Da A sehr klein ist, *folgt also, dass sich* ε_0 *und* ε_∞ *sehr wenig voneinander* unterscheiden, *was in der That der Fall ist.*

Während also die Beobachtungen im Anfang des ganzen Spectrums ein sehr kleines ε_p *erwarten liessen, und die Theorie in dem geringen Unterschied zwischen optischem Brechungsexponent und* $\sqrt{\varepsilon_\infty}$ *sich gut bestätigt, liegt gerade hierin die Schwierigkeit, die hier im mittleren Spectralgebiete auftretende starke anomale Dispersion befriedigend darzustellen.* Dies scheint darauf hinzudeuten, dass die Formeln, die bisher für das verhältnissmässig kleine optische Gebiet weitgehendsten Anforderungen entsprechen, für das ganze Spectrum nicht mehr ausreichen dürften.

(Schluss im nächsten Heft.)

(Eingegangen 7. Juli 1898.)

4. *Die electrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie*[1]; *von M. Abraham.*

Bald nach den bahnbrechenden Forschungen von Heinrich Hertz erhob sich die Frage nach dem zeitlichen Ablauf der Schwingungen eines Hertz'schen Erregers. Von den Hypothesen, welche sie zu beantworten suchten, haben besonders zwei Beachtung gefunden. Die Herren Sarasin und de la Rive[2]) glaubten den Erscheinungen der multiplen Resonanz nur durch die Annahme gerecht werden zu können, dass der Erreger ein continuirliches Spectrum ungedämpfter Schwingungen aussende. Man hat später[3]) darauf hingewiesen, dass der Verlauf der Erscheinung stets durch ein Fourier'sches Integral darstellbar sei, d. h. durch eine Summe von Sinusschwingungen stetig veränderlicher Periode. Allein da jeder physikalische Vorgang sich in dieser Form darstellen lässt, so sagt jene Hypothese nichts über die charakteristischen Merkmale der besonderen Erscheinung aus. Für die Schwingungen des Hertz'schen Erregers aber ist die durch Ausstrahlung bedingte Dämpfung charakteristisch. Daher bot sich als einfachste Annahme die zweite, von Hrn. Bjerknes[4]) durchgeführte, dar, dass der Erreger eine einzige gedämpfte Schwingung aussende.

Nun haben wir für die Darstellung dieses Gebietes von Erscheinungen in der Maxwell'schen Theorie ein Fundament gewonnen, dessen Sicherheit gegenwärtig keinem Zweifel unterliegt. Welche Stellung nimmt sie zu der aufgeworfenen Frage ein? Welche Schwingungen können in dem, einen Leiter um-

1) Einige Theile der vorliegenden Arbeit sind der gleichbetitelten Inaugural-Dissertation des Verfassers entnommen. (Berlin 1897.)

2) E. Sarasin und L. de la Rive, Arch. de Genève (3) **23.** p. 113. 1890.

3) Garbasso und Aschkinass, Wied. Ann. **53.** p. 534. 1894.

4) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 72. 1891; **55.** p. 121. 1895.

gebenden, Dielectricum stattfinden? Nur eine einzige oder viele? Und, wenn letzteres zutrifft, reihen sie sich stetig aneinander oder unstetig? Welches sind die Perioden und Dämpfungsdecremente der einzelnen Schwingungen, und welches ist ihr electromagnetisches Feld?

Hertz selbst legte seinen theoretischen Untersuchungen über die Kräfte electrischer Schwingungen[1]) einen electrischen Dipol zu Grunde, d. h. einen geradlinigen Leiter, an dessen Enden sich grosse Capacitäten befinden, und dessen Dimensionen klein sind gegen die Wellenlänge. Für den gleichen Fall hat Hr. Planck[2]) Wellenlänge und Dämpfung der Grundschwingung bestimmt. Die electrischen Schwingungen in der Umgebung einer leitenden Kugel sind von Hrn. J. J. Thomson[3]) untersucht worden. Hier tritt die Möglichkeit einer grossen Zahl von Oberschwingungen hervor; für drei von ihnen werden Perioden und Dämpfungsdecremente berechnet. Allein, wenn auch dieser Fall theoretisch von Interesse ist, so ist er doch einer experimentellen Prüfung nicht zugänglich. Denn nur solche Leiter sind zur Erregung Hertz'scher Schwingungen verwendbar, die in der Mitte eine enge, nur durch den Funken ausgefüllte Stelle besitzen. Dieser Umstand führte mich dazu, die theoretische Behandlung der von einem stabförmigen Erreger ausgesandten Schwingungen in Angriff zu nehmen. *Hier lässt die Maxwell'sche Electrodynamik die Existenz einer unendlichen Zahl annähernd harmonischer Oberschwingungen zu. Wir werden die Perioden und Dämpfungsdecremente aller dieser Schwingungen ermitteln.*

§ 1. Die Grundgleichungen der Electrodynamik.

Zwei Sätze sind es, welche der Maxwell'schen Theorie zufolge den Ablauf electromagnetischer Vorgänge in nicht leitenden Körpern bestimmen. Sie sagen aus:

I. Die zeitliche Zunahme der Zahl der electrischen Inductionsröhren, die ein Flächenstück in positivem Sinne durchsetzen, ist proportional dem Integrale der magnetischen Kraft längs der Randcurve.

1) H. Hertz, „Ausbreitung der electr. Kraft" p. 147.
2) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1896.
3) J. J. Thomson, „Recent researches in el. and magn." p. 361. 1893.

II. Die zeitliche Abnahme der Zahl der magnetischen Inductionsröhren, die ein Flächenstück in positivem Sinne durchsetzen, ist proportional dem Integrale der electrischen Kraft längs der Randcurve.

Wird bei der Auswerthung der Linienintegrale die Randcurve so durchlaufen, dass die Fläche zur Linken liegt, so ist als positiv diejenige Richtung bezeichnet, welche am Rande mit der dem Umlaufenden von den Füssen zum Kopfe gerichteten Normalen übereinstimmt. Werden die electrischen und die magnetischen Kräfte in absolutem Gauss'schen Maasse gemessen, so ergiebt sich die Proportionalitätsconstante gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electromagnetischer Störungen im Aether (c).

Um diese Sätze in Zeichen zu fassen, nennen wir P_l, P_m die Vectoren, welche die electrische und magnetische Kraft darstellen, ferner K die Dielectricitätsconstante, μ die magnetische Permeabilität des homogenen, isotropen Körpers. Dann bestimmen $K . P_l$, $\mu . P_m$ die electrische und magnetische Induction. Verstehen wir endlich unter l die Randcurve, unter n die positive Normale des Flächenstückes ω, so ergeben jene beiden Sätze:

$$(1)\qquad K \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\omega} d\omega . P_l . \cos(P_l, n) = c . \int\limits_{l} dl . P_m . \cos(P_m, l),$$

$$(2)\qquad -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\omega} d\omega . P_m . \cos(P_m, n) = c . \int\limits_{l} dl . P_l . \cos(P_l\, l).$$

Diese Gleichungen bestimmen die Veränderungen des electromagnetischen Feldes innerhalb des Dielectricums. Hierzu treten die Grenzbedingungen, welche verlangen, dass auf der Grenzfläche vollkommener Leiter, d. h. solcher Körper, in welche electromagnetische Schwingungen der betreffenden Periode nicht merklich eindringen, die electrischen Kraftlinien senkrecht endigen. Für Hertz'sche Schwingungen sind Metalle in diesem Sinne als vollkommen leitend anzusehen.[1])

Wir werden im Folgenden die Grundgleichungen der Electrodynamik auf das einen Leiter umgebende Feld anzu-

1) Vgl. H. Hertz, l. c. p. 171.

wenden haben. Um die Grenzbedingungen in einfacher Weise einführen zu können, empfiehlt es sich, die Raumparameter derart zu wählen, dass einer derselben an der Grenze des Leiters einen constanten Werth annimmt. Wie man nun von den obigen Integralsätzen zu den Maxwell-Hertz'schen Differentialgleichungen in der gewöhnlichen Form herabsteigen kann, so kann man auch beliebige orthogonale Coordinaten als unabhängige Veränderliche einführen.

Als orthogonale Coordinaten bezeichnet man die Parameter u, v, w dreier Flächenschaaren, die sich senkrecht schneiden. Erfahren beim Fortschreiten um das Linienelement ds die Parameter die Aenderungen du, dv, dw, so ist:

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}.$$

Wir wollen die Parameter derart wählen, dass durch Angabe ihrer Werthe ein Punkt des Raumes eindeutig bestimmt sei. Nur dann darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die electrischen und magnetischen Kräfte einwerthigen Functionen der Parameter gleichsetzen. Wendet man die Sätze (1), (2) auf Stücke von Flächen $u = \text{constans}$, $v = \text{constans}$, $w = \text{constans}$ an, so erhält man die Differentialgleichungen, durch welche die Componenten XYZ der electrischen und die Componenten LMN der magnetischen Kraft in Richtung der wachsenden u, v, w verknüpft sind[1]):

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t} &= VW.\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{M}{V}\right)\right],\\ \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t} &= WU.\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{W}\right)\right],\\ \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t} &= UV.\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{U}\right)\right];\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t} &= VW.\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Z}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{Y}{V}\right)\right].\\ -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t} &= WU.\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{X}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Z}{W}\right)\right],\\ -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t} &= UV.\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Y}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{U}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

1) Eine ausführlichere Ableitung findet man in der Dissertation des Verfassers. (Berlin 1897.)

Dieses sind die Grundgleichungen der Electrodynamik, ausgedrückt durch allgemeine orthogonale Coordinaten. Die Gleichungen in der gewöhnlichen Form, welche cartesische Coordinaten als Raumparameter verwendet, gehen aus ihnen hervor, indem man $U = V = W = 1$ setzt.

Wir werden die Grundgleichungen insbesondere auf den Fall anzuwenden haben, dass der Erreger ein Rotationskörper und das electromagnetische Feld symmetrisch zu seiner Axe ist. Der Parameter w gebe den Winkel an, den die durch den betreffenden Punkt gelegte Meridianebene mit einer anderen, festen bildet. Dann sind sowohl die Componenten der electrischen und magnetischen Kraft, als auch die geometrischen Grössen UVW von w unabhängig. Giebt ϱ den Abstand von der Rotationsaxe an, so ist

$$(5)\qquad W = \frac{1}{\varrho}$$

zu setzen. Die Gleichungen (3), (4) zerfallen unter diesen Umständen in zwei Gruppen, von denen die eine nur die Componenten XYN, die andere die Componenten LMZ enthält.

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{V}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(N.\varrho),\\ \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t} &= -\frac{U}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(N.\varrho),\\ -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t} &= UV.\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Y}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{U}\right)\right];\end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{V}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(Z\varrho),\\ -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t} &= -\frac{U}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(Z\varrho),\\ \frac{K}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t} &= UV.\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{U}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Diese beiden Gruppen sind gänzlich unabhängig voneinander. Die erste entspricht einem Felde, dessen electrische Kraftlinien vollständig in Meridianebenen verlaufen, während die magnetischen Kraftlinien auf diesen senkrechte Kreise sind. Bei der zweiten Gruppe vertauschen die electrischen und magnetischen Kraftlinien ihre Rollen. Der erste Fall ist der einzige, welcher der Beobachtung zugänglich ist. Wir werden uns daher auf die Behandlung der Gleichungen (6) beschränken. Dieselben ergeben für die magnetische Kraft N die partielle Differentialgleichung

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu . K}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = U V . \Big[& \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{U}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(N \varrho)\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{V}{U} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(N \varrho)\right)\Big] . \end{aligned}\right.$$

Führt man eine neue Function $A = N . \varrho$ ein, so hat diese der Gleichung zu genügen

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu . K}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = U V . \Big[& \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{U}{V} \frac{\partial A}{\partial u}\right) \\ & + \varrho \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{V}{U} \frac{\partial A}{\partial v}\right)\Big] . \end{aligned}\right.$$

Mit der Function A sind die electrischen und magnetischen Kräfte durch die, aus (6) abzuleitenden, Gleichungen verbunden

$$(9\text{a})\quad N = \frac{A}{\varrho}, \quad \frac{K}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{V}{\varrho} \cdot \frac{\partial A}{\partial v}, \quad \frac{K}{c} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{U}{\varrho} \cdot \frac{\partial A}{\partial u} .$$

Die physikalische Bedeutung der das axial-symmetrische Feld bestimmenden Function A ist die folgende. Es ergiebt $2 \pi A$ das Integral der magnetischen Kraft längs einer die Axe umschlingenden Kraftlinie, und somit $A/2$ den gesammten Strom, der eine von jener Kraftlinie umrandete Fläche durchfliesst; derselbe setzt sich aus dem Verschiebungsstrom im Dielectricum und dem Leitungsstrom an der Oberfläche des Erregers zusammen. Insbesondere giebt der Werth, den die Function $A/2$ an der Grenze des Leiters annimmt, die Intensität des den betreffenden Querschnitt durchfliessenden Leitungsstromes an.

§ 2. **Die Perioden und Dämpfungsdecremente electrischer Schwingungen.**

Das Problem, dessen Lösung für den Fall des stabförmigen Leiters das Ziel dieser Untersuchungen bildet, ist das folgende: *Es sind die Eigenschwingungen eines Hertz'schen Erregers zu ermitteln.* Diese „Eigenschwingungen" sind durch drei Bedingungen bestimmt. *Erstens müssen die electrischen und magnetischen Kräfte der Schwingung im ganzen Felde den Maxwell'schen Gleichungen genügen, zweitens endigen die electrischen Kraftlinien senkrecht auf der Oberfläche des Leiters und drittens sind in grosser Entfernung ausschliesslich vom Erreger forteilende Wellen vorhanden.* Welches sind die Perioden und Dämpfungsdecremente der Eigenschwingungen, und welches ist ihr electromagnetisches Feld?

Wir nehmen an, wir hätten das Problem gelöst für den Fall, dass die Dielectricitätsconstante des umgebenden Mediums gleich 1 ist, und fragen, wie sich die Perioden und Dämpfungsdecremente ändern, wenn wir den Erreger in ein anderes Dielectricum von der Dielectricitätsconstante K betten. Man sieht nun unmittelbar, dass wir eine entsprechende Lösung der Grundgleichungen im allgemeinen Falle erhalten, wenn wir die räumlichen Abmessungen, sowie die electrischen Kräfte unverändert lassen, die zwischen je zwei entsprechenden Zuständen verfliessende Zeit aber, und die magnetischen Kräfte, im Verhältniss $\sqrt{K} : 1$ vermehren. Auch die Grenzbedingungen werden hier befriedigt, wenn sie dort befriedigt waren.

Entsprechende Zeiten sind insbesondere diejenigen, die zwischen zwei aufeinander folgenden Maximalwerthen der electrischen Kraft an einem bestimmten Raumpunkte verfliessen, d. h. die Perioden der Schwingung.

Die Perioden der Eigenschwingungen verhalten sich also wie die Wurzeln aus den Dielectricitätsconstanten der umgebenden Medien. Das logarithmische Decrement aber, das durch das Verhältniss jener beiden Maximalwerthe bestimmt ist, hängt von der Dielectricitätsconstante nicht ab. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Sätze ist natürlich, dass das Dielectricum den Erreger genügend weit umgiebt, sodass thatsächlich die Schwingungen innerhalb desselben entstehen und nicht durch Reflexionen an der Grenzfläche die Erscheinung gestört wird. Werden nun die Wellenlängen beide in demselben Dielectricum gemessen, so verhalten sie sich wie die Perioden. *Wird die Wellenlänge dagegen jedesmal in dem Dielectricum gemessen, in welchem die Schwingungen erzeugt wurden, so ist sie von der Natur dieses Mediums unabhängig;* denn die Wellenlänge ist das Product aus Periode und Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Perioden aber fanden wir proportional den Wurzeln aus den Dielectricitätsconstanten, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten diesen umgekehrt proportional sind. Analoge Sätze lassen sich über die Abhängigkeit der Perioden und

Dämpfungsdecremente von der magnetischen Permeabilität aufstellen. Sie gestatten es ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden die Permeabilität und die Dielectricitätsconstante des den Erreger umgebenden Mediums gleich 1 zu setzen.

Auch eine der Abmessungen, durch welche die Form des Erregers bestimmt ist, können wir willkürlich wählen. Denn vergrössern wir alle Lineardimensionen des Leiters in einem bestimmten Verhältniss, so erhalten wir eine neue, die Grundgleichungen und Grenzbedingungen befriedigende Lösung, wenn wir sämmtliche räumliche Abmessungen, sowie die zwischen zwei entsprechenden Zuständen verfliessende Zeit, in dem gleichen Verhältniss vergrössern, die electrischen und magnetischen Kräfte aber unverändert lassen. Daraus folgt: *Die Perioden der Eigenschwingungen geometrisch ähnlicher Erreger sind der Länge entsprechender Strecken proportional. Geometrisch ähnliche Erreger besitzen das gleiche logarithmische Decrement.*

Während jene Sätze allgemeine Gültigkeit besitzen, sollen sich unsere weiteren Betrachtungen auf den durch die Gleichungen (9), (9a) beherrschten Fall des axial-symmetrischen Feldes beziehen. Wir wollen Lösungen dieser Gleichungen suchen, deren Abhängigkeit von der Zeit durch den Factor e^{-pct} bestimmt ist; p ist eine complexe Constante, deren reeller Theil sich bei Berücksichtigung der Ausstrahlung als positiv herausstellen muss. Setzen wir

$$(10) \qquad p = \frac{\sigma}{\lambda} - \frac{2\pi i}{\lambda},$$

so giebt λ die Wellenlänge, σ das logarithmische Decrement der Eigenschwingungen an. Die Abhängigkeit der das electromagnetische Feld bestimmenden Function A vom Orte ist durch die aus (9) folgende Differentialgleichung bestimmt

$$(10\text{a}) \quad p^2 . A = U V \left[\varrho \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{U}{V} \frac{\partial A}{\partial u} \right) + \varrho \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{V}{U} \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right],$$

während die Componenten der magnetischen und electrischen Kraft nach (9a) mit A durch die Gleichungen zusammenhängen

$$(10\text{b}) \quad N = \frac{A}{\varrho}, \quad - p X = \frac{V}{\varrho} \frac{\partial A}{\partial v}, \quad + p Y = \frac{U}{\varrho} \frac{\partial A}{\partial u}.$$

Da p complex ist, so werden auch die Functionen N, X, Y complexe Werthe annehmen. Doch ergeben die reellen

Theile der Functionen $e^{-pct} N$, $e^{-pct} X$, $e^{-pct} Y$ für sich Lösungen der in jenen Functionen linearen Grundgleichungen und Grenzbedingungen, die einem physikalischen Vorgange entsprechen, vorausgesetzt, dass die Functionen N, X, Y in allen Punkten des Feldes endliche Werthe besitzen. Wir werden es indessen vorziehen, die complexe Form der Lösung beizubehalten; denn wie sich der zeitliche Ablauf des Schwingungsvorganges durch eine complexe Constante kennzeichnen lässt, welche die Periode und Dämpfung bestimmt, so geben die complexen Functionen N, X, Y an, wie sich die Amplituden und Phasen der electrischen und magnetischen Kräfte von Punkt zu Punkt ändern. *Die analytische Formulirung unseres Problems* gestaltet sich demnach folgendermaassen. Es sind Werthe der complexen Constante p und der zugehörigen complexen Function A anzugeben, welche der Differentialgleichung (10a) genügen, und für die durch (10b) bestimmten Functionen N, X, Y endliche, die Grenzbedingungen erfüllende Werthe ergeben. Dieses Problem wollen wir nunmehr für einen Erreger von der Form eines verlängerten Rotationsellipsoids in Angriff nehmen.

§ 3. **Anwendung auf das Rotationsellipsoid.**

Die Meridiancurve der Oberfläche des Erregers sei eine Ellipse. Die Resultate des vorigen Abschnittes gestatten es, eine der Abmessungen, durch welche die Form dieser Ellipse bestimmt ist, willkürlich zu wählen. Wir setzen den halben Abstand der Brennpunkte gleich 1, und haben fernerhin alle anderen Längen auf diese Einheit zu beziehen. Die Lage eines Punktes in der Meridianhalbebene bestimmen wir durch zwei Parameter $x\, y$; x bedeutet die grosse Halbaxe der zur Meridiancurve des Erregers confocalen Ellipse, $|y|$ die Halbaxe der confocalen Hyperbel, die sich in dem betreffenden Punkte schneiden. Das Vorzeichen von y giebt an, auf welcher Seite der Aequatorebene der Punkt sich befindet. Durch diese Festsetzung erreichen wir, dass ein Punkt der Meridianebene eindeutig durch Angabe der Parameter bestimmt ist; wir können somit die Kräfte einwerthigen Functionen der Parameter gleichsetzen, ohne von vornherein andere beschränkende Annahmen über das electromagnetische Feld zu machen, als die der Symmetrie um die Rotationsaxe. Das auf die Axe des Erregers gefällte Loth ϱ und der Abstand z seines Fusspunktes vom Mittelpunkte des Erregers hängen mit den elliptischen Coordinaten $x\,y$ durch die Gleichungen zusammen

$$(11) \qquad \varrho = \sqrt{x^2-1}\,.\sqrt{1-y^2}\,, \quad z = x\,.\,y\,.$$

Somit erhält man für das Quadrat des Linienelements der Meridianebene

$$(11\text{a}) \qquad d s^2 = d\varrho^2 + d z^2 = \frac{x^2-y^2}{x^2-1}\cdot d x^2 + \frac{x^2-y^2}{1-y^2}\cdot d y^2\,.$$

Identificirt man die elliptischen Coordinaten $x\,y$ mit den Raumparametern u, v des ersten Abschnittes, so hat man zu setzen

$$(11\text{b}) \qquad U = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-y^2}}\,, \quad V = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\,.$$

Durch Einführung von (11), (11b) nimmt die Differentialgleichung (10a) die Gestalt an

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} p^2\,.\,A\,.\,[(x^2-1)+(1-y^2)] &= (x^2-1)\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ &+ (1-y^2)\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\,. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung besitzt particuläre Lösungen in Form von Producten

$$A_n(x,y) = E_n(y)\,.\,\overline{H}_n(x)\,,$$

deren Factoren den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen genügen

$$(12\text{a}) \qquad E_n''(y) + E_n(y)\left(-p_n^2 + \frac{\varkappa_n}{1-y^2}\right) = 0\,,$$

$$(12\text{b}) \qquad \overline{H}_n''(x) + \overline{H}_n(x)\left(-p_n^2 + \frac{\varkappa_n}{1-x^2}\right) = 0\,.$$

Den Index n, der die einzelnen particulären Lösungen von (12) unterscheidet, werden wir die „Ordnungszahl der Schwingung“ nennen. Die Constante p_n kennzeichnet den zeitlichen Ablauf der Eigenschwingung n^{ter} Ordnung; $\varkappa_n$ ist eine zunächst willkürliche complexe Constante. Das Integral $E_n(y)$ stellt die Stromvertheilung längs des Leiters dar, während das Integral $\overline{H}_n(x)$ die Veränderung des Feldes der Eigenschwingungen längs der Hyperbeln bestimmt. Sind diese

Integrale gefunden, so erhalten wir für die complexe Function N, welche die Amplitude und Phase der magnetischen Kraft angiebt, nach (10b), (11), (11b)

$$(12\text{c}) \qquad N = \frac{E_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\overline{H}_n(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,;$$

und für die Functionen X, Y, welche die Componenten der electrischen Kraft in Richtung der Hyperbeln und Ellipsen bestimmen

$$(12\text{d}) \qquad X = -\frac{1}{p_n}\cdot\frac{E_n'(y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{\overline{H}_n(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

$$(12\text{e}) \qquad Y = \frac{1}{p_n}\cdot\frac{E_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\overline{H}_n'(x)}{\sqrt{x^2-y^2}}\,.$$

Da die electrischen und magnetischen Kräfte stets endlich sein müssen, so kommt der Lösung nur dann ein physikalischer Sinn zu, wenn die Functionen N, X, Y in allen Punkten des Feldes endliche Werthe besitzen. Die Punkte, für welche $x = 1$ ist, liegen auf der die Brennpunkte verbindenden Strecke, also innerhalb des Leiters. Dagegen gehören Theile der Rotationsaxe des Ellipsoids, für die $y = +1$ bez. $y = -1$ wird, dem Felde an. *Daher ist für $E_n(y)$ ein particuläres Integral von (12a) zu setzen, dass in den singulären Punkten $y = \pm 1$ verschwindet, und dessen Ableitung daselbst endlich ist.* Es ist nun klar, dass die Differentialgleichung (12a) im allgemeinen für beliebige Werthe der Constanten p_n, $\varkappa_n$ kein derartiges Integral besitzt. Denn das Integral soll 2 Gleichungen genügen, die sein Verschwinden für $y = \pm 1$ verlangen, aber nur über eine Integrationsconstante kann verfügt werden, da eine zweite, multiplicative Constante willkürlich bleibt. *Demnach setzt die Stetigkeitsbedingung eine bestimmte Beziehung zwischen den Constanten p_n, $\varkappa_n$ fest.*

Ehe wir diese Beziehung angeben, wollen wir eine wichtige Eigenschaft der Function $E_n(y)$ ableiten. Dieselbe sollte der Differentialgleichung (12a) genügen, und für $y = \pm 1$ von der ersten Ordnung verschwinden. Dann befriedigt auch die Function $E_n(-y)$ die Differentialgleichung, und, da sie in den singulären Punkten $y = \pm 1$ dasselbe Verhalten zeigt, wie das Integral $E_n(y)$, so kann sie von jenem nur durch eine multiplicative Constante C unterschieden sein

$$E_n(-y) = C \, . \, E_n(y) \, . \tag{13}$$

Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder es verschwindet $E_n(y)$ nicht für $y = 0$; dann ist $C = 1$. Oder es verschwindet $E_n(y)$ für $y = 0$; dann kann die Ableitung $E_n'(y)$ daselbst nicht gleich Null sein, weil sonst das Integral $E_n(y)$ identisch verschwinden würde. Somit ist in diesem Falle $C = -1$. Wir werden nun den einzelnen Particulärlösungen eine solche Ordnungszahl n zuschreiben, dass

$$C = (-1)^{n+1}$$

zu setzen ist, also die Beziehung besteht

$$E_n(-y) = (-1)^{n+1} \, . \, E_n(y). \tag{14}$$

Diese Festsetzung wird sich nachträglich dadurch rechtfertigen, dass sie eine Anordnung der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters zulässt, bei der die Schwingungszahlen den Ordnungszahlen annähernd proportional sind. Aus (14), im Verein mit (12c), (12d), (12e), ergeben sich die folgenden Symmetrieeigenschaften des electromagnetischen Feldes der Eigenschwingungen.

Bei allen ungeradzahligen Schwingungen sind in zwei symmetrisch zur Aequatorebene liegenden Punkten die magnetischen Kräfte gleich, die senkrecht auf den Ellipsen stehenden Componenten der electrischen Kraft entgegengesetzt gleich; insbesondere haben die electrischen Ladungen symmetrisch liegender Punkte des Leiters entgegengesetztes Vorzeichen. Bei allen geradzahligen Schwingungen dagegen sind die magnetischen Kräfte in zwei symmetrisch liegenden Punkten entgegengesetzt gleich, die senkrecht auf den Ellipsen stehenden Componenten der electrischen Kraft gleich; insbesondere haben die Ladungen symmetrisch liegender Punkte des Leiters gleiches Vorzeichen.

Nunmehr wollen wir die Beziehung angeben, die zwischen den Constanten $\varkappa_n, p_n$ infolge der Stetigkeitsbedingung besteht. Wir nehmen an, wir hätten ein Werthepaar $\varkappa_{n0}, p_{n0}$, sowie die zugehörige, für $y = \pm 1$ von der ersten Ordnung verschwindende Function $E_{n0}(y)$ gefunden, und suchen ein zweites, den Stetigkeitsbedingungen genügendes Werthepaar $\varkappa_n, p_n$ zu ermitteln.

Es gelten die Differentialgleichungen

$$E_n''(y) + E_n(y)\left(-p_n^2 + \frac{\varkappa_n}{1-y^2}\right) = 0 \, ,$$

$$E_{n0}''(y) + E_{n0}(y)\left(-p_{n0}^2 + \frac{\varkappa_{n0}}{1-y^2}\right) = 0 \, .$$

Wir multipliciren die erste mit $E_{n0}(y)$, die zweite mit $E_n(y)$, subtrahiren die Producte und integriren von $y = -1$ bis $y = +1$. Dann folgt

$$\left[E_n'(y) \, . \, E_{n0}(y) - E_{n0}'(y) \, . \, E_n(y)\right]_{y=-1}^{+1}$$

$$= (p_n^2 - p_{n0}^2) \, . \int\limits_{-1}^{+1} dy \, . \, E_{n0}(y) \, . \, E_n(y) - (\varkappa_n - \varkappa_{n0}) \, . \int\limits_{-1}^{+1} \frac{dy}{1-y^2} \, . \, E_{n0}(y) \, . \, E_n(y) \, .$$

Da nun, den Stetigkeitsbedingungen zufolge, beide Functionen $E_n(y)$, $E_{n0}(y)$ für $y = \pm 1$ verschwinden, und ihre Ableitungen daselbst endlich sind, so wird

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = (\varkappa_n - \varkappa_{n0}) \, . \, \frac{\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dy \, . \, E_{n0}(y) \, . \, E_n(y)}{1-y^2}}{\int\limits_{-1}^{+1} dy \, . \, E_{n0}(y) \, . \, E_n(y)} \, . \tag{14a}$$

Dieses ist der analytische Ausdruck der Stetigkeitsbedingung. Da das Integral $E_n(y)$ durch die Constanten p_n, $\varkappa_n$ bis auf einen willkürlichen, constanten Factor bestimmt ist, so liefert (14a), wenn ein den Stetigkeitsbedingungen genügendes Werthepaar $\varkappa_{n0}$, p_{n0} bekannt ist, eine allgemein zwischen den Constanten p_n, $\varkappa_n$ bestehende Gleichung.

Eine zweite Beziehung zwischen diesen Constanten erhalten wir, wenn wir die Differentialgleichung (12b), unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen, integriren. Diese verlangen, dass an der Grenze des leitenden Ellipsoids die tangentielle Componente der electrischen Kraft zu allen Zeiten verschwinde; es hat somit für den betreffenden Werth des Parameters x die durch (12e) bestimmte Function Y, und somit die Ableitung $\overline{H}_n'(x)$ des gesuchten Integrals von (12b) zu verschwinden. Andererseits soll dieses Integral in grosser Entfernung vom Erreger ausgesandten Wellen entsprechen. Hier werden die Ellipsoide $x =$ constans zu Kugeln vom Radius x. Da die zeitliche Veränderung des Feldes durch den Factor $e^{-p_n c t}$ bestimmt war, so muss das Integral $\overline{H}_n(x)$ sich mit wachsendem x der Function $e^{+p_n x}$ nähern; nur dann entspricht die Lösung einer zu entfernteren Kugelflächen forteilenden Welle. Da nun auch in dem Integrale $\overline{H}_n(x)$ eine multiplicative Constante willkürlich bleibt, so ergiebt sich aus den beiden Grenzbedingungen eine zweite Beziehung zwischen den Constanten p_n, $\varkappa_n$, die wir, für den Fall des stabförmigen Leiters, im nächsten Abschnitte aufstellen werden. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen, welche den analytischen Ausdruck der Stetigkeits- und Grenzbedingungen darstellen, die Constante $\varkappa_n$, so erhält man eine Reihe ganz bestimmter Werthe der complexen Constante p_n, welche den zeitlichen Ablauf der betreffenden Eigenschwingung angiebt. *Durch die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen sind demnach die Perioden und Dämpfungsdecremente der Eigenschwingungen des leitenden Rotationsellipsoids vollständig bestimmt.*

§ 4. Formulirung der Grenzbedingung für den Fall des stabförmigen Erregers.

Genügt das Integral $E_n(y)$ der Differentialgleichung (12a) den im vorigen Abschnitte aufgestellten Stetigkeitsbedingungen, so besitzt, wie ich in einer demnächst in den „Mathematischen Annalen" erscheinenden Arbeit bewiesen habe, die Differentialgleichung (12b) die folgenden beiden Integrale

$$\overline{H}_n(x) = (1 - x^2) \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \cdot E_n(y)\, dy\,, \tag{15}$$

$$H_n(x) = (1 - x^2) \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p_n x y} \cdot E_n(y)\, dy\,. \tag{15a}$$

Bei der Ableitung der Gleichung (15) musste $x > 1$ und der reelle Theil von p_n als positiv angenommen werden; beide Voraussetzungen sind in dem vorliegenden Falle erfüllt, da

für alle Punkte des Feldes $x > 1$ ist, und wegen der Strahlungsdämpfung der reelle Theil von p_n sich als positiv ergeben muss. Die durch (15a) bestimmte Function $H_n(x)$ hingegen befriedigt für alle reellen, endlichen Werthe des Arguments die Differentialgleichung (12b). Da sie für die Werthe $+1$ und -1 des Argumentes verschwindet, so kann sie nur durch eine multiplicative Constante e_n von dem Integrale $E_n(x)$ unterschieden sein. Somit ist

$$e_n \cdot E_n(x) = (1 - x^2) \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p_n x y} E_n(y)\, dy\,. \tag{15b}$$

Die Constante e_n muss einen endlichen Werth besitzen, da die rechte Seite der Gleichung (15b) für endliche x endlich, und $E_n(x)$ im allgemeinen von Null verschieden ist.

Wir werden nun nachweisen, dass die Function $\overline{H}_n(x)$ die gesuchte Lösung ergiebt, welche vom Erreger forteilenden Wellen entspricht. Wir erhalten durch partielle Integration

$$- x^2 \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \cdot E_n(y)\, dy = - \frac{x}{p_n} \cdot E_n(1) \cdot e^{p_n x} + \frac{1}{p_n^2} \cdot E_n'(1) \cdot e^{p_n x}$$
$$- \frac{1}{p_n^2} \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \cdot E_n''(y)\, dy\,.$$

Da nun $E_n(1)$ gleich Null ist, so folgt nach (15)

$$p_n^2 \cdot \overline{H}_n(x) = E_n'(1) \cdot e^{p_n x} - \int_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \left(E_n''(y) - p_n^2 E_n(y) \right) dy\,,$$

oder, mit Rücksicht auf (12a)

$$p_n^2 \cdot \overline{H}_n(x) = E_n'(1) \cdot e^{p_n x} + \varkappa_n \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \cdot \frac{E_n(y)}{1 - y^2} \cdot dy\,. \tag{15c}$$

In analoger Weise erhält man aus (15b)

$$p_n^2 e_n \cdot E_n(x) = E_n'(1) \cdot e^{p_n x} - E_n'(-1) \cdot e^{-p_n x} + \varkappa_n \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p_n x y} \cdot \frac{E_n(y)}{1 - y^2} \cdot dy\,,$$

und somit, mit Rücksicht auf (14)

$$(15\text{d})\quad \begin{cases} p_n^2 \cdot e_n \cdot E_n(x) = E_n'(1)\left(e^{p_n x} + (-1)^{n+1} e^{-p_n x}\right) \\ \qquad + \varkappa_n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} e^{p_n x y} \cdot \dfrac{E_n(y)}{1-y^2}\, d y . \end{cases}$$

Wir setzen in die rechten Seiten von (15c), (15d) die durch (14) und (15b) gegebene Beziehung ein

$$\frac{E_n(y)}{1-y^2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{E_n(-y)}{1-y^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{e_n} \cdot \int\limits_{-1}^{+1} e^{-p_n y \alpha} \cdot E_n(\alpha)\, d\alpha ,$$

und erhalten

$$p_n^2 \overline{H}_n(x) = E_n'(1) \cdot e^{p_n x}$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{e_n} \cdot \varkappa_n \cdot \int\limits_{-\infty}^{+1} e^{p_n x y} \cdot d y \cdot \int\limits_{-1}^{+1} e^{-p_n y \alpha} \cdot E_n(\alpha)\, d\alpha ,$$

$$p_n^2 e_n \cdot E_n(x) = E_n'(1) \cdot \left(e^{p_n x} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n x}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{e_n} \cdot \varkappa_n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} e^{p_n x y}\, d y \cdot \int\limits_{-1}^{+1} e^{-p_n y \alpha} E_n(\alpha)\, d\alpha .$$

Wir kehren die Integrationsordnung um, und führen die Integration nach y aus; so gelangen wir zu den Formeln

$$(16)\quad \begin{cases} p_n^2 \overline{H}_n(x) = E_n'(1) \cdot e^{p_n x} \\ \qquad + \dfrac{(-1)^{n+1}}{p_n \cdot e_n} \cdot \varkappa_n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha \cdot E_n(\alpha) \cdot \dfrac{e^{p_n(x-\alpha)}}{x-\alpha} , \end{cases}$$

$$(16\text{a})\quad \begin{cases} p_n^2 e_n \cdot E_n(x) = E_n'(1) \cdot \left(e^{p_n x} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n x}\right) \\ \qquad + \dfrac{(-1)^{n+1}}{p_n \cdot e_n} \cdot \varkappa_n \cdot \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha \cdot E_n(\alpha) \cdot \dfrac{e^{p_n(x-\alpha)} - e^{-p_n(x-\alpha)}}{x-\alpha} . \end{cases}$$

Aus (16) erkennt man, dass sich mit wachsendem x das Integral $\overline{H}_n(x)$ der Differentialgleichung (12b) einem der Function $e^{p_n x}$ proportionalen Werthe asymptotisch nähert. *Dasselbe ergiebt somit in der That die gesuchte, vom Erreger forteilenden Wellen entsprechende Lösung.*

Für kleine Werthe von x sind die folgenden Darstellungen der Integrale geeignet. Wir führen die für endliche x endliche Function ein

$$(16\text{b})\quad B_n(x) = \frac{e^{2 p_n x}}{E_n'(1)} \cdot \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha\, \frac{E_n(x) \cdot e^{-p_n x} - E_n(\alpha) \cdot e^{-p_n \alpha}}{x-\alpha} .$$

Dann folgt aus (16)

$$(16\text{c})\quad \begin{cases} p_n^2 \cdot \dfrac{\overline{H}_n(x)}{E_n'(1)} = e^{p_n x} \\ + \dfrac{\varkappa_n \cdot (-1)^{n+1}}{p_n \cdot e_n} \cdot \left[\dfrac{E_n(x)}{E_n'(1)} \cdot \log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - e^{-p_n x} \cdot B_n(x)\right] , \end{cases}$$

und aus (16a), mit Rücksicht auf (14)

$$(16\text{d})\quad \begin{cases} p_n^2 \cdot e_n \cdot \dfrac{E_n(x)}{E_n'(1)} = e^{p_n x} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n x} \\ - \dfrac{\varkappa_n}{p_n \cdot e_n} \cdot \left[e^{p_n x} \cdot B_n(-x) + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n x} \cdot B_n(x)\right] . \end{cases}$$

Das Integral $\overline{H}_n(x)$ haben wir nun der Grenzbedingung anzupassen, welche verlangt, dass die Ableitung $H_n'(x)$ für den der Oberfläche des leitenden Ellipsoids zukommenden Werth des Parameters x verschwinde. Daraus folgt eine Beziehung zwischen den Constanten p_n und $\varkappa_n$, die wir für den Fall des stabförmigen Leiters nunmehr ableiten wollen.

Als Stab bezeichnen wir ein Rotationsellipsoid, welches so gestreckt ist, dass das Quadrat des Quotienten aus der kleinen Halbaxe (b) und dem halben Abstand der Brennpunkte (1) verschwindend klein ist. Da alle Längen auf die Excentricität als Einheit bezogen wurden, so ist die grosse Axe des Stabes

$$a = 1 + \delta = \sqrt{1 + b^2} = 1 + \frac{b^2}{2} .$$

Somit wird für einen Stab

$$(17)\qquad \delta = \frac{b^2}{2}$$

verschwindend klein sein, was indessen nicht ausschliesst, dass die Grösse

$$(17\text{a})\qquad \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \log\left(\frac{2}{b}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \log\left(\frac{2}{\delta}\right)}$$

einen zwar kleinen, aber doch endlichen Werth annimmt.

Die an der Grenze des stabförmigen Leiters vorgeschriebene Bedingung verlangt, dass

$$\overline{H}_n{}'(1+\delta) = 0 \tag{17b}$$

sei. Aus (16c) folgt nun

$$\begin{aligned} p_n^2 \cdot \overline{H}_n{}'(x) = p_n \cdot e^{p_n x} & \\ + \frac{(-1)^{n+1} \cdot \varkappa_n}{p_n \cdot e_n} \cdot & \left[\frac{E_n{}'(x)}{E_n{}'(1)} \cdot \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 2 \frac{E_n(x)}{E'(1) \cdot (x^2-1)} \right. \\ & \left. + p_n \cdot e^{-p_n x} \cdot B_n(x) - e^{-p_n x} \cdot B_n{}'(x) \right]. \end{aligned}$$

Somit ergiebt sich aus (17b), unter Vernachlässigung von δ und positiven Potenzen dieser Grösse

$$\begin{aligned} 0 = p_n \cdot e^{p_n} & \\ + \frac{(-1)^{n+1} \cdot \varkappa_n}{p_n \cdot e_n} \cdot & \left[\log\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1 + p_n \cdot e^{-p_n} \cdot B_n(1) - e^{-p_n} \cdot B_n{}'(1) \right]. \end{aligned}$$

Führt man endlich die durch (17a) definirte Grösse ε ein, so erhält man als *analytischen Ausdruck der Grenzbedingung im Falle des stabförmigen Erregers*

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 p_n \cdot e^{p_n} \cdot \varepsilon = \\ & \frac{(-1)^n \cdot \varkappa_n}{p_n \cdot e_n} \cdot \left[1 + 2 \varepsilon \left(p_n \cdot e^{-p_n} \cdot B_n(1) - e^{-p_n} \cdot B_n{}'(1) - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Die Grenzbedingung schreibt demnach eine ganz bestimmte, zwischen den Constanten p_n, $\varkappa_n$ bestehende Beziehung vor. Eine andere Beziehung (14a) erhielten wir im vorigen Abschnitte aus den Stetigkeitsbedingungen. Dort bedeutete p_{n0}, $\varkappa_{n0}$ irgend ein Werthepaar der Constanten, welches, in die Differentialgleichung (12a) eingesetzt, ein für $y = \pm 1$ verschwindendes Integral $E_{n0}(y)$ zulässt. Solche Werthepaare sind nun

$$\varkappa_{n0} = 0, \quad p_{n0} = -\frac{\pi n i}{2} \tag{18a}$$

und die zugehörigen Integrale von (12a)

$$E_{n0}(y) = e^{p_{n0} \cdot y} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_{n0} \cdot y}. \tag{18b}$$

Somit lautet der *analytische Ausdruck der Stetigkeitsbedingungen*

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = \varkappa_n \cdot \frac{\int_{-1}^{+1} dy \cdot \frac{E_n(y)}{1-y^2} \cdot \left(e^{p_{n0} y} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_{n0} y} \right)}{\int_{-1}^{+1} dy \cdot E_n(y) \left(e^{p_{n0} y} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_{n0} y} \right)}. \tag{19}$$

Um $\varkappa_n$, p_n aus den Gleichungen (18), (19) zu berechnen, muss man die Function $E_n(y)$ kennen, welche wiederum mit $\varkappa_n$, p_n durch die mit (16d) identische Gleichung zusammenhängt

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{p_n^2 \cdot e_n}{E_n{}'(1)} \cdot E_n(y) = e^{p_n y} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n y} \\ & - \frac{\varkappa_n}{p_n \cdot e_n} \cdot \left[e^{p_n y} \cdot B_n(-y) + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n y} \cdot B_n(y) \right]. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Die zur Berechnung der Constanten p_n, welche den zeitlichen Ablauf der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters angeben, sowie der die Stromvertheilung längs des Stabes bestimmenden Functionen $E_n(y)$ dienenden Gleichungen (18), (19), (20) erscheinen auf den ersten Blick sehr complicirt. Wir werden sie indessen durch geeignete Methoden der successiven Approximation in verhältnissmässig einfacher Weise lösen.

§ 5. **Erste Näherung.**

Die zu bestimmenden Grössen $\varkappa_n$, p_n, $E_n(y)$ hängen von den Dimensionen des stabförmigen Leiters insofern ab, als die durch (17a) definirte Constante ε in Gleichung (18) vorkommt. Da $(2/b)$ das Verhältniss von Stabdicke (2) zum Radius des Querschnittes (b) angab, so nimmt ε mit abnehmender Stahldicke beständig ab. Denken wir uns nun die gesuchten Grössen in Reihen entwickelt, die nach aufsteigenden Potenzen von ε fortschreiten, so werden die Glieder dieser Reihen um so schneller abnehmen, je geringer die Stabdicke ist. Bei ausserordentlich geringer Stabdicke wird der Werth jeder Reihe sich dem ersten von ε unabhängigen Gliede nähern, ohne es jedoch jemals zu erreichen; denn zur Grenze $\varepsilon = 0$ darf man nicht übergehen. Es würde dieses heissen, dass der Stab vollkommen verschwindet, in welchem Falle natürlich die Bedingung, dass die electrischen Kraftlinien senkrecht auf seiner Oberfläche endigen müssen, hinfällig wird. Immerhin erhalten wir, indem wir $\varepsilon = 0$ setzen, die Anfangsglieder der erwähnten Reihen, mit deren Hülfe wir dann für die zu bestimmenden Grössen eine erste Annäherung ermitteln können.

Mit ε verschwindet nach Gleichung (18) auch $\varkappa_n$. Denn die Constante p_n, welche Periode und Dämpfung der Eigenschwingungen angiebt, muss stets endlich sein, und auch die Constante e_n besitzt, wie wir aus (15b) schlossen, einen endlichen Werth. Also wird für $\varepsilon = 0$

$$\varkappa_n = 0. \tag{21}$$

Somit folgt aus (20)

$$p_n^2 e_n . E_n(y) = E_n'(1)\left(e^{p_n y} + (-1)^{n+1} . e^{-p_n y}\right),$$

und (19) ergiebt

$$p_n = p_{n0} = -\frac{\pi n i}{2}. \tag{21a}$$

Differenzirt man die vorletzte Gleichung, setzt alsdann $y = 1$ und führt den durch (21a) gegebenen Werth von p_n ein, so erhält man

$$p_n . e_n = e^{-\frac{\pi n i}{2}} + (-1)^n . e^{+\frac{\pi n i}{2}} = 2(-i)^n. \tag{21b}$$

Somit geht mit verschwindendem ε die Function $E_n(y)$ über in

$$E_n(y) = \frac{E_n'(1)}{\pi n . (i)^{n+1}} \cdot \left(e^{\frac{\pi n i y}{2}} + (-1)^{n+1} . e^{-\frac{\pi n i y}{2}}\right). \tag{21c}$$

Diese Werthe der Grössen $\varkappa_n$, p_n, $E_n(y)$ können wir nicht als Näherungswerthe bezeichnen, da sie durch einen unzulässigen Grenzübergang aus den wahren Werthen entstehen. In der That ist der durch (21a) bestimmte Werth von p_n ein rein imaginärer, er entspricht also einer ungedämpften Schwingung, die, wie wir aus dem Energieprincip schlossen, bei endlichen Kräften unmöglich ist. Wir werden indessen einen Näherungswerth für die Constante $\varkappa_n$ erhalten, indem wir die in (21a, b, c) angegebenen Werthe in die Gleichung (18) einführen. Alsdann ergiebt sich unter Vernachlässigung der zweiten Potenz von ε

$$\varkappa_n = -2\pi n i . \varepsilon . \text{[1]} \tag{22}$$

1) *Anmerkung.* Der Schluss, durch welchen die Gleichungen (26b, c) meiner Dissertation abgeleitet sind, hatte die Endlichkeit des Constanten $1/\varkappa_n$ zur Voraussetzung. Durch das damals nicht vorherzusehende Resultat, dass jene Constante mit abnehmender Stabdicke unendlich wird, wie $-1/2\pi n i \varepsilon$, werden jene Gleichungen, sowie die auf ihnen basirte Rechnung auf der zweiten Hälfte von p. 24 und der ersten Hälfte von p. 25 hinfällig. Der dort angegebene Werth der Constanten p_1 ist durch den unten in Gleichung (22f) erhaltenen zu ersetzen.

Setzt man diesen Werth von $\varkappa_n$ in die Gleichung (19) ein, so erhält man mit derselben Annäherung

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = -2\pi n i . \varepsilon . \frac{\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dy}{1-y^2} . \left(e^{\frac{\pi n i y}{2}} + (-1)^{n+1} . e^{-\frac{\pi n i y}{2}}\right)^2}{\int\limits_{-1}^{+1} dy \left(e^{\frac{\pi n i y}{2}} + (-1)^{n+1} . e^{-\frac{\pi n i y}{2}}\right)^2}. \tag{22a}$$

Ferner folgt aus (20)

$$\frac{p_n^2 e_n}{E_n'(1)} . E_n(y) = e^{p_n y} + (-1)^{n+1} . e^{-p_n y}$$

$$+ \frac{2\pi n i \varepsilon}{p_n e_n} . \left[e^{p_n y} . B_n(-y) + (-1)^{n+1} . e^{-p_n y} . B_n(y)\right].$$

Da Grössen von der Ordnung ε^2 fortgelassen werden sollen, so sind im Coefficienten von ε die durch (21a, b, c) gegebenen Werthe von p_n, e_n, $E_n(y)$ zu setzen. Dann folgt

$$\frac{p_n^2 e_n}{E_n'(1)} . E_n(y) = e^{p_n y} + (-1)^{n+1} . e^{-p_n y}$$

$$+ \pi n (i)^{n+1} . \varepsilon \left[e^{-\frac{\pi n i y}{2}} . B_n(-y) + (-1)^{n+1} . e^{\frac{\pi n i y}{2}} . B_n(y)\right],$$

wo nach (16b) ist

$$B_n(y) = \frac{1}{\pi n (i)^{n+1}} . \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha . \left(\frac{1 - e^{-\pi n i (y-\alpha)}}{y - \alpha}\right).$$

Führen wir die reellen Functionen ein

$$\left\{\begin{aligned} C_n(y) &= \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha . \left(\frac{1 - \cos \pi n (y-\alpha)}{y-\alpha}\right), \\ S_n(y) &= \int\limits_{-1}^{+1} d\alpha . \frac{\sin \pi n (y-\alpha)}{y-\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{22b}$$

so wird

$$B_n(y) = \frac{1}{\pi n (i)^{n+1}} \cdot \big(C_n(y) + i\, S_n(y)\big). \tag{22c}$$

Man erkennt leicht, dass $C_n(y)$ eine ungerade, $S_n(y)$ eine gerade Function ist

$$C_n(-y) = -C_n(y), \quad S_n(-y) = S_n(y). \tag{22d}$$

Somit wird

$$B_n(-y) = \frac{1}{\pi n (i)^{n+1}} \big(-C_n(y) + i\, S_n(y)\big),$$

und man erhält für $E_n(y)$ die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{p_n^2 \cdot e_n}{E_n'(1)} \cdot E_n(y) &= e^{p_n y} + (-1)^{n+1} \cdot e^{-p_n y} \\ &+ \varepsilon \cdot e^{-\frac{\pi n i y}{2}} \big(-C_n(y) + i\, S_n(y)\big) \\ &+ \varepsilon (-1)^{n+1} \cdot e^{+\frac{\pi n i y}{2}} \big(C_n(y) + i S_n(y)\big). \end{aligned}\right. \tag{22e}$$

Es ist ferner die Constante p_n zu ermitteln; aus (22a) folgt

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = -2\pi n i \cdot \varepsilon \cdot \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{2\, d y}{1 - y^2} \big((-1)^{n+1} + \cos(\pi n y)\big)}{\displaystyle\int_{-1}^{+1} 2\, d y \big((-1)^{n+1} + \cos \pi n y\big)}.$$

Das Integral im Nenner ist gleich $4 \cdot (-1)^{n+1}$; das Integral im Zähler ergiebt sich, wenn man

$$\frac{2}{1 - y^2} = \frac{1}{1 - y} - \frac{1}{-1 - y}$$

und $(-1)^n \cdot \cos \pi n y = \cos \pi n (1 - y)$ bez. $= \cos \pi n (-1 - y)$ setzt, gleich

$$(-1)^{n+1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d y}{1 - y} \big(1 - \cos \pi n (1 - y)\big)$$

$$-(-1)^{n+1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d y}{-1 - y} \big(1 - \cos \pi n (-1 - y)\big).$$

Dieser Ausdruck ist nach (22b, d) gleich

$$(-1)^{n+1} \big(C_n(1) - C_n(-1)\big) = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot C_n(1).$$

Somit erhält man

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = -\pi n i \varepsilon \cdot C_n(1).$$

Berücksichtigt man endlich, dass $(p_n - p_{n0})^2$ eine Grösse von der Ordnung ε^2 ist, so wird nach (18a)

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = 2\, p_{n0} (p_n - p_{n0}) = -\pi n i \left(p_n + \frac{\pi n i}{2}\right),$$

und schliesslich erhält man

$$p_n = -\frac{\pi n i}{2} + \varepsilon\, C_n(1), \tag{22f}$$

als ersten Näherungswerth der den zeitlichen Ablauf der Eigenschwingungen bestimmenden Constanten p_n.

Wie wir in Gleichung (10) festsetzten, stand die Constante p_n mit der Wellenlänge λ_n und dem Dämpfungsdecrement σ_n der betreffenden Eigenschwingung in dem Zusammenhange

$$p_n = -\frac{2\pi i}{\lambda_n} + \frac{\sigma_n}{\lambda_n}.$$

Durch Vergleichung mit (22f) erhält man somit in erster Annäherung für die *Wellenlängen der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters*

$$\lambda_n = \frac{4}{n}, \tag{23}$$

und für die *Dämpfungsdecremente*

$$\sigma_n = \frac{4\varepsilon}{n} \cdot C_n(1). \tag{23a}$$

Wir finden also: *Ist das Verhältniss von Dicke und Länge des Stabes hinreichend klein, dass Grössen von der Ordnung ε^2 nicht zu berücksichtigen sind, so ist die Wellenlänge der Grundschwingung gleich der doppelten Stablänge, die Oberschwingungen sind harmonisch. Die Dämpfung durch Strahlung nimmt mit abnehmender Stabdicke beständig ab.*

Setzt man nunmehr, mit Rücksicht auf (22f), Grössen von der Ordnung ε^2 consequent fortlassend,

$$e^{p_n y} = e^{-\frac{\pi n i y}{2}} \big(1 + \varepsilon \cdot C_n(1) \cdot y\big),$$

$$e^{-p_n y} = e^{+\frac{\pi n i y}{2}} \big(1 - \varepsilon \cdot C_n(1) \cdot y\big),$$

und ferner, zur Abkürzung,

$$c = \frac{p_n^2 \cdot e_n}{E_n'(1)},$$

so folgt aus (22e)

$$\text{(23b)} \begin{cases} c \cdot E_n(y) = e^{-\frac{\pi n i y}{2}} [1 - \varepsilon(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) + i \cdot \varepsilon \cdot S_n(y)] \\ \qquad + (-1)^{n+1} \cdot e^{+\frac{\pi n i y}{2}} [1 + \varepsilon(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) + i \cdot \varepsilon \cdot S_n(y)]. \end{cases}$$

Oder, da $(-1)^n = e^{-\pi n i}$ ist,

$$\text{(23c)} \begin{cases} e^{\frac{\pi n i}{2}} \cdot c \cdot E_n(y) = e^{-\frac{\pi n i}{2}(y-1)} \cdot [1 - \varepsilon(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) + i \cdot \varepsilon \cdot S_n(y)] \\ \qquad - e^{+\frac{\pi n i}{2}(y-1)} \cdot [1 + \varepsilon(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) + i \cdot \varepsilon \cdot S_n(y)]. \end{cases}$$

Die Function $E_n(y)$ stellt die *Stromvertheilung längs des Leiters* dar. Je geringer der Querschnitt des Stabes, und daher die Grösse ε ist, desto mehr nähert sich die Stromvertheilung einer solchen, die sich auffassen lässt als Superposition einer zum freien Ende $(y = 1)$ hinlaufenden, und einer dort reflectirten Welle, die mit constanter Amplitude und Phase fortschreiten. Am freien Ende liegt ein Knoten des Stromes; dieses ist auch bei endlicher Stabdicke der Fall, da $E_n(y)$ für $y = \pm 1$ verschwindet. *Es wird also stets die Welle am freien Ende mit gleicher Amplitude und entgegengesetztem Vorzeichen des Stromes reflectirt. Dagegen schreitet längs des Leiters die Welle nicht mit constanter Amplitude und Phase fort,* vielmehr ist die Amplitude, mit der die zum freien Ende hineilende Welle im Abstande y von der Mitte des Leiters eintrifft, bei Vernachlässigung von Grössen der Ordnung ε^2 gleich

$$1 - \varepsilon(C_n(y) - y\, C_n(1)),$$

und die Amplitude der am freien Ende $(y = 1)$ reflectirten Welle ist zu demselben Zeitpunkte

$$1 + \varepsilon(C_n(y) - y\, C_n(1)).$$

Ferner beträgt die Phase beider Wellen im Punkte y

$$\varepsilon \cdot S_n(y).$$

Einen anderen Ausdruck für den an der Oberfläche des Leiters herrschenden Schwingungszustand erhält man, indem

man die rechte Seite von (23b) in ihren reellen und imaginären Theil spaltet. Dann wird für ungerade n

$$\text{(23d)} \begin{cases} \frac{c}{2} \cdot E_n(y) = \cos\left(\frac{\pi n y}{2}\right) + i \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{2}\right)(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) \\ \qquad + i \cdot \varepsilon \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{2}\right) \cdot S_n(y), \end{cases}$$

und für gerade n

$$\text{(23e)} \begin{cases} \frac{i \cdot c}{2} \cdot E_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{2}\right) - i \cdot \varepsilon \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{2}\right)(C_n(y) - y \cdot C_n(1)) \\ \qquad + i \cdot \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{2}\right) \cdot S_n(y). \end{cases}$$

Es superponirt sich also der durch das erste Glied dargestellten stehenden Welle eine zweite, deren Bäuche mit den Knoten der ersten zusammenfallen, und welche somit eine *Abflachung der Knoten* bewirkt, und eine dritte, deren Knoten mit denen der ersten zusammenfallen, und die jener um $\frac{1}{2}\pi$ an Phase voran ist.

Das Zeitintegral des Quadrats der Stromstärke, das bei bolometrischen Messungen in Rechnung zu ziehen ist, ergiebt sich nach (23d, 23e) als proportional

$$\cos^2\left(\frac{\pi n y}{2}\right)$$

bei ungerader, und als proportional

$$\sin^2\left(\frac{\pi n y}{2}\right)$$

bei gerader Ordnungszahl der Schwingung, wenn Grössen von der Ordnung ε^2 vernachlässigt werden.

Ehe wir weitergehen, wollen wir einige zur Berechnung der Functionen $S_n(y)$, $C_n(y)$ dienende Formeln ableiten. Führt man in (22b) die neue Integrationsvariable $\gamma = \pi n(y - \alpha)$ ein, so wird

$$\text{(24)} \qquad C_n(y) = \int_{\pi n (y-1)}^{\pi n (y+1)} d\gamma \cdot \frac{(1 - \cos\gamma)}{\gamma},$$

$$\text{(24a)} \qquad S_n(y) = \int_{\pi n (y-1)}^{\pi n (y+1)} d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

Schreibt man die letzte Gleichung

$$S_n(y) = \int_0^{\pi n(1+y)} d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma} + \int_0^{\pi n(1-y)} d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma},$$

so erkennt man, dass mit wachsender Ordnungszahl sich $S_n(y)$ dem Werthe nähert

$$\text{(24b)} \qquad S_n(y) = 2 \cdot \int_0^\infty d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma} = \pi \text{ für } -1 < y < +1,$$

$$\text{(25c)} \qquad S_n(y) = \int_0^\infty d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma} = \frac{\pi}{2} \text{ für } y = \pm 1.$$

Genauer berechnet man $S_n(1)$ aus der folgenden, semiconvergenten Entwickelung, welche die Eigenschaft besitzt, dass der Rest stets kleiner ist, als das letzte beibehaltene Glied

$$\text{(24d)} \quad \left\{ \begin{aligned} S_n(1) &= \int_0^{2\pi n} d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma} = \frac{\pi}{2} - \int_{2\pi n}^\infty d\gamma \cdot \frac{\sin\gamma}{\gamma} \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2\pi n} - \frac{2!}{(2\pi n)^3} + \frac{4!}{(2\pi n)^5} - \dots\right] \end{aligned} \right.$$

Eine Reihe von der gleichen Eigenschaft benutzen wir zur Bestimmung des Integrals

$$\int_{2\pi n}^\infty d\gamma \cdot \frac{\cos\gamma}{\gamma} = \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \dots,$$

welches im Ausdruck der Constanten $C_n(1)$ auftritt. Es ist nämlich

$$\text{(24e)} \quad \left\{ \begin{aligned} C_n(1) &= \int_0^{2\pi n} d\gamma \cdot \frac{(1-\cos\gamma)}{\gamma} = \int_{2\pi n}^\infty d\gamma \cdot \frac{\cos\gamma}{\gamma} + \int_0^{2\pi n} \frac{d\gamma}{1+\gamma} \\ &- \int_{2\pi n}^\infty \frac{d\gamma}{\gamma \cdot (1+\gamma)} + \int_0^\infty d\gamma \left(\frac{1}{\gamma(1+\gamma)} - \frac{\cos\gamma}{\gamma}\right). \end{aligned} \right.$$

Die Summe des zweiten und dritten Gliedes beträgt: $\log(2\pi n)$. Für das vierte Glied kann man schreiben

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma} - \cos\gamma\right) = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\left(e^{-\gamma} - \cos\gamma\right)$$

$$- \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\left(-\frac{1}{1+\gamma} + e^{-\gamma}\right).$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} \cdot \left(e^{-\gamma} - \cos\gamma\right) = \int_0^\infty d\gamma \cdot \int_0^\infty d\eta \left(e^{-\gamma(1+\eta)} - \cos\gamma \cdot e^{-\gamma\eta}\right)$$

$$= \int_0^\infty d\eta \int_0^\infty d\gamma \left(e^{-\gamma(1+\eta)} - \cos\gamma\, e^{-\gamma\eta}\right)$$

$$= \int_0^\infty d\eta \left(\frac{1}{1+\eta} - \frac{\eta}{1+\eta^2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{(1+\eta)^2}{1+\eta^2}\right)\right]_{\eta=0}^\infty = 0.$$

Ferner folgt aus der, von **Dirichlet**[1]) herrührenden Formel

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\left(e^{-\gamma} - \frac{1}{(1+\gamma)^a}\right) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

indem man $a = 1$ setzt,

$$- \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\left(e^{-\gamma} - \frac{1}{1+\gamma}\right) = - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Die rechte Seite ist gleich der **Euler**'schen Constanten

$$- \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 0{,}5772156649.$$

Somit ergiebt (24e) schliesslich

$$\text{(25)} \quad \left\{ \begin{aligned} C_n(1) &= 0{,}577 + \log\text{nat}(2\pi n) \\ &+ \left[\frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \dots\right]. \end{aligned} \right.$$

1) **Dirichlet**, Crelle's Journ. für reine u. angew. Math. **15.** p. 260.

Mit Hülfe dieser Formel berechnen sich die durch (23a) bestimmten Werthe der *Dämpfungsdecremente* für die *Grundschwingung* ($n = 1$) zu

(25a) $$\sigma_1 = 9{,}74 \,.\, \varepsilon\,,$$

für die *erste Oberschwingung* ($n = 2$) zu

(25b) $$\sigma_2 = 6{,}23 \,.\, \varepsilon\,;$$

für *alle höheren Ordnungszahlen* gilt mit genügender Annäherung

(25c) $$\sigma_n = \frac{9{,}66 + 4 \log \operatorname{nat}(n)}{n} \,.\, \varepsilon\,.$$

Das Decrement der Strahlungsdämpfung der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters nimmt demnach mit wachsender Ordnungszahl beständig ab.

§ 6. **Zweite Näherung.**

Wir haben nunmehr die im vorigen Paragraphen gefundenen Näherungswerthe wiederum in die Gleichungen (18, 19) einzuführen, um die Correction zu ermitteln, die an den in (22f) angegebenen Werthen der für den zeitlichen Ablauf der Eigenschwingungen charakteristischen Constanten p_n anzubringen ist, wenn Glieder von der Ordnung ε^2 beibehalten werden.

Unter Vernachlässigung von Grössen der Ordnung ε^3, ergiebt Gleichung (18)

$$\varkappa_n = (-1)^n \,.\, (p_n e_n) \,.\, 2\, p_n \,.\, e^{p_n}$$
$$[\varepsilon - 2 \,.\, \varepsilon^2 (p_n \,.\, e^{-p_n} \,.\, B_n(1) - e^{-p_n} \,.\, B_n'(1) - 1)]\,.$$

Denselben Grad der Annäherung erreicht man, wenn man für die mit dem Factor ε behafteten Grössen die aus (22e, f) folgenden Werthe setzt

$$p_n e_n = 2 \,.\, (-i)^n \big(1 + \varepsilon\, i\, S_n(1)\big)\,,$$
$$2\, p_n = -\pi n i + 2\, \varepsilon \,.\, C_n(1)\,,$$
$$e^{p_n} = (-i)^n \big(1 + \varepsilon \,.\, C_n(1)\big)$$

und für die mit ε^2 multiplicirten Grössen nach (22b, c)

$$p_n \,.\, e^{-p_n} \,.\, B_n(1) = -\tfrac{1}{2}\big(C_n(1) + i \,.\, S_n(1)\big)\,,$$
$$e^{-p_n} \,.\, B_n'(1) = -1\,.$$

Alsdann erhält man

(26) $$\varkappa_n = 2\,\varepsilon\Big[-\pi n i + 2\,\varepsilon\big(C_n(1) + \pi n \,.\, S_n(1) - \pi n i \,.\, C_n(1)\big)\Big]\,.$$

Setzt man diesen Werth von $\varkappa_n$ in die Gleichung (19) ein, so kann man für p_n einen zweiten Näherungswerth ermitteln. Denn aus dem in (23b) für die Function $E_n(y)$ angegebenen Ausdruck erhält man durch einige Umformungen, die ich, der Kürze wegen, nicht im einzelnen angeben will,

$$\int_{-1}^{+1} d\,y \,.\, \frac{E_n(y)}{1 - y^2}\left(e^{-\frac{\pi n i y}{2}} + (-1)^{n+1} \,.\, e^{+\frac{\pi n i y}{2}}\right)$$
$$= \frac{2}{c} \,.\, (-1)^{n+1}\big[C_n(1) - 2\,\varepsilon\, i\, S_n(1) \,.\, C_n(1) + \varepsilon\, i\, J_n\big]\,,$$

wo

$$J_n = \int_{-1}^{+1} d\,y \,.\, C_n'(y) \,.\, S_n(y)$$

gesetzt ist, und ferner

$$\int_{-1}^{+1} d\,y \,.\, E_n(y)\left(e^{-\frac{\pi n i y}{2}} + (-1)^{n+1} \,.\, e^{+\frac{\pi n i y}{2}}\right)$$
$$= \frac{4}{c} \,.\, (-1)^{n+1}\left[1 + 2\,\varepsilon \,.\, i \,.\, S_n(1) + \frac{\varepsilon\, i \,.\, C_n(1)}{\pi n}\right]\,.$$

Mit Benutzung dieser Näherungswerthe, sowie des in (26) für $\varkappa_n$ ermittelten erhält man aus Gleichung (19) den bei Vernachlässigung von Grössen der Ordnung ε^3 gültigen Ausdruck

(26a) $$\left\{\begin{aligned} p_n^2 - p_{n0}^2 = \varepsilon\Big[&-\pi n i \,.\, C_n(1) + \varepsilon(-2\,\pi n \,.\, C_n(1) \,.\, S_n(1) \\ &- 2\,\pi n i \,.\, C_n^2(1) + C_n^2(1) + \pi n \,.\, J_n)\Big]\,. \end{aligned}\right.$$

Nun ist identisch

$$p_n^2 - p_{n0}^2 = (p_n - p_{n0})^2 + 2\, p_{n0} \,.\, (p_n - p_{n0})\,,$$

ferner ergab (22f).

$$(p_n - p_{n0})^2 = \varepsilon^2 \,.\, C_n^2(1)\,.$$

Daher wird schliesslich

(26b) $$\left\{\begin{aligned} p_n &= -\frac{\pi n i}{2} + \varepsilon \,.\, C_n(1) \\ &+ \varepsilon^2 (2\, C_n^2(1) - 2\, i \,.\, C_n(1) \,.\, S_n(1) + i \,.\, J_n)\,. \end{aligned}\right.$$

Für die Wellenlänge λ_n und das Dämpfungsdecrement σ_n der Eigenschwingungen erhält man hieraus, der Beziehung

$$p_n = \frac{\sigma_n}{\lambda_n} - \frac{2\,\pi\, i}{\lambda_n}$$

gemäss, die folgenden Werthe: Für die *Wellenlänge*

$$\lambda_n = \frac{4}{n}\left(1 + c_n \cdot \varepsilon^2\right), \tag{27}$$

wo gesetzt ist

$$c_n = \frac{2}{\pi n} \cdot \left(J_n - 2 \cdot C_n(1) \cdot S_n(1)\right). \tag{27a}$$

Für das *logarithmische Decrement*

$$\sigma_n = \frac{4 \cdot C_n(1) \cdot \varepsilon + 8 \cdot C_n^2(1) \cdot \varepsilon^2}{n}. \tag{27b}$$

Aus (27) folgt, dass in zweiter Annäherung die Wellenlänge der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters kein genau ganzzahliger Theil der doppelten Stablänge ist. *Vielmehr hat man der Stablänge den Bruchtheil $c_n \varepsilon^2$ hinzuzufügen, um ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge zu erhalten.* Diese Correction ist von der Ordnungszahl der Eigenschwingung abhängig. Zu ihrer Berechnung ist die Auswerthung des transcendenten Integrals

$$J_n = \int_{-1}^{+1} d y \cdot C_n'(y) \cdot S_n'(y)$$

erforderlich. Ich finde für die *Grundschwingung* ($n = 1$)

$$c_1 \cdot \varepsilon^2 = 5{,}6\, \varepsilon^2, \tag{28}$$

für die *erste Oberschwingung* ($n = 2$)

$$c_2 \cdot \varepsilon^2 = 3{,}3\, \varepsilon^2. \tag{28a}$$

Für grosse Ordnungszahlen nähert sich, der Gleichung (24b) zufolge, $S_n(y)$ der Constanten π. Daher wird, mit Rücksicht auf (22d),

$$J_n = 2\pi\, C_n(1).$$

Da ferner für grosse n nach (24d) sich

$$S_n(1) = \frac{\pi}{2}$$

ergiebt, so wird, mit Rücksicht auf (25)

$$J_n - 2\, C_n(1)\, S_n(1) = \pi \cdot C_n(1) = \frac{\pi}{2} \cdot (4{,}8 + 2 \log \operatorname{nat} n).$$

Somit nähert sich mit wachsender Ordnungszahl die der Stablänge hinzuzufügende Correction dem Bruchtheile:

$$c_n\, \varepsilon^2 = \frac{4{,}8 + 2 \log \operatorname{nat} n}{n} \cdot \varepsilon^2 \tag{28b}$$

der ganzen Stablänge. Dieser Ausdruck stellt für $n \geqq 3$ die Correction mit einer Genauigkeit dar, die als genügend gelten kann, da die ganze Correction in allen Fällen, wo die nach Potenzen von ε fortschreitenden Reihen überhaupt gut convergiren, nur wenige Procente beträgt. Wir sehen also:

Der Bruchtheil, welcher der Stablänge hinzuzufügen ist, um ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge zu erhalten, nimmt mit wachsender Ordnungszahl beständig ab.

Der zweite Näherungswerth (27b) der Dämpfungsdecremente enthält nur die transcendenten Zahlen $C_n(1)$, deren Werthe aus Formel (25) zu entnehmen sind. Wir könnten nun noch einen zweiten Näherungswerth für die Function $E_n(y)$ ermitteln; doch würde das Resultat zu complicirt werden, um einer einfachen physikalischen Deutung fähig zu sein. Ferner erscheint es zwecklos, noch genauere Näherungswerthe der Constanten p_n aus den Gleichungen (18, 19, 20) abzuleiten, da die Gleichung (18) selbst nur angenäherte Gültigkeit besitzt. Vielmehr wollen wir uns mit den gefundenen Näherungswerthen begnügen und im letzten Abschnitte die physikalische Bedeutung der erhaltenen Resultate eingehender erläutern.

§ 7. Zusammenfassung und Discussion der Resultate.

Wir stellten uns die Aufgabe, die Eigenschwingungen eines Hertz'schen Erregers durch Integration der Maxwell'schen Gleichungen zu bestimmen. Nachdem wir die Grundgleichungen der Maxwell'schen Electrodynamik durch Einführung allgemeiner orthogonaler Coordinaten auf eine für diesen Zweck geeignete Form gebracht hatten, untersuchten wir die Abhängigkeit der Perioden und Dämpfungsdecremente der Eigenschwingungen von den Dimensionen des Erregers, sowie von der Dielectricitätsconstante des umgebenden Mediums. Man benutzt bei derartigen Betrachtungen häufig den der Electrostatik entnommenen Begriff der Capacität; da aber bei zeitlich veränderlichen Feldern die Definition dieses Begriffes hinfällig wird, so zogen wir es vor, unmittelbar aus den Grundgleichungen die folgenden Sätze abzuleiten:

I. *Die Perioden der Eigenschwingungen eines Hertz'schen Erregers sind der Wurzel aus der Dielectricitätsconstante des umgebenden Mediums proportional.*

II. *Das logarithmische Decrement der Strahlungsdämpfung eines Hertz'schen Erregers ist unabhängig von der Dielectricitätsconstante des umgebenden Mediums.*

III. *Die Perioden der Eigenschwingungen geometrisch ähnlicher Erreger verhalten sich wie die Längen entsprechender Strecken.*

IV. *Die Eigenschwingungen geometrisch ähnlicher Erreger besitzen das gleiche logarithmische Decrement.*

Die „Eigenschwingungen" sind durch folgende Bedingungen bestimmt. Im ganzen Felde gelten die Maxwell'schen Gleichungen, an der Grenze des Erregers endigen die electrischen Kraftlinien senkrecht, und in grosser Entfernung sind ausschliesslich vom Erreger forteilende Wellen vorhanden.

Wir nahmen das electromagnetische Feld als symmetrisch zur Rotationsaxe des Erregers an, und bestimmten die Punkte der Meridianebene durch ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln. Für einen stabförmigen Leiter, d. h. für ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid, gelang es, eine unendliche Zahl gedämpften Schwingungen entsprechender Lösungen der Grundgleichungen und Grenzbedingungen zu finden, derart, dass die das electromagnetische Feld bestimmenden Functionen sich darstellten als Producte einer nur längs der Ellipsen, und einer nur längs der Hyperbeln veränderlichen Grösse. Die halben Wellenlängen dieser Eigenschwingungen waren in erster Annäherung ganzzahligen Theilen der Stablänge gleich. Wir erhalten also das Resultat:

V. *Die Maxwell'sche Theorie lässt die Existenz einer unendlichen Zahl nahezu harmonischer Oberschwingungen des stabförmigen Leiters zu.*

Ueber die Symmetrieeigenschaften des Feldes der Eigenschwingungen konnten wir folgendes aussagen:

VI. *Bei der Grundschwingung, sowie bei allen ungeradzahligen Eigenschwingungen sind in zwei, symmetrisch zur Aequatorebene liegenden, Punkten die magnetischen Kräfte gleich; die electrischen Ladungen symmetrisch liegender Punkte des Leiters besitzen entgegengesetztes Vorzeichen.*

VII. *Bei allen geradzahligen Eigenschwingungen sind in zwei, symmetrisch zur Aequatorebene liegenden, Punkten die magnetischen Kräfte entgegengesetzt gleich; die electrischen Ladungen symmetrisch liegender Punkte des Leiters besitzen gleiches Vorzeichen.*

Aus dem letzten Satze folgt, dass für die geradzahligen Schwingungen in der Aequatorebene die magnetische Kraft verschwindet; es treten demnach dort überhaupt keine fortschreitenden Wellen auf. Die in der Symmetrieebene zu beobachtenden Schwingungszahlen verhalten sich also wie 1:3:5:7 etc. Hieran wird nichts geändert, wenn man die Wellen an Drähten entlang leitet, vorausgesetzt, dass die Anordnung eine symmetrische ist. Stets werden durch die geradzahligen Schwingungen symmetrisch liegende Leiterpunkte in gleicher Weise geladen, es besteht zwischen solchen Punkten somit keine Potentialdifferenz; *die Existenz der geradzahligen Schwingungen ist daher durch Messungen in der Symmetrieebene überhaupt nicht festzustellen.* Nun sind kürzlich von Hrn. Lamotte[1]) die von einem Lecher'schen und von einem Blondlot'schen Erreger ausgesandten Schwingungen untersucht worden. Er beobachtete in der Symmetrieebene und fand, dass bei der Lecher'schen Anordnung Schwingungen auftraten, deren Schwingungszahlen sich nahezu wie 1:3:5 verhielten, während bei der Blondlot'schen Anordnung auch annähernd geradzahlige Verhältnisse der Schwingungszahlen vorkamen. Die von den Herren Lamotte und Drude[2]) gemachte Annahme, dass man es hier mit Oberschwingungen des Erregers zu thun habe, ist somit in Uebereinstimmung mit dem obigen Satze für den Fall des Lecher'schen Systems, nicht aber des Blondlot'schen. Wenn nun unsere Theorie sich auch eigentlich nur auf den stabförmigen Leiter bezieht, so dürfte dieser doch als typisch anzusehen sein für alle Erregerformen, bei denen nur annähernd harmonische Oberschwingungen auftreten. Es ist daher wahrscheinlich, dass die bei der Blondlot'schen Anordnung beobachteten Schwingungen zum Theil nicht als Oberschwingungen des Erregerkreises zu deuten sind, sondern der Wechselwirkung der primären und secundären Leitung[3]) ihren Ursprung verdanken.

1) M. Lamotte, Wied. Ann. **65.** p. 92—105. 1898.

2) l. c. p. 104.

3) Vgl. J. v. Geitler, Wied. Ann. **57.** p. 412. 1896 und E. Marx, Inaug.-Diss. p. 9. Göttingen 1898. J. v. Geitler, Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien, **107.** Abth. IIa. Juli 1898.

Die den Eigenschwingungen entsprechende *Stromvertheilung längs des Leiters* gestaltet sich bei verschwindender Ausstrahlung sehr einfach. Die Knotenpunkte des Stromes sind um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt, auch die Stabenden sind als Knotenpunkte anzusehen. Zu derselben Folgerung führt die, bei „Drahtwellen" übliche, Anschauungsweise, welche den Schwingungszustand als resultirend ansieht aus ebenen, am freien Ende des Drahtes mit entgegengesetztem Vorzeichen des Stromes reflectirten Wellen. Die Unhaltbarkeit dieser Anschauungsweise zeigt sich jedoch, wenn man das electromagnetische Feld in einiger Entfernung vom Leiter untersucht. Denn, wie die Theorie ergiebt, sind die Knotenflächen der magnetischen Kraft keineswegs Ebenen, sondern:

VIII. *Die Knotenflächen schneiden die Meridianebenen in Hyperbelästen, deren Brennpunkte in den Enden des Drahtes liegen.*

Dieses folgt unmittelbar daraus, dass die, den Eigenschwingungen entsprechenden, Particulärlösungen sich als Producte einer nur längs der Ellipsen und einer nur längs der Hyperbeln veränderlichen Function darstellten. Denn verschwindet die magnetische Kraft an einzelnen Punkten des leitenden Ellipsoids, so verschwindet sie längs der ganzen, jenen Punkt enthaltenden, Schaale des confocalen Rotationshyperboloids. *Satz VIII liefert die Erklärung gewisser, von den Herren Sarasin und Birkeland*[1]) *angestellter Experimente.* Diese Forscher untersuchten das Feld in der Nähe eines frei endigenden Drahtes mit einem Funkenresonator und fanden die Knotenlinien gekrümmt, die concave Seite dem freien Ende zukehrend. Die Theorie ergiebt in der That, dass die Knotenlinien in der Nähe des freien Endes annähernd die Gestalt von Parabeln haben, deren Brennpunkt mit dem Drahtende zusammenfällt.

Die ausgesandten Wellen entziehen dem electromagnetischen Felde des Erregers fortgesetzt Energie und bewirken somit eine Dämpfung der Schwingungen. Giebt $2/b$ das Verhältniss von Stablänge zum Radius des Querschnittes an, und setzen wir

$$\varepsilon = \frac{1}{4 \, . \log \operatorname{nat} \left(\frac{2}{b}\right)},$$

1) Birkeland u. Sarasin, Compt. rend. **117.** p. 618—622. 1893.

so sind in erster Annäherung die Werthe der *Dämpfungsdecremente* für die *Grundschwingung* ($n = 1$)

$$\sigma_1 = 9{,}74 \, . \, \varepsilon,$$

für die *erste Oberschwingung* ($n = 2$)

$$\sigma_2 = 6{,}23 \, . \, \varepsilon,$$

und für *alle höheren Oberschwingungen*

$$\sigma_n = \frac{9{,}66 + 4 \, . \log \operatorname{nat}(n)}{n} \, . \, \varepsilon.$$

Wir sehen also:

IX. *Die Dämpfungsdecremente der Eigenschwingungen des stabförmigen Leiters nehmen mit wachsender Ordnungszahl beständig ab. Die zeitliche Dämpfung dagegen nimmt mit wachsender Ordnungszahl zu.*

Es verklingen also die Oberschwingungen schneller, als die Grundschwingung, aber trotzdem sinken die Amplituden der Oberschwingungen erst nach einer grösseren Zahl von Oscillationen auf einen bestimmten Bruchtheil ihres anfänglichen Werthes herab. Die Dämpfung durch Strahlung wird mit abnehmendem Querschnitt des Stabes verschwindend klein.

Durch die Ausstrahlung wird die Stromvertheilung längs des Leiters modificirt. Diese konnten wir, bei verschwindender Dämpfung, als resultirend ansehen aus einer zum freien Ende hin laufenden, und einer daselbst mit gleicher Amplitude und entgegengesetztem Vorzeichen des Stromes reflectirten Welle. Den *Einfluss der Ausstrahlung auf den Schwingungszustand* hat kürzlich Hr. Eckström[1]) dadurch berücksichtigen zu können geglaubt, dass er, bei der Reflexion am Drahtende, einen Phasenverlust und eine Verminderung der Amplitude in Ansatz brachte. Diese Annahme erweist sich, von unserem Standpunkte aus, für Wellen längs eines einzigen Drahtes als nicht gerechtfertigt. Denn da die Function $E_n(y)$, welche die Stromvertheilung längs des Drahtes darstellt, für $y = \pm 1$, d. h. an den Drahtenden, verschwindet, so befindet sich dort stets ein Knoten des Stromes. Aus Satz VIII folgt demnach,

1) Eckström, Wied. Ann. **64.** p. 317. 1898.

dass die Verlängerungen der Drahtaxe Knotenlinien der magnetischen Kraft sind. Es strahlt also die Schwingungsenergie nicht in axialer, sondern in seitlicher Richtung aus. Daher kann man vermuthen, dass nicht bei der Reflexion am freien Ende, sondern beim Fortschreiten längs des Drahtes sich der Einfluss der Ausstrahlung bemerkbar macht. In der That bewiesen wir folgendes:

X. *Denkt man sich die, den Eigenschwingungen zukommende, Stromverteilung als durch Superposition eines zum freien Ende hin laufenden, und eines dort reflectirten Wellenzuges entstanden, so findet, beim Fortschreiten längs des Leiters, eine stetige Aenderung der Amplituden und Phasen der beiden Wellen statt. Am freien Ende ist die Reflexion eine vollständige.*

Was den mit Bolometer oder Thermoelement zu messenden *Integraleffect* anbelangt, so wird seine Vertheilung längs des Leiters in erster Annäherung, d. h. bei Vernachlässigung von Grössen der Ordnung ε^2, dargestellt durch $\cos^2(\frac{1}{2}\pi n y)$ für die ungeradzahligen, und durch $\sin^2(\frac{1}{2}\pi n y)$ für die geradzahligen Eigenschwingungen.

In grosser Entfernung vom Erreger gehen die Ellipsen $x =$ constans, und die Hyperbelzweige $y =$ constans, welche die Lage eines Punktes in der Meridianhalbebene bestimmten, in Kreise vom Radius x und in Gerade über, welche mit der Axe des Erregers den Winkel $\varphi = \arccos y$ einschliessen. Wir befinden uns hier im Gebiete der vom Erreger forteilenden Wellen. Die radiale Componente X der electrischen Kraft verschwindet (nach 12c, 12d, 12e) gegen die senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung stehenden Componenten der magnetischen und electrischen Kraft, die durch den reellen Theil von

$$\frac{e^{p_n(x-c.t)}}{x} \cdot \frac{E_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}$$

bestimmt werden. Es wird demnach die *Veränderung der Strahlungsintensität längs eines Meridians* dargestellt durch den absoluten Betrag der Function

$$\frac{E_n^2(y)}{1-y^2} = \frac{E_n^2(\cos\varphi)}{\sin^2\varphi},$$

welcher sich, in erster Annäherung, als proportional

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\cdot\cos\varphi\right)}{\sin^2(\varphi)}$$

für die ungeradzahligen, und als proportional

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\cdot\cos\varphi\right)}{\sin^2\varphi}$$

für die geradzahligen Eigenschwingungen gab. Wir schliessen hieraus:

XI. *Ist die Strahlung eines Hertz'schen Erregers aus Schwingungen verschiedener Perioden zusammengesetzt, so ist der Beitrag, den die einzelnen Eigenschwingungen zu der gesammten Strahlungsintensität liefern, in verschiedenen Punkten eines Meridians ein verschiedener.*

Ist andererseits die Vertheilung der gesammten Strahlung des stabförmigen Erregers längs eines Meridians bekannt, so dürften es unsere Resultate gestatten, die Frage zu entscheiden, ob nur die Grundschwingung ausgesandt wird, oder ob ein merklicher Theil der gesammten Strahlung auf die Oberschwingungen entfällt.

In zweiter Annäherung, d. h. bei Berücksichtigung von Grössen der Ordnung ε^2, ist an den oben angegebenen Werthen der Wellenlängen und Dämpfungsdecremente eine Correction anzubringen, und zwar ist der Stablänge ein bestimmter Bruchtheil hinzuzufügen, um ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge der betreffenden Eigenschwingung zu erhalten. Dieser Bruchtheil betrug:

$5{,}6 \,.\, \varepsilon^2$ für die *Grundschwingung* $(n = 1)$,

$3{,}3 \,.\, \varepsilon^2$ für die *erste Oberschwingung* $(n = 2)$,

$\frac{4{,}8 + 2 \log \mathrm{nat}\,(n)}{n} \,.\, \varepsilon^2$ für *alle höheren Oberschwingungen.*

Wir sehen also:

XII. *Die Correction, die an der Stablänge anzubringen ist, um ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge zu erhalten, nimmt mit zunehmender Ordnungszahl beständig ab.*

Demnach sind die Wellenlängen der Oberschwingungen immer etwas kleiner, als einer vollkommenen Harmonie mit der Grundschwingung entsprechen würde.

Zum Schluss erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer und Chef, Hrn. Professor Dr. M. Planck, meinen Dank für das freundliche Interesse auszusprechen, das er den vorliegenden Untersuchungen entgegenbrachte.

Berlin, Institut für theoretische Physik, Juli 1898.

(Eingegangen 27. Juli 1898.)

5. *Ueber die Grenzen des festen Zustandes II.; von G. Tammann.*

(Hierzu Taf. IV.)

In einer früheren Mittheilung unter obigem Titel[1]) wurde das Programm einer Untersuchung, betreffend den Uebergang aus dem flüssigen in den krystallisirten (festen) Zustand, entwickelt. Die bekannte Gleichung

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{r}(v' - v'')$$

wurde integrirt, wobei sich ergab, dass die Zustandsgebiete der Stoffe im krystallisirten Zustande sich nicht bis zu unendlichen Drucken ausdehnen können und dass dieses Zustandsgebiet bei manchen Stoffen sich nicht bis zur absoluten Temperatur Null zu erstrecken braucht. Die letztere Folgerung aus obiger Formel konnte dann durch eine Untersuchung über die Stabilität unterkühlter Flüssigkeiten[2]) gestützt werden. Es ergab sich, dass bei vielen Flüssigkeiten die Stabilität in Abhängigkeit von der Temperatur ein Minimum hat. Anknüpfend an die früheren Untersuchungen wurde dann die Feststellung der Schmelzdruckcurve für einige Stoffe in Angriff genommen, worüber im Folgenden berichtet werden wird. An die Mittheilung dieser Experimentaluntersuchung knüpfen sich ferner einige Bemerkungen, welche die Beziehung der Poynting'schen Anschauungen über die Schmelzdruckcurve zum Gegenstande haben, die Ostwald'sche Hypothese über die Stabilität unterkühlter Flüssigkeiten beleuchten und sich schliesslich auf ein von Heydweiller beobachtetes Phänomen erstrecken.

Frühere Messungen über den Einfluss des Druckes auf den Schmelzpunkt.

Da die Methoden und Resultate früherer Beobachter, wie R. Bunsen, W. Thomson, A. Battelli und anderer in den Lehrbüchern zu finden sind, sollen hier nur die neueren Messungen

1) Wied. Ann. **62.** p. 280. 1897.
2) Zeitschr. f. physik. Chem. **25.** p. 441. 1898.