Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons.

Von **J. Frenkel**[1]) in Leningrad.

(Eingegangen am 2. Mai 1926.)

Die Uhlenbeck-Goudsmitsche Auffassung des rotierenden Elektrons wird nach **Thomas** mittels der speziellen Relativitätstheorie zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen in einem gegebenen elektromagnetischen Felde benutzt. Dabei wird das Elektron einfach als ein Punkt behandelt, mit welchem ein seine magnetischen Eigenschaften bestimmender Sechservektor („Momenttensor") verknüpft ist. Auf diese Weise gelingt es, die schon von Thomas gegebene Erklärung des Ursprungs des anomalen Zeemaneffektes auf eine strengere Weise festzustellen und zu vervollständigen. Zum Schluß wird das durch ein „rotierendes" Elektron erzeugte elektromagnetische Feld bestimmt und die Tatsache angedeutet, daß die Struktur der Atomkerne hauptsächlich durch die magnetostatischen Wechselwirkungen zwischen Elektronen und Protonen bedingt ist.

§ 1. Einleitung. Uhlenbeck und Goudsmit[2]) haben kürzlich die schon von H. A. Compton vorgeschlagene Vorstellung des rotierenden quantisierten Elektrons mit größtem Erfolg auf das Problem der Multiplettstruktur der Spektralterme im optischen und Röntgengebiet angewandt. Dabei gingen sie von der Tatsache aus, daß in einem Koordinatensystem S', in dem das um den Kern kreisende Elektron ruht, eine zusätzliche magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H}' = -\frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] \tag{1}$$

herrscht; hier bedeutet $\mathfrak{v}$ die Translationsgeschwindigkeit des Elektrons bezüglich des mit dem Kern fest verbundenen Koordinatensystems S, und $\mathfrak{E}$ die in bezug auf dieses System herrschende, von dem Kern erzeugte elektrische Feldstärke.

Schreibt man nun dem Elektron ein eigenes magnetisches Moment $\mathfrak{m}'$, zu, so muß der magnetischen Feldstärke (1) eine zusätzliche magnetische Energie

$$U' = -\mathfrak{m}'\mathfrak{H}' = \mathfrak{m}'\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{E}\right] \tag{1a}$$

entsprechen.

Uhlenbeck und Goudsmit haben nun gezeigt, daß die Struktur der optischen und Röntgen-Multipletterme sich unmittelbar erklären läßt, wenn man der azimutalen Quantenzahl (k), in Übereinstimmung mit der Landéschen Normierung, die Werte $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ usw. zuschreibt und zu

---

1) International Education Board Fellow für 1926.

2) Nature **117**, 264, Febr. 20, 1926.

der resultierenden „Relativitätskorrektion“ für die Thermenergie noch den Mittelwert der magnetischen Zusatzenergie (1 a) hinzufügt unter der Annahme, daß $\mathfrak{m}'$ gleich der Hälfte des Bohrschen Magnetons ist und daß das Verhältnis des magnetischen Moments $\mathfrak{m}'$ zum entsprechenden mechanischen Impulsmoment denselben Wert $\frac{e}{2 c m_0}$ ($e < 0$ Ladung des Elektrons, m_0 Masse, c Lichtgeschwindigkeit) wie bei der Bahnbewegung hat. Mit anderen Worten, das Impulsmoment der „Eigenrotation“ muß dabei auch gleich der Hälfte des gewöhnlichen Bohrschen Elementarwertes $\frac{h}{2\pi}$ gesetzt werden.

Die Vorstellung des rotierenden Elektrons ermöglicht ferner, eine vollkommene Erklärung des anomalen Zeemaneffekts zu geben (indem z. B. der merkwürdige „Paschen-Back-Effekt“ der Wasserstofflinien verständlich wird), wenn der „Atomrumpf“ des bisherigen Sommerfeld-Landéschen Schemas durch die Eigenrotation des Elektrons ersetzt wird. Dabei aber muß man unter Beibehaltung des früheren Wertes $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ für das Impulsmoment des Elektrons seinem magnetischen Moment einen doppelt so großen Wert $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}'$ zuschreiben, der also gleich einem ganzen Bohrschen Magneton ist. Das Verhältnis der beiden Momente — des magnetischen und des mechanischen — muß also gleich

$$\varkappa = \frac{e}{c m_0} \tag{2}$$

angenommen werden, im Widerspruch mit der früheren Annahme, die für die Erklärung der Multiplettstruktur notwendig erscheint.

§ 2. Die Theorie von Thomas. Eine Lösung des Widerspruchs hat Thomas[1]) zu geben versucht auf Grund der folgenden relativistischen Überlegung.

Man betrachte das Elektron in zwei nachfolgenden Zeitpunkten $t' = t$ und $t'' = t + dt$. Die entsprechenden „Ruhsysteme“, die sich durch eine Lorentztransformation ohne Drehung aus S ergeben, seien S' und S''. Es läßt sich nun leicht einsehen, daß S'' direkt aus S' erhalten werden kann durch eine infinitesimale Lorentztransformation, die einer infinitesimalen relativen Geschwindigkeit $d\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{v}}\, dt$ ($\dot{\mathfrak{v}}$ = Beschleunigung) entspricht und zugleich einer infinitesimalen Rotation der Koordi-

[1]) Nature, April 10, 1926, S. 514. Das Manuskript dieser Arbeit hat mir freundlicherweise Dr. W. Pauli noch Ende Februar zugänglich gemacht und dadurch zu meiner eigenen Arbeit Veranlassung gegeben.

natenachsen, die nach Betrag und Richtung (näherungsweise) durch den Vektor

$$d\mathfrak{w} = \frac{1}{2c^2}[\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}]\,dt \tag{3}$$

gegeben wird.

Die zeitliche Änderung des Impulsmoments des Elektrons $\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}$ muß nun nach Thomas nicht durch die übliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) = [\mathfrak{m}\mathfrak{H}'] \tag{4}$$

bestimmt werden, sondern durch die Gleichung

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) = [\mathfrak{m}\mathfrak{H}'], \tag{4a}$$

wo

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) - \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right] \tag{4b}$$

die Änderungsgeschwindigkeit des Vektors $\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}$ in bezug auf ein Koordinatensystem bedeutet, das durch eine Translationsbeschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ und eine Drehgeschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ in der Zeit dt von S' nach S'' übergeht.

Setzt man für $\varkappa$ den Wert (2) ein und beachtet, daß (in erster Annäherung) $\frac{m_0}{e}\,\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{E}$ ist, so wird nach (1)

$$-\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right] = +\frac{1}{2}\left[\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{E}\right]\mathfrak{m}\right] = \frac{1}{2}\,[\mathfrak{m}\mathfrak{H}']$$

und folglich nach (4a) und (4b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}\,[\mathfrak{m}\mathfrak{H}']. \tag{5}$$

Wir bekommen auf diese Weise eine Gleichung der üblichen Form (4), wenn wir anstatt des wirklichen magnetischen Moments $\mathfrak{m}$ das scheinbare Moment

$$\mathfrak{m}' = \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}$$

einführen und folglich das Verhältnis $\varkappa$ durch

$$\varkappa' = \frac{\varkappa}{2}$$

ersetzen; dabei wird (5) zu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}'}{\varkappa'}\right) = [\mathfrak{m}'\mathfrak{H}'] \tag{5a}$$

in Übereinstimmung mit (4).

Wir sehen also, daß die zeitliche Änderung des Impulsmoments des Elektrons vom Standpunkte der gewöhnlichen Theorie aus einer Drehkraft entspricht, deren Moment $\mathfrak{f}' = [\mathfrak{m}'\mathfrak{H}']$ gleich der Hälfte des wirklichen Drehmoments $\mathfrak{f} = [\mathfrak{m}\mathfrak{H}']$ ist. Dementsprechend muß man bei der Betrachtung der durch diese Drehwirkung bedingten Energieänderung mit einer „scheinbaren" magnetischen Energie $U' = -\frac{1}{2}(\mathfrak{m}\mathfrak{H}') = -(\mathfrak{m}'\mathfrak{H}')$ rechnen.

Es sei bemerkt, daß die obigen Resultate sich auf den Fall beziehen, daß kein echtes Magnetfeld vorhanden ist, d. h. daß die magnetische Feldstärke im „Kernkoordinatensystem" S verschwindet. Ist diese Feldstärke $\mathfrak{H}$ von Null verschieden, so muß man die Gleichung (5) durch die folgende allgemeinere Gleichung ersetzen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}[\mathfrak{m}\mathfrak{H}'] + [\mathfrak{m}\mathfrak{H}] \tag{6}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{m}'}{\varkappa'}\right) = [\mathfrak{m}'\mathfrak{H}'] + 2[\mathfrak{m}'\mathfrak{H}].$$

Die totale magnetische Energie drückt sich dabei durch die Summe

$$U = -\frac{1}{2}(\mathfrak{m}\mathfrak{H}') = (\mathfrak{m}\mathfrak{H}) \tag{6a}$$

aus.

Gegen die obige Thomassche Überlegung lassen sich aber schwerwiegende Einwände erheben.

Erstens behandelt sie das Impulsmoment und das magnetische Moment des Elektrons als invariante Größen, was sicher unrichtig ist, da dreidimensionale Vektoren sich bei einer Lorentztransformation in bestimmter Weise transformieren müssen.

Zweitens bezieht sich diese Theorie ausschließlich auf die „Rotationsbewegung" des Elektrons. Es sollte daraus folgen, daß für die Translationsbewegung auch im Falle $\mathfrak{H} = 0$ nicht das halbe, sondern das volle magnetische Moment maßgebend ist, nach dem üblichen Ausdruck für die treibende Kraft $(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}'$. Es fehlt noch der Beweis dafür, daß bei Fehlen eines äußeren magnetischen Feldes die Präzessionsgeschwindigkeiten der „Elektronenachse" und der Bahnebene gleich sind, so daß das resultierende Impulsmoment nach Größe und Richtung konstant bleibt.

Im folgenden wollen wir die genauen Bewegungsgleichungen des „rotierenden" Elektrons durch eine konsequente vierdimensionale Umgestaltung (im Sinne der speziellen Relativitätstheorie, ebenso wie bei

Thomas) der üblichen dreidimensionalen Gleichungen aufstellen. Dabei ergibt sich eine vollständige Lösung des in § 1 angedeuteten Widerspruchs zwischen der Erklärung der Multiplettstruktur und des Zeemaneffekts.

Es ergibt sich speziell, daß die Thomassche Gleichung (5) nicht die wirkliche, sondern nur die gemittelte säkulare Änderung des magnetischen Moments bestimmt, d. h. nur dann richtig wird, wenn man $\frac{d}{dt}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{H}'$ durch die entsprechenden Mittelwerte ersetzt[1]).

§ 3. Der Momenttensor. Von irgend welchen Betrachtungen über die Struktur des Elektrons werden wir von vornherein absehen und es einfach als einen Punkt behandeln, dessen Eigenschaften durch gewissse Skalar-, Vektor- und Tensorgrößen charakterisiert werden.

Was speziell seine magnetischen Eigenschaften anbetrifft, so ist für ihre vollständige Charakterisierung die Angabe des dreidimensionalen Vektors des magnetischen Moments $\mathfrak{m}$ prinzipiell ungenügend, denn ein dreidimensionaler Vektor muß nur als der räumliche Anteil (Projektion) eines vierdimensionalen Vektors („Vierervektors") oder antimetrischen Tensors („Sechservektors") betrachtet werden.

Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ stellt bekanntlich den räumlichen Anteil des elektromagnetischen Feldtensors $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ dar, dessen zeitlicher Anteil die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} F_{23} & F_{31} & F_{12} & F_{14} & F_{24} & F_{34} \\ H_1 & H_2 & H_3 & -i E_1 & -i E_2 & -i E_3 \end{pmatrix} \tag{I}$$

bestimmt. Dementsprechend wollen wir das magnetische Moment des Elektrons $\mathfrak{m}$ als den räumlichen Anteil eines antimetrischen Tensors $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$ definieren nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} \mu_{23} & \mu_{31} & \mu_{12} & \mu_{14} & \mu_{24} & \mu_{34} \\ m_1 & m_2 & m_3 & +i p_1 & +i p_2 & +i p_3 \end{pmatrix}, \tag{II}$$

wobei p_1, p_2, p_3 die räumlichen Komponenten eines dreidimensionalen Vektors $\mathfrak{p}$, der dem elektrischen Moment eines Dipols analog ist[2]), sind.

Diesen Vektor wollen wir aus der Bedingung bestimmen, daß er in dem Koordinatensystem S', wo das Elektron momentan ruht, verschwinden soll $(\mathfrak{p}' = 0)$. Dann folgt für ein beliebiges Koordinaten-

[1]) Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Pauli, die ich nach Abschluß meiner Arbeit bekommen habe, hat Herr Thomas eine Theorie derselben Art wie die unten dargestellte, unabhängig von mir entwickelt (Anm. bei der Korrektur).

[2]) Diese Analogie wird später klar zutage treten.

system S, in bezug auf welches das Elektron die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat, nach den bekannten Transformationsformeln für die Größen (II) und (I)

$$\mathfrak{p} = \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{m}\right]. \tag{7}$$

Dieses Resultat kann man auch unabhängig von den obigen Formeln folgendermaßen ableiten [1]). Es seien x_α die Koordinaten des Elektrons und die mit $i\,c$ multiplizierte Zeit ($i\,c\,t = x_4$) in bezug auf das System S. Wir bilden aus $\mu_{\alpha\beta}$ und $\dot{x}_\alpha = \frac{d\,x_\alpha}{d\,\tau}$, wo $d\,\tau = d\,t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}$ die Eigenzeit des Elektrons bedeutet, den vierdimensionalen Vektor $\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta$ (das Summationszeichen für gleiche Indexpaare werden wir im folgenden immer weglassen). Im „Ruhsystem" S' müssen die Komponenten dieses Vektors $\mu'_{\alpha\beta}\,\dot{x}'_\beta$ verschwinden, denn es ist $\dot{x}'_1 = \dot{x}'_2 = \dot{x}'_3 = 0$ und, nach unserer Voraussetzung, $\mu'_{14} = \mu'_{24} = \mu'_{34} = 0$. Daraus aber folgt, daß für jedes andere Koordinatensystem S die Gleichungen

$$\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta = 0, \tag{7a}$$

welche das Verschwinden des obigen Vektors aussprechen, erfüllt sind. Setzt man für $\mu_{\alpha\beta}$ und $\dot{x}_\beta$ die entsprechenden dreidimensionalen Ausdrücke ein, so bekommt man für $\alpha = 1, 2, 3$ die räumlichen Komponenten des Vektors:

$$\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{m}\right] - \mathfrak{p}\right),$$

während für $\alpha = 4$

$$\mu_{4\beta}\,\dot{x}_\beta = -\frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{p})$$

wird. Aus dem Verschwinden des ersten Ausdrucks — d. h. aus der Gleichung (7) — folgt unmittelbar das Verschwinden des zweiten. Mittels der Tensorkomponenten $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$ lassen sich bekanntlich die folgenden zwei invarianten skalaren Größen bilden

$$m^2 - p^2 = \tfrac{1}{2}\,\mu_{\alpha\beta}\,\mu_{\alpha\beta}$$

und

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{p}) = i\,(\mu_{23}\,\mu_{14} + \mu_{31}\,\mu_{24} + \mu_{12}\,\mu_{34}).$$

Dabei gilt wegen (7) (d. h. wegen $\mathfrak{p}' = 0$)

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}'\,\mathfrak{p}' = 0$$

und

$$m^2 - p^2 = m^2 - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{m}\right]^2 = m'^2. \tag{8}$$

[1]) Nach einer Bemerkung von W. Pauli.

Die letzte Gleichung bestimmt die Abhängigkeit des magnetischen Moments des Elektrons von seiner Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Man kann sie in die Form

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}}$$

umschreiben, wo $v_\perp$ die zu $\mathfrak{m}$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{v}$ bedeutet; $m' = \mu$ ist der Betrag des magnetischen Moments im „Ruhsystem".

§ 4. Die zeitliche Änderung des Momenttensors. Wir führen nun die vierdimensionalen Größen ein, die der magnetischen Energie $-(\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}) = -m_\alpha H_\alpha$ und dem magnetischen Drehmoment $[\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}]$, d. h. dem Vektor oder antimetrischen Tensor mit den Komponenten $m_\alpha H_\beta - m_\beta H_\alpha$, entsprechen. Die vierdimensionale „Erweiterung" der Energiefunktion ist offenbar der Skalar

$$U = -\tfrac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -(\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}) - (\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}). \tag{9}$$

Die entsprechende „Erweiterung" für das Drehmoment ist gegeben, wie leicht einzusehen ist, durch den antimetrischen vierdimensionalen Tensor (Sechservektor)

$$f_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F_{\alpha\gamma} \tag{10}$$

mit dem räumlichen Anteil

$$(f_{23}, f_{31}, f_{12}) = [\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}] + [\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}] \tag{10a}$$

und dem zeitlichen Anteil

$$-i(f_{14}, f_{24}, f_{34}) = -[\mathfrak{m}\,\mathfrak{E}] + [\mathfrak{p}\,\mathfrak{H}]. \tag{10b}$$

Das Impulsmoment des Elektrons definieren wir als den räumlichen Anteil des Tensors

$$\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}$$

mit $\varkappa = \dfrac{e}{c\,m_0}$.

Die einfachste vierdimensionale „Erweiterung" der Differentialgleichung (4) für die zeitliche Änderung von $\mu_{\alpha\beta}$ würde dann lauten

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = f_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

d. h.

$$\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{\varkappa} = [\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}] + [\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}] \tag{11a}$$

und

$$\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{\varkappa} = [\mathfrak{p}\,\mathfrak{H}] - [\mathfrak{m}\,\mathfrak{E}], \tag{11b}$$

wo der Punkt die Differentiation nach der Eigenzeit bedeutet.

Die Gleichungen (11 a) und (11 b) könnten jedoch nur in dem Falle simultan erfüllt sein, daß die Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ voneinander unabhängig (a priori) wären. Tatsächlich aber muß zwischen ihnen die Beziehung (7) bestehen, mit welcher die Gleichungen (11 a), (11 b) unvereinbar sind. Es ist nun leicht die sie zusammenfassende Gleichung (11) so zu modifizieren, daß die Bedingung (7 a) erfüllt ist. Zu diesem Zwecke führen wir einen zunächst unbestimmten vierdimensionalen Vektor a_α ein und bilden den invarianten Skalar

$$- \mu_{\alpha\beta} a_\alpha \dot{x}_\beta = - \tfrac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha), \tag{12}$$

der nach (7 a) identisch verschwindet. Diesen Skalar fügen wir zu der „Energiefunktion" U hinzu, d. h. wir ersetzen die letztere durch

$$U' = - \tfrac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (F_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) = - \tfrac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}. \tag{12a}$$

Dementsprechend ersetzen wir den Tensor $f_{\alpha\beta}$ durch

$$f'_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} F'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F'_{\alpha\gamma}, \tag{12b}$$

d. h.

$$f'_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}) \tag{12c}$$

und die „Bewegungsgleichung" (11) durch

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = f'_{\alpha\beta} \tag{13}$$

oder, vollständig ausgeschrieben,

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F_{\alpha\gamma} + a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}). \tag{13a}$$

Wir bestimmmen nun den Vektor a_α auf die Weise, daß diese Gleichung in Einklang mit der Beziehung (7 a) kommt. Und zwar folgt aus (13 a), unter Berücksichtigung von (7 a) und der identischen Beziehung

$$\dot{x}_\alpha \dot{x}_\alpha = - c^2,$$

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} \dot{x}_\beta = - \frac{1}{\varkappa} \mu_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta = \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta - a_\gamma \mu_{\alpha\gamma} \dot{x}_\beta \dot{x}_\beta = \mu_{\alpha\gamma} (F_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta + a_\gamma c^2)$$

oder

$$\mu_{\alpha\gamma} \left(\frac{\ddot{x}_\gamma}{\varkappa} + F_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta + a_\gamma c^2 \right) = 0.$$

Es ergibt sich also

$$a_\gamma = \frac{1}{\varkappa c^2} (\varkappa F_{\gamma\beta} \dot{x}_\beta - \ddot{x}_\gamma). \tag{14}$$

Unabhängig von diesem Ausdruck für a_γ bekommt man aus (13a) unter Berücksichtigung von (7 a)

$$\frac{1}{\varkappa} \mu_{\alpha\beta} \dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} - \mu_{\alpha\beta} \mu_{\beta\gamma} F_{\alpha\gamma} = 2 \mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} = 0,$$

(wegen des antimetrischen Charakters von $F_{\beta\gamma}$), d. h.

$$\frac{d}{d\tau}\mu_{\alpha\beta}^2 = 0$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}^2 = m^2 - p^2 = \mu^2 = \text{const.} \tag{15}$$

Diese Formel zeigt, daß das magnetische Moment des Elektrons (von einem „Ruhsystem" beurteilt) tatsächlich quantisiert werden kann; wäre sein Betrag nicht konstant, so könnte von seiner Quantisierung keine Rede sein.

Die Bewegungsgleichungen eines nicht magnetischen Elektrons lauten bekanntlich

$$m_0 \ddot{x}_\alpha = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta,$$

oder mit $\frac{e}{m_0 c} = \varkappa$

$$\ddot{x}_\alpha = \varkappa F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta. \tag{15a}$$

Vernachlässigt man die von dem magnetischen Moment herrührende Kraft im Vergleich mit der Lorentzkraft $e\left(\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right]\right)$, die dem Vierervektor $\frac{e}{c}F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$ entspricht, so wird nach (15) und (15a)

$$a_\gamma \simeq 0. \tag{15b}$$

In dieser Näherung, d. h. bei Vernachlässigung der durch die magnetische Kraft bedingten Störung in der *Translationsbewegung des Elektrons*, kann man also seine „Rotationsbewegung", d. h. die zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{m}$, durch die einfachen Gleichungen (11) oder (11a) bestimmen.

Setzt man in (11) nach (7) $\mathfrak{p} = \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{m}\right]$ ein, so wird

$$\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{\varkappa} \simeq [\mathfrak{m}\mathfrak{H}] + \left[\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{m}\right]\mathfrak{E}\right]. \tag{16}$$

Wir betrachten nun den *Fall, daß das Elektron sich um den Kern in* einem schwachen äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}$ bewegt. Dann kann man in einer noch gröberen Näherung (unter Weglassung von in $1/c$ quadratischen Gliedern)

$$\mathfrak{E} \simeq \frac{m_0}{e}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \tag{16a}$$

setzen. Dabei nimmt das zweite Glied auf der rechten Seite von (16) *die Form*

$$\frac{m_0}{ec}\left[[\mathfrak{v}\mathfrak{m}]\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right]$$

an. Wir wollen nun den Mittelwert dieses Ausdrucks für die ungestörte Bewegung berechnen.

Es ist (für die ungestörte Bewegung!)

$$\frac{\overline{d}}{dt}\,[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}]\,\mathfrak{v}] = \overline{\left[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}]\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\right]} + \overline{\left[\left[\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\,\mathfrak{m}\right]\mathfrak{v}\right]} = 0.$$

Ferner gilt die Identität

$$\left[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}]\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\right] + \left[\left[\mathfrak{m}\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\right]\mathfrak{v}\right] + \left[\left[\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\,\mathfrak{v}\right]\mathfrak{m}\right] = 0.$$

Daraus folgt

$$\overline{\left[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}]\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\right]} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{m}\,\overline{\left[\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t}\,\mathfrak{v}\right]}\right],$$

oder nach (16a) und (1)

$$\overline{\left[\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{m}\right]\mathfrak{E}\right]} \simeq \frac{1}{2\,c}[\mathfrak{m}\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{v}]] = \frac{1}{2}\,[\mathfrak{m}\,\overline{\mathfrak{H}'}]. \tag{16b}$$

Die säkulare Änderung des Vektors $\mathfrak{m}$ bestimmt sich folglich in der obigen Näherung aus der Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa}\,\frac{d\,\overline{\mathfrak{m}}}{d\,t} \sim [\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}] + \tfrac{1}{2}\,[\mathfrak{m}\,\overline{\mathfrak{H}'}]. \tag{17}$$

Dies ist die korrigierte Tomassche Gleichung (6).

§ 5. **Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip.** Wir werden nun eine strengere Ableitung der Differentialgleichung (13) für die „Rotationsbewegung" des Elektrons auf Grund des Hamiltonschen Prinzips anführen; dabei werden sich zu gleicher Zeit die genauen Differentialgleichungen für die Translationsbewegung ergeben.

Wir setzen also wie üblich

$$\delta \int L\,d\tau = 0 \tag{18}$$

mit den Zusatzbedingungen

$$\dot{x}_\alpha^2 = -c^2, \tag{18a}$$

$$\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta = 0. \tag{18b}$$

Dabei schreiben wir die Lagrangesche Funktion in der Form

$$L = \frac{e}{c}\,\varphi_\alpha\,\dot{x}_\alpha + T^* + \tfrac{1}{2}\,\mu_{\alpha\beta}\,F_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

wo T^* die „kinetische Energie" der Rotationsbewegung bedeutet.

Diese Energie betrachten wir, im Anschluß an die gewöhnliche dreidimensionale Mechanik, als eine Funktion der „Drehgeschwindigkeit", die wir durch den antimetrischen Tensor $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ charakterisieren werden. Dabei setzen wir definitionsweise

$$\delta T^* = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\,\delta\,\omega_{\alpha\beta}. \tag{19a}$$

Zur Bestimmung der Variation von $\mu_{\alpha\beta}$ beachten wir zunächst die entsprechende Operation der gewöhnlichen Mechanik. Die bei einer virtuellen infinitesimalen Rotation $\delta\mathfrak{w}$ von der magnetischen Drehkraft $[\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}]$ geleistete Arbeit ist gleich dem inneren Produkt $(\delta\mathfrak{w}\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}])$. Andererseits muß sie gleich der Abnahme der magnetischen Energie $-\delta\,(-\mathfrak{m}\,\mathfrak{H})$ $= (\delta\,\mathfrak{m},\,\mathfrak{H})$ sein. Es ist also $(\delta\,\mathfrak{m},\,\mathfrak{H}) = (\delta\,\mathfrak{w},\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}])$ oder $(\delta\,\mathfrak{m},\,\mathfrak{H})$ $= ([\delta\,\mathfrak{w},\,\mathfrak{m}],\,\mathfrak{H})$, und folglich

$$\delta\,\mathfrak{m} = [\delta\,\mathfrak{w},\,\mathfrak{m}].$$

Die entsprechende vierdimensionale Variationsformel muß sich daraus auf dieselbe Art ergeben, wie die Formel (10) aus dem dreidimensionalen Ausdruck für das Drehmoment $[\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}]$. Führt man also den vierdimensionalen antimetrischen „Rotationstensor" $\delta\,\Omega_{\alpha\beta}$, dessen räumlicher Anteil dem Vektor $\delta\,\mathfrak{w}$ gleich ist, ein, so wird

$$\delta\,\mu_{\alpha\beta} = \delta\,\Omega_{\alpha\gamma}\cdot\mu_{\beta\gamma} - \delta\,\Omega_{\beta\gamma}\cdot\mu_{\alpha\gamma}. \tag{19b}$$

Die Größen $\delta\,\Omega_{\alpha\beta}$ (ebenso wie $\delta\,\mathfrak{w}$) stellen selbstverständlich keine exakten Differentiale dar, d. h. es gibt keine der Koordinaten x_α entsprechende „Winkelkoordinate" $\Omega_{\alpha\beta}$ (nichtholonomes System). Trotzdem müssen offenbar nebst den Beziehungen

$$\delta\,\dot{x}_\alpha = \frac{d}{d\tau}\,\delta\,x_\alpha \tag{20}$$

auch die entsprechenden Vertauschungsbeziehungen für $\delta\,\Omega_{\alpha\beta}$ und $d\,\Omega_{\alpha\beta}$ $= \omega_{\alpha\beta}\,d\tau$ gelten, d. h.

$$\delta\,\omega_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau}\,\delta\,\Omega_{\alpha\beta}. \tag{20a}$$

Mittels der obigen Formeln und der Relationen

$$\delta\,\varphi_\alpha = \frac{\partial\,\varphi_\alpha}{\partial\,x_\gamma}\,\delta\,x_\gamma, \qquad \dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial\,\varphi_\alpha}{\partial\,x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma,$$

$$\delta\,F_{\alpha\beta} = \frac{\partial\,F_{\alpha\beta}}{\partial\,x_\gamma}\,\delta\,x_\gamma, \quad \dot{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\,F_{\alpha\beta}}{\partial\,x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma$$

bekommen wir

$$\delta\,L = \frac{e}{c}\,\frac{\partial\,\varphi_\alpha}{\partial\,x_\gamma}\,\dot{x}_\alpha\,\delta\,x_\gamma - \frac{e}{c}\,\frac{\partial\,\varphi_\alpha}{\partial\,x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma\,\delta\,x_\alpha + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}\,\varphi_\alpha\,\delta\,x_\alpha\right) - \frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\,\delta\,\Omega_{\alpha\beta}$$
$$+ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\,\delta\,\Omega_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\,\mu_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,F_{\alpha\beta}}{\partial\,x_\gamma}\,\delta\,x_\gamma + \frac{1}{2}\,F_{\alpha\beta}\,(\delta\,\Omega_{\alpha\gamma}\,\mu_{\beta\gamma} - \delta\,\Omega_{\beta\gamma}\,\mu_{\alpha\gamma})$$

oder, wegen
$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} = F_{\beta\alpha},$$
$$\delta L = \left(\frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right) \delta x_\alpha$$
$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} + \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F_{\alpha\gamma}\right) \delta \Omega_{\alpha\beta} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c} \varphi_\alpha \delta x_\alpha + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa} \delta \Omega_{\alpha\beta}\right).$$
Ebenso wird, nach (18a) und (18b), bei Hinzufügung unbestimmter Lagrangescher Multiplikatoren λ und a_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)
$$\lambda \dot{x}_\alpha \delta \dot{x}_\alpha = -\delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha) + \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha \delta x_\alpha) = 0$$
und
$$a_\alpha \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta) = \frac{1}{2} (a_\alpha \delta \mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta - a_\beta \delta \mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha) = \frac{d}{d\tau} (a_\alpha \mu_{\alpha\beta} \delta x_\beta)$$
$$- \delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\mu_{\beta\alpha} a_\beta) + \frac{1}{2} (a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) (\delta \Omega_{\alpha\gamma} \mu_{\beta\gamma} - \delta \Omega_{\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}) = 0$$
oder, wegen
$$\dot{x}_\beta \mu_{\beta\gamma} = \dot{x}_\alpha \mu_{\alpha\gamma} = 0,$$
$$a_\alpha \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta) = \frac{d}{d\tau} (a_\alpha \mu_{\alpha\beta} \delta x_\beta) - \delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\mu_{\beta\alpha} a_\beta)$$
$$+ \frac{1}{2} \delta \Omega_{\alpha\beta} a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}) = 0.$$

Es folgt also aus (18), (18a) und (18b) unter der üblichen Voraussetzung, daß die Variationen δx_α, $\delta \Omega_{\alpha\beta}$ an den Grenzen des Integrals (18) verschwinden (durch Addition der obigen Ausdrücke und Nullsetzen der Koeffizienten von δx_α und $\delta \Omega_{\alpha\beta}$):
$$\frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} a_\beta) = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \tag{21}$$
und
$$\frac{1}{\varkappa} \dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F_{\alpha\gamma} + a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}).$$

Die letzte Gleichung fällt mit (13a) zusammen; die erste ist die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Bewegungsgleichung (15a) für ein nicht magnetisches Elektron.

Dementsprechend setzen wir
$$\lambda = m_0 + \lambda', \tag{21a}$$
wo λ' ein von dem magnetischen Moment des Elektrons abhängiges Zusatzglied bedeutet. Nach der Ausführung der Differentiation auf der linken Seite von (21) bekommen wir, nach (15),
$$\lambda' \ddot{x}_\alpha + \dot{\lambda}' \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} \dot{a}_\alpha + \dot{\mu}_{\beta\alpha} a_\beta = \varkappa m_0 c^2 a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\dot{x}_\alpha$ wegen der Beziehungen $\dot{x}_\alpha^2 = -c^2$, $\dot{x}_\alpha \ddot{x}_\alpha = 0$ und $a_\alpha \dot{x}_\alpha = 0$:

$$-c^2 \dot{\lambda}' + \dot{\mu}_{\beta\alpha} a_\beta \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{d F_{\beta\gamma}}{d\tau}$$

oder

$$-c^2 \dot{\lambda}' = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} (F_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha).$$

Nach (12a), (12b) und (13) haben wir

$$\frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} (F_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) = \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} = \frac{\varkappa}{2} (\mu_{\alpha\gamma} F'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} F'_{\alpha\gamma}) F'_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\varkappa}{2} (\mu_{\alpha\beta} F'_{\gamma\beta} F'_{\alpha\gamma} - \mu_{\beta\alpha} F'_{\gamma\alpha} F'_{\gamma\beta}) = \varkappa\, \mu_{\alpha\beta} F'_{\alpha\gamma} F'_{\beta\gamma} = 0$$

wegen des antimetrischen Charakters des Tensors $\mu_{\alpha\beta}$. Es wird folglich

$$\lambda' = -\frac{1}{2c^2} \mu_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\,. \tag{21 b}$$

Die Vermehrung der Masse m_0 ist also gleich der „relativen magnetischen Energie" des Elektrons (in bezug auf den Kern und andere das Feld $F_{\alpha\beta}$ erzeugende Teilchen), dividiert durch das Lichtgeschwindigkeitsquadrat.

Den Ausdruck $\mu_{\beta\alpha} a_\alpha$ in (21) kann man als die α-Komponente des zusätzlichen Impulses deuten, der von der absoluten Energie des Elektrons, d. h. der kinetischen Energie seiner Rotation, herrührt.

Durch Einsetzen von (21a) in (21) ergibt sich wegen (15)

$$\frac{d}{d\tau} (\lambda' \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} a_\alpha) = c^2 m_0 \varkappa a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{22}$$

Diese Gleichung kann man zur näherungsweisen Bestimmung von a_α benutzen. Und zwar wird, wenn man die linke Seite von (22) vernachlässigt, (da $c^2 m_0 \varkappa = ec$ ist)

$$a_\alpha = -\frac{1}{2ec} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{22a}$$

§ 6. Die Translationsbewegung des „rotierenden" Elektrons in einem Atom. Aus der Gleichung (21) folgt

$$x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\beta + \mu_{\gamma\beta} a_\gamma) - x_\beta \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha + \mu_{\gamma\alpha} a_\gamma)$$
$$= \frac{1}{2} \mu_{\varrho\sigma} \left(x_\alpha \frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_\alpha} \right)$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\lambda(x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha \mu_{\gamma\beta} - x_\beta \mu_{\gamma\alpha})\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\mu_{\varrho\sigma}\left(x_\alpha \frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right) - a_\gamma(\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}). \tag{23}$$

Diese Gleichung kann als die Verallgemeinerung des „Flächensatzes", d. h. der üblichen Formel für die Änderungsgeschwindigkeit des gewöhnlichen Impulsmoments der Translationsbewegung $m_0\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}\right]$ gelten. Dabei wird dieses Impulsmoment durch den antimetrischen Tensor

$$I_{\alpha\beta} = \lambda(x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha \mu_{\gamma\beta} - x_\beta \mu_{\gamma\alpha}) \tag{23a}$$

ersetzt, dessen räumlicher Anteil in erster Näherung mit $m_0[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]$ zusammenfällt. Es sei ferner bemerkt, daß das zweite Glied auf der rechten Seite von (23) entgegengesetzt gleich ist dem entsprechenden Zusatzgliede in der Formel (13a) für die Änderungsgeschwindigkeit des Impulsmoments der Rotationsbewegung. Setzt man

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\varkappa} = i_{\alpha\beta},$$

so wird für die Summe beider Momente nach (13a) und (23)

$$\frac{d}{d\tau}(i_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta}) = \mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma} + x_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha\frac{\partial U}{\partial x_\beta}, \tag{23b}$$

wo U die „relative Energie"

$$U = -\tfrac{1}{2}\mu_{\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}$$

bedeutet.

Wir betrachten nun den Fall, daß das Elektron sich in einem radialsymmetrischen elektrischen Felde $\mathfrak{E} = \psi(r)\mathfrak{r}$, bei Fehlen eines (äußeren) Magnetfeldes, bewegt. In diesem Falle hat man $U = -(\mathfrak{p}\mathfrak{E}) = -\psi(\mathfrak{p}\mathfrak{r})$, und folglich für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$x_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha\frac{\partial U}{\partial x_\beta} = \psi(x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = E_\alpha p_\beta - E_\beta p_\alpha.$$

Das resultierende Drehmoment, welches dem räumlichen Anteil des Tensors auf der rechten Seite von (23b) entspricht, wird also gleich Null ($[p\,E] + [E\,p] = 0$).

Daraus folgt, daß **das resultierende Impulsmoment des Elektrons**, im betrachteten Falle, nach Größe und Richtung **konstant bleiben muß**.

Wie wir schon oben gesehen haben [Gleichung (15)] ist der Betrag des Tensors $\mu_{\alpha\beta}$ und folglich auch $i_{\alpha\beta}$ zeitlich konstant. In erster Näherung (bei Weglassen von in $\frac{1}{c}$ quadratischen Gliedern) kann man folglich das Impulsmoment der Rotationsbewegung $\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}$ seinem Betrage nach als zeitlich konstant betrachten. Bezeichnet man das Impulsmoment der Translationsbewegung (d. h. den räumlichen Anteil des Tensors $I_{\alpha\beta}$) durch $\mathfrak{J}$, so folgt, wegen der Bedingung $\mathfrak{i} + \mathfrak{J} = \text{const}$, daß der Betrag von $\mathfrak{J}$ auch konstant bleibt, und daß beide Vektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{J}$ um ihre Resultierende mit derselben Winkelgeschwindigkeit präzessieren. Dieses Resultat ist für die Atommechanik sehr wesentlich, denn sonst könnte man *das Impulsmoment eines Atoms nicht quantisieren.*

Führen wir statt der Impulsmomente $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{J}$ die entsprechenden magnetischen Momente $\mathfrak{m} = \varkappa\,\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{2}\,\mathfrak{J}$ ein, so sieht man, daß die Summe $\mathfrak{m} + \mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{2}(\mathfrak{i} + \mathfrak{J}) + \frac{\varkappa}{2}\,\mathfrak{i}$ keinen konstanten Vektor darstellt. Der Betrag dieses Vektors bleibt zwar konstant, seine Richtung aber muß um die Atomachse mit der obenerwähnten Winkelgeschwindigkeit präzessieren[1]). Diese Winkelgeschwindigkeit läßt sich nicht einfach bestimmen; die Formel (17) zeigt aber, daß ihr Mittelwert mit der gewöhnlichen Larmorgeschwindigkeit der Elektronenbahn in einem äußeren Magnetfelde $\mathfrak{H}'$ übereinstimmt.

§ 7. **Das elektromagnetische Feld eines „rotierenden" Elektrons.** Betrachtet man das Elektron als eine Punktladung und sieht von seinem magnetischen Moment ab, so kann man sein elektromagnetisches Feld durch die Formeln

$$\varphi_\beta = \frac{k}{2\pi i}\oint \frac{d\,x'_\alpha}{S^2} = \frac{k}{2\pi i}\oint \frac{\left(\frac{d\,x'_\alpha}{d\,\tau'}\right)}{S^2}\,d\,\tau' \qquad (24)$$

für die Komponenten des Viererpotentials darstellen. Die Integration erstreckt sich dabei auf eine geschlossene Kurve in der komplexen τ'-Ebene. [τ' Eigenzeit des Elektrons, $S^2 = \sum (x'_\alpha - x_\alpha)^2$ sein vierdimensionaler Abstand von dem „Aufpunkt" x_α; $k = 2e$][2]).

Enthält diese Kurve nur einen Pol des Integranden, nämlich den Pol, welcher der reellen Wurzel der Gleichung $R - c\,(t - t') = 0$ entspricht

$$[R^2 = \sum_1^3 (x'_\alpha - x_\alpha)^2],$$

---

[1]) So daß keine säkulare Änderung von $\mathfrak{m} + \mathfrak{M}$ auftritt.

[2]) Vgl. meine Arbeit „Zur Elektrodynamik punktförmiger Elektronen", ZS. f. Phys. **32**, 518, 1925.

so bekommt man durch Residuumbildung die bekannten Liénard-Wiechertschen Formeln für die retardierten Potentiale einer bewegten Punktladung

$$\varphi_\alpha = k\left\{\frac{d\,x_k'}{d\,\tau'}\,\frac{1}{\dfrac{d\,(S^2)}{d\,\tau'}}\right\}_{t'=t-\frac{r}{c}} \tag{24a}$$

Wir wollen nun auf eine ganz analoge Weise das zusätzliche elektromagnetische Feld bestimmen, das durch die „Rotation" des Elektrons, d. h. sein magnetisches Moment bedingt wird.

Der entsprechende Anteil des Viererpotentials ψ_α muß sich offenbar durch den Momenttensor $\mu'_{\alpha\beta}$ und den Vierervektor $(x'_\alpha - x_\alpha)$, mittels einer komplexen Integration desselben Typus wie (24), darstellen lassen.

Da ferner ψ_α eine lineare Vektorfunktion von $\mu'_{\alpha\beta}$ sein muß, so kommen wir zum folgenden Ansatz

$$\psi_\alpha = \frac{Q}{2\,\pi\,i}\oint \mu'_{\alpha\beta}\,(x_\beta - x'_\beta)\,f(S)\,d\,\tau', \tag{25}$$

wo Q einen Proportionalitätskoeffizienten und $f(S)$ eine zunächst unbekannte Funktion von S bedeutet. Zur Bestimmung dieser Funktion setzen wir (25) in die Differentialgleichung

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial\,x_\gamma^2} = 0$$

ein. Dabei ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial\,x_\gamma}\,f\cdot(x_\beta - x'_\beta)\,\mu'_{\alpha\beta} = \mu'_{\alpha\gamma}\,f + \mu'_{\alpha\beta}\,(x_\beta - x'_\beta)\,\frac{\partial f}{\partial\,x_\gamma},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\,x_\gamma^2}\,f\,(x_\beta - x'_\beta)\,\mu'_{\alpha\beta} = 2\,\mu'_{\alpha\gamma}\,\frac{\partial f}{\partial\,x_\gamma} + \mu'_{\alpha\beta}\,(x_\beta - x'_\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial\,x_\gamma^2},$$

ferner

$$\frac{\partial f}{\partial\,x_\gamma} = \frac{d\,f}{d\,S}\,\frac{x_\gamma - x'_\gamma}{S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\,x_\gamma^2} = \frac{d^2 f}{d\,S^2}\,\frac{(x_\gamma - x'_\gamma)^2}{S^2} + \frac{d\,f}{d\,S}\,\frac{S^2 - (x_\gamma - x'_\gamma)^2}{S^3},$$

und folglich

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial\,x_\gamma^2} = \frac{Q}{2\,\pi\,i}\oint \mu'_{\alpha\beta}\,(x_\beta - x'_\beta)\left\{\frac{d^2 f}{d\,S^2} + \frac{5}{S}\,\frac{d\,f}{d\,S}\right\}d\,\tau' = 0,$$

d. h.

$$\frac{d^2 f}{d\,S^2} + \frac{5}{S}\,\frac{d\,f}{d\,S} = 0.$$

Es wird also $f = \frac{1}{S^4}$, und nach (25)

$$\psi_\alpha = \frac{Q}{2\,\pi\,i}\oint\frac{\mu'_{\alpha\beta}\,(x_\beta - x'_\beta)}{S^4}\,d\,\tau'. \tag{25a}$$

Die Zusatzbedingung

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

ist, wie leicht einzusehen, wegen der Geschlossenheit des Integrationsweges erfüllt.

Zur Bestimmung der Koeffizienten Q betrachten wir den einfachsten Fall eines **ruhenden** Elektrons mit einem nach Größe und Richtung konstanten Moment $\mathfrak{m}'$ ($\mathfrak{p}' = 0$). In diesem Falle bekommt man, indem der geschlossene Integrationsweg durch die imaginäre Zeitachse ersetzt wird[1]:

$$\psi_\alpha = + \frac{Q}{2\pi i} \mu'_{\alpha\beta} (x_\beta - x'_\beta) \int\limits_{t'=t-i\infty}^{t'=t+i\infty} \frac{d\,t'}{[R^2 - c^2 (t'-t)^2]^2}$$

$$= -\frac{Q}{2\pi c} \mu'_{\alpha\beta} (x_\beta - x'_\beta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(x'_4 - x_4)}{[R^2 + (x'_4 - x_4)^2]^2},$$

d. h.

$$\psi_\alpha = -\frac{Q\,\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)}{4\,c\,R^3}.$$

Denkt man sich den Vektor $\mathfrak{R}$ vom Elektron zum Aufpunkt gezogen ($R_\alpha = x_\alpha - x'_\alpha$) und beachtet, daß $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ die Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ bedeuten, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{Q}{4\,c} \frac{[\mathfrak{R}\,\mathfrak{m}]}{R^3}$$

und $\varphi_4 = i\,\varphi = 0$.

Die obige Formel für $\mathfrak{A}$ stimmt mit dem üblichen Ausdruck für das Vektorpotential eines elementaren Stromes mit dem Moment $\mathfrak{m}$ überein, wenn man

$$Q = -4\,c \tag{25 b}$$

setzt.

Im allgemeinen Falle eines beliebig bewegten Elektrons kann man das Integral (25 a) durch Residuumbildung ausrechnen. Wir setzen dabei voraus, daß es sich um die Bestimmung der retardierten Potentiale handelt, d. h. um das Residuum in bezug auf den reellen Pol

$$R_0 - c\,(t - t'_0) = 0.$$

Führt man als unabhängige Variable die gewöhnliche (komplexe) Zeit t' statt der Eigenzeit τ' (wobei $d\,\tau' = d\,t' \sqrt{1 - v'^2/c^2}$ ist) ein, so ergibt sich

$$S^4 = [R^2 - c^2 (t - t')^2]^2 = [R + c\,(t - t')]^2 [R - c\,(t - t')]^2$$

[1] l. c., S. 523.

und folglich für $t' \to t_0'$

$$R - c(t - t') = \left\{\frac{d}{dt'}[R - c(t - t')]\right\}(t' - t_0') = c\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)(t' - t_0'),$$

d. h.

$$S^4 = c^2[R + c(t - t')]^2\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2(t' - t_0')^2,$$

wo v_R' die Projektion der Geschwindigkeit des Elektrons im Zeitpunkt $t' = t_0'$ auf die $\mathfrak{R}_0$-Richtung bedeutet.

Wir bekommen also nach (25a)

$$\psi_\alpha = \frac{Q}{c^2\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{F_\alpha(t')}{(t' - t_0')^2}\,dt'$$

mit der Abkürzung

$$F_\alpha(t') = \frac{\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x_\beta')\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{[R + c(t - t')]^2}.$$

Da die Funktion $F(t')$ für $t' = t_0'$ von Null verschieden bleibt, so gilt bekanntlich

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{F_\alpha(t')\,dt'}{(t' - t_0')^2} = \left\{\frac{d}{dt'}F_\alpha(t')\right\}_{t' = t_0'}.$$

Es wird folglich, nach (25b),

$$\psi_\alpha = -\frac{4}{c\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2}\left\{\frac{d}{dt'}\frac{\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x_\beta')\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{[R + c(t - t')]^2}\right\}_{t' = t_0'}.$$

Nach Ausführung der Differentiation ergibt sich wegen der Bedingung $\mu'_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta'}{dt'} = 0$, mittels der Beziehung $c(t - t_0') = R_0$,

$$\psi_\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2}\left\{\frac{x_\beta - x_\beta'}{cR^2}\frac{d}{dt'}\mu^*_{\beta\alpha} + \left(1 + \frac{v_R'}{c}\right)\frac{(x_\beta - x_\beta')\mu^*_{\beta\alpha}}{R^3}\right\}, \quad (26)$$

wobei der Index „0“ weggelassen und zur Abkürzung

$$\mu^*_{\beta\alpha} = \mu'_{\beta\alpha}\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (26\,a)$$

gesetzt ist.

In dem Falle eines ruhenden Elektrons mit zeitlich veränderlichen Komponenten des Momenttensors $\mu_{\beta\alpha}$ reduziert sich (26) wegen $\mu_{\beta 4} = i p_\beta = 0$ auf

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{[\dot{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{R}]}{cR^2} + \frac{[\mathfrak{m}\,\mathfrak{R}]}{R^3}\\ \varphi &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Es sei bemerkt, daß der Betrag des magnetischen Moments $|\mathfrak{m}|$ dabei nach (15) konstant bleiben muß[1]). Die obige Formel (27) kann als „nullte Näherung" auf den Fall eines nicht zu rasch bewegten Elektrons angewandt werden. Auf die Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke, die ohne Schwierigkeit nach den üblichen Formeln $\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$, $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ geschieht, wollen wir hier nicht eingehen.

Wir wollen nun zum Schlusse noch auf die folgende Tatsache hinweisen.

Wenn den Elektronen ein magnetisches Moment von der Größe des Bohrschen Magnetons zugeschrieben wird, so müssen ihre magnetischen Wechselwirkungen, die bekanntlich der vierten Potenz des Abstandes *umgekehrt proportional sind, für Abstände* $< 10^{-11}$ *cm ihre elektrischen* (Coulombsche) Abstoßungskräfte überwiegen. Diese magnetischen Wechselwirkungen können sich schon in dem Werte der Abschirmungskonstanten für die inneren Elektronen von schweren Atomen kundgeben. In den Atomkernen müssen sie aber millionenmal größer als die elektrostatischen Kräfte sein. Schreibt man den Protonen ein Impulsmoment von derselben Größe wie den Elektronen zu und dementsprechend ein etwa 2000 mal kleineres magnetisches Moment, so wird ihre magnetische Wechselwirkung miteinander und mit den Elektronen auch die elektrostatischen Wechselwirkungen stark überwiegen. Es scheint also berechtigt zu sein zu behaupten, daß die Struktur der Atomkerne von den elektrischen Ladungen der Elektronen und Protonen *praktisch unabhängig ist und hauptsächlich durch ihre magnetostatischen* Wechselwirkungen (in Verbindung mit den üblichen Quantenbedingungen) bedingt werden muß. Es ergibt sich z. B., daß ein Elektron und ein Proton in einem Abstande von $5 \cdot 10^{-13}$ cm im statischen Gleichgewicht bleiben könnten. Dieses Gleichgewicht würde aber in bezug auf die Orientierung der magnetischen Achsen der beiden Teilchen unstabil sein. Nimmt man jedoch an, daß das Elektron um den Kern kreist, so ergibt

---

[1]) Wäre der Momenttensor der Bedingung $\mu_{\alpha\beta}\, x'_\beta = 0$ nicht unterworfen, so müßten zu dem obigen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ noch die folgenden zwei Terme hinzutreten:

$$\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{cR} + \frac{\mathfrak{p}}{R^2},$$

und würde ferner sein:

$$\varphi = \frac{(\Re\dot{\mathfrak{p}})}{cR^2} + \frac{(\mathfrak{p}\Re)}{R^3}.$$

sich außer der gewöhnlichen einquantigen Bahn mit dem Radius $0{,}55 \cdot 10^{-8}$ cm eine zweite einquantige Bahn vom Radius $3 \cdot 10^{-14}$ cm, die durch die magnetische Anziehung bedingt wird, wobei die elektrische Anziehung als schwache Störungskraft erscheint. Die obige Größe paßt sehr gut zu den Abmessungen der einfachsten Kerne. Man darf aber hier nicht die Schwierigkeit verschweigen, daß die Elektronenmasse wegen der großen Geschwindigkeit etwa auf das Tausendfache des gewöhnlichen Wertes anwächst, was zum Teil durch die Abnahme der wechselseitigen potentiellen Energie kompensiert wird. Diese Frage hoffe ich in einer späteren Mitteilung ausführlicher zu behandeln.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Dr. W. Pauli für die Anregung zu dieser Arbeit und manche wertvolle Ratschläge meinen besten Dank aussprechen. Ich muß ferner Herrn Prof. P. Langevin und meinem Freund Prof. G. Krutkow für einige Hinweise (letzterem auch für die Durchsicht des Manuskripts) herzlich danken.

Hamburg-Nizza, April 1926.