三次方程的判別式

上期我們討論過如何利用*卡爾丹公式*去解方程 $x^2 + px + q = 0$，同學可能會問：三方次程可否像二次方程那樣利用判別式判斷出實根的數目？在二次方程的公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

中根號裏面的 $b^2 - 4ac$ 就是判別式。那麼，卡爾丹公式

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

中根號裏面的 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ 是否就是三次方程的判別式呢？

回答這個問題，我們首先要明白判別式是如何定義的。就以二次方程爲例，筆者大膽猜測當年第一個發現判別式 $b^2 - 4ac$ 的人是這樣想的：若 α 、 β 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，定義 $D_2 = (\alpha - \beta)^2$ 。留意到若 α 、 β 是實根則 $D_2 > 0$，若 α 、 β 相等則 $D_2 = 0$，若它們是複數根則 $D_2 < 0$ (這裏假定了 a、b、c 均是實數，所以 α 、 β 是共軛複數)。另一方面

$$D_2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4ac$$

這就是教科書中判別式的「定義」了！(筆者覺得叫定理比較恰當)

好，現在可以回到三次方程的討論了。不失一般性，我們只討論形如$x^2 + px + q = 0$的方程。因爲一般的三次方程$y^3 + ay^2 + by + c = 0$可以通過變量代換$y = x - \frac{a}{3}$轉化爲$x^2 + px + q = 0$的類形。這個變換是如何想出來的，在上期已經討論過，這裏不作重複的討論。

假設方程$x^2 + px + q = 0$的三個根爲α、β和γ。我們定義判別式$D_3 = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$！同學不難發現

1. 當α、β、γ是實根(方程有三個實根)時，$D_3 > 0$。
2. 當α、β、γ其中兩個相等(方程有二個實根)時，$D_3 = 0$。
3. 當α、β、γ其中兩個爲共軛複數(即方程只得一個實根)時，$D_3 < 0$。

一如以往，我們希望把D_3以方程的係數表示：

$$\begin{aligned} D_3 &= (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 \\ &= -4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^3 - 27(\alpha\beta\gamma)^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \end{aligned}$$

從而得知：$4p^3 + 27q^2$是負數表示方程有三個實根，等於零則有二個，正數表示只得一個實根。除了$p = q = 0$的情況例外(爲甚麼？)。

練習題：設x、y、z是實數且$x + y + z = 0$，證明

$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \le (x^2 + y^2 + z^2)^3$$