsats blir att de tre modellerna klassar kvaliteten i arbetena på ett likartat sätt. Det elevarbete som bedöms hålla en hög kvalitativ nivå i ett bedömningssystem gör också så i de andra. Enligt Nyström ger samtliga tre modeller meningsfulla beskrivningar av de olika förståelsenivåerna.

Betygen är dock inte en i alla lägen rättvis värdemätare på kunskap, särskilt inte om man beaktar förändringar i bedömning mellan olika årskullar av elever. Wikström har i sin artikel *Grade Stability in a Criterion-Referenced Grading System: the Swedish example* (2005) visat att betygsinflationen mellan åren 1997 och 2002 var avsevärd på flera av gymnasieskolans kurser. I en jämförelse mellan betygen på A-kurserna i åtta olika ämnen var dock matematikkursen den där eleverna fick lägst genomsnittligt betyg såväl 1997 som 2002 (se tabell 3.4.2). Än mer intressant är att matematikkursen också var den kurs där betygsinflationen var lägst.

TABELL 3.4.2. Betygsinflationen mellan åren 1997 och 2002 på gymnasieskolans A-kurs i ett antal ämnen sorterat i fallande ordning. Källa: Wikström (2005)

A-kurs	Genomsnittligt betyg 1997	Genomsnittligt betyg 2002	Ökning i procent
Bild	12,5	14,1	12,8%
Svenska	12,1	13,6	12,4%
Religionskunskap	12,3	13,6	10,6%
Idrott	12,5	13,8	10,4%
Naturkunskap	12,1	13,3	9,9%
Samhällskunskap	12,2	13,4	9,8%
Engelska	12,9	14,0	8,5%
Matematik	12,0	12,8	6,7%

Även om Wikströms och Fröjds forskning ger anledning att ifrågasätta det svenska betygssystemet så talar sammantaget mycket för att problemen är större i andra ämnen än i matematik. Nyströms forskning visar ju att betygsbedömningarna i matematik är i konsistens med andra kognitiva taxonomier och Wikströms att bedömningarna är mer stabila över tid.

3.5 HUR KAN STUDIEFRAMGÅNG PREDICERAS?

En ofta använd modell för att beskriva anledningar till studieframgång är *Walbergs productivity model* (Walberg, 2003). I denna modell urskiljer författaren, på basis av ett stort antal vetenskapliga undersökningar och experiment, tre faktorer som bör uppmärksammas i) undervisningens kvantitet, ii) undervisningens kvalitet samt iii) elevens hemmiljö. Walberg betonar att den enskilt viktigaste faktorn för graden av måluppfyllelse är hur mycket tid eleven lägger ned på sina studier. De elever som lägger ned mycket tid når också i stor utsträckning framgång. Det finns också en massiv empirisk forskning som visar att ca 50 procent av de individuella skillnaderna i skolprestationer kan tillskrivas sådana faktorer som motivation, intressen, uthållighet, hälsa och hembakgrund (Husén, 1975).

I antagningssystemen till högskolan finns ett stort behov av urvalsinstrument som indikerar god studieförmåga. I Sverige är idag de två vanligaste urvalsinstrumenten betyg och högskoleprov. Det finns emellertid många faktorer som påverkar hur framgångsrika studierna blir. En del av dessa faktorer, t.ex. de som har med studentens sociala situation att göra, är mycket svåra för högskolorna att påverka och predicera.

Professor Ingemar Wedman skriver i rapporten *Behörighet, rekrytering och urval. Om övergången från gymnasieskola till högskola* (2000) att betyg och prov (av samma typ som högskoleprovet) utgör överlägsna instrument för att förutsäga studieframgång. Samtidigt menar han att förklaringsvärdet hos dessa instrument är lågt och stundtals besvärande lågt.

> I grova drag säger i stort sett alla studier på området att med resultat från högskoleprovet (motsvarande) och med kännedom om elevernas betyg kan vi förklara och förstå 25 % av studieframgången. 75 procent, alltså – delar av variationen i studieframgång – vet vi inte vad den beror på och kan följaktligen inte förutsäga.
>
> (Wedman, 2000, sid 16)

Det har i Sverige förts en periodvis livlig diskussion kring vilka grupper som gynnas och vilka som missgynnas i dagens antagningssystem till högskolan. Kritiken mot högskoleprovet har främst gällt huruvida det är rättvist utformat. För betygens del har man ifrågasatt om ett målrelaterat betygssystem kan fungera som urvalsinstrument. Ytterligare en svaghet hos betygen är att läraren ibland kan tendera att sätta ett betyg baserat på andra saker än på graden av kunskap i ämnet som t.ex. elevens uppträdande i stort, ansträngningens storlek etc. Detta är ett mönster som även Fröjd (2005) och Wikström (2005) återfinner i sin forskning.

Christina Stage har i sin rapport *Betyg och högskoleprov* (1991) visat att beträffande betyg så presterar kvinnor i medeltal bättre, medan män i medeltal presterar bättre vid standardiserade prov av den typ som högskoleprovet utgör. Hon hänvisar till en artikel av Kimball där följande tre möjliga förklaringar anförs: i) män har större erfarenhet av matematik utanför skolan vilket de har nytta av vid problemlösning på prov, ii) kvinnor och män har olika inlärningsstilar där kvinnor är mer inriktade på innantill-inlärning av matematik, iii) kvinnor känner sig mer trygga i att arbeta med ett bekant material, medan männen känner en utmaning i att utforska något nytt.

Kerstin Davis har i rapporten *Är bäst alltid bäst? En studie av gymnasieelevers betyg och högskoleprovsresultat* (2003) granskat sambandet mellan resultaten i betyg och högskoleprov. Hon får i studien fram en lägre korrelation (r = 0,44) än vad tidigare studier visat. En möjlig förklaring till detta kan vara att en stor andel elever, ca 60 procent, inte gör högskoleprovet. Davis spekulerar i att detta bortfall består av personer där överensstämmelsen mellan betyg och provresultat annars skulle ha varit god. Davis noterar att i den grupp individer som har höga betyg men ändå presterar dåligt på högskoleprovet är 80 procent kvinnor. I rapporten visas också att skillnaderna är störst mellan kvinnor och män i de två delar på högskoleprovet som handlar om logiskt tänkande (NOG) och förmågan att tolka diagram och tabeller (DTK); alltså de två delar av högskoleprovet som är mest besläktade med matematikämnet.

I en jämförelse mellan hur betyg och resultat på högskoleprov predicerar studier på högskolenivå har man kunnat visa att betygen är ett bättre instrument för prognoser (Gustafsson, 2000). Möjliga förklaringar till detta är att betygen bättre speglar faktorer som flit, uthållighet och motivation.

Vad är det då som gör vissa elever mer framgångsrika än andra i skolmatematiken? Utifrån data från TIMSS (*The Third International Mathematics and Science Study*), insamlade våren 1995, har Anita Wester och Björn Sigurdsson gjort en analys av vad som utmärker de elever i sjunde och åttonde klass som är högpresterande i matematik (Wester & Sigurdsson, 1997). I analysen har man använt de bakgrundsvariabler och den deskriptiva statistik som samlades in för den grupp elever som tillhörde de fem procent med bäst resultat i matematik och NO.

TABELL 3.5.1. De två viktigaste variablerna för att förklara varians i matematikprestation uppdelat på olika länder. Andel förklarad varians inom parentes. Källa: Wester & Sigurdsson (1997), sid 8.

LAND	VARIABEL 1	VARIABEL 2 (tillsammans med variabel 1)
Tjeckien	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (17%)	Avser skaffa universitetsutbildning efter gymnasiet (25 %)
Danmark	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (13%)	Uppfattning att tur inte förklarar framgång i matematik (25 %)
Norge	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (17%)	Antal böcker i hemmet (20%)
USA	Antal böcker i hemmet (11%)	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (17%)
Frankrike	Elevens ålder (10%)	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (16%)
Sverige, åk 8	Positiv uppfattning om den egna prestationen i matematik (10%)	Antal böcker i hemmet (17%)

Resultaten har särredovisats för sex länder och de viktigaste förklaringar till studieframgång i matematik som eleverna själva angav framgår av tabellen ovan. Även vid beräkning av korrelationer var det för Sveriges del i undersökningen en *positiv uppfattning om den egna matematikprestationen* (0,33) samt den socioekonomiska variabeln *antal böcker i hemmet* (0,28) som visade på starkast samband med resultatet på provet.

Under 2004 presenterades ytterligare resultat från TIMSS och PISA (*Programme for International Student Assesment*) som har föranlett en hel del debatt om den svenska skolan och dess effektivitet. Enligt TIMSS har resultaten för svenska elever i matematik och naturorienterande ämnen försämrats sedan förra mätningen där Sverige deltog, 1995. Sveriges resultat är också signifikant sämre än 20-landsgenomsnittet. I en rangordning hamnar Sverige på plats 14 av de 20 länderna. TIMSS är utformad så att resultat ska gå att jämföra över tid. Slutsatsen att det för Sveriges del skett en försämring av resultaten från 1995 till 2003, i både matematik och NO, är således väl underbyggd.

Enligt PISA 2003 ligger de svenska resultaten i matematik på en nivå som motsvarar genomsnittet för OECD-länderna. Även om förändringen från föregående mätning år 2000 i genomsnitt inte är stor så har ändå den elevgrupp som ligger på de högsta nivåerna försämrat sig något. Sverige har annars inte försämrat sitt resultat nämnvärt, men det finns andra länder som tydligt förbättrat sina resultat mellan mätningarna. Även på NO-delen presterade svenska elever på ungefär samma resultatnivå år 2003 som år 2000.

I PISA 2003 testades utöver 15-åringarnas kunskaper i läsförståelse, matematik och naturvetenskap också i en särskild del deras förmåga till problemlösning. Tanken med denna del var att eleverna i lösningsfasen skulle bli tvungna att bilda synteser av kunskaper som givits i flera olika ämnen. Trots detta blev sambandet med just resultatet på matematiktestet oerhört starkt med r = 0,89 (se tabellen nedan).

TABELL 3.5.2. Sambandet i PISA 2003 mellan elevernas resultat på de fyra olika testdelarna.

	Mathematics	Reading	Science
Mathematics			
Reading	0,77		
Science	0,83	0,83	
Problem solving	0,89	0,82	0,80

I Skolverkets rapport av PISA-resultaten kommenteras detta på följande vis:

> Det kan förefalla märkligt att matematik har det största sambandet med problemlösning, eftersom matematikinnehållet i problemlösning endast utsträcker sig till grundläggande kunskaper och kompetens. Orsaken kan vara det analytiska tänkande som fordras i flera av uppgifterna i problemlösning, vilket också gäller för flera av uppgifterna i matematik.

(Skolverket, 2004, sid 146)

Ett alternativt sätt att tolka resultaten skulle kunna vara att de båda testdelarna i problemlösning och matematik mäter samma metakognitiva förmåga. Ett rimligt antagande är att denna förmåga i så fall också är positivt korrelerad med den generella studieframgången i skolan mätt som betygsutfall.

3.6 SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

En intressant frågeställning är om lärande i matematik och lärande i andra teoretiska ämnen på ett avgörande sätt skiljer sig åt. I allt lärande är begreppsbildningsprocessen central, men en skillnad här är matematikens oerhörda noggrannhet i preciseringen av olika begrepp artikulerade i en serie definitioner. Det kanske inte är en slump att både Vygotsky och Piaget relativt ofta hämtar exempel från matematiken när de lägger fram sina teorier. Lärandet fungerar på ungefär samma sätt, men matematikens tydlighet gör den tacksam att exemplifiera med.

Försöken under 1900-talet att hitta en förklarande faktor som mäter individens förmåga till inlärning har bl.a. resulterat i begreppet metakognition. Metakognition handlar om att under en problemlösningsfas på ett övergripande plan kontrollera och reglera processen. Att under inlärningen aktivt ställa sig strategiska frågor om man är på rätt väg, och om man verkligen behärskar det man försöker lära sig, är enligt de metakognitiva teorierna oerhört väsentligt för graden av framgång. Denna strategiska övervakning är säkert något som många matematiker känner igen sig i. Det verkar inte vara en helt orimlig hypotes att den metakognitiva träning som matematikuppgifter ger även kan vara användbar i andra sammanhang.

I PISA:s senaste undersökning hade en särskild problemlösningsdel med uppgifter skapats där eleverna skulle ha nytta av kunskaper de erhållit i flera olika ämnen. Resultatet på denna del visade sig vara oerhört starkt korrelerat med resultatet på matematikdelen, med ett r-värde på + 0,89 (OECD, 2004). Detta talar för att personer som klarar skolans matematikuppgifter väl också har goda chanser att klara generell problemlösning väl. Åtminstone den typ av textbundna problem som ofta ges i skolan och som också detta test byggde på.

För framgång i skolans teoretiska ämnen krävs god läsförståelse. Det är stor skillnad på att vara läskunnig och att ha en god läsförståelse. I beskrivningen ”god läsförståelse” ryms metakognitiva förmågor vilka innebär att individen aktivt och strategiskt bearbetar texten, en eller flera gånger, till dess att förståelse uppnås. En skicklig läsare klarar att transformera budskapet till egenhändigt skapade scenarier och på så sätt värdera hållbarheten i författarens påståenden. I de olika instrument som byggts upp för att mäta kvalitativa skillnader i förståelse är just abstraktionsförmågan, förmågan att låta slutsatsen lämna sin kontext för att prövas i andra sammanhang, central för att indikera en hög kognitiv nivå. Detta gäller oavsett vilket teoretiskt ämne som individens förmåga ska bedömas i (se t.ex. Biggs & Collis, 1982).

När Lundberg och Sterner (2004) pekar på en gemensam grundkärna för personer med problem i läsning och matematik och hänvisar till olika brister i individens hjärnfunktion har de troligen rätt – men detta behöver egentligen inte ha så mycket med läsförståelse att skaffa. Det som de i sin modell avser med läsning är nog främst *läskunnighet*; processen att översätta symboler till meningsfulla ord (se figur 3.2.1). *Läsförståelse* däremot är en kognition av andra ordningen som visserligen förutsätter läskunnighet, men där det mer handlar om att tränga in under textytan och verkligen förstå vad författaren vill ha sagt.

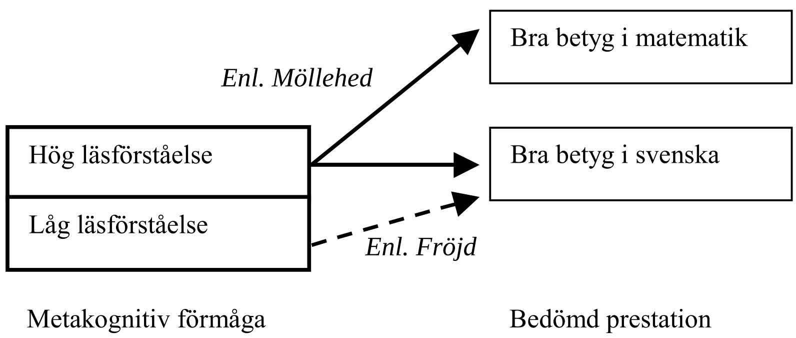
Om jag förstår Vygotsky rätt såg han på intellektets utveckling ungefär som vi ser på konditionsträning idag. Genom fysisk träning förbättrar vi vår syreupptagningsförmåga, detta alldeles oavsett om vi ägnar oss åt cykling, simning eller löpning. På motsvarande vis borde då intellektuella ansträngningar inom ett fack ha gynnsamma effekter på vår potential inom andra fack. Detta skulle i så fall tala för att ämnen kan ha en viss formalbildande effekt. Om Vygotsky har rätt borde elever som visar goda intellektuella prestationer i ett ämne också ha förutsättningar för att göra det i andra ämnen. Det som här särskiljer matematik från andra ämnen är kanske just detta att det är förhållandevis lätt att utifrån en individs prestation bedöma hennes kognitiva nivå på ett någorlunda reliabelt sätt.

I föreliggande studie ska betygsutfall granskas och samband mellan betyg i matematik och andra ämnen studeras. Att använda betyg som mätinstrument för studieframgång är inte oproblematiskt. Wikströms forskning ger anledning att ifrågasätta betygssystemets tillförlitlighet. Nyströms forskning visar dock att bedömningen av kunskaper i matematik enligt de betygskriterier som finns utfärdade av Skolverket väl överensstämmer med andra värderingssystem för matematikkunskaper. Det är sannolikt så att både validiteten och reliabiliteten i matematikbetyget generellt sett är god, åtminstone i jämförelse med andra teoretiska ämnesbetyg (Nyström, 1998).

Denna hypotes styrks också av Wikströms studie som visar att betygsgenomsnittet på gymnasiekurs A i svenska är högre än i kursen matematik A, samtidigt som betygsinflationen de senaste åren varit betydligt högre i svenska än i matematik (Wikström, 2005). En trolig förklaring är att betygskriterierna i ämnet matematik är mer preciserade i de styrdokument som används av lärare vid betygsättning, vilket gör betygen mer tillförlitliga (se Marklund et al, 1968).

Vad kan man då förvänta sig för utfall i denna studie? Hur samvarierar betygen i exempelvis svenska och matematik? En hypotes skulle vara att de i huvudsak mäter två helt olika förmågor hos eleven; en matematisk förmåga som har med logisk intelligens och förnuft att göra och en annan som grundas i språk och känsla. På senare tid har bl.a. Howard Gardner fört fram sådana tankar om att olika människor äger olika typer av intelligens (Gardner, 1994). En alternativ hypotes är att båda ämnena mäter den intellektuella förmågan, men på olika sätt. Jag ska nedan utveckla tankarna runt denna hypotes något.

Fröjds undersökning har visat att elever som har låg grad av läsförståelse ändå kan nå höga betyg i svenska (Fröjd, 2005). Detta får honom att ifrågasätta betygssystemets tillförlitlighet och i detta får han som nämnts stöd av Wikström. Parallellt pekar Mölleheds studie på ett nära samband mellan läsförståelse och prestationer i matematik (Möllehed, 2001). Detta resonemang styrks också av det starka samband som i PISA uppmättes mellan test i läsning och test i matematik med en korrelation på + 0,85 (Sterner & Lundberg, 2002). Ett försök till sammanfattande beskrivning lämnas i figuren nedan.



FIGUR 3.6.1. En beskrivning av möjliga samband mellan läsförståelse och betyg i matematik och svenska. Egen konstruktion.

Om modellen ovan är riktig skulle den metakognitiva förmågan "läsförståelse" både påverka betygen i matematik och svenska. Vidare skulle, med stöd i resonemanget om olika ämnesbetygs tillförlitlighet, ett bra betyg i matematik tydligare indikera en hög läsförståelse än vad ett bra betyg i svenska gör. Personligen tror jag inte att läsförståelse och matematiklösningsförmåga är samma sak, men att de delvis speglar samma intellektuella kapacitet.

I den matematik som undervisas på grundskolans högstadium krävs för ett överbetyg att eleven klarar att läsa och tolka en text, översätta problemet till en algoritm, få fram ett svar och kontrollera rimligheten däri samt slutligen kommunicera detta resultat. Det räcker alltså inte med att enbart memorera något, utan det handlar om att lära sig hantera en mental process som kräver ett aktivt tänkande och handlande. I mångt och mycket överensstämmer denna process med det som brukar definieras som metakognition. Det verkar för mig sannolikt att matematik utgör *ett* område där individens förmåga till metakognition kan testas.

Det som i detta arbetes empiriska del ska granskas är samvariationen mellan betyg i olika ämnen. Om resonemanget ovan är riktigt bör höga betyg i matematik indikera studieframgång också i andra ämnen. Det bör dock understrykas att det med de betygsdata som studien bygger på inte är möjligt att undersöka vad som är orsak och vad som är verkan i dessa samband. Även om ett matematikbetyg indikerar studieframgång betyder det inte att det är matematikstudierna i sig som ger framgången. I studien finns heller inte några tillgängliga data om elevernas metakognitiv förmåga, deras flit, motivation, socioekonomiska bakgrund etc. Det saknas alltså information om de bakgrundfaktorer som styr betygsutfallet. Anledningen till att dessa faktorer ändå diskuterats i denna del är att resonemanget ska kunna ligga till grund för framtida forskning.

4. UNDERSÖKNINGENS UPPLÄGGNING OCH GENOMFÖRANDE

I detta avsnitt preciseras först ett syfte och några konkreta frågeställningar som ska besvaras av studien. Vidare presenteras de strategier och metoder som använts i den statistiska undersökningens genomförandefas.

4.1 SYFTE

Det övergripande syftet med detta arbete är att undersöka matematikbetygens möjlighet att fungera som indikator på en individs generella studiekompetens. Målet är också i denna del att testa olika statistiska metoder för att genomlysa de likheter, skillnader och samband som finns mellan betygsutfallen i olika ämnen på individnivå.

Studien görs mot bakgrund av de alternativa resonemang som förts i sammanfattningen till kapitel tre, där antingen betygsutfallet i de teoretiska ämnena skildrar helt olika förmågor hos individen, eller där de i huvudsak bottnar i en gemensam metakognitiv grund.

Avgränsning har i studien gjorts så att endast resultat på grundskolan granskas. Gymnasie- och högskolan har tills vidare lämnats helt utanför studien. Vidare understryks återigen att detta endast är en deskriptiv studie för att kartlägga samband mellan betygsresultat i matematik och andra ämnen. Frågan om vad som är orsak och vad som är verkan i dessa samband exkluderas. Undersökningen har alltså inte någon ambition att ge svar på frågan om studier i matematik har en formalbildande effekt.

Ur syftet har konkretiserats följande mer preciserade frågeställningar:

- Hur ser betygsfördelning och karakteristika ut för matematikbetygen på grundskolan relativt andra ämnen?
- Vilka samband finns i grundskolan mellan en elevs matematikbetyg och elevens totala meritpoäng?
- Hur väl fungerar matematikbetyget som indikator för generell studieframgång jämfört med betygen i de andra två basämnena på grundskolan, svenska och engelska?

I försök att besvara dessa frågor kommer ett antal olika statistiska metoder användas för att analysera datamaterialet. På ett sekundärt plan, och som en förberedelse för vidare forskning, blir ytterligare en frågeställning därför:

- Vilka statistiska metoder lämpar sig bäst för den här typen av analyser?

4.2 Pilotstudie

För att testa bärkraften i hypotesen gjordes under maj månad 2004 en pilotundersökning. Betygen för samtliga niondeklassare i Skinnskattebergs kommun, som gick ut grundskolan år 2003, införskaffades och analyserades. I studien av dessa betyg framkom att:

- Sambandet, mätt som den linjära korrelationen mellan ämnesbetyget och elevernas sammanlagda meritpoäng (/meritvärde), var svagare för matematik än för många andra ämnen. Betyget i basämnet svenska var t.ex. betydligt starkare korrelerat till meritvärdet än vad betyget i matematik var.

- Det fåtal elever i undersökningsgruppen som fick högsta betyg i matematik var också de som totalt sett hade den högsta totala meritpoängen.

Även om den första punkten ovan verkade motsäga hypotesen, så tydde ändå den andra på att en framgång i matematik i det närmaste garanterade ett gott studieresultat totalt. Datamaterialet var dock i denna pilotstudie alldeles för litet för att kunna påvisa några säkra resultat. De lovande men osäkra resultaten av pilotundersökningen motiverade en mer omfattande analys vilket resulterat i föreliggande uppsats.

4.3 Begreppet studiekompetens

Som mått på studieframgång brukar det s.k. meritvärdet användas, där varje bokstavsbetyg givits siffervärden enligt tabell 4.3.1 nedan. Meritvärdet utgörs i undersökningen av summan av betygsvärdena för de 16 uppräknade betygen ovan i elevens slutbetyg. Varje betyg ansätts ett siffervärde enligt de principer som Skolverket fastlagt (Skolverket, 2004, länk A). Det teoretiskt högsta meritvärde som kan uppnås i denna studie är sålunda $16 \cdot 20 = 320$ poäng.

TABELL 4.3.1 Omvandlingstal för bokstavsbetyg vid beräkning av meritvärde.

Betyg	Betydelse	Värde
IG	Icke Godkänd	0
G	Godkänd	10
VG	Väl godkänd	15
MVG	Mycket väl godkänd	20

Att beräkna medelvärden och standardavvikelse etc. på en dataserie vars värden stammar från en ordinalskala, och inte från en kvotskala med absolut nollpunkt och ekvidistans mellan de olika mätvärdena, är inte helt oproblematiskt. Det finns ju inget som säger att en elev med betyget VG i matematik, som därmed enligt tabellen ovan får 15 poäng i ämnet, har 50 procent mer kunskap än en elev vars betyg är G och som då får 10 poäng. Att så ändå görs i detta arbete hänger samman med att det är så meritvärdet beräknas vid urval till gymnasiet och att det alltmer även i forskningssammanhang börjar bli vedertaget att göra så (se t.ex. Wikström, 2005 och Fröjd, 2005 som båda beräknar betygsmedelvärden på detta sätt).

Betygen visar naturligtvis inte en absolut och rättvis kunskapsnivå, men i det system som råder kan man utgå från att elever som når höga meritpoäng också besitter en generell studiekompetens i så motto att de klarar att nå de höga betygen. Det som avses med en elevs studiekompetens i denna studie blir alltså definitionsmässigt detsamma som förmågan att nå höga betyg. I begreppet studiekompetens kommer därmed inte enbart ligga faktorer som har med förmågan till kunskapsbildande att göra, utan snarare sådana som visar viljan och förmågan att i rådande system nå de högsta betygen.

4.4 GENOMFÖRANDE

Studien genomfördes under 2004/2005. Först studerades i en kvantitativ analys sambandet mellan grundskoleelevers matematikbetyg och meritpoäng. Som dataunderlag användes samtliga betyg för de elever som gick ut grundskolans nionde klass vårterminen 2003 i Västmanlands län. En avpersonifierad datafil med 3 251 elevers slutbetyg inköptes från Statistiska Centralbyrån (SCB). Denna fil importerades sedan till dataprogrammen Microsoft-Excel och SPSS, där sedan dataanalyserna genomfördes.

Att studien begränsades till Västmanlands län var endast för att datamaterialet skulle bli någorlunda hanterligt, men ändå tillräckligt stort för att säkra slutsatser skulle kunna dras.

Vidare antogs det att Västmanlands län på ett bra sätt skulle spegla svenska förhållanden genom att datamaterialet täcker skolor i såväl tätort som glesbygd.

	Skolkod	Skolområde	Betyg ämne 1	Betyg ämne 2		...	Betyg ämne 26	Meritvärde
Elev 1	198001101	1980	G	G			G	135
Elev 2	198002101	1980	1	G			G	40
... ↓	↓	↓	↓	↓			↓	↓
Elev 3251	198201001	1982	V	M			G	225

FIGUR 4.4.1 Principskiss för datafilsstrukturen med de 3 251 elevernas betyg. Anledningen till att antalet olika ämnen blir så stort som 26 är att olika skolor och olika elever har skilda studieplaner.

Ur den ursprungliga databasen filtrerades de skolor bort där man inte gav betyg i alla ämnen. Vissa skolor ger t.ex. ett samlat betyg i naturorientering istället för betyg i vart och ett av ämnena biologi, fysik och kemi. Eleverna på dessa skolor exkluderades alltså i undersökningen. Kvar blev sammanlagt 2 079 elever som fick utgöra det faktiska datamaterialet på vilken analysen grundas. Dessa 2 079 elever hade samtliga läst efter en studieplan med följande 16 ämnen: Bild, Biologi, Engelska, Fysik, Geografi, Hemkunskap, Historia, Idrott, Kemi, Matematik, Musik, Religion, Samhällskunskap, Slöjd, Svenska och Teknik. Betyget i B-språk (tyska, franska, spanska etc.) som skiljer beroende på individuellt val räknades inte med i analysen.

Förutom en deskriptiv statistisk analys användes olika statistiska metoder som kluster- ,faktor- och multipel regressionsanalys för att söka och beskriva samband mellan de olika ämnesbetygen och meritvärdet. Målet var att testa om matematikämnet i något avseende särskiljde sig från de andra ämnena genom en inneboende möjlighet att predicera elevens generella studiekompetens. För detta användes vedertagna statistiska slutledningsmetoder för att kontrollera om de konstaterade skillnaderna kunde bero på slumpen eller om de var vetenskapligt säkerställda. Hypotesprövningen genomfördes på de tre signifikansnivåerna: $p < 0{,}001$, $< 0{,}01$ och $< 0{,}05$.

4.5 ETISKA ÖVERVÄGANDEN

Inte några av de som gick ut grundskolan i Västmanland 2003 har informerats om att deras betyg används i denna studie. Å andra sidan var det datamaterial som lämnades ut av SCB helt avpersonifierat, så att en enstaka individs resultat omöjligt kunde spåras i analysen. I rapporten redovisas dessutom resultaten enbart på grupp- och ej på individnivå, varför någon konflikt med etiska riktlinjer knappast kan uppstå.

I övrigt följs i undersökningen HSFR:s etikregler för humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning (Vetenskapsrådet, 2002).

5. RESULTAT AV DEN STATISTISKA ANALYSEN

Resultatdelen är indelad i fem avsnitt. I första avsnittet presenteras betygsfördelning och karakteristikor i ämnet matematik i relation till övriga ämnen. I andra och tredje avsnitten görs en kluster- och faktoranalys i syfte att gruppera ämnena efter olika betygsutfall. I det fjärde används multipel regression för att skapa modeller som utifrån betygen i svenska, engelska och matematik predicerar betygsresultatet i de övriga 13 ämnena. Här värderas också matematikens och svenskämnets betydelse för att förutsäga den generella studieframgången och en modell i form av en s.k. path-analys presenteras. I det femte och sista avsnittet slutligen studeras frågan om varför elever med höga betyg i matematik generellt också når höga betyg i andra ämnen. Varje avsnitt avslutas med några korta slutsatser.

5.1 BETYG OCH MERITVÄRDEN

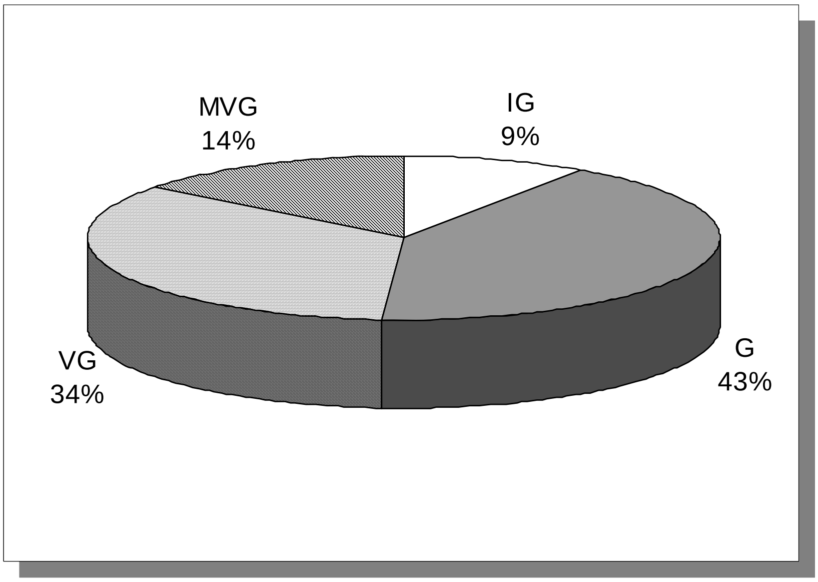
Huvudsyftet med hela den föreliggande studien är att analysera vilka samband som finns på grundskolenivå mellan betyget i matematik och det sammantagna studieresultatet. Som måttstock på elevens studieresultat har meritvärdet använts. Meritvärdet är en siffra som i denna studie teoretiskt kan variera mellan 0 och 320.

Ett meritvärde på 0 innebär att eleven fått betyget ”icke godkänd” i samtliga ämnen, medan ett meritvärde på 320 innebär att eleven fått högsta betyg, ”mycket väl godkänd”, i samtliga 16 ämnen. I fortsättningen kommer ibland förkortningen M16 att användas för att beteckna det samlade meritvärdet i de 16 ämnena. Hur beräkningen av meritvärde går till har redovisats tidigare i avsnitt 4.3.

Samtliga resultat i denna del bygger på urvalet med de 2 079 elever som beskrivits i tidigare metodavsnitt.

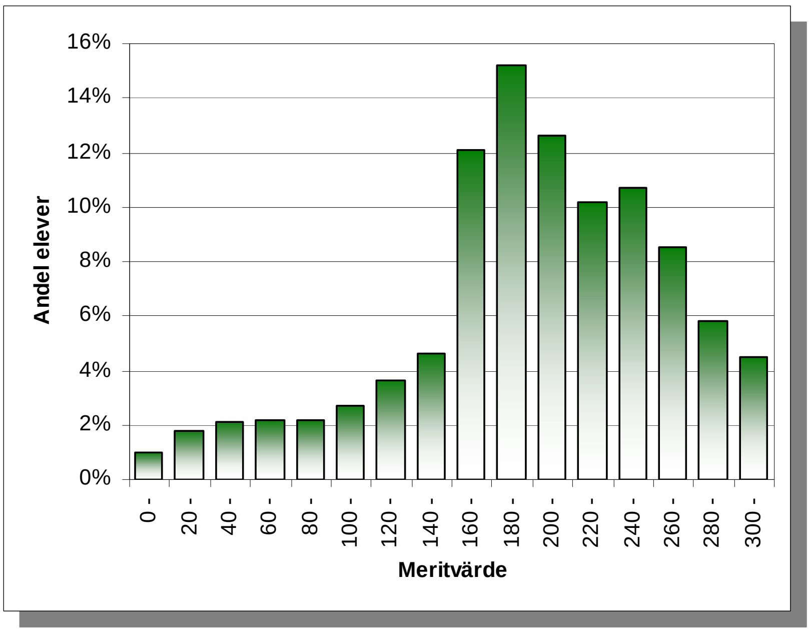
5.1.1 BETYGSFÖRDELNINGAR OCH MERITPOÄNG

Av de $2\,079 \cdot 16 = 33\,264$ enskilda betyg som sattes fördelade sig dessa procentuellt på de fyra betygen IG, G, VG och MVG enligt figur 5.1.1 nedan. Det vanligaste betyget är alltså betyget ”godkänd” som sätts i 43 procent av fallen. Ovanligast är betyget ”icke godkänd” som sätts i 9 procent av fallen.



FIGUR 5.1.1 Betygens fördelning på de fyra klasserna IG (icke godkänd), G (godkänd), VG (väl godkänd) och MVG (mycket väl godkänd).

Meritvärdet för de 2 079 eleverna fördelar sig enligt figur 5.1.2. Medelvärdet för fördelningen är 197,4 och standardavvikelsen 66,72 poäng. Flest elever, ca 15 procent, hamnar i klassen 180 – 199 poäng.



FIGUR 5.1.2 Fördelningen för de 2 079 elevernas meritpoäng. Datamaterialet är indelat i klasserna 0 – 19, 20 – 39, …, 300 – 320 poäng.

Meritvärdets undre kvartil hamnade på 165 poäng, medianen på 200 och den övre kvartilen på 245 poäng. Dessa värden kommer senare i analysen att användas för att beteckna olika grad av framgång i studierna. En elev med meritvärde över 245 betraktas som en person med god studieframgång, medan ett meritvärde under 165 tyder på motsatsen.

5.1.2 Linjära korrelationer mellan meritvärde och ämnesbetyg

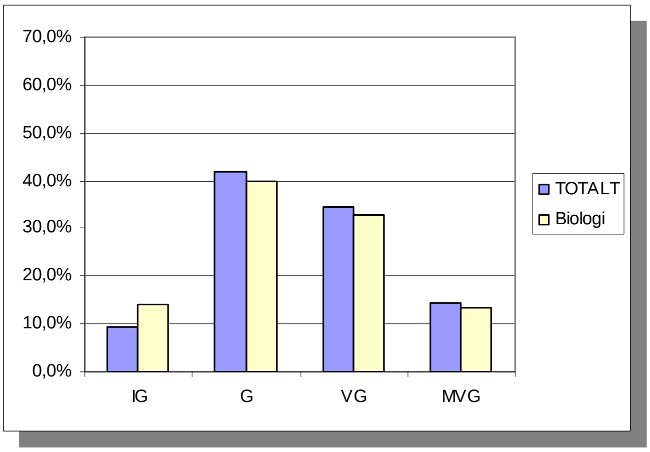
För att bedöma styrkan i sambandet mellan ett enstaka ämnesbetyg och meritvärdet har bokstavsbetygen översatts till siffror enligt samma principer som när meritvärdet beräknas. Ämne för ämne har därefter den linjära korrelationskoefficienten beräknats för att kvantifiera sambandet mellan dessa sifferbetyg och det totala meritvärdet. Resultatet framgår av tabell 5.1.1, där ämnena rangordnats fallande efter sambandets styrka.

Starkast linjärt samband med meritvärdet hade betygen i ämnet biologi, medan slöjd hade det svagaste sambandet. Matematikämnet hamnade ungefär mitt i fältet på plats nio. Basämnet svenska hamnade på platsen före matematik.

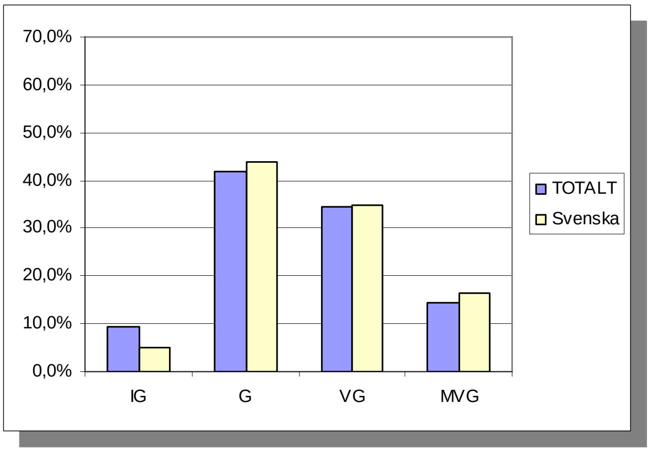
Tabell 5.1.1 Sambandet mellan betyg i olika ämnen och det totala meritvärdet. Sambandets styrka har beräknats som den linjära korrelationen (r-värdet).

Rang	Ämne	r-värde
1	Biologi	0,88
2	Fysik	0,86
3	Samhällskunskap	0,86
4	Kemi	0,86
5	Geografi	0,86
6	Historia	0,86
7	Religion	0,85
8	Svenska	0,80
9	Matematik	0,77
10	Hemkunskap	0,76
11	Teknik	0,74
12	Engelska	0,73
13	Musik	0,71
14	Bild	0,69
15	Idrott	0,66
16	Slöjd	0,65

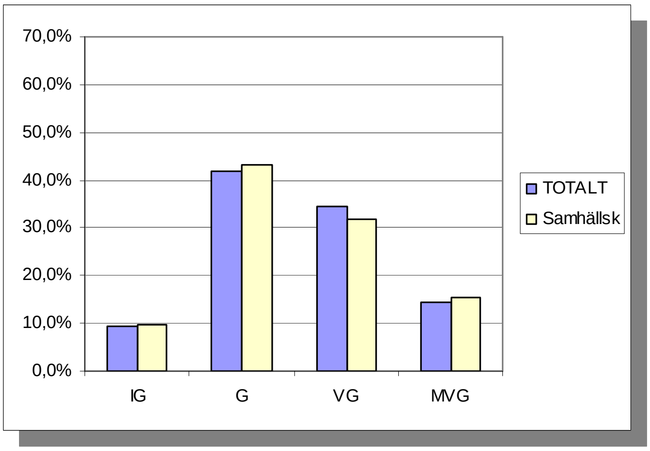
Anledningen till att biologi har ett högre r-värde än matematik är att dess betygsfördelning bättre stämmer överens med den totala betygsfördelningen för de 33 264 utdelade betygen. Det är till stor del samma individer som når de höga betygen i de teoretiska ämnena, men antalet utdelade överbetyg är klart lägre i matematik än i biologi. I figur 5.1.3 – 5.1.6 visas betygsfördelningen för några olika ämnen i relation till den totala betygsfördelningen. Det syns tydligt att matematikämnets fördelning i figur 5.1.6 skiljer sig från de andra ämnenas. Skillnaden är också statistiskt säkerställd ($p < 0{,}001$). För matematik är andelen som når betyget ”godkänd” högre än för t.ex. ämnena biologi, samhällskunskap och svenska, medan betygen ”väl godkänd” och ”mycket väl godkänd” betydligt mer sällan delas ut i matematik än i de övriga ämnena.



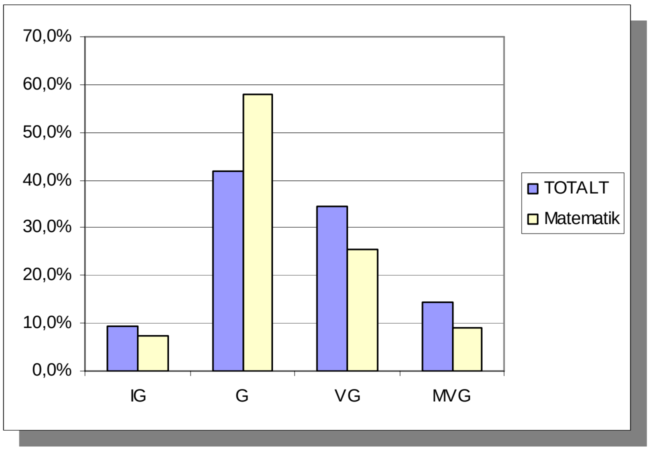
FIGUR 5.1.3 Betygsfördelningen för biologi i jämförelse med den totala betygsfördelningen för samtliga ämnen.



FIGUR 5.1.4 Betygsfördelningen för svenska i jämförelse med den totala betygsfördelningen för samtliga ämnen.



FIGUR 5.1.5 Betygsfördelningen för samhällskunskap i jämförelse med den totala betygsfördelningen för samtliga ämnen.



FIGUR 5.1.6 Betygsfördelningen för matematik i jämförelse med den totala betygsfördelningen för samtliga ämnen.

Att stapeln för de godkända i matematik är så mycket högre än för andra ämnen kan ha flera orsaker. En förklaring kan vara att matematik är ett basämne och att varje skola därmed är skyldig att sätta in extra resurser om en elev har svårt att nå betyget ”godkänd”. Motsvarande resurser sätts inte in på en elev som har problem i t.ex. biologi eller samhällskunskap. Detta syns i ovanstående figurer där matematikämnet har klart lägre andel icke godkända än vad ämnena biologi och samhällskunskap har. Svenska (figur 5.1.4) är precis som matematik ett basämne, och även här ligger andelen med betyget ”icke godkänd” klart lägre än i övriga ämnen.

Ytterligare en förklaring till att det är förhållandevis många som hamnar på betyget godkänd i matematik hänger ihop med att det här är färre som når de högre betygen ”väl godkänd” och ”mycket väl godkänd”. Det är alltså statistiskt sett svårare att nå överbetyg i matematik än vad det är i andra ämnen.

5.1.3 ELEVER SOM INTE BLIR GODKÄNDA I MATEMATIK

Totalt sett är det 9 procent av de betyg som delats ut som hamnat på ”icke godkänd”. I matematik är motsvarande siffra 7,4 procent, alltså något lägre vilket redan kommenterats tidigare. Förklaringen bör ligga i att matematik är ett basämne och att särskilda resurser satsas här, precis som i svenska och engelska, på att eleven ska nå godkänt. Andelen med betygen ”icke godkänd” redovisas ämne för ämne i tabell 5.1.2 nedan.

TABELL 5.1.2 Andelen som får betyget ”icke godkänd” i de olika ämnena.

Rang	Ämne	Procent
1	Svenska	4,9%
2	Slöjd	5,8%
3	Engelska	5,9%
4	Hemkunskap	6,8%
5	Bild	6,9%
6	Matematik	7,4%
7	Musik	8,4%
8	Teknik	8,6%
9	Samhällskunskap	9,7%
10	Historia	10,0%
11	Idrott	10,2%
12	Religion	10,5%
13	Geografi	10,5%
14	Biologi	13,9%
15	Fysik	14,9%
16	Kemi	16,7%

Noterbart är att basämnena och de praktiskt inriktade ämnena hamnar i tabellens topp, medan de tre naturvetenskapliga ämnena kemi, fysik och biologi hamnar i tabellens botten, med en relativt stor andel underkända.

För att undersöka hur det går i övriga ämnen för de elever som får betyget ”icke godkänd” i matematik, så har andelen av dessa som hamnar *under* den nedre kvartilen beträffande meritvärde beräknats. Sannolikheten för att en slumpmässigt utvald person i datamaterialet med betyget ”icke godkänd” i matematik ska hamna i den sämsta fjärdedelen beträffande samlat meritvärde är 0,98. Motsvarande siffror för andra ämnen presenteras i tabell 5.1.3 nedan. Matematik är med detta sätt att räkna det ämne som har fjärde starkast samband. Klart starkast var i studien sambandet för ämnet svenska där betyget ”icke godkänd” med 100 procents säkerhet indikerade att personen också tillhörde de 25 procent av eleverna med lägst meritvärde.

TABELL 5.1.3 Betygsresultat för respektive ämnes IG-elever. Av de 153 personer som fick betyget ”icke godkänd” i matematik var det 150 st (98,0 %) som också hamnade under den nedre kvartilen i sammanlagt meritvärde. Gränsen för de 25 % lägsta meritvärdena gick vid 165 poäng.

	Antal personer med IG	Antal av dessa med meritvärde ≤ 165	Andel	Medel-meritvärde
Svenska	102	102	100,0%	50,98
Samhällskunskap	201	199	99,0%	66,69
Biologi	290	285	98,3%	81,59
Matematik	153	150	98,0%	67,94
Religion	218	212	97,2%	70,60
Slöjd	120	116	96,7%	67,17
Teknik	178	172	96,6%	71,94
Geografi	219	211	96,3%	72,56
Historia	208	200	96,2%	68,68
Fysik	310	298	96,1%	85,71
Musik	175	168	96,0%	72,20
Engelska	122	117	95,9%	69,51
Bild	144	138	95,8%	66,67
Hemkunskap	142	135	95,1%	68,20
Kemi	347	327	94,2%	86,02
Idrott	212	196	92,5%	84,74

Generellt är skillnaderna ganska små i en jämförelse mellan olika ämnen. För det ämne som uppvisar svagast samband – idrott – är det ändå så mycket som 92,5 procent av de elever som får underkänt som också tillhör den sämsta fjärdedelen. Ett underkänt resultat i något ämne, oavsett vilket, indikerar alltså med stor säkert att denna elev också har ett lågt meritvärde.

5.1.4 ELEVER SOM NÅR HÖGA BETYG I MATEMATIK

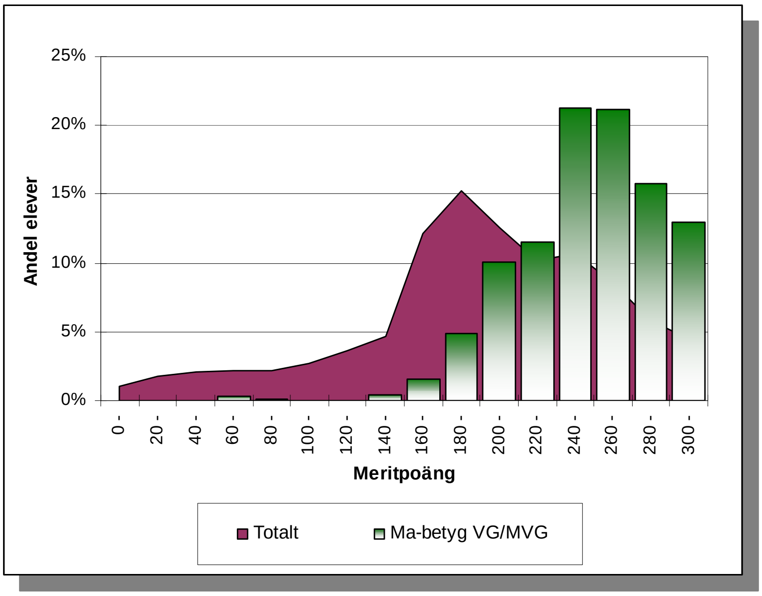
Analysen har gjorts på liknande vis som för betyget ”icke godkänd” i avsnittet 5.1.3 ovan. En slumpmässigt utvald person med något av betygen ”väl godkänd” eller ”mycket väl godkänd” i matematik har sannolikheten 0,67 för att ha ett meritvärde bland de 25 procent med högst meritvärde. Matematik uppvisar här det klart starkaste sambandet av samtliga 16 ämnen. Resultatet presenteras utförligt ämne för ämne i tabell 5.1.4 nedan.

TABELL 5.1.4 Betygsresultat för respektive ämnes VG/MVG-elever. Av de 718 personer som antingen fick betyget ”väl godkänd” eller ”mycket väl godkänd” i matematik var det 481 st (67,0 %) som också hamnade över den övre kvartilen i sammanlagt meritvärde. Gränsen för att tillhöra de 25 % med högst meritvärde gick vid 245 poäng.

	Antal personer med VG eller MVG	Antal av dessa med meritvärde ≥ 245	Andel	Medel-meritvärde M16	Standard-avvikelse M16
Matematik	718	481	67,0%	254,4	37,40
Fysik	869	526	60,5%	251,5	34,50
Kemi	812	476	58,6%	253,6	34,07
Biologi	958	550	57,4%	249,4	33,82
Samhällskunskap	979	551	56,3%	247,5	35,87
Geografi	1017	547	53,8%	246,1	35,74
Religion	1018	544	53,4%	244,8	37,50
Historia	1036	550	53,1%	244,5	37,35
Svenska	1063	548	51,6%	242,3	39,61
Hemkunskap	1116	542	48,6%	237,0	44,00
Teknik	1068	510	47,8%	236,1	44,78
Musik	996	475	47,7%	236,2	44,83
Engelska	1117	530	47,4%	236,1	46,03
Bild	1103	496	45,0%	232,2	47,32
Slöjd	1191	495	41,6%	228,6	46,99
Idrott	1163	480	41,3%	227,8	49,23

Ett matematikbetyg på nivå VG eller MVG indikerar alltså med ganska stor säkerhet en hög meritpoäng. Om man istället använder meritpoängens medelvärde som mått på gruppens studieframgång, erhålls ungefär samma resultat (se kolumn 5 i tabell 5.1.4). Gruppen elever som får ett överbetyg i matematik har också högst genomsnittlig meritpoäng 254,4.

Grafiskt kan situationen beskrivas med diagrammet i figur 5.1.7 där man tydligt ser att de elever med ett högt betyg i matematik också tillhör toppen beträffande meritvärde.



FIGUR 5.1.7 Staplarna visar meritpoängen för de 718 elever som uppnått betyget ”väl godkänd” eller ”mycket väl godkänd” i matematik. I bakgrunden syns fördelningen för samtliga 2 079 elever i undersökningen.

Anledningen till att matematik hamnar i särklass i dessa avseenden bottnar med största säkerhet i att det generellt är mycket färre som når något av betygen ”väl godkänd” eller ”mycket väl godkänd” i matematik än i andra ämnen (se tabell 5.1.5). Resultatet att andelen höga betyg som sätts i matematik är lägre än för övriga ämnen är mycket tydligt signifikant ($p < 0,001$).

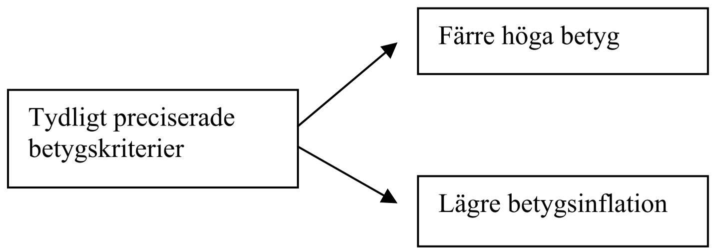
TABELL 5.1.5 Andel av de 2 079 eleverna som nådde något av de två betygen ”väl godkänd” eller ”mycket väl godkänd” i respektive ämne.

	Antal med betyg VG eller MVG	Andel
Matematik	718	34,5%
Kemi	812	39,1%
Fysik	869	41,8%
Biologi	958	46,1%
Samhällsk	979	47,1%
Musik	996	47,9%
Geografi	1017	48,9%
Religion	1018	49,0%
Historia	1036	49,8%
Svenska	1063	51,1%
Teknik	1068	51,4%
Bild	1103	53,1%
Hemkunskap	1116	53,7%
Engelska	1117	53,7%
Idrott	1163	55,9%
Slöjd	1191	57,3%

5.1.5 Slutsatser

Betygsfördelningen i matematik skiljer sig tydligt från betygsfördelningen som gäller för de övriga teoretiska ämnena. Det är en mycket större andel av eleverna som får G i matematik. Detta beror på två saker; dels på att det är färre som får IG och dels på att det är färre som får överbetyg.

Att färre får IG beror sannolikt på att skolan är skyldig att sätta in extra åtgärder på elever som riskerar att inte nå G i basämnena. I ämnet svenska, som också är ett basämne, syns samma tendens i statistiken med förhållandevis få IG. Det faktum att färre når överbetyg i matematik kan indirekt ha en koppling till att betygsinflationen är mindre här än i andra ämnen (jfr Wikström, 2006). Detta i sin tur kan hänga samman med en rad olika orsaker varav en är de mer preciserade betygskriterier som finns i matematik relativt övriga ämnen (jfr Linde, 2003).



Figur 5.1.8 Graden av precisering i styrdokument kan påverka både betygsgenomsnitt och betygsinflation i ämnet.

Hur fungerar då matematikbetyget som indikator på betyg i andra ämnen? Svaret blir ”ganska bra”. En elev med betyget IG i matematik hör med mycket stor säkerhet till gruppen med ett samlat meritvärde (M16) under första kvartilen. Sambandet är dock ännu starkare för en elev med IG i svenska. Ett underbetyg i svenska indikerar helt säkert att eleven tillhör den sämsta fjärdedelen beträffande meritpoäng.

Beträffande elever med överbetyg i matematik har 67 procent av dessa också ett M16-värde tillhörande de 25 procent bästa i urvalet. Ett högt betyg i matematik indikerar alltså med ganska stor säkerhet en elev med god studieförmåga (definierat som högt meritvärde). Detta samband är starkare för matematik än för något annat ämne i studien.

5.2 KLUSTERANALYS

Ett problem när man ska jämföra de olika ämnenas förmåga att predicera det totala studieresultatet (se t.ex. tabell 5.1.4) är att det ämne som man bryter ut, och ser som oberoende, samtidigt är med och påverkar meritpoängen. Även om man räknar bort detta ämne får man problem eftersom ”studieresultat totalt exklusive matematik” inte är direkt jämförbart med t.ex. ”studieresultat totalt exklusive fysik”.

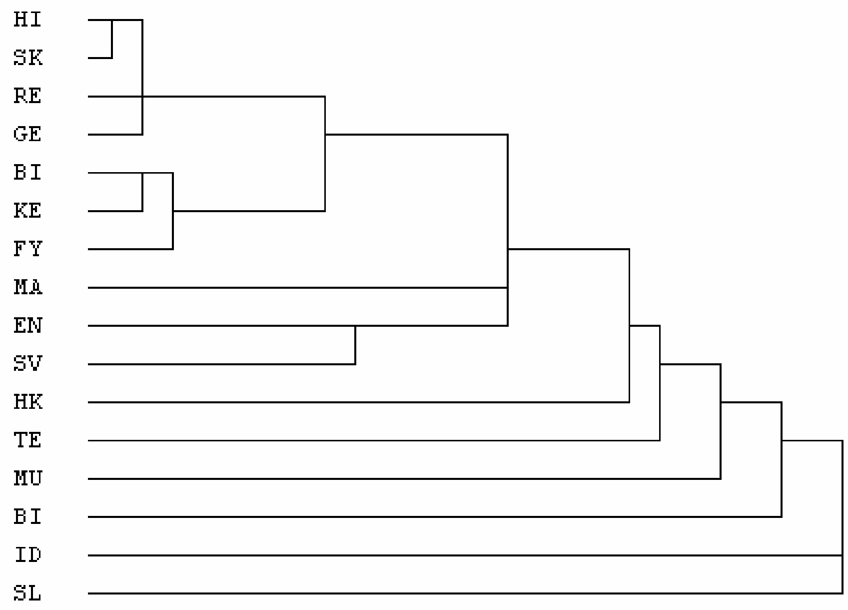
För att kringgå detta används här först statistiska metoder för att gruppera ämnena i olika kluster. På så sätt blir det sedan möjligt att studera hur betygen i *ett* kluster påverkar betygen i ett *annat* kluster. Denna gruppering används också senare i samband med faktoranalys och multipel regression. Klusteranalysen gjordes i statistikprogrammet SPSS.

5.2.1 KLUSTERANALYS

Vid klusteranalys är målet att samla objekt i grupper – kluster. Objekten inom varje kluster ska i någon mening likna varandra. I detta fall har analysen gjorts så att olika variabler (/ämnen) har grupperats, men man kunde lika gärna använt metoden för att gruppera individer (/elever).

Görs, som i det följande, en klusteranalys av hierarkisk modell enligt närmaste-granne-metoden så används produktmomentkorrelationerna som likhetsvärden. Först jämförs alla n ämnen parvis och de två ämnen som har mest likartad korrelation, mätt som det euklidiska avståndet i rymden, förs sedan samman till ett kluster. I denna studie var det ämnena historia och samhällskunskap. Därefter upprepas proceduren för det nyskapade klustret och de $n-2$ ämnen som återstår osv. till alla ämnen klustrats.

Klusteranalysen, utförd i statistikprogrammet SPSS, gav följande dendogram (figur 5.2.1):



FIGUR 5.2.1 Dendogram där de 16 ämnena grupperats med klusteranalys utifrån de 2079 elevernas betyg.

Här bildar historia, samhällskunskap, geografi och religion ett tydligt homogent kluster (i fortsättningen benämnt SO4). På motsvarande sätt är betygsvärdena i biologi, kemi och fysik (NO3) nära besläktade. Vidare är betygsättningen i matematik, engelska och svenska likartad (basämnen). Det framgår också att de övriga sex, mer praktiskt inriktade, ämnena (PO6: hemkunskap, teknik, musik, idrott och slöjd) tydligt avviker från de mer teoretiskt inriktade ämnena.

Basämnena hamnar med denna indelningsgrund någonstans mellan de praktiska och de teoretiska ämnena.

5.2.2 BASÄMNENA OCH STUDIERESULTATET M13

Klusteranalysen ovan visade att de tre basämnena (matematik, svenska och engelska) naturligt utgjorde ett kluster. Därför valdes dessa tre ämnen ut och betygen här användes som oberoende indikatorer på elevernas studieresultatet i *övriga* 16 – 3 = 13 ämnen. Denna meritpoäng baserat på 13 ämnen benämns i fortsättningen M13.

Basämnenas samband med M13 framgår av nedanstående tabell. Svenska är det basämne som har det starkaste linjära sambandet medan engelska har svagast samband.

TABELL 5.2.1 Korrelation (r) mellan basämnenas betyg, M13 och klustren, NO3 (fy, ke, bi), SO4 (ge, hi, sh, re) och PO6 (sl, id, hk, bi, mu, tk).

Ämne	M13	NO3	SO4	PO6
Svenska	0,75	0,70	0,74	0,68
Matematik	0,73	0,73	0,67	0,65
Engelska	0,67	0,65	0,66	0,57

Det syns också att sambandet för matematikbetygen är starkare med klustret NO3 än med SO4.

5.2.3 SAMBAND FÖR ELEVER SOM EJ NÅR GODKÄNT I BASÄMNENA

Medelmeritvärdet för de 13 ämnena, M13, hamnar i undersökningen för samliga 2 079 elever på 158 poäng. De 25 procent med lägst meritpoäng hamnar med ett M13-värde under 135. Tabellen nedan visar i vilken utsträckning ett underkänt betyg i respektive basämne också indikerar ett lågt meritvärde. Sannolikheten är alltså mycket stor att de 10 procent av eleverna med underkänt i något basämne också tillhör de 25 procent med lägst meritvärde i övriga ämnen.

TABELL 5.2.2 Meritvärde (M13) för basämnenas IG-elever. Av de 153 personer som fick betyget ”icke godkänd” i matematik var det 146 st (95,4 %) som också hamnade under den nedre kvartilen i sammanlagt meritvärde för övriga 13 ämnen.

	Antal personer med IG	Antal av dessa med meritvärde M13 ≤ 135	Andel	Medel-meritvärde
Svenska	102	100	98,0%	44,22
Matematik	153	146	95,4%	56,44
Engelska	122	109	89,3%	61,43

Betyget i svenska indikerar tydligast av basämnena de elever som har svagast resultat i övriga ämnen. Trots att fler får betyget IG i matematik än i engelska indikerar matematikbetyget tydligare ett dåligt studieresultat än vad betyget i engelska gör.

Klusteranalysen i avsnitt 5.2.1 grupperade ganska tydligt de 16 ämnena i fyra subgrupper. Förutom en grupp med basämnena kunde en grupp med de samhällsvetenskapliga ämnena (SO4), en grupp med de naturvetenskapliga (NO3) samt en grupp med de mer praktiskt inriktade ämnena (PO6) urskiljas. Dessa resultat går igen i tabell 5.2.3. Tabellen visar också att ett underkänt betyg i ett basämne oftare innebär problem i de teoretiska ämnena än i de mer praktiskt inriktade ämnena. Vidare blir problemen generellt större i de naturvetenskapliga än i de samhällsvetenskapliga ämnena.

TABELL 5.2.3 Samband mellan IG i basämnena och IG i övriga ämnen. Av eleverna med IG i matematik var det 64,7 % som också fick IG i geografi, 63,4 % i historia osv.

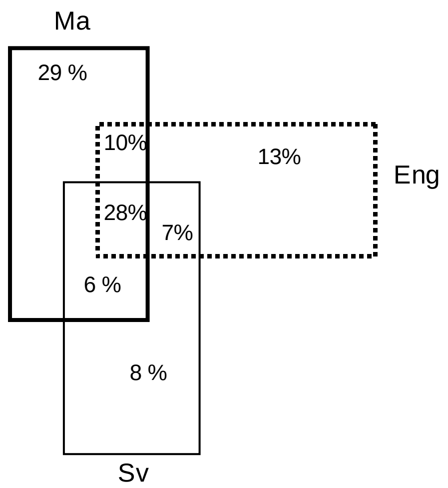
Andel med IG i:		*Givet IG i:* *Matematik*	*Svenska*	*Engelska*
SO4	*Geografi*	64,7%	73,5%	59,8%
	Historia	63,4%	75,5%	65,6%
	Religion	64,7%	77,5%	68,0%
	Samhällsk	60,1%	77,5%	63,9%
NO3	*Biologi*	79,7%	84,3%	70,5%
	Fysik	81,0%	91,2%	77,0%
	Kemi	84,3%	87,3%	77,0%
PO6	*Slöjd*	35,3%	42,2%	31,1%
	Idrott	52,9%	54,9%	46,7%
	Hemk	40,5%	51,0%	36,1%
	Bild	45,1%	54,9%	43,4%
	Musik	47,1%	54,9%	45,9%
	Teknik	51,6%	57,8%	44,3%

I en jämförelse mellan basämnena leder ett IG i svenska oftare till problem i de andra ämnena än vad ett IG i matematik eller engelska gör. I klustret SO4 är skillnaden särskilt stor, i de flesta fall över tio procentenheter. I ämnen som framförallt kemi och fysik innebär ett IG i svenska också med stor säkerhet ett underkänt betyg.

Venn-diagrammet i figur 5.2.2 visar att det är ungefär tre gånger fler elever som får IG i enbart matematik än vad det är som får IG i enbart svenska. Matematik verkar generellt vara ett mer krävande ämne än de andra två basämnena.

TABELL 5.2.4 Givet IG i ämnena i vänsterkolumnen redovisas här andelen som också har IG i de andra ämnena.

Givet IG i:	Andel som också har IG i: *Ma*	*Sv*	*Eng*
Ma (153 st)	-	46,4%	52,3%
Sv (102 st)	69,6%	-	72,5%
Eng (122 st)	65,6%	60,7%	-



FIGUR 5.2.2 Av de 211 eleverna med IG i något basämne hade 28 % IG i alla tre.

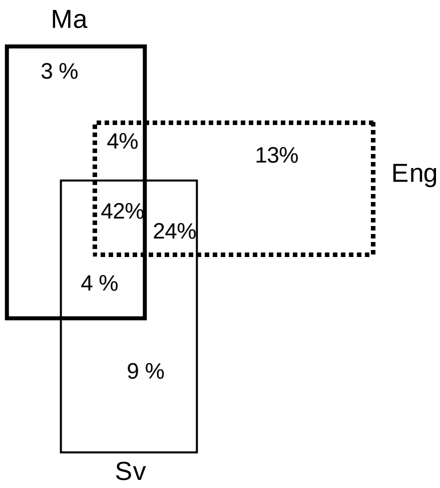
5.2.4 SAMBAND FÖR ELEVER MED HÖGA BETYG I BASÄMNENA

Ett högt betyg i matematik (VG eller MVG) indikerar med stor säkerhet även ett högt betyg i svenska och engelska (ca 85 %). Däremot gäller inte lika tydligt det omvända. Ett VG eller MVG i svenska innebär i ca 50 - 60 procent av fallen också ett överbetyg i matematik.

TABELL 5.2.5 Givet VG eller MVG i ämnena i vänsterkolumnen redovisas här andelen elever som också har VG eller MVG i de andra ämnena.

Givet MVG/VG i:	Andel som också har MVG/VG i: *Ma*	*Sv*	*Eng*
Ma		85,8%	86,6%
Sv	57,9%		83,3%
Eng	55,7%	79,3%	

Figur 5.2.3 visar att överensstämmelsen i betygsättning mellan de tre basämnena är god för elever med överbetyg. Hela 42 procent av samtliga elever med VG eller MVG i basämnena har överbetyg i alla tre ämnena. Det är också noterbart att endast 3 procent av eleverna når detta överbetyg enbart i matematik, en siffra som är tydligt lägre än de 9 respektive 13 procent som redovisas för svenska och engelska. Med ett högt betyg i matematik följer alltså i allmänhet ofta ett högt betyg i både svenska och engelska.



Figur 5.2.3 Av de 1340 eleverna med minst VG i *något* basämne hade 42 % minst VG i *samtliga* tre ämnen.

Tidigare har visats att ett högt betyg i matematik – liksom i kemi och fysik – med stor säkerhet indikerar ett högt meritvärde i samtliga 16 ämnen totalt (M16). En jämförelse med svenska och engelska beträffande M13 ger följande tabell.

Tabell 5.2.6 Av de 718 personer som fick VG eller MVG i matematik var det 446 st (62,1 %) som också hamnade över den tredje kvartilen i sammanlagt meritvärde för övriga ämnen (M13).

	Antal personer med VG eller MVG	Antal av dessa med M13 ≥ 200	Andel	Medel-meritvärde	Standard-Avvikelse
Matematik	718	446	62,1%	202,85	31,61
Svenska	1 063	513	48,3%	193,61	33,14
Engelska	1 117	493	44,2%	187,97	39,08

Styrkan i sambandet sjunker helt naturligt något jämfört med tabell 5.1.4 där samtliga 16 ämnesbetyg studerades. Matematikämnet tappar ca fem procentenheter vilket är mer än de tre procentenheter som svenska och engelska tappar. Fortfarande indikerar dock ett högt betyg i matematik mycket tydligare ett högt genomsnittligt meritvärde än vad höga betyg i svenska och engelska gör.

En redovisning på ämnesnivå ger följande resultat. För samtliga 13 ämnen innebär ett överbetyg i matematik också med stor säkerhet ett överbetyg i de andra ämnena (tabell 5.2.7). Observera att detta gäller i såväl praktiskt inriktade ämnen som NO- och SO-ämnen. Matematikämnets inneboende förmåga att på det här sättet indikera överbetyg i övriga ämnen är klart större än för de övriga basämnena och också större än svenskämnets förmåga att indikera de ämnen där eleven blir icke godkänd (tabell 5.2.3).

Vidare kan noteras att sambandet tenderar till att vara något starkare i de teoretiska än i de mer praktiska ämnena, men att skillnaderna inte alls är så stora mellan de olika ämnesgrupperna SO4, NO3 och PO6 som fallet var för IG-eleverna.

TABELL 5.2.7 Givet VG eller MVG i respektive basämne visas här andelen som också fick i VG/MVG i övriga ämnen. Av de som fick VG/MVG i matematik var det 83,7 % som också fick det i geografi, 84,8 % i historia osv.

Andel med VG/MVG i:		Givet VG eller MVG i: Matematik	Svenska	Engelska
SO4	Geografi	83,7%	78,3%	73,3%
	Historia	84,8%	79,1%	74,2%
	Religion	81,9%	79,6%	74,3%
	Samhällsk	83,3%	77,0%	71,7%
NO3	Biologi	84,4%	75,1%	70,5%
	Fysik	84,5%	68,4%	66,0%
	Kemi	78,0%	65,1%	65,3%
PO6	Slöjd	79,8%	74,7%	69,1%
	Idrott	77,6%	73,4%	68,6%
	Hemk	82,5%	79,8%	72,6%
	Bild	76,5%	75,0%	70,2%
	Musik	73,3%	70,4%	65,8%
	Teknik	85,0%	71,6%	69,5%

5.2.5 SLUTSATSER

Ur de 16 ämnesbetygen går det ganska tydligt att urskilja fyra kluster. Ett kluster utgörs av basämnena svenska, matematik, engelska. Om man använder dessa ämnen som prediktorer för det samlade meritvärdet i övriga 13 ämnen, M13, är svenskämnet säkrast när det gäller att urskilja elever med *låga* studieresultat och matematikämnet säkrast när det gäller att urskilja elever med *höga* studieresultat.

Matematikämnet visar ett starkare samband med betygsättningen i de naturorienterade ämnena (NO3) medan svenskämnet har ett starkare samband med de samhällsorienterade ämnena (SO4). Ett högt matematikbetyg indikerar ändå starkare än ett högt svenskbetyg höga betyg i SO-ämnena.

Ämnet engelska visar konsekvent en lägre förklaringsgrad än de andra två basämnena när det gäller att predicera studieresultaten i övriga ämnen.

5.3 Faktoranalys

En faktoranalys syftar vanligen till att reducera antalet ingående variabler i ett stort datamaterial. Bakom de från början givna variablerna önskar man avslöja latent underliggande variabler som kan förklara de ursprungliga variablernas samspel. Vid en lyckad faktoranalys kan man alltså komprimera ett stort datamaterial, med många variabler, till ett mindre datamaterial i få dimensioner.

Syftet i denna studie var att utröna vilka bakomliggande faktorer som styr ämnesbetygen. Hypotetiskt skulle det t.ex. kunna finnas en grupp ämnen där intelligens och logisk förmåga kan förklara betygen, en annan grupp där språklig begåvning är avgörande, en tredje där det handlar om praktisk skicklighet etc. Man gör olika typer av faktoranalyser beroende på om man betraktar de olika faktorerna (intelligens, motorisk förmåga etc.) som korrelerade eller inte. Indata i faktoranalysen är korrelationsmatrisen där man ser den linjära korrelationen mellan de olika ämnesbetygen (se bilaga). Analysen är gjord med programmet SPSS.

5.3.1 Faktoranalys för samtliga 16 ämnen

Först genomfördes en faktoranalys enligt metoden *Principal Axis Factoring* där betygsvärdena för samtliga 16 ämnen bearbetades i SPSS. Detta gav tabell 5.3.1 nedan. Begreppet ”eigenvalue” används för att kvantifiera hur stor förklaringsförmåga faktorn har. Kravet för att en extraherad faktor ska anses ha betydelse brukar vanligtvis sättas vid att den ska ha ett eigenvalue > 1. I denna körning kunde alltså endast *en* faktor identifieras som uppfyller detta krav. Denna faktor beskriver ungefär 60 procent av variationen i betygsättningen.

Tabell 5.3.1 Resultat av faktoranalys baserat på samtliga 16 ämnen. Endast en faktor med eigenvalue> 1 identifierades. Totalt förklarade faktorn 60 % av betygens variation.

Factor	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	9,970	62,310	62,310	9,598	59,985	59,985
2	0,864	5,402	67,712			
3	0,668	4,172	71,884			
4	0,618	3,862	75,747			
5	0,569	3,555	79,302			

Kommunaliteten redovisas i nedanstående tabell. Den visar den delade variansen mellan faktorn och respektive betyg. Kommunaliteten används ofta för att se om variabeln är en god indikator på faktorn. Biologi och samhällskunskap är alltså betydligt bättre värdemätare än matematik på den extraherade faktorn.

TABELL 5.3.2 Kommunaliteten för faktoranalysen i tabell 5.3.1.

	Initial	Extraction
Bild	,455	,440
Engelska	,579	,501
Hemkunskap	,545	,539
Idrott	,412	,396
Matematik	,585	,568
Musik	,476	,466
Biologi	,767	,777
Fysik	,739	,734
Kemi	,733	,727
Geografi	,746	,730
Historia	,765	,729
Religion	,761	,724
Samhällsk	,764	,740
Slöjd	,429	,389
Svenska	,667	,624
Teknik	,540	,514

Detta kan också visas i en tabell med faktorladdningen. Om en faktor har en hög laddning för en viss variabel (> 0,6) anses den har mycket gemensamt med faktorn. Enligt tabell 5.3.3 har alltså samtliga ämnen det här.

TABELL 5.3.3 Faktorladdningarna i fallande ordning för faktoranalysen i tabell 5.3.1.

Rang		Factor
1	Biologi	,882
2	Samhällsk	,860
3	Fysik	,857
4	Geografi	,855
5	Historia	,854
6	Kemi	,852
7	Religion	,851
8	Svenska	,790
9	Matematik	,753
10	Hemkunskap	,734
11	Teknik	,717
12	Engelska	,708
13	Musik	,682
14	Bild	,663
15	Idrott	,629
16	Slöjd	,624

Nu uppstår ett typiskt problem vid faktoranalys; nämligen att försöka konkretisera vad den latenta variabel som extraherats egentligen beskriver. Vad är det för faktor som erhållits här? Har den att göra med läsförmåga, studieteknik, motivation eller vad? Notera att de teoretiska ämnena hamnar i toppen och de mer praktiskt inriktade ämnena hamnar i botten av tabellen. En nära till hands liggande tolkning är att faktorn helt enkelt beskriver den samlande meritpoängen för elevernas studieprestation. Likheterna är slående med den tabell som erhålls när man studerar korrelationen mellan betygen i olika ämnen och meritvärdet.

TABELL 5.3.4 Korrelationen mellan ämnesbetygen och den totala meritpoängen, M16.

Rang	Ämne	r-värde
1	Biologi	0,885
2	Fysik	0,863
3	Samhällskunskap	0,862
4	Kemi	0,859
5	Geografi	0,858
6	Historia	0,856
7	Religion	0,854
8	Svenska	0,801
9	Matematik	0,768
10	Hemkunskap	0,757
11	Teknik	0,740
12	Engelska	0,729
13	Musik	0,709
14	Bild	0,692
15	Idrott	0,665
16	Slöjd	0,655

Ett antal försök att extrahera fler faktorer från datamaterialet har inte givit någon ytterligare information.

5.3.2 Faktoranalys för de sju teoretiska ämnena

Ytterligare en faktoranalys genomfördes för de, exklusive basämnena, sju teoretiska ämnena: fysik, kemi, biologi, samhällskunskap, religion, historia och geografi. Tanken var att de underliggande sambanden skulle vara enklare att studera för de teoretiska ämnena, eftersom dessa i princip hade samma laddning i den första faktoranalysen (se tabell 5.3.3).

Planen var att efter extrahering av faktorer för de teoretiska ämnena kunna jämföra dessa med betygen i de tre basämnena och på så vis kunna söka efter samband mellan betyget i matematik och en faktor som bygger på matematisk-logisk förmåga, betyget i svenska och en språklig faktor etc.

Faktoranalysen, *Principal Axis Factoring*, genomfördes på ett sådant sätt att två faktorer extraherades. Därefter gjordes en rotering av faktormatrisen med metoden *Varimax with Kaiser Normalization*. Roteringen görs för att optimera kriterierna så att en variabel får hög laddning på *en* faktor och låg laddning på en *annan*.

TABELL 5.3.5 De roterade faktorernas förklaring av den totala variansen för de sju teoretiska ämnesbetygen.

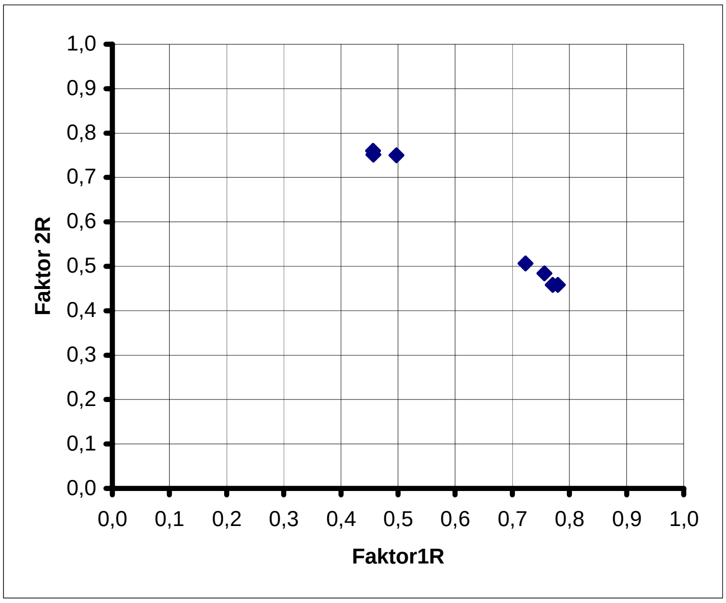
Factor	Initial Eigenvalues			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cum. %	Total	% of Variance	Cum. %
1	5,504	78,629	78,629	2,961	42,300	42,300
2	,481	6,877	85,506	2,616	37,374	79,674
3	,232	3,317	88,823			
4	,216	3,082	91,905			
5	,211	3,016	94,921			
6	,179	2,559	97,480			
7	,176	2,520	100,000			

Den första roterade faktorn förklarar ungefär 42 procent av variationen, och den andra 37 procent.

TABELL 5.3.6 Faktorladdningarna i fallande ordning för faktoranalysen i tabell 5.3.5.

	Factor	
	1	2
Biologi	,497	,750
Fysik	,457	,751
Kemi	,457	,760
Geografi	,723	,507
Historia	,780	,458
Religion	,771	,458
Samhällsk	,756	,484

Båda faktorerna är starkt korrelerade till den totala meritpoängen M16 (faktor 1R har r = 0,75 och faktor 2R har r = 0,79). Faktorerna 1R och 2R är sinsemellan svagt positivt korrelerade (r = 0,25). En grafisk presentation av faktorladdningarna ger en väldigt tydlig gruppering i de två klustren SO4 (geografi, historia, religion och samhällskunskap) samt NO3 (kemi, fysik, biologi).



FIGUR 5.3.1 De två roterade faktorerna plottade mot varandra. Klustret SO4 har höga värden på faktor 1R och klustret NO3 har höga värden på faktor 2R.

Beträffande faktor 2R skulle en hypotes kunna vara att denna speglar ämnenas krav på matematisk förmåga. I sådana fall borde matematikbetyget ha en positiv korrelation med faktorn. Denna hypotes visar sig också stämma någotsånär, även om sambanden inte är överdrivet starka. Tabell 5.3.7 visar korrelationen mellan basämnena och de två faktorerna.

TABELL 5.3.7 Korrelationen (r) mellan basämnenas betyg och faktor 1R och 2R.

	Korrelation faktor 1R	Korrelation faktor 2R
Matematik	0,50	0,65
Svenska	0,62	0,57
Engelska	0,55	0,53

Ytterligare en sak som talar för att faktor 2R har att göra med matematisk förmåga är sambandet som finns mellan faktorn och de olika betygsstegen i matematik, vilket tabell 5.3.8 visar. Ju lägre betyg i matematik desto lägre genomsnittligt värde fås på faktor 2R. På motsvarande vis finns samma trend mellan betyget i svenska och faktorn 1R.

TABELL 5.3.8 Medelvärden på faktorerna 1R och 2R för elevgrupper med olika betyg i basämnena.

Matematik	Faktor1R	Faktor 2R
MVG	0,69	1,05
VG/MVG	0,48	0,66
G/IG	-0,25	-0,35
IG	-1,19	-1,30
Svenska	**Faktor1R**	**Faktor 2R**
MVG	0,83	0,66
VG/MVG	0,46	0,44
G/IG	-0,48	-0,46
IG	-1,50	-1,28
Engelska	**Faktor1R**	**Faktor 2R**
MVG	0,68	0,67
VG/MVG	0,38	0,39
G/IG	-0,44	-0,45
IG	-1,31	-1,11

Filtrerar man fram de personer som uppnår mycket höga värden på 2R har de undantagslöst höga betyg i NO, men relativt låga i SO. De som har lägst värde på faktorn har låga betyg i NO och godkänt i SO. För faktor 1R gäller det omvända. Ett högt värde innebär mycket höga betyg i SO och relativt låga betyg i NO, medan ett lågt värde innebär extremt låga betyg i SO men till viss del ändå godkänt i NO-ämnena. De tio personer med högst värden på 2R ligger i medeltal högre i meritpoäng än de tio som har högst värden på 1R (275 mot 250). Det verkar som om denna faktor påverkar de höga betygen mer än den andra.

Det starkaste sambandet med faktor 1R har kemi och fysik. Det gäller då att påminna sig att dessa ämnen, till skillnad från matematiken, ligger till grund för framtagandet av faktorn. Ytterligare en förklaring till att matematik har ett svagare samband än de andra NO-ämnena kan vara den grupp elever som får IG i fysik och kemi, men som tack vare extra resurser når G i matematik. Genom att plocka bort de 97 individer som får G i matematik, men ej i de andra NO-ämnena, så ökar korrelationen mellan matematikbetyget och faktor 2R från 0,65 till 0,69.

Om man istället för basämnena väljer att fokusera på de ämneskluster som tagits fram i tidigare avsnitt, har som väntat faktor 1R en mycket stark korrelation med SO4 och faktor 2R mycket stark korrelation till NO3 (se tabellen nedan). Matematikämnet har på motsvarande sätt en starkare korrelation med NO3 och svenskämnet med SO4.

TABELL 5.3.9 Den linjära korrelationen (r) mellan faktorerna och ämnesklustren i jämförelse med basämnena.

Variabel	M13	SO4	NO3
Faktor 1R	0,75	0,93	0,57
Svenska	0,75	0,74	0,70
Faktor 2R	0,79	0,60	0,94
Matematik	0,73	0,67	0,73
Engelska	0,67	0,66	0,65

5.3.3 SLUTSATS

Det går att identifiera en tydlig faktor som är besläktad med SO- och en annan tydlig faktor som är besläktad med NO-ämnena. Ungefär 86 procent av betygsvariationen i SO-ämnena förklaras ensamt av faktor 1R och 32 procent av faktor 2R. För NO-ämnena gäller samma sak, men procentsatserna är omkastade så att samvariationen här är större med 2R än med 1R.

Sambandet mellan matematikbetyget och faktor 2R är starkt på samma sätt som sambandet mellan 1R och betyget i svenska. Den tydliga uppdelning i faktorerna 1R och 2R verkar alltså till viss del kunna ersättas av en uppdelning i de två förklarande variablerna svenska och matematik. De två sistnämnda har dock ett sinsemellan mycket starkare samband ($r = 0{,}62$) än vad 1R och 2R har ($r = 0{,}25$). Faktorerna 1R och 2R är mer renodlat anpassade till att skatta framgång i *ett* av de två ämnesklustren än vad matematik och svenska är. Betygen i de två basämnena är sinsemellan för lika beträffande informationsinnehåll för att tillsammans kunna ge en riktigt hög förklaringsgrad.

5.4 Modeller med multipel regression

I multipel regression studeras effekten av flera oberoende variabler på en beroende. De framräknade konstanterna används i forskningen för att uppskatta de olika oberoende variablernas grad av påverkan på den beroende. I detta kapitel genereras först en modell där faktorerna 1R och 2R från föregående kapitel ses som förklarande variabler för det totala meritvärdet M13. Därefter studeras samma sak igen, men nu med de tre basämnena som förklarande variabler. Slutligen byggs med path-analys en modell för att förklara sambanden mellan betyget i svenska, betyget i matematik och meritpoängen M13.

5.4.1 Basämnena som förklarande faktorer av M13

Tabell 5.3.7 tidigare visade sambandet mellan de tre basämnena och de i avsnitt 5.3.2 extraherade faktorerna ur betygen för de sju teoretiska ämnena. De två starkaste sambanden står att finna i kopplingen mellan matematikbetyget och faktor 2R samt svenskämnets betyg och 1R. Faktor 2R är starkare kopplad till de tre NO-ämnena och faktor 1R till de fyra SO-ämnena (tabell 5.3.9).

Trots detta är inte matematikbetyget starkare korrelerat till faktor 2R än 0,65. Matematikbetyget klarar alltså endast att förklara ungefär 42 procent av variationen i faktor 2R. (Siffran kan dock fås att öka till 48 procent om man räknar bort de elever som får G i matematik men IG i samtliga de tre andra NO-ämnena. Alltså de elever som förmodligen får extra stöd för att klara G i matematik.)

Frågan är då hur bra man med hjälp av betygen i basämnena klarar att förutsäga det samlade meritvärdet av betygen i övriga 13 ämnen (M13). För kontrollens skull görs först en uppskattning av faktorerna 1R:s och 2R:s förmåga att skatta M13. Det är då viktigt att hålla i minnet att 1R och 2R grundar sig på betygen i de sju teoretiska ämnena och alltså till stor del själva bygger på de data som nu ska förklaras.

Den modell som anpassats har varit av typen:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

där då x_1, x_2 utgör de två faktorernas inverkan (x_1 standardiserat värde för faktor 1R och x_2 standardiserat värde för faktor

2R) och där y representerar det standardiserade meritvärdet M13. För de 2 079 betygen hittades följande samband:

$$y = 0{,}669\ x_1 + 0{,}736\ x_2 \qquad R^2 \approx 0{,}95 \qquad \textit{(RegEkv 5.4.1)}$$

Som väntat är det framräknade sambandet starkt. Hela 95 procent av variationen i M13 går att förklara med de två faktorerna. Balansen mellan 1R och 2R är också ungefär densamma i modellen, även om 2R väger något tyngre. De naturvetenskapliga och samhällsvetenskapliga faktorerna verkar ha ungefär samma inflytande på meritvärdet i modellen.

Om beräkningen istället upprepas med de tre basämnena som oberoende variabler och med det standardiserade M13-värdet som beroende, erhålls istället följande modell (x_1 standardiserat betygsvärde för svenska, x_2 och x_3 motsvarande för matematik och engelska). Förklaringsgraden dalar till 68 procent - men nu handlar det, till skillnad från den tidigare regressionen, om variabler som inte bygger på de betygsdata som ska förklaras!

$$y = 0{,}412\ x_1 + 0{,}383\ x_2 + 0{,}142\ x_3 \qquad R^2 \approx 0{,}68 \qquad \textit{(RegEkv 5.4.2)}$$

Beträffande förklaringsgraden hos de olika variablerna ser vi att svenskämnet har störst inflytande och ämnet engelska minst. Faktum är att engelskan kan tas bort från modellen utan att man förlorar särskilt mycket i förklaringsgrad. Detta hänger samman med att det finns en stark korrelation mellan betyget i svenska och engelska vilket gör att engelskämnet i sig inte tillför särskilt mycket unik information utöver den som finns i svenskbetyget.

$$y = 0{,}489\ x_1 + 0{,}421\ x_2 \qquad R^2 \approx 0{,}67 \qquad \textit{(RegEkv 5.4.3)}$$

Tolkningen blir alltså att en höjning av betyget i svenska med *en* standardavvikelse medför en höjning av M13 med 0,489 standardavvikelser under förutsättning att matematikbetyget hålls konstant. En reduktion till de två variablerna matematik och svenska förklarar alltså 67 procent av variationen i M13. I modellen väger svenskbetyget aningen tyngre än matematikbetyget.

Om däremot en uppdelning görs i de två ämnesklustren SO4 respektive NO3 syns att matematikämnet spelar en större roll för att förklara det naturvetenskapliga betygen och vice versa.

Förklaringsgraden blir totalt sett högre i modelleringen av NO-ämnena.

SO4: $y = 0{,}525\ x_1 + 0{,}340\ x_2$ $\qquad R^2 \approx 0{,}61$ *(RegEkv 5.4.4)*

NO3: $y = 0{,}407\ x_1 + 0{,}477\ x_2$ $\qquad R^2 \approx 0{,}64$ *(RegEkv 5.4.5)*

Ett alternativ till att dela upp efter ämneskluster är att dela upp efter storleken på meritpoäng. Om man låter medianen för M13 (165 poäng) dela materialet i två hälfter och upprepar regressionsanalysen visar det sig att matematikbetyget innehåller mer information för att förklara höga meritvärden och svenska mer information för att förklara de låga meritvärdena. Att värdet på determinationskoefficienten sjunker är en helt naturlig statistisk effekt av att variationsvidden i materialet nu minskas.

Högt M13: $y = 0{,}409\ x_1 + 0{,}464\ x_2$ $\qquad R^2 \approx 0{,}52$ *(RegEkv 5.4.6)*

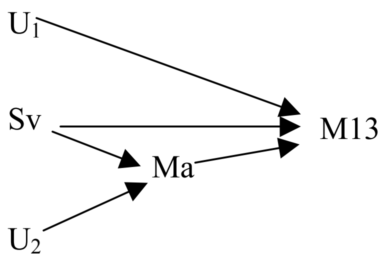
Lågt M13: $y = 0{,}382\ x_1 + 0{,}376\ x_2$ $\qquad R^2 \approx 0{,}42$ *(RegEkv 5.4.7)*

5.4.2 PATH-ANALYS

Path-analys används i biologisk och sociologisk forskning för att värdera olika faktorers inverkan på en beroende variabel. Metoden syftar också till att beskriva en komplicerad bild av samspel mellan olika variabler.

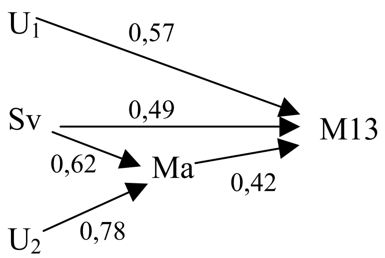
Antag att modellen i figur 5.4.1 nedan gäller. Kunskaperna i svenska, t.ex. läsförmåga, påverkar prestationerna i matematik. Prestationerna i matematik påverkas dessutom av ett antal andra faktorer, oberoende av svensk-variabeln och samlade i variabeln U_2. Kunskaperna i matematik och svenska påverkar också den totala meritpoängen M13. Denna påverkas även av en massa andra faktorer samlade i U_1.

De två variablerna U_1 och U_2 är alltså en form av konstruerade variabler som illustrerar osäkerheten i modellen och summan av de faktorer som det inte finns kontroll på i studien. Det kan t.ex. vara biologiska och sociala faktorer, fallenhet för ämnet etc.



FIGUR 5.4.1 Modellskiss för hur betyget i svenska och matematik påverkar M13. Den variation som inte kan förklaras av dessa betyg samlas i variablerna U1 och U2.

Utifrån RegEkv 5.4.3 kan då följande kvantifiering av samspelen mellan de inblandade variablerna göras. r-värdet för sambandet mellan två variabler fås genom att multiplicera vägarnas konstanter med varandra.



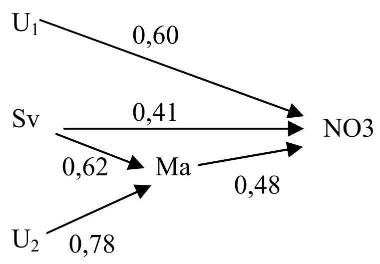
FIGUR 5.4.2 Realisering av modellen i figur 5.4.1 utifrån föreliggande data.

Slutsatsen blir att svenskbetyget klarar att förklara 39 procent av matematikbetyget. Resterande 61 procent beror på andra faktorer. Vidare klarar i modellen ovan matematik- och svenskbetyget tillsammans att förklara 67 procent av den totala variansen i meritpoäng (jfr RegEkv 5.4.3 som visade samma sak).

Korrelationen (r) mellan matematik och M13 t.ex. ges i figuren av:

$0{,}42 + 0{,}62 \cdot 0{,}49 \approx 0{,}73$ (jämför med tabell 5.2.1).

Motsvarande modell för NO-ämnena skulle då bli:



FIGUR 5.4.3 Modellskiss för sambandet mellan matematik, svenska och meritpoängen i NO3.

Korrelationen (r) mellan matematik och NO3 t.ex. ges i figuren av:

$0{,}48 + 0{,}62 \cdot 0{,}41 \approx 0{,}73$. Motsvarande siffra för svenska och NO3 blir ca 0,70.

5.4.3 SLUTSATS

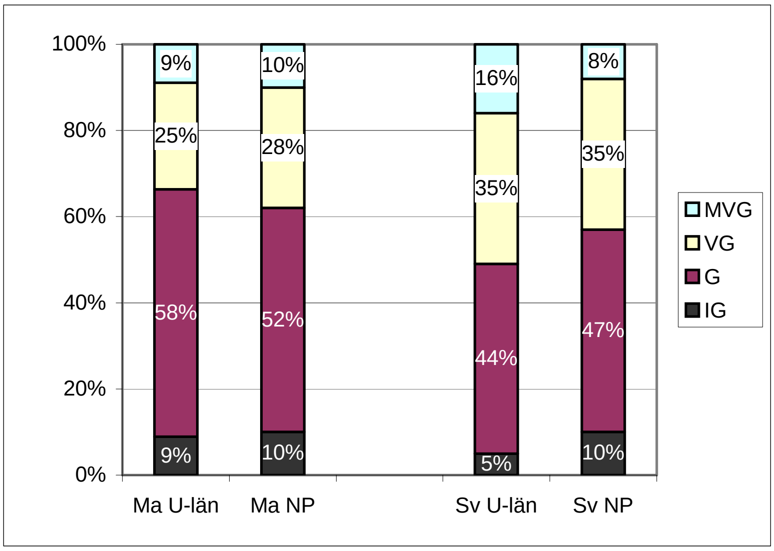
Svensk- och matematikbetygen klarar tillsammans att förklara 67 procent av den totala variationen i M13. Matematikbetyget betyder mest för NO-ämnena och svenskbetyget mest för SO-ämnena. I en uppdelning av eleverna efter totalt M13-värde klarar svenskbetyget att förklara mest för de med *låga* och matematikbetyget mest för de med *höga* M13-värden.

En egenhändigt konstruerad förklaring till utfallet är att svenska och matematik speglar olika nivåer i en kognitiv utveckling. Matematikbetyget är beroende av vissa grundläggande kunskaper i svenska. För att nå framgång i NO-ämnena krävs dock *dessutom* en matematisk förmåga och därför är sambandet något starkare mellan matematikbetyget och NO3 än mellan svenskbetyget och NO3. För SO-ämnena krävs inte matematikkunskaper i samma omfattning och här förklarar svenskbetyget mest.

5.5 ÄMNEN MED HÖGA KRAV

Som tidigare visats i tabell 5.1.5, och som också framgår av nedanstående figur, är det mycket färre elever i denna undersökning som når överbetygen VG eller MVG i matematik (ca 35 %) än vad det är i svenska (ca 51 %) och engelska (54 %). Denna tendens stämmer också väl med Skolverkets egna mätningar (Skolverket, 2003 b). Skolverket har tagit ett slumpmässigt urval av de nationella proven (NP) i hela Sverige från år 2003 och utifrån dessa gjort en egen bedömning av vilka betyg dessa arbeten motsvarar.

Även i Skolverkets betygsättning var det fler som fick överbetyg i de två språkämnena än vad det var som fick det i matematik. I Skolverkets undersökning var det 38 procent av eleverna som nådde VG eller MVG i matematik, medan motsvarande siffra i ämnet svenska var 43 procent. I en jämförelse mellan betygsfördelningen i föreliggande undersökning och den Skolverket fick fram är det intressant att notera att för eleverna i Västmanland delades det ut *färre* överbetyg i matematik men samtidigt *fler* överbetyg i svenska än vad NP för hela riket angav.



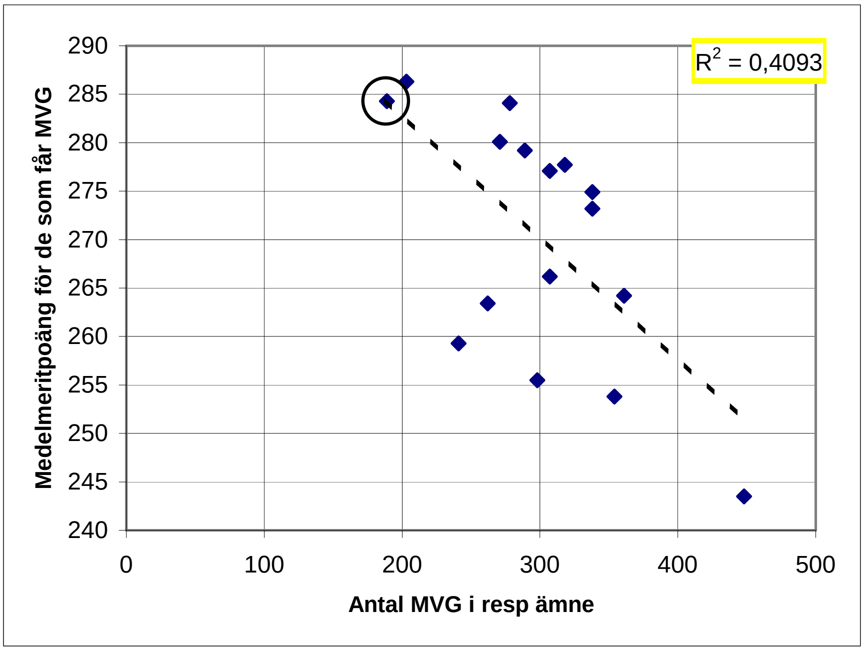
FIGUR 5.5.1 Jämförelse mellan betygsfördelning i föreliggande undersökning och Skolverkets betygsättning av de nationella proven för ett urval elever år 2003.

I föreliggande undersökning (U-län) verkar alltså betygsättningen stämma bättre med NP i matematik än i svenska. Andelen som inte fick godkänt i matematik är ungefär densamma i båda undersökningarna, medan det skiljer en hel del beträffande andelen IG i ämnet svenska (5 % mot 10 %). Jämförelsen tyder alltså på att de nationella proven har större betydelse för betygsättningen i matematik än för betygsättningen i svenska.

Tidigare i den här rapporten har visats att elever med höga betyg i matematik i stor utsträckning också når hög total meritpoäng. Kan det vara så enkelt att matematik ställer högre krav på eleven och att det just är dessa höga krav som gör att elever med bra betyg i matematik också i stor utsträckning når framgång i andra ämnen? Om man hade haft samma höga krav i svenska skulle man i så fall även här kunna uppvisa liknande samband? Ett försök att besvara dessa frågor görs i avsnitt 5.5.1 nedan.

5.5.1. Samband mellan antalet MVG och M13

Om man plottar antalet MVG i respektive ämne mot den genomsnittliga meritpoäng som dessa elever får visas en tydlig negativ trend; de elever som får MVG i ämnen där få höga betyg utdelas får generellt en högre genomsnittlig meritpoäng än gruppen elever får som når MVG i ett ämne där många får betyget.



Figur 5.5.2 Antal utdelade MVG-betyg i respektive ämne och den genomsnittliga meritpoängen för de som når MVG i ämnet. Värdet för matematik är den inringade punkten långt upp till vänster.

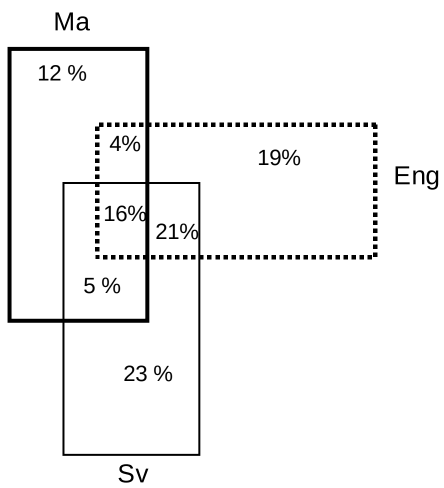
För att undersöka om detta är förklaringen till att elever med höga betyg i matematik också lyckas i andra ämnen har följande analys genomförts. Ur datamaterialet har två disjunkta grupper med personer filtrerats fram:

i) De som når MVG i matematik men ej i både svenska och engelska.

ii) De som når MVG i både svenska och engelska, men ej i matematik

Därefter har genomsnittligt M13-värde beräknats för de två grupperna. Om hypotesen är riktig att det är de höga kraven i matematik som ger skillnaden bör denna nu i princip eliminerats.

Som syns i Venn-diagrammet nedan (figur 5.5.3) är det ungefär lika många som når MVG i *både* svenska och engelska (21 %) som det är som når det i matematik men *inte* i båda de andra ämnena (12 % + 4 % + 5 % = 21 %). Detta talar för att det – rent statistiskt – är ungefär lika svårt att nå MVG i matematik som att nå det i *både* svenska och engelska. Det blir alltså två grupper med ungefär 100 elever i varje grupp.



FIGUR 5.5.3 Av de 515 eleverna med MVG i *något* basämne hade 21 % ”MVG i både svenska och engelska, men ej i matematik”. Det var lika stor andel som hade ”MVG i matematik, men ej i svenska och engelska”.

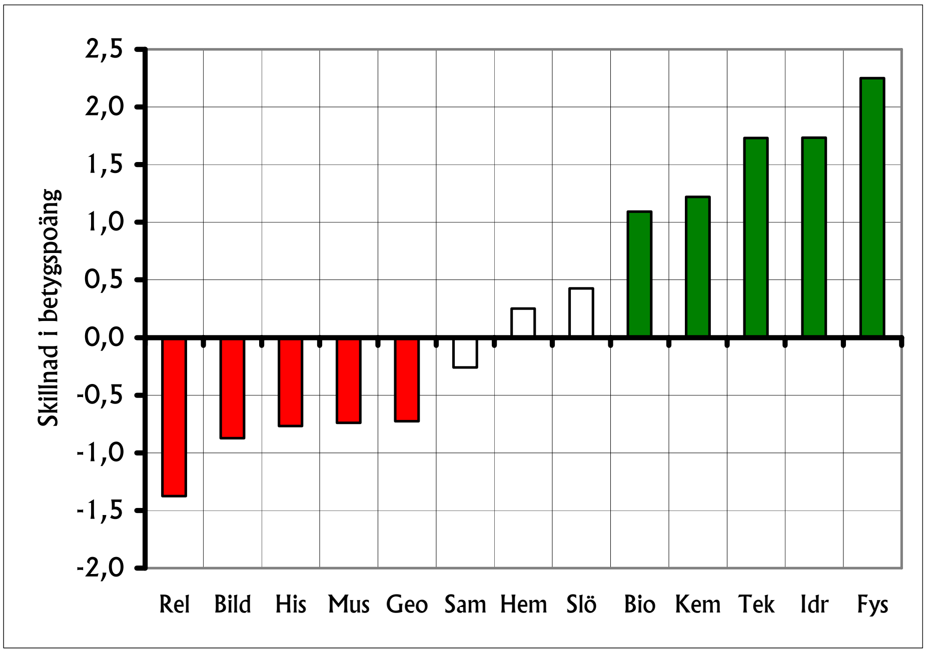
Gruppjämförelsen ger resultatet som presenteras i tabell 5.5.1 nedan visar att de med högt betyg i både svenska och engelska i genomsnitt klarar sig sämre än de som har MVG i matematik. Skillnaden är dock inte tillräckligt stor för att vara statistiskt signifikant. Det går alltså inte att utifrån det analyserade betygsmaterialet dra någon säker slutsats.

TABELL 5.5.1 En jämförelse mellan de elever som når ”MVG i matematik men ej i svenska och engelska” och de elever som når ”MVG i både svenska och engelska men ej i matematik”.

	Medelvärde M13	Stdavv M13	Antal observationer
MVG i ma, ej i både sv och eng	218,2	24,450	107
MVG i både sv och eng, ej i ma	214,2	24,083	108

Om däremot en uppdelning görs på de två ämnesklustren SO4 och NO3 fås signifikanta resultat. De med högt matematikbetyg får ett mycket klart högre meritvärde i NO än vad gruppen som hade höga språkbetyg får. Här är skillnaden mycket tydligt signifikant ($p < 0,001$). Omvänt får de med höga språkbetyg ett signifikant högre värde på SO4 än vad de med höga betyg i matematik får ($p< 0,05$).

Görs en uppdelning på olika ämnen fås följande bild (figur 5.5.4). För de tre ämnena samhällskunskap, hemkunskap och slöjd finns ingen signifikant skillnad mellan de två gruppernas betygspoäng. För ämnena religion, bild, musik och geografi ges de i gruppen med högt språkbetyg ett högre genomsnittligt betygsvärde. För ämnena biologi, kemi, teknik, idrott och fysik är det tvärtom gruppen med högt matematikbetyg som når de högsta genomsnittliga betygen.



FIGUR 5.5.4 Skillnad i betygspoäng mellan två grupper i) de med höga betyg i matematik och ii) de med höga betyg i svenska och engelska. Staplar riktade nedåt innebär att gruppen med höga språkbetyg fick ett högre genomsnittsbetyg medan staplar riktade uppåt innebär att gruppen med högt matematikbetyg fick ett högre betygsmedelvärde i dessa ämnen. För de vita staplarna i mitten av diagrammet är inte skillnaderna signifikanta ($p > 0,05$).

5.5.2 SLUTSATS

För de i denna studie analyserade betygen säger ett högt betyg i matematik mer om en elevs samlade studieresultat än vad ett högt betyg i svenska gör. Det är betydligt färre som når ett överbetyg i matematik än vad det är i svenska (34 % mot 51 %) . Medan andelen överbetyg i matematik väl stämde överens med andelen överbetyg för hela landet i de nationella proven så var skillnaden i svenska stor (51 % i studien mot 43 % i de nationella proven). Man kan spekulera i om detta kan hänga samman med att matematikbetygen är mer reliabla än svenskbetygen. Detta skulle i sin tur då kunna hänga samman med att svårigheten, och därmed också osäkerheten, i betygsättningen är större i svenska än vad den är i matematik.

I ett läge när en elev står och väger mellan två betyg i svenska och ett antal komplexa bedömningar ska göras och vägas samman av läraren så väljer säkert många att i första hand ta hänsyn till elevens *goda* prestationer. Man vill i osäkra fall hellre fria än fälla, hellre sätta för högt än för lågt betyg. I matematik däremot är det sannolikt i mycket större utsträckning enbart prestationen på proven som fäller avgörandet (jfr Skolverket 2003 b).

Om de med ”MVG i matematik men ej i svenska och engelska” hade nått ett signifikant högre resultat än de med ”MVG i både svenska och engelska men ej matematik” beträffande meritpoängen i övriga 13 ämnen, hade man kunnat påvisa ett samband mellan matematikbetyg och generell studiekompetens. Detta går inte att hävda nu, eftersom resultatet inte riktigt var signifikant. Den troligaste förklaringen till att ett högt matematikbetyg bättre predicerar god studieförmåga i studien är alltså att kraven för att nå ett högt betyg är högre än i andra teoretiska ämnen.

Tidigare har visats att de som når de höga betygen i ett ämne också till stor del gör det i andra ämnen. Denna analys visar att även om detta gäller för de flesta framgångsrika elever så finns det trots allt en grupp elever med höga matematikbetyg som verkar nå framgång i främst NO-ämnena och en annan grupp elever med höga språkbetyg som verkar nå framgång främst i SO-ämnena. Det finns helt enkelt mer information i höga språkbetyg för att uppskatta framgången i ämnen som religion och bild medan det finns mer information i matematikbetyget för att uppskatta framgångar i ämnen som fysik och idrott.

Rakt igenom hela den statistiska analysen i denna rapport har denna uppdelning av ämnen i de två klustren SO4 och NO3 gått. I figur 5.5.4 återfinns SO-ämnena till vänster och NO-ämnena till höger. Man kan fråga sig hur mycket av detta som beror på ämnenas innehåll och hur mycket som har att göra med den kultur som utvecklats hos ämneslärarna kring betygsättningen. Troligast är väl ändå att förklaringen till skillnaderna primärt ligger i skillnader hos eleverna; att olika individer har olika fallenhet för antingen språkliga eller mer matematiska ämnen.

6. SAMMANFATTANDE DISKUSSION

I detta avsnitt är ambitionen att sammanfatta och diskutera de i studien framkomna resultaten i relief mot den teoretiska genomgång som gjordes i de inledande kapitlen.

6.1 MATEMATIKÄMNETS SÄRSKILDA KARAKTÄR

Matematikämnet har flera egenheter jämfört med skolans övriga teoretiska ämnen. Ämnet har, som det gestaltar sig i styrdokument för dagens svenska skola, ett mer komplext förhållande till olika typer av kunskap. Matematik är inte enbart faktakunskaper och behärskandet av en praktik utan även ett ämne där filosofiska frågor om grunderna för vårt vetande tangeras (Linde, 2003).

I ett kulturhistoriskt perspektiv är också matematik ett ämne som funnits med så länge som det funnits skolor och som dessutom till sitt innehåll varit förhållandevis konstant genom historien (Niss, 1996). Svenska högstadieelever av idag får exempelvis studera geometrins grunder, precis som de utbildningsmässigt gynnade i det antika Grekland fick för över 2 000 år sedan. Enligt Lundgren (1979) utgör matematik själva urbilden för vad vetande är. När man lär sig matematik lär man sig enligt Lundgren inte bara vad matematik har för värde utan också hur man ska ”uppfatta kunskap och vad som är kunskap värd att veta”.

Som visades i kapitel två förkommer i dagens debatt ibland argumentet att studier i matematik utvecklar intellektet. Att förvärva matematikkunskaper är som en kunskapsresa till sjöss där man hela tiden riskerar att gå på grund och ständigt måste ha en beredskap för att ompröva delar av sin världsbild. För framgång i matematik krävs energi och fokuserad uppmärksamhet. För att befästa kunskapen krävs tålamod och ihärdig övning, övning som inte alltid är lustfylld (Lundberg & Sterner, 2004). Uttryckt med Ciceros ord: ”*Litterarum radices amaras, fructus dulces* ”, ”kunskapens rötter är bittra men dess frukter ljuva”. För att klara sig väl i matematik krävs utvecklande av kognitiva förmågor och metakognitiva strategier. En person som under problemlösningsfasen aktivt och kritiskt ställer sig själv övergripande metakognitiva frågor om huruvida den använda metoden leder till en lösning lyckas oftare nå målet (Schoenfeld, 1992).

Oavsett hur det är med matematikens formalbildande effekt finns mycket som talar för att matematikämnet är ett område där elevens kognitiva förmåga ändå kan mätas och bedömas. Stöd för detta finns också i de betygsresultat som framkommit i föreliggande studie. Den deskriptiva statistiska analysen av datamaterialet visar att:

- Signifikant färre överbetyg (VG eller MVG) delas ut i ämnet matematik än vad som görs i andra skolämnen (se tabell 5.1.5).

- En elev med överbetyg i matematik med stor sannolikhet (0,67) tillhör den fjärdedel av eleverna som når högst sammantaget meritvärde, M16 (se tabell 5.1.4). Matematikbetyget fungerar i denna mening som en bättre indikator på generell studieframgång än vad något annat ämnesbetyg gör.

- En elev med betyget ”icke godkänd” i matematik med mycket stor sannolikhet (0,98) tillhör den fjärdedel av eleverna med lägst samlat meritvärde, M16 (se tabell 5.1.3). Sambandet är dock här ännu starkare för en elev som inte når godkänt i svenska. Ett underbetyg i svenska indikerar helt säkert att eleven tillhör den sämsta fjärdedelen beträffande meritpoäng.

6.2 BETYGENS FÖRMÅGA ATT SKATTA STUDIEFRAMGÅNGEN

I studiens statistiska del användes en uppsättning verktyg i dataprogrammet SPSS för att studera och modellera samband mellan betygsutfallen i olika ämnen. Särskilt studerades hur betygen i de tre basämnena (svenska, matematik och engelska) kunde användas för att predicera individens samlade betygsresultat i övriga tretton ämnen, i studien benämnt M13.

Kortfattat gav analysen följande resultat:

- Ämnesmässigt grupperar sig betygen naturligt i fyra olika kluster. Ett block med de tre basämnena, ett med de tre NO-ämnena, ett med de fyra SO-ämnena och slutligen ett med de övriga sex, mer praktiskt inriktade ämnena. Den traditionella indelning i ämnesgrupper som finns på skolorna går alltså också att identifiera i betygsutfallen (se figur 5.2.1).

- Matematikbetyget betyder mest för att förklarar resultaten i NO-ämnena och svenskbetyget mest för SO-ämnena. I en uppdelning av eleverna efter totalt M13-värde klarar svenskbetyget att förklara studieutfallet bäst för elever med *låga* och matematikbetyget för elever med *höga* M13-värden.

- I en faktoranalys av betygsutfallet i de sju teoretiska ämnena kunde två distinkta faktorer urskiljas. Den ena faktorn var starkt positivt korrelerad till resultat i NO-ämnen och den andra till resultat i SO-ämnen (se figur 5.3.1). Matematikämnet var starkare kopplat till den ena och svenskämnet till den andra av dessa två extraherade faktorer. Däremot var matematik- och svenskbetygen sinsemellan mer besläktade än vad de framräknade faktorerna var (se tabell 5.3.7).

- Den multipla regressionsanalysen gav i princip samma utfall som tidigare använda analysverktyg. Svensk- och matematikbetygen klarar tillsammans att förklara 67 procent av den totala variationen i M13. Betyget i engelska tillför väldigt lite ytterligare information till förklaringsmodellen (se RegEkv 5.4.3). Svenskbetyget klarar ensamt att förklara nästan 40 % av variationen i matematikbetyget (se figur 5.4.3).

Att använda datorprogram för att analysera ett statistiskt material har både för- och nackdelar. Positivt är att de mönster som datorn kan lägga i dagen knappast grundar sig i undersökarens subjektiva fördomar. Å andra sidan blir resultaten mycket svårtolkade. Att vid en faktoranalys få fram ett antal faktorer och sedan bakvägen försöka resonera sig fram till vad dessa faktorer representerar är svårt och slutsatserna i det sista steget känns osäkra. Det blir ett blackbox-fenomen där man ser indata och utdata men inte riktigt vet vad som hänt på vägen. Det är ju långt ifrån säkert att de faktorer som extraheras är renodlat tolkningsbara i vår sinnevärld. De kan lika gärna vara artificiellt mixade konstruktioner av det vi skulle vilja definiera som ingående förklarande variabler. En faktor som faller ut och som vi skulle vilja tolka som ”läsförståelse” kanske i stället reflekterar ”50 procent läsförståelse och 50 procent förmåga att föra deduktiva resonemang”. Som novis är risken stor att man tappar kontrollen och därmed inte kan nå fullständig förståelse för de statistiska mönster som presenteras.

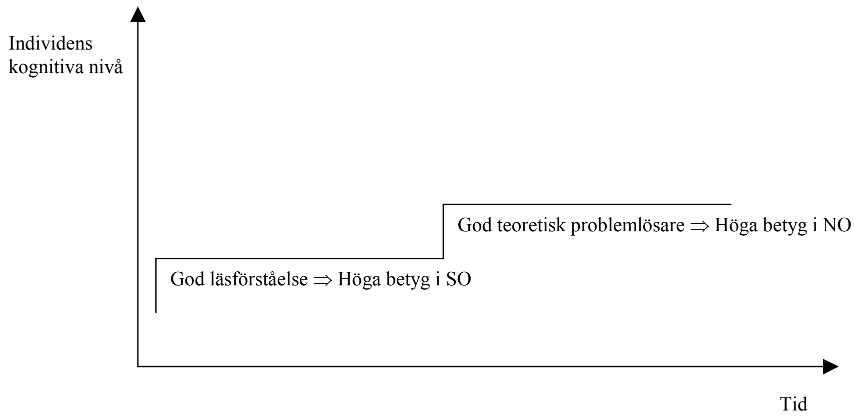
6.3 Matematik och läsförståelse

Man kan ändå spekulera i vad de framkomna resultaten i faktoranalysen kan bero på. En möjlighet är att svensk- och matematikbetygen, åtminstone på högstadiet, speglar olika nivåer i elevernas kognitiva utveckling. Hela 70 % av de elever som får ”icke godkänd” i svenska får det också i matematik och av de som får ”icke godkänd” i minst ett av basämnena är det nästan fyra gånger fler som får det i enbart matematik än som får det i enbart svenska. Motsvarande tendens finns även för de som lyckas bra i skolan. Av de elever som får överbetyg ("väl godkänd" eller "mycket väl godkänd") i matematik är det höga 86 procent som också får det i svenska, och av de elever som får minst "väl godkänd" i något av basämnena är det tre gånger vanligare att de får detta enbart i svenska än att de får överbetyget enbart i matematik (se figur 5.2.2 och 5.2.3).

Slutsatsen blir att den kognitiva ribban verkar ligga på en högre nivå i ämnet matematik än i ämnet svenska. Klarar man inte att komma över ribban för godkänt i svenska gör man det sannolikt inte heller i matematik och klarar man att få ett överbetyg i matematik klarar man det sannolikt även i svenska.

Om vi håller oss till de teoretiska skolämnena verkar det rimligt att anta att läsförståelse har en avgörande betydelse för betygsutfallet i samtliga dessa ämnen. Rimligen borde också betyget i svenska vara nära kopplat till denna läsförståelse. Det bör här betonas att det är stor skillnad på att vara läskunnig och att ha en god läsförståelse. I beskrivningen "god läsförståelse" ryms metakognitiva förmågor vilka innebär att individen aktivt och strategiskt bearbetar texten, en eller flera gånger, till dess att förståelse uppnås. En skicklig läsare klarar att transformera budskapet till egenhändigt skapade scenarier och på så sätt värdera hållbarheten i författarens påståenden. För att nå studieframgång i NO-ämnena krävs dock *utöver* denna läsförståelse en annan metakognitiv förmåga nämligen den att kunna föra ett deduktivt resonemang i teoretiska problemlösningssituationer. Samma förmåga till "att utifrån givna förutsättningar med hjälp av logiska resonemang dra korrekta slutsatser" som Högskoleverket anser vara en bieffekt av studier i matematik (Högskoleverket, 2003:20, sidan 125).

En elev med god läsförståelse skulle därmed ha goda chanser att nå höga betyg i SO-ämnena och en elev som *dessutom* har en teoretisk problemlösningsförmåga skulle kunna nå höga betyg i NO-ämnena. Det är dock viktigt att understryka att den förmåga till problemlösning jag talar om här gäller den för skolan typiska; nämligen den teoretiska förmågan att lösa problem inbakade i en textmassa.



FIGUR 6.3.1 En modell för att skildra hur god läsförståelse och god teoretisk problemlösningsförmåga sinsemellan kan hänga samman som olika platåer i individens kognitiva utveckling. God läsförståelse kan leda till höga betyg i SO medan höga betyg i NO ofta också förutsätter en god förmåga att lösa den typ av teoretiska problem som är vanliga i skolan. Egen konstruktion.

Ovanstående modell skulle kunna förklara varför det sätts fler överbetyg i SO- än i NO-ämnen (se tabell 5.1.5). Färre elever har i nionde klass hunnit så långt i sin kognitiva utveckling att de klarar att uppfylla kriterierna för överbetyg i NO-ämnena. Modellen skulle också förklara det polariserade utfallet av faktoranalysen där betygen i NO och matematik var starkare kopplade till den ena faktorn och betygen i SO till den andra (se tabell 5.3.9). För denna modell talar också resultat i Pisa samt Mölleheds studie där en stor del av felen i matematikuppgifterna berodde på en omognad hos eleven att tolka själva problemställningen i texten (OECD, 2004; Möllehed, 2001).

Modellen i figur 6.3.1 ska dock tolkas som *en* möjlig och kraftigt generaliserad förklaring. Läsförståelse och teoretisk problemlösningsförmåga utvecklas nog i realiteten genom växelverkan i ett komplicerat samspel. Mot modellen talar också Fröjds studie där elever kunde nå höga betyg i svenska trots en låg grad av läsförståelse. Förhåller det sig så i svenska kan det säkert vara så i även i andra ämnen.

En alternativ förklaring till föreliggande utfall skulle kunna vara att det finns olika typer av intelligens och att olika individer har fallenhet för olika saker (jfr Gardner, 1994). I så fall kanske det är så att matematik mäter NO-förmåga och svenska SO-förmåga, men att kraven i svenska är lägre ställda. Det sistnämnda skulle i sin tur kunna hänga samman med att kriterierna i svenska är svårare att tillämpa för lärarna och att de när de är osäkra ofta väljer att sätta ett högt betyg istället för ett lågt, något som i sin tur ger betyget ett lägre prognosvärde för generell studieframgång.

Ytterligare en förklaring skulle kunna finnas däri att olika betygskulturer utvecklats i olika discipliner. Det är trots allt inte elevernas prestationer, utan lärarnas bedömning av dessa prestationer, som illustreras i betygen.

6.4 Frågan om matematikens formalbildande verkan

Den enskilt viktigaste faktorn för graden av måluppfyllelse vid inlärning är hur mycket tid eleven lägger ned på sina studier (Walberg, 2003). Det vi människor lägger tid på blir vi allmänhet också bra på. Hur mycket tid vi lägger på olika studier beror i sin tur på en mängd olika saker som har att göra med intresse och motivation men även med fallenhet, envishet, självbild osv. I svenska grundskolans kursplaner är matematik det ämne efter modersmålet som upptar flest timmar i kursplanerna (se länk B). Makthavarna har uppenbarligen ansett det viktigt att eleverna når goda kunskaper i matematik.

Det vanligast förekommande argumentet för att alla elever ska studera matematik i dagens skola är att det är ”nyttigt”. Detta svar får man vare sig man ställer frågan till aktiva politiker, till blivande matematiklärare eller till aktiva matematikdidaktiker. Bilden är entydig, matematik anses som nyttigt. På vilket vis verkar dock svårare att ge konkreta svar på. Många forskare har pekat på detta faktum; det är svårt att ange situationer där gemene man verkligen har en direkt nytta av matematik utanför skolans gränser (se t.ex. Dörfler & McLone, 1986; Fibæk Laursen, 2005).

Den matematik som lärs ut på grundskola och gymnasium överskrider med råge de matematikbehov som den vanlige arbetstagaren har för att klara sin anställning (Romberg, 1992). Alla som går på grundskolan ska lära sig grunderna i algebra, men få kommer i sitt arbete ställas inför en situation där de behöver ställa upp och lösa en ekvation. Skolkunskaper i matematik motiveras därför idag främst med att de behövs för kommande studier (Swahn, 2006). På grundskolan motiveras de med att man behöver dem för att klara gymnasiet, på gymnasiet med att de krävs för att klara studierna på högskolan osv. Matematikkunskaper är alltså primärt tillämpliga i skolan (Fibæk Laursen, 2005).

Om det nu är så, vilket jag försökt argumentera för ovan, att matematikbetyget med sin starkt differentierande effekt ger stöd för att bedöma en elevs kognitiva nivå, är det då också så att dessa matematikstudier utvecklar individens kognitiva förmåga? Resultaten som redovisas ovan skulle ju alternativt kunna förklaras med att det är de höga kraven i sig – och inte ämnets innehåll och karaktär – som leder till att matematikbetyget fungerar som en god markör för generell studieframgång. Är det så att träning i matematik skärper den intellektuella förmågan på alla områden, något flera filosofer och pedagoger i historien varit inne på (exempelvis Platon, Humboldt och Herder)?

Mina resultat i studien talar inte generellt för detta. I den analys som görs i avsnitt 5.5 jämförs betygsresultaten för de elever som når betyget MVG i just matematik men ej i både svenska och engelska med de elever som tvärtom får MVG i både svenska och engelska men ej i matematik. I studien är dessa två elevgrupper ungefär lika stora och svårighetsgraden att tillhöra grupperna därmed statistiskt jämförbar. Analysen visar att den av de två elevgrupperna som får högst betygspoäng i övriga ämnen visserligen är de med MVG i matematik, men att skillnaden är för liten för att vara statistiskt signifikant (se tabell 5.5.1).

Genom att bryta ned resultaten i denna delstudie på ämnesnivå ser man att elever med MVG i matematik når högre betyg i NO-ämnena medan elever med MVG i både svenska och engelska når högre betyg i SO-ämnena. Skillnaderna i betyg mellan grupperna är dock större i NO- än i SO-ämnena (se figur 5.5.4). Den kognitiva nivå som matematikbetyget mäter ger alltså inte med automatik utdelning i SO-ämnena. Denna analys talar istället för att det – utöver den stora grupp elever som klarar sig väl i alla teoretiska ämnen – finns två elevgrupper; en med höga matematikbetyg som verkar nå framgång främst i NO-ämnena och en annan med höga språkbetyg som verkar nå framgång främst i SO-ämnena.

För att beskriva förklaringsmekanismer till olika studieprestationer krävs mer information än vad som ryms i betygen, data som tydligt avspeglar elevens kognitiva nivåer och processer under problemlösningsfasen. Det kan exempelvis handla om analyser av elevlösningar på nationella prov och specialdesignade test. Detta, och särskilt symbolhanteringens roll för graden av framgång i studierna, kommer förhoppningsvis att bli föremål för framtida forskningsprojekt.

6.5 Vad säger matematikbetyget?

Avslutningsvis: Vad ger då matematikbetyget för information? Tidigare forskning har visat att dagens svenska betygssystem dras med flera validitets- och reliabilitetsproblem (Wikström, 2005). Problemen verkar dock generellt vara större för andra ämnesbetyg. Ett tecken på detta är att problem med betygsinflationen i högre grad påverkar övriga ämnen (se tabell 3.4.2). En trolig förklaring kan vara att betygsättning i matematik oftare endast sätts som en konsekvens av resultat på prov, medan betygsättningen i exempelvis svenska måste ske utifrån en mer komplex och subjektiv uppskattning av elevernas förmågor.

Jämförelser mellan resultat på högskoleprov och betyg för att predicera studieresultat på högskolenivå har givit vid handen att betygen utgör ett bättre prognosunderlag än vad provresultat gör (Gustafsson, 2000). Den naturliga förklaringen till detta är att betyget bättre speglar faktorer som inte fullt ut fångas upp i en enstaka provsituation, som exempelvis flit, uthållighet och motivation.

I en jämförelse av olika värderingssystems bedömningar av matematikkunskaper kunde visas att dessa klassade nivån på kunskaperna på ett likartat sätt. Den bedömning i graden av matematisk förståelse som gjordes i SOLO och van Hieles modeller överensstämde väl med Skolverkets betygskriterier (Nyström, 1998). Validiteten i betygskriterierna måste därför rimligen kunna betraktas som god.

Min slutsats blir att betyget i matematik på ett tydligare sätt än många andra ämnesbetyg mäter den kognitiva förmågan till teoretisk problemlösning hos eleven. Stöd för detta finns också i PISAS:s studie där sambandet mellan resultaten på matematikdelen var mycket starkt positivt korrelerade med resultaten på problemlösningsdelen (OECD, 2004). Risken som Vygotsky såg, att eleven med framgång använder sig ”mer av minnet än av tänkandet”, är minimal i matematik. Den tydliga kontrast som finns mellan vad som är riktigt och vad som är felaktigt gör det också enklare för läraren än i andra ämnen att ranka elevers prestationer och mått av förståelse. Lärarnas bedömning av elevarbeten i matematik tror jag generellt tvingar dem till färre subjektiva värderingar än i andra ämnen, vilket i sin tur leder till en högre reliabilitet i betygen (Wikström, 2006 ; Linde, 2003 ; Skolverket 2003 b).

Vad säger då matematikbetyget? Ett G i matematik säger egentligen inte särskilt mycket, och över 50 procent av eleverna i studien får detta betyg i matematik. Eleven kan då vara teoretiskt svag och kan ha fått sitt G efter avsevärda stödinsatser från skolan, men kan också vara hyfsat duktig i de övriga, främst då i de samhällsvetenskapliga, ämnena. Har däremot eleven fått något annat betyg än G i matematik är prognosläget bättre. Ett IG indikerar med mycket stor säkerhet att eleven har låga betyg i allmänhet. Vid VG eller MVG är sannolikheten på motsvarande vis stor för att hon också har höga betyg i övriga ämnen. Detta gäller såväl för praktiska som för teoretiska ämnen och såväl för SO- som för NO-ämnen (se tabell 5.2.7). Den sammantagna slutsatsen av detta blir att ett högt matematikbetyg fungerar som en god markör för generell studiekompetens.

7. KÄLLFÖRTECKNING

7.1 PUBLIKATIONER

Andersson, Håkan. (1999): *Apropå förslagen till betygskriterier för MVG - förvirring på högsta nivå?* Didaktisk tidskrift, Vol. 9. No.1-2.

Andersson och Grysell (2002): *Nöjd, klar och duktig – studenter på fem utbildningar om studieframgång.* Akademiska avhandling nr 66. Umeå: Umeå universitet, Pedagogiska institutionen.

Andersson, Jorner och Ågren (1983): *Regressions- och tidsserieanalys med och utan datorstöd.* Lund: Studentlitteratur.

Arwedsson, Gerd (1994): *Hur och när lär sig elever?* Stockholm: HLS förlag.

Biggs och Collis (1982) *Evaluating the quality of learning. The SOLO Taxonomy.* London: Academic Press inc.

Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick och Laborde (Eds.) (1996): *International Handbook of Mathematics Education.* Dortrecht: Kluwer.

Bjerneby Häll, Maria (2002): *Varför undervisning i matematik? Argument för matematik i grundskolan – i läroplaner, läroplansdebatt och hos blivande lärare.* Linköpings Universitet, Institutionen för beteendevetenskap.

Bjerneby Häll, Maria (2006): *Allt har förändrats och allt är sig likt. En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning.* Linköpings Universitet, Institutionen för beteendevetenskap.

Brown, Bransford, Ferrara, Campione (1983): *Learning, remembering and understanding.* I Mussen (Ed.): *Handbook of child psychology, vol 3:* (pp. 77 – 166) *Cognitive development.* New York: Wiley.

Davis, Kerstin (2003): *Är bäst alltid bäst? En studie av gymnasieelevers betyg och högskoleprovresultat.* Umeå: Umeå universitet, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar.

Departementsskrifter (2004): *Innovativa Sverige – en strategi för tillväxt genom förnyelse.* Rapport Ds 2004:36. Stockholm: Närings- och utbildningsdepartementet.

Dewey, John (1916, 1994): *Democracy and Education.* New York: The Macmillan Company.

Dewey, John (1899, 1980): *Skola och samhälle* ingående i *Individ, Skola och samhälle. Pedagogiska texter av John Dewey.* Stockholm: Natur och Kultur.

Dörfler och McLone (1986): *Mathematics as a school subject*, ingående i *Perspective on Mathematics Education*. Nederländerna: Kluwer Academic Publishers Group.

Engström, Arne (2005): *Bildning och demokrati i matematikutbildningen* i tidskriften *Utbildning och demokrati* 2005, vol 15, nr 2.

Enkvist, Inger (2003): *Skolan – ett svenskt högriskprojekt*. Hedemora: Gidlunds förlag

Erikson och Jonsson (Red.) (1994): *Sorteringen i skolan*. Stockholm: Carlssons.

Fibæk Laursen, Per (2005): *Didaktik och kognition*. Stockholm: Liber.

Fröjd, Per (2005): *Att läsa och förstå svenska. Läsförmågan hos elever i Borås 2000 – 2002*. Göteborgs universitet: Institutionen för svenska språket.

Gardner, Howard (1994): *De sju intelligenserna*. Malmö: Skogs Grafiska.

Geary, David C (1993): *Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components*. Psychological Bulletin, 114

Geary, Hoard och Hamson (2000): *Numerical and arithmetical cognition: a longitudinal study of process and concept deficits in children with learning difficulties'*. I *Journal of experimental child psychology*.

Glaser och Pellegrino (1987): *Aptitudes for learning and cognitive processes*. I Weinert & Kluwe (1987) op. cit.

Grauberg, Eva (1998): *Elementary Mathematics and Language Difficulties. A Book for Teachers, Therapists and Parents*. London: Whurr Publisher Ltd.

Grouws, Douglas A (Ed.) (1992): *Handbook for research on mathematical teaching and learning*. New York: MacMillan.

Gustafsson, J-E (2000): *Mätegenskaper hos olika urvalsmetoder*. Artikel i Högskoleverket (2000) op.cit.

Hedin, Adolf (1883): *Om latin-herraväldet*. Stockholm: Samson & Wallin.

Henderson & Miles (2001): *Basic Topics in Mathematics for Dyslexics*. London: Whurr Publisher Ltd.

Hirano, T (1996): *Achieving mathematical excellence in Japan: Results and implications*. International Journal of Educational Research 25 – 26.

Husén, Torsten (1975): *Social Influences on Educational Attainment.* Paris: OECD.

Häggblom, Lisen (2005): *Räkna med finsk matte*. Svenska Dagbladet, Brännpunkt 2005-02-12.

Högskoleverket (2000): *Antagning till högskolan – erfarenheter och visioner. En antologi.* Högskoleverkets rapport 2000:14 R.

Högskoleverket (2003): *Utvärdering av högskoleingenjörsutbildning, ingenjörsutbildning samt brandingenjörsutbildning vid svenska universitet och högskolor. Del 1*. Högskoleverkets rapportserie 2003:20 R.

Krutetski, V. A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in school children.* University of Chicago.

Käller, Kathrine (1990): *Fostran till andra rang. En studie av dominansprocessen vid skolstart och via vägar genom utbildningssystemet ur ett kvinnovetenskapligt perspektiv.* Uppsala: Acta Universitas Upsaliensis.

Lindahl, Britt (2003): *Lust att lära naturvetenskap och teknik*? Göteborg: Acta Universitas Gothoburgensis, Studies in Educational Sciences 196.

Linde, Göran (2003): *Kunskap och betyg.* Lund: Studentlitteratur.

Lundberg, Ingvar (1984): *Språk och läsning.* Malmö: Liber förlag.

Lundberg och Sterner (2004): *Hur hänger lässvårigheter och matematiksvårigheter ihop?* Tidningen Dyslexi, nr 3 2004.

Lundgren, Ulf P. (1979): *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansteori.* Stockholm: Liber.

Lustig, Lars (2004): *Tre vägar till den öppna högskolan. Betänkande av Tillträdesutredningen.* Statens offentliga utredningar 2004:29.

Malmer, Gudrun (1999): *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur.

Marklund, Henrysson och Paulin (1968): *Studieprognos och studieframgång.* SOU 1968:25. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Montague, Marjorie (1992): *The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities.* I *Journal of Learning Disabilities vol. 25.*

Montague, Marjorie (1997): *Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities.* I *Journal of Learning Disabilities vol. 30 (2).*

Mouwitz, Emanuelsson och Johansson (2003): *Vad menas med baskunnande i matematik?* Artikel i NCM (2003) op. cit.

Möllehed, Ebbe (2001): *Problemlösning i matematik – en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4 – 9.*
Malmö: Institutionen för pedagogik.

NCM (2001): *Hög tid för matematik.*
Stockholm: Fritzes

NCM (2003): *Baskunnande i matematik*
Stockholm: Fritzes

NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics.*
Reston: NCTM.

Niss, Mogens (1996): *Goals of Mathematics Teaching*, artikel i Bishop et al (1996) op. cit.

Nyström, Peter (1998): *Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper.*
Umeå universitet: Enheten för pedagogiska mätningar.

OECD (2000): *Measuring Student Knowledge and Skills: The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.*

OECD (2004): *Problem solving for tomorrows world. First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003.*

Persson, Ulf: *Lärarens betydelse för undervisning i matematik och naturvetenskap*, artikel i Enkvist (2003), op. cit.

Piaget, Jean (1965): *The child's conception of number.*
London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, Jean (1971): *Genetic Epistemology.*
New York: Columbias University Press.

Piaget, Jean (1973): *Comments on mathematical education*, i Geoffrey Howson (Ed.), *Development in Mathematical Education: Proceedings on the Second International Conference.* Cambridge: University Press.

Platon (ca 370 f.Kr.): *Staten.* I svensk översättning av Jan Stolpe, 2003. Stockholm: Atlantis.

Reynolds och Gray (1985): *Effectiveness of Schooling.* Brighton: Falmer press.

Richardson, Gunnar (2004): *Svensk utbildningshistoria. Skola och samhälle förr och nu.* Lund: Studentlitteratur.

Riis, Ulla (Red.) (2000): *IT i skolan mellan vision och praktik.* Kalmar: Lenanders tryckeri.

Rodhe, Staffan (2002): *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731.* Uppsala Universitet, Matematiska institutionen.

Romberg, Thomas, A. (1992): *Problematic Features of the School Mathematics Curriculum.* I P. W. Jackson (Ed.), Handbook of Research on Curriculum. New York: Macmillan.

Runesson, Ulla (1999): *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Acta Universitas Gothoburgensis, Studies in Educational Sciences 129.

Sandström, Carl Ivar (1995): *Utbildningens idéhistoria. Om samhällsförändringarnas inflytande på undervisningens mål och idéinnehåll genom tiderna i Sverige och utlandet.* Helsingborg: Schmidts Tryckeri AB.

Schoenfeld, Alan (1992): *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics.* I Grouws (1992) op. cit.

Sfard, Anna (1991): *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* I Educational Studies in Mathematics 22 (1).

Silver, E. A. (1979): *Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems.* Journal for research in mathematics education vol. 10 (3).

Sjöstrand, Wilhelm (1945): *Den formella bildningens och medövningens problem. En kritisk granskning och några experimentella bidrag.* Uppsala Universitets årsskrift.

Skemp, Richard (1978): *Relational Understanding and Instrumental Understanding.* I *Mathematics Teaching* vol 77.

Skolverket (1996): TIMSS, *Svenska trettonåringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Skolverkets rapport nr 114. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000 a): *Kursplaner och betygskriterier 2000. Grundskolan.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000 b): *Grundskolan. Kommentarer till kursplaner och betygskriterier*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2001): *PISA 2000. Svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport nr 209. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2003 a): TIMSS, *Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport nr 255. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2003 b): *Uppföljning av betygssättning på nationella prov 2003*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2004): *Pisa 2003 - svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Statens offentliga utredningar (2004): *Tre vägar till den öppna högskolan*. Betänkande av tillträdesutredningen, SOU 2004:29. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Sterner och Lundberg (2002): *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. Rapport NCM 2002:2. Kungälv: Grafikerna Livréna.

Sterner och Lundberg (2004): *Hur hänger lässvårigheter och matematiksvårigheter ihop?* Artikel i tidningen Dyslexi, nr 3 2004.

Stage, Christina (1991): *Betyg och högskoleprov*. Umeå: Umeå universitet, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar.

Swahn, Ragnhild (2006): *Gymnasieelevers inflytande i centrala undervisningsfrågor*. Linköpings universitet: Institutionen för beteendevetenskap.

Tall, David. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, Jan (1996): *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Thorndike, Edward (1917): *Reading as reasoning: A study of mistakes in paragraph reading*. I *Journal of Educational Psychology, vol. 8*.

Thorndike, Edward (1932): *The Fundamentals of Learning*. New York: Teachers Colleges Press.

Van Hiele och Van Hiele (1959, 1984): *The child's thought and geometry.* I Fuys, Geddes & Tischler (Ed.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn NY: Brooklyn College.

Vygotsky, Lev (1934, 1999): *Tänkande och språk.*
Uddevalla: MediaPrint.

Walberg, Herbert J (2003): *Improving Educational Productivity.*
Chicago: University of Illinois.

Wedman, Ingemar (2000): *Behörighet, rekrytering och urval. Om övergången från gymnasieskola till högskola.* Stockholm: Högskoleverkets arbetsrapporter 2000:6 AR.

Vetenskapsrådet (2002): *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning* [Elektronisk resurs]
Stockholm: Vetenskapsrådet

Weinert, Franz E. (1987): *Introduction and Overview - Metacognition and Motivation as Determinants of Effective Learning and Understanding.* I Weinert & Kluwe (1987) op. cit.

Weinert och Kluwe (Ed.): *Metacognition, motivation and understanding.* Hillside, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wester och Sigurdsson (1997): *Högpresterande elever i TIMSS. Svenska 13-åringars prestation i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Umeå: Umeå universitet, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar.

Wilcox, B (1985): *Conceptualizing Curriculum Differences for Studies of Secondary School Effectiveness.* I Reynolds & Gray (1985) op. cit.

Winberg, Ola (2003): *Adlig utbildningsstrategi. 1600-talets utländska resor och begreppet kunskap.* Uppsala Universitet, Historiska institutionen.

Wikström, Hugo (1997): *Att förstå förändring. Modellbyggande, simulering och gymnasieelevers lärande.* Acta Universitas Gothoburgensis, Studies in Educational Sciences 114.

Wikström, Christina (2005): *Criterion-referenced measurement for educational evaluation and selection.* Umeå universitet: Enheten för pedagogiska mätningar.

Wyndham, Riesbeck och Schoultz (2000): *Problemlösning som metafor och praktik.* Linköpings universitet: Institutionen för tillämpad lärarkunskap.

7.2 INTERNETDOKUMENT

Länk A:
Skolverket (2004): Så här ska grundskolans betyg beräknas
http://www.skolverket.se/publicerat/nybrev/nybrev96-99/nyb97-05-28.shtml

Länk B:
Skolverket (2004): Kursinfo 2004/05
http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx
Välj: Grundskola