

SKIN - EFFEKT IN EINEM RINGE.¹

Von V. Fock.

(Eingegangen am 21. Januar 1932).

Einleitung und Inhaltsübersicht.

Der Skin - Effekt in einem geraden Leiter ist in der Literatur für mehrere Fälle durchgerechnet worden; das entsprechende Problem für einen gebogenen Leiter scheint dagegen weniger Beachtung gefunden zu haben. Insbesondere ist die Frage nach der Verteilung der Stromdichte an der Oberfläche des Leiters und deren Abhängigkeit von der Krümmung wenig geklärt. Die Kenntnis der Stromverteilung ist aber zur Berechnung der Selbstinduktion nach der üblichen Methode erforderlich. Eigentlich bildet die Berechnung der Stromverteilung und der Selbstinduktion eines gebogenen Leiters für hochfrequenten Wechselstrom ein einziges Problem; und eine exakte Lösung dieses Problems in einem Spezialfall könnte vielleicht auch auf den allgemeinen Fall einiges Licht werfen.

In dieser Arbeit wird das genannte Problem für den Fall eines Ringes von kreisförmigem Querschnitt gelöst. Die Arbeit hat zwei Zwecke: erstens, die Verteilung der Stromdichte an einem besonders einfachen, exakt lösbaren Spezialfall eines gekrümmten Leiters zu verfolgen; zweitens aber, an demselben Beispiel eine neue Methode zur Berechnung der Selbstinduktion zu entwickeln, die im Vergleich zur gewöhnlichen Methode wesentliche Vorteile bietet. Das charakteristische Merkmal der neuen Methode besteht darin, dass die Selbstinduktion als Resultat der Lösung eines gewissen Randwertproblems erhalten wird, wobei die Stromverteilung nicht als bekannt angenommen werden muss. Die vorliegende Arbeit enthält zwei Teile und einen mathematischen Anhang.

¹ Diese Arbeit ist in russischer Sprache im Journal der Russ. Phys. - Chem. Ges. erschienen (Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. 62, 218, 1930).

Im ersten Teil werden die bekannten Differentialgleichungen und Randbedingungen für das elektromagnetische Feld besprochen (§§ 1 und 2), wobei der Fall der axialen Symmetrie besonders beachtet wird (§ 3). Ferner wird die Selbstinduktion eines Systems von Stromleitern betrachtet und auf die Analogie zwischen dem elektromagnetischen und dem hydrodynamischen Problem hingewiesen (§ 5). Im zweiten Teil wird das elektromagnetische Feld um einen von Hochfrequenzstrom durchflossenen Ring von kreisförmigen Querschnitt untersucht. Es werden Ringkoordinaten eingeführt (§ 6). Für das Vektorpotential ergibt sich ein Ausdruck in Form einer schnell konvergierenden Reihe, die nach toroidalen Funktionen fortschreitet (§ 7); daraus lässt sich das magnetische Feld im ganzen Raum berechnen. Ferner werden Formeln für die Verteilung der Stromdichte an der Oberfläche des Ringes und für die Selbstinduktion abgeleitet (§ 8). Zum Schluss wird die hier zur Berechnung der Selbstinduktion angewandte Methode mit der gewöhnlichen Methode verglichen (§ 9).

Im mathematischen Anhang werden einige Eigenschaften der toroidalen Funktionen untersucht und schnell konvergente Reihen für deren Berechnung angegeben (§ 10).

I. TEIL.

§ 1. Flächenhaft verteilte Ströme.

Im Falle eines rein periodischen Vorgangs, wenn die Zeitabhängigkeit der Feldgrößen durch den Faktor $e^{i\omega t}$ repräsentiert wird, folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen,

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{H} &= 4\pi \frac{\sigma \mathbf{E}}{c} + \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c} \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

dass jede Komponente des elektromagnetischen Feldes einer Differentialgleichung von der Form

$$\Delta \Psi = k^2 \Psi \quad (2)$$

genügt, wo

$$k^2 = \frac{4\pi i \omega \mu \sigma}{c^2} - \omega^2 \frac{\epsilon \mu}{c^2} \quad (3)$$

ist. Im Falle quasistationärer Ströme, kann man das zweite Glied im Ausdruck für k^2 vernachlässigen, und

$$k^2 = \begin{cases} \frac{4\pi i \omega \mu \sigma}{c^2} & \text{im Leiter} \\ k^2 = 0 & \text{in der Luft} \end{cases} \quad (4)$$

setzen.

Betrachten wir den Ausdruck für k im Leiter. Führen wir die Frequenz

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

ein, so können wir schreiben

$$k = 2\pi \frac{1+i}{\delta}, \quad (5)$$

wo

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\mu \nu \sigma}} \quad (6)$$

eine gewisse Länge ist. Drückt man die Länge in Zentimetern, ν in Perioden pro Sekunde, die Leitfähigkeit σ in $(\text{Ohm} \cdot \text{cm})^{-1}$ und setzt man die Permeabilität μ gleich 1, so wird

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{10^9 \sigma \nu}} \cdot 10^5 \text{ cm}, \quad (7)$$

oder, wenn man die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\nu}$$

eingführt,

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{30 \sigma}} \text{ cm}. \quad (8)$$

Setzen wir (für Kupfer) $\sigma = 6 \cdot 10^5$, $\lambda = 20$ Meter, so wird

$$\delta = 0,01 \text{ cm}.$$

Die Grösse δ charakterisiert die Tiefe des Eindringens des Stroms in den Leiter. Auf Grund der Gleichung (2) kann

man zeigen, dass die Feldstärke im Innern des Leiters in der Nähe seiner Oberfläche nach dem Gesetz

$$e^{-2\frac{h}{\delta}} \quad (9)$$

abnimmt, wo h der Abstand von der Oberfläche ist. In der Tiefe $h = \delta$ sinkt das Feld auf den Bruchteil $e^{-2\delta}$ d. h. auf $\frac{1}{535}$ seines Wertes an der Oberfläche.

Aus dem Gesagten folgt, dass wir eine gute Näherung bekommen, wenn wir annehmen, dass der Strom in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht konzentriert ist, und dass das Feld beim Durchgang durch die Oberfläche springhaft auf den Wert Null herabsinkt. Im folgenden werden wir uns auf die Betrachtung dieses Grenzfalls beschränken.

§ 2. Grenzbedingungen an der Oberfläche des Leiters.

Bezeichnet man mit \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 die Werte der magnetischen Feldstärke auf der einen und auf der anderen Seite der Oberfläche, und mit \mathbf{n} den Vektor der Normale, so ergibt die Integration der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

über den Raum einer unendlich dünnen Oberflächenschicht die Beziehung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (10)$$

welche besagt, dass die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche stetig ist.

Integriert man über die Oberflächenschicht den Ausdruck für $\operatorname{curl} \mathbf{H}$, so bekommt man

$$\int \operatorname{curl} \mathbf{H} d\tau = \int [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] dS = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\tau. \quad (11)$$

Hier $d\tau = dn \cdot dS$, wo dn das Längenelement in der Richtung der Normale ist. Bei flächenhaft verteiltem Strom ist das Integral

$$\int \mathbf{j} dn = \mathbf{j}_{\text{lin}} \quad (12)$$

endlich und gleich der „linearen“ Stromdichte (Stromstärke pro Längeneinheit). Gleichung (11) ergibt dann

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{lin}}. \quad (13)$$

Multipliziert man diese Gleichung vektoriell mit \mathbf{n} und berücksichtigt man (10), so bekommt man

$$\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}_{\text{lin}} \times \mathbf{n}]. \quad (14)$$

Die Unstetigkeit der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche des Leiters ist tangentiell zur Oberfläche und senkrecht zum Strom.

Beachtet man das im vorigen Paragraphen erhaltene Resultat über das exponentielle Verschwinden der Feldstärke im Innern des Leiters, so kommt man zum Schluss, dass an der Oberfläche des Leiters nur diejenige Komponente der Feldstärke von Null verschieden sein kann, die dort einen Sprung erleidet. An der Oberfläche des Leiters ist also die magnetische Feldstärke selber (und nicht nur deren Unstetigkeit) tangentiell zur Oberfläche und senkrecht zum Strom.

§ 3. Das Feld mit axialer Symmetrie.

Es seien ein oder mehrere durch Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse (z -Achse) begrenzte Stromleiter gegeben, (z. B. einige Drahtwindungen). Wir nehmen an, dass der Strom senkrecht zur Symmetrieachse und zur Normale auf sie gerichtet ist, also in Zylinderkoordinaten ρ, φ die Richtung wachsender φ hat. In diesem Fall kann das elektromagnetische Feld durch eine einzige Funktion, nämlich durch die φ -Komponente A_φ des Vektorpotentials, ausgedrückt werden. Setzt man in der linearen Differentialform

$$A_\rho dx + A_\varphi dy + A_z dz = A_\rho d\rho + A_\varphi d\varphi + A_z dz \quad (15)$$

für A_ρ, A_z und A_φ die Werte

$$A_\rho = A_z = 0; \quad A_\varphi = A_\varphi(\rho, z) \quad (16)$$

ein, so bekommt man

$$A_x = -\frac{y}{\rho^2} A_\varphi; \quad A_y = \frac{x}{\rho^2} A_\varphi; \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (17)$$

Die Komponenten der magnetischen Feldstärke drücken sich durch A_φ wie folgt aus:

$$H_\varphi = 0; \quad H_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}. \quad (18)$$

Daraus folgt leicht, dass die Gleichungen der magnetischen Kraftlinien in der ρz -Ebene die Form

$$A_\varphi = \text{const} \quad (19)$$

haben.

Nach Formel (4) genügen die rechtwinkligen Komponenten des Vektorpotentials ausserhalb der Leiter der Laplace'schen Gleichung; daraus folgt, dass die Funktion A_φ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} = 0 \quad (20)$$

genügt. Da die Oberflächen der Leiter von magnetischen Kraftlinien gebildet werden, muss die Bedingung

$$A_\varphi = A_k = \text{const.} \quad \text{auf dem } k\text{-ten Leiter} \quad (21)$$

erfüllt werden. Dabei ist der Wert der Konstante A_k nicht gegeben, sondern muss aus den gegebenen Stromstärken berechnet werden. Ausserdem können wir verlangen, dass A_φ im Unendlichen verschwindet¹

$$A_\varphi \rightarrow 0 \quad \text{im Unendlichen} \quad (22)$$

Endlich muss das Linienintegral

$$\int_{(k)} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} dz - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} d\rho \right) = \frac{4\pi}{c} q_k. \quad (23)$$

längs einer den Leiter umkreisenden Kurve genommen, den vorgeschriebenen Wert $\frac{4\pi}{c} q_k$ haben, wo q_k die Stromstärke

¹ Gl. (20) hat eine partikuläre Lösung $A_\varphi = \frac{\rho^2}{r^3}$; von dieser Grössenordnung wird auch A_φ im Unendlichen sein.

in diesem Leiter bezeichnet. Wegen der Gleichung (20) ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential, so dass der Wert des Integrals nicht von der Form der Kurve abhängt. Durch die Differentialgleichung (20) mit den Bedingungen (21), (22), (23) wird die Funktion A_φ eindeutig definiert. Wir können annehmen, dass im Innern des Leiters A_φ denselben konstanten Wert A_k wie an der Oberfläche besitzt. Dann ist die Funktion A_φ im ganzen Raum eindeutig, endlich und stetig. Ihre Ableitungen erfordern dagegen an der Oberfläche des Leiters einen Sprung, welcher der linearen Stromdichte proportional ist:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial n} \right) = \frac{4\pi}{c} j_{\text{lin}} \quad (24)$$

Mit Hilfe dieser Formel werden wir die Verteilung der Stromdichte an der Peripherie des Leiters bestimmen.

§ 4. Die Selbstinduktion eines Systems von Stromleitern.

Die Selbstinduktion L_{ik} und die gegenseitige Induktion eines Systems von Leitern können bekanntlich als die (durch c^2 dividierten) Koeffizienten der Stromstärken im Ausdruck für die magnetische Energie definiert werden:

$$T = \frac{1}{2c^2} \sum_{ik} L_{ik} q_i q_k \quad (25)$$

Die magnetische Energie lässt sich als ein über den ganzen Raum genommenes Integral

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 d\tau \quad (26)$$

ausdrücken. Durch eine bekannte Umformung bekommt man daraus

$$T = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d\tau \quad (27)$$

wo nur über den vom Strom durchflossenen Raum zu integrieren ist.

Wir gehen nun zu unserem Fall flächenhaft verteilter Ströme über. Wegen

$$d\tau = d n d S; \quad \int d n = \mathbf{j}_{\text{lin}}$$

reduziert sich der Ausdruck (27) auf eine Summe von Integralen über die Begrenzungen einzelner Leiter

$$T = \frac{1}{2c} \sum_k \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{lin}} d S_k. \quad (27^*)$$

Im Falle axialer Symmetrie lässt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen. Wir haben nämlich

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{lin}} = \frac{A_k}{\rho} j_{\text{lin}}; \quad dS = \rho d\varphi ds$$

wo ds das Bogenelement der Peripherie des Drahtes ist. Da der Integrand nicht von φ abhängt, lässt sich die Integration nach φ ausführen:

$$\int \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{j}_{\text{lin}} d S_k = \int A_k j_{\text{lin}} d\varphi ds = 2\pi \int A_k j_{\text{lin}} ds.$$

Nun ist aber A_k an der Oberfläche konstant, und das Integral

$$\int j_{\text{lin}} ds = q_k \quad (28)$$

gleich der Stromstärke. Daraus folgt

$$T = \frac{\pi}{c} \sum_k A_k q_k. \quad (29)$$

Vergleicht man diese Formel mit (25), so bekommt man

$$2\pi A_k = \frac{1}{c} \sum_l L_{lk} q_l \quad (30)$$

Die Grösse $2\pi A_k$ ist also der Induktionsfluss durch eine vom k -ten Leiter umrandete Fläche. Diese physikalische Bedeutung von A_k könnten wir auch unmittelbar aus der Formel

$$\int \mathbf{H}_n dS = \int \frac{A_\varphi}{\rho} \rho d\varphi = 2\pi A_k \quad (31)$$

entnehmen.

Nach (30) ist die gegenseitige Induktion L_{lk} gleich dem durch c dividierten Koeffizienten der Stromstärke q_l im Aus-

druck für $2\pi A_k$. Zur Berechnung von L_{lk} ist es aber bequemer, die Grössen A_k als gegeben und die Stromstärken q_k als Unbekante zu betrachten. Die Lösung der Aufgabe ergibt die q_k als lineare Funktion der A_k . Aus den Koeffizienten dieser linearen Funktionen lassen sich dann auch die L_{lk} leicht berechnen.

Nehmen wir an, die Stromstärke sei in allen Leitern dieselbe. Dann kann die Selbstinduktion L des Systems von Leitern als das Verhältnis der mit $2c^2$ multiplizierten magnetischen Energie zum Quadrat der Stromstärke definiert werden. Die Grösse L wird gleich

$$L = \sum_{lk} L_{lk} = \frac{2\pi c}{q} \sum_k A_k. \quad (32)$$

§ 5. Hydrodynamische Analogie.

Die durch das magnetische Feld befriedigten Gleichungen zeigen, dass die magnetische Feldstärke \mathbf{H} als Geschwindigkeitsvektor in einer wirbelfreien Bewegung der ideellen Flüssigkeit in einem mehrfach zusammenhängenden, durch die Leiter begrenzten Raum gedeutet werden kann. In der Tat, setzt man $\mathbf{H} = \mathbf{v}$ so sind die Gleichungen

$$\text{curl } \mathbf{v} = 0; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ an der Oberfläche}$$

befriedigt. Der Stromstärke im Leiter entspricht die Zirkulation um denselben.

$$4\pi \frac{q}{c} = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = C \quad (33)$$

Der magnetischen Energie entspricht die kinetische Energie der Flüssigkeit

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 d\tau \rightarrow \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{v}^2 d\tau \quad (34)$$

Der Flüssigkeitsstrom durch eine vom Leiter berandete Fläche (das Analogon des Induktionsflusses) ist eine lineare homogene Funktion der Zirkulation um die einzelnen Leiter, und die Koeffizienten dieser Funktionen sind die Analoga der Koeffizienten der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion.

Falls die Zirkulationen um alle Stromleiter einander gleich sind, so ist das hydrodynamische Analogon der Selbstinduktion durch das Verhältnis der kinetischen Energie zum Quadrat der Zirkulation gegeben:

$$L = \frac{2c^2 T}{q} \rightarrow 4\pi \frac{\int \mathbf{v}^2 d\tau}{(\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})^2}. \quad (35)$$

Den inneren Teil der Stromleiter kann man als durch Wirbel ausgefüllt annehmen; dann können die Leiter als Wirbelringe betrachtet werden.

Im axialsymmetrischen Fall entspricht der Komponente A_φ des Vektorpotentials die Stokes'sche Stromfunktion.

Diese Analogie gestattet es, bei der Lösung elektrodynamischer Aufgaben die aus der Hydrodynamik bekannten Resultate zu verwenden, und umgekehrt.

Im Fall des Gleichstroms oder eines Stromes niedriger Frequenz wird die Analogie weniger vollständig, da die Bedingung $\mathbf{v}_n = 0$ an der Oberfläche nicht mehr erfüllt ist.

II. TEIL.

§ 6. Ringkoordinaten.

Es sei eine Drahtwindung von der Form eines Torus gegeben. Der Schnitt dieses Ringes durch die Ebene, welche seine Symmetrieachse enthält, ist in der Figur 1 dargestellt. Den Radius des Ringes bezeichnen wir mit R_0 und den Radius des Drahtes mit r_0 . Die Länge der Tangente vom Koordinatenursprung, den wir in das Symmetriezentrum legen, zur Peripherie des Ringes sei mit a bezeichnet

$$a = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}. \quad (36)$$

Wir führen mit C. Neumann¹ orthogonale Ringkoordinaten ϑ und ω ein, indem wir setzen

$$\rho + iz = ia \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\omega + i\vartheta) \quad (37)$$

¹ C. Neumann. Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe (1864).

oder

$$\rho = a \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\operatorname{ch} \vartheta - \cos \omega} \quad (38)$$

$$z = a \frac{\sin \omega}{\operatorname{ch} \vartheta - \cos \omega}. \quad (38^*)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen zuerst ω und dann ϑ so bekommt man

$$(\rho - a \operatorname{cth} \vartheta)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 \vartheta} \quad (39)$$

$$\rho^2 + (z - a \operatorname{ctg} \omega)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \omega}. \quad (39^*)$$

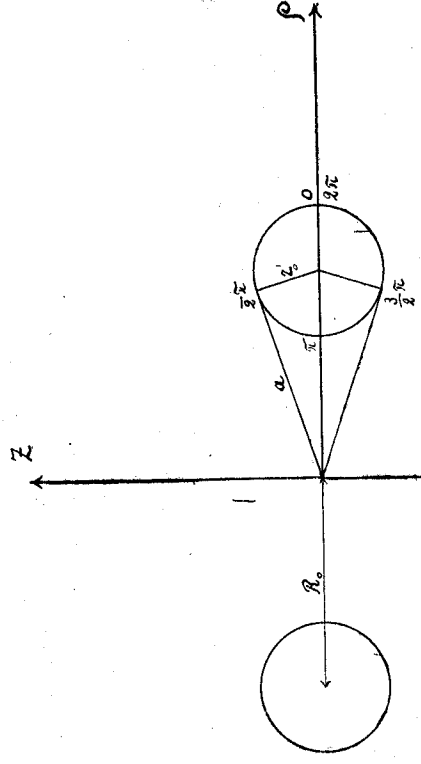


Fig. 1

Wir sehen, dass in der ρ, z -Ebene die Koordinatenkurven $\vartheta = \text{const.}$ und $\omega = \text{const.}$ zwei Scharen orthogonaler Kreise darstellen. Wählt man in (39) $\vartheta = \vartheta_0$ so, dass die Gleichungen

$$\frac{a}{\operatorname{sh} \vartheta_0} = r_0; \quad a \operatorname{cth} \vartheta_0 = R_0$$

und folglich

$$a = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}; \quad \operatorname{ch} \vartheta_0 = \frac{R_0}{r_0} \left. \vphantom{\frac{R_0}{r_0}} \right\} \quad (40)$$

$$\vartheta_0 = \log \operatorname{nat} \left(\frac{R_0 + a}{r_0} \right)$$

befriedigt werden, so stellt der Kreis $\vartheta = \vartheta_0$ den Querschnitt des Ringes dar. Die Werte von ϑ , die kleiner als ϑ_0 sind,

entsprechen Raumpunkten ausserhalb des Ringes, und die Werte $\vartheta > \vartheta_0$ dem Gebiet innerhalb des Ringes. Der Wert $\vartheta = \infty$ entspricht dem Punkte $z = 0$, $\rho = a$.

Längs eines Kreises $\vartheta = \text{const.}$ ändert sich ω von 0 bis 2π . Für den Kreis $\vartheta = \vartheta_0$ sind einige Werte von ω in der Figur angegeben. Nach einer vollen Umkreisung des Ringes, ändert sich ω um 2π . Eine eindeutige Funktion im Raum muss deshalb eine periodische Funktion von ω mit der Periode 2π sein.

§ 7. Das Vektorpotential in Ringkoordinaten.

Die Komponente A_φ des Vektorpotentials befriedigt, wie wir bereits festgestellt haben, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} = 0 \quad (20)$$

und nimmt an der Oberfläche und innerhalb des Ringes den konstanten Wert A an

$$A_\varphi = A \quad \text{innerhalb und auf dem Ringe.} \quad (21^*)$$

Setzen wir

$$A_\varphi = A \sqrt{\frac{\rho}{a}} F^*, \quad (41)$$

so genügt F^* der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \rho^2} = \frac{3}{4\rho^2} F^* \quad (42)$$

und der Bedingung

$$F^* = \sqrt{\frac{a}{\rho}} \frac{\sqrt{\text{ch } \vartheta - \cos \omega}}{\sqrt{\text{sh } \vartheta}} \quad \text{innerhalb und auf dem Ringe (43)}$$

Wir transformieren die Gleichung (42) auf die Koordinaten ω und ϑ . Wir haben

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \omega^2} = \left| \frac{d(\rho + iz)}{d(\omega + i\vartheta)} \right|^2 \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \rho^2} \right).$$

Nun ist

$$\left| \frac{d(\rho + iz)}{d(\omega + i\vartheta)} \right|^2 = \frac{a}{\text{ch } \vartheta - \cos \omega} = \frac{\rho}{\text{sh } \vartheta}. \quad (44)$$

folglich

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \omega^2} + \frac{3}{4 \text{sh}^2 \vartheta} F^* = 0 \quad (45)$$

Wir setzen jetzt

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{2 \text{sh } \vartheta}} F(\vartheta, \omega) \quad (46)$$

also

$$A_\varphi = A \cdot \frac{F(\vartheta, \omega)}{\sqrt{2(\text{ch } \vartheta - \cos \omega)}}. \quad (47)$$

Dann genügt F der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} - \text{cth } \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{1}{4} F = 0 \quad (48)$$

und der Bedingung

$$F = \sqrt{2(\text{ch } \vartheta - \cos \omega)} \quad (49)$$

innerhalb und auf dem Ringe.

Ausserdem muss F im ganzen Raum ausserhalb des Ringes endlich bleiben und im Unendlichen verschwinden. Wir entwickeln den Ausdruck (49) in eine Fourierreihe (in Bezug auf ω)

$$\sqrt{2(\text{ch } \vartheta - \cos \omega)} = g_0(\vartheta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vartheta) \cos n \omega \quad (50)$$

mit den Koeffizienten

$$g_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\text{ch } \vartheta - \cos^2 \omega)} \cos n \omega d\omega. \quad (51)$$

Es ist leicht einzusehen, dass jedes Glied dieser Reihenentwicklung der Differentialgleichung (48) genügt. Daraus folgt, dass die Funktion $g_n(\vartheta)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 g_n}{d\vartheta^2} - \text{cth } \vartheta \frac{d g_n}{d\vartheta} - \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) g_n = 0 \quad (52)$$

befriedigt. Das zweite Integral dieser Differentialgleichung bezeichnen wir mit $f_n(\vartheta)$. Als solches können wir nehmen

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \sqrt{2(\text{ch } \vartheta - \text{ch } \vartheta)} \text{ch } n t dt \quad (53)$$

Die Funktion $f_n(\vartheta)$ und alle ihre Ableitungen bleiben für $\vartheta = 0$ und folglich auch im ganzen äusseren Raum endlich. Die Eigenschaften der Funktionen $f_n(\vartheta)$ und $g_n(\vartheta)$ wollen wir im mathematischen Anhang besprechen; hier aber wollen wir uns mit dem Vektorpotential befassen. Wir setzen

$$F(\vartheta, \omega) = \frac{g_0(\vartheta_0)}{f_0(\vartheta_0)} f_0(\vartheta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(\vartheta_0)}{f_n(\vartheta_0)} f_n(\vartheta) \cos n\omega \quad (54)$$

für $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$ d. h. ausserhalb des Ringes und

$$F(\vartheta, \omega) = g_0(\vartheta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vartheta) \cos n\omega \quad (55)$$

für $\vartheta \geq \vartheta_0$ d. h. innerhalb des Ringes. Die auf diese Weise definierte Funktion F ist im ganzen Raum stetig, genügt allen Bedingungen und liefert somit die Lösung des Problems.

§ 8. Stromdichte und Selbstinduktion.

Um die Stromdichte zu finden, hat man nach (24) die Unstetigkeit der Ableitung des Vektorpotentials zu berechnen. Nach Formel (44) haben wir

$$dn = \frac{\rho}{\text{sh } \vartheta} d\vartheta \quad (56)$$

Folglich ist

$$\frac{4\pi}{c} j_{\text{lin}} = \text{sh } \vartheta_0 \left[\frac{\partial A_{\vartheta}}{\partial \vartheta} \right] = A \frac{\text{sh } \vartheta_0}{\sqrt{2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos \omega)}} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right]. \quad (57)$$

Wir müssen die unstetige Änderung von $\frac{\partial F}{\partial \vartheta}$ berechnen. Wir haben für die äussere Oberfläche des Ringes

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta_0-0} = \frac{g_0}{f_0} f_0' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{f_n} f_n' \cos n\omega \quad (58)$$

und für die innere Oberfläche

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta_0+0} = g_0' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n' \cos n\omega \quad (59)$$

Hier bezeichnen g_n' und f_n' die Werte der Ableitungen nach ϑ für $\vartheta = \vartheta_0$.

Wir bilden die Differenz der beiden Ausdrücke und beachten, dass die Funktionen f_n und g_n der Beziehung

$$f_n \frac{dg_n}{d\vartheta} - g_n \frac{df_n}{d\vartheta} = \frac{\text{sh } \vartheta}{\pi \left(n^2 - \frac{1}{4} \right)} \quad (60)$$

genügen, die daraus folgt, dass f_n und g_n Integrale einer und derselben Differentialgleichung (52) sind. Mit Hilfe dieser Beziehung bekommt man

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right] &= \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta_0-0} - \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta_0+0} = \\ &= \frac{4}{\pi} \text{sh } \vartheta_0 \left\{ \frac{1}{f_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{f_n} \cos n\omega \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

Daraus und aus (57) folgt für die Stromdichte der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \cdot j_{\text{lin}} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{A}{a^2} [2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos \omega)]^{3/2} \left\{ \frac{1}{f_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{f_n} \cos n\omega \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

Aus der Definition (53) der Funktionen $f_n(\vartheta)$ ersieht man, dass sie positiv sind und für grosse Werte von ϑ mit wachsendem n schnell zunehmen. Deshalb stellt der Ausdruck (62) eine schnell konvergente Reihe dar. Dieser Ausdruck ist am grössten für $\omega = \pi$ d. h. an der inneren Seite des Ringes, und am kleinsten für $\omega = 0$ d. h. an der äusseren Seite.

Aus (62) lässt sich folgender Näherungsausdruck für die Stromdichte ableiten, der für grosse Werte von $\frac{R_0}{r_0}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \cdot j_{\text{lin}} &= \frac{1}{\pi} \frac{A}{a^2} \frac{1}{f_0} \left\{ 1 - \left(\vartheta_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} + 2 \lg 2 \right) \frac{\cos \omega}{\text{ch } \vartheta_0} \right\} \end{aligned} \quad (62^*)$$

Für $\operatorname{ch} \vartheta_0 = \frac{R_0}{r_0} = 10$ ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich

$$1 - 0,388 \cos \omega$$

so dass in diesem Fall die Stromdichte an der inneren Seite des Ringes mehr als doppelt so gross ist, wie an seiner äusseren Seite.

Die Stromstärke ist nach der Formel

$$q = \int_{\text{inn}} \cdot ds \quad (28)$$

zu berechnen. Wegen

$$ds = \frac{\rho}{\operatorname{sh} \vartheta_0} d\omega = \frac{a}{\operatorname{ch} \vartheta_0 \cos \omega} d\omega \quad (56^*)$$

bekommen wir mit Hilfe von (51) den Ausdruck

$$q = \frac{Ac}{\pi a} \left\{ \frac{g_0}{f_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{g_n}{f_n} \right\} \quad (63)$$

Daraus entnimmt man ohne Rechnungen den Wert der Selbstinduktion. Nach (29) ist

$$L = 2\pi \frac{Ac}{q} \quad (29^*)$$

und folglich

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2\pi^2 a} \left\{ \frac{g_0}{f_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{g_n}{f_n} \right\}. \quad (64)$$

Wenn der Durchmesser des Drahtes klein im Vergleich zum Durchmesser des Ringes ist, bekommt man aus (64), unter Vernachlässigung des Quadrates der kleinen Grösse $\frac{r_0}{R_0}$, den Ausdruck

$$L = 4\pi R \left(\log \operatorname{nat} \frac{8R}{r} - 2 \right) \quad (65)$$

d. h. den bekannten Ausdruck für die Selbstinduktion einer Drahtwindung.

Im allgemeinen Fall stellen die Ausdrücke (62) und (64) für die Stromdichte und Selbstinduktion schnell konvergente Reihen dar, die zur numerischen Berechnung gut geeignet sind.

§ 9. Schlussbemerkungen.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Methode der Berechnung der Selbstinduktion ist von der üblichen Methode wesentlich verschieden. Gewöhnlich nimmt man die Stromdichte als bekannt an, und stellt die Selbstinduktion in Form eines mehrfachen Integrals dar, welches dann näherungsweise berechnet wird.¹ Diese gewöhnliche Methode hat zwei wesentliche Nachteile.

Erstens ist nicht die Stromdichte, sondern nur die volle Stromstärke gegeben; die Stromdichte dagegen ist unbekannt und muss erst aus den Bedingungen des Problems errechnet werden. Zwar hat, im Falle eines dünnen Drahtes, die Willkür in verschiedenen möglichen Annahmen über die Stromdichte keinen besonders grossen Einfluss auf den Wert der Selbstinduktion; der daraus entspringende Fehler ist aber ziemlich schwer abzuschätzen.

Zweitens ist die Berechnung des mehrfachen Integrals (nämlich eines sechsfachen im Falle räumlicher, und eines vierfachen im Falle flächenhafter Ströme) meistens sehr mühsam und ohne Vernachlässigungen unmöglich.

In unserer Methode dagegen gehen wir nicht von dem Ausdruck für die Selbstinduktion in Form eines mehrfachen Integrals aus, sondern von den Differentialgleichungen und den Randbedingungen für das magnetische Feld. Über die Stromdichte werden keinerlei Voraussetzungen gemacht; sie wird vielmehr aus den Bedingungen des Problems berechnet. Die Berechnung selbst ist zwar weniger elementar, aber keineswegs komplizierter als nach der gewöhnlichen Methode und kann im Falle des Kreisringes ohne Vernachlässigungen durchgeführt werden. Wir mussten keinerlei mehrfache Integrale

¹ S. z. B. Handbuch der Physik von H. Geiger und K. Scheel. Bd. XV, S. 343, (1927).

auswerten, denn das Integral, welches die Selbstinduktion darstellt, konnte allgemein durch die Konstanten des Problems ausgedrückt werden.

Unsere Methode dürfte auch auf kompliziertere Probleme anwendbar sein, zum Beispiel auf das Problem der Berechnung der Selbstinduktion einer Spule mit einer willkürlichen Anzahl von Windungen für kleine Wellenlängen. Man könnte etwa auf die folgende Weise verfahren. Man bildet eine Lösung der Differentialgleichung für A_z , welche in den Zentren der Drahtquerschnitte logarithmische Singularitäten aufweist. Die Niveauflächen von A_z unterscheiden sich dann nur wenig von der Form des Drahtes. Der Wert von A_z auf diesen Niveauflächen ist proportional dem Induktionsfluss durch eine Windung. Aus diesem Werte und der gegebenen Stromstärke kann man nach den Formeln des § 4 die Selbstinduktion berechnen. Dieses Verfahren wäre ein Analogon zu dem bekannten von Mie¹ vorgeschlagenen Verfahren zur Berechnung des Wärmewiderstandes von verselten Kabeln.

MATHEMATISCHER ANHANG.

§ 10. Die Eigenschaften der toroidalen Funktionen.

In unserer Arbeit haben wir öfters verschiedene Eigenschaften der Funktionen $f_n(\vartheta)$ und $g_n(\vartheta)$ benutzt, ohne die Beweise derselben anzugeben. Ausserdem haben wir keine analytischen Ausdrücke dieser Funktionen angegeben, die zu deren numerischen Berechnung dienen könnten. Wir wollen jetzt diese Lücke ausfüllen.

Bei der Untersuchung der Funktionen $f_n(\vartheta)$ und $g_n(\vartheta)$ ist es zweckmässig, daneben zwei weitere Funktionen $p_n(\vartheta)$ und $q_n(\vartheta)$ zu betrachten, die mit den ersteren durch die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \vartheta \frac{dp_n}{d\vartheta} &= \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) f_n(\vartheta) \\ \frac{df_n}{d\vartheta} &= \operatorname{sh} \vartheta p_n(\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \vartheta \frac{dq_n}{d\vartheta} &= \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) g_n(\vartheta) \\ \frac{dg_n}{d\vartheta} &= \operatorname{sh} \vartheta q_n(\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

verbunden sind. Aus (66) und (67) folgt, dass $p_n(\vartheta)$ und $q_n(\vartheta)$ einer und derselben Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 p_n}{d\vartheta^2} + \operatorname{cth} \vartheta \frac{dp_n}{d\vartheta} - \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) p_n = 0 \quad (68)$$

genügen. Diese Gleichung unterscheidet sich von derjenigen für $g_n(\vartheta)$ (Formel 52) nur durch das Vorzeichen des Gliedes mit der ersten Ableitung.

Die Funktionen $p_n(\vartheta)$ und $q_n(\vartheta)$ drücken sich durch die von Carl Neumann¹ eingeführten Funktionen $A_n^\circ(\lambda)$ und $J_n^\circ(\lambda)$ wie folgt aus

$$\left. \begin{aligned} p_n(\vartheta) &= e^{-\frac{\vartheta}{2}} A_n^\circ(e^{-\vartheta}) \\ q_n(\vartheta) &= e^{-\frac{\vartheta}{2}} J_n^\circ(e^{-\vartheta}) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Aus den Relationen, denen $A_n^\circ(\lambda)$ und $J_n^\circ(\lambda)$ genügen,² lassen sich für unsere Funktionen die folgenden Beziehungen ableiten

$$\left. \begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2} \right) f_n + \operatorname{ch} \vartheta p_n &= p_{n+1} \\ - \left(n + \frac{1}{2} \right) f_n + \operatorname{ch} \vartheta p_n &= p_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \vartheta \frac{df_n}{d\vartheta} + \left(n - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} \vartheta f_n &= \left(n + \frac{3}{2} \right) f_{n+1} \\ - \operatorname{sh} \vartheta \frac{df_n}{d\vartheta} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} \vartheta f_n &= \left(n - \frac{3}{2} \right) f_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Aus (70) und (71) bekommt man

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) p_{n+1} + \left(n - \frac{1}{2} \right) p_{n-1} = 2n \operatorname{ch} \vartheta p_n \quad (72)$$

¹ Carl Neumann. Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe. (1864).

² N. Bulgakoff. Zur Theorie der Ringfunktionen. Journ. der Russischen Phys. - Chem. Gesellschaft., Bd. XXX, H. 1, S. 1. (1898) (russisch).

$$\left(n + \frac{3}{2}\right) f_{n+1} + \left(n - \frac{3}{2}\right) f_{n-1} = 2n \operatorname{ch} \vartheta f_n \quad (73)$$

Diese Formeln bleiben gültig, wenn man p_n und f_n durch q_n bzw. g_n ersetzt. Alle vier Funktionen p_n, q_n, f_n, g_n sind nach der Definition (51), (53), (66) und (67) gerade Funktionen von n ; deshalb ist die eine der beiden Formeln (70) eine Folge der anderen. Dasselbe gilt auch für (71).

Die Funktionen p_n und q_n können durch die Legendreschen Kugelfunktionen von der Ordnung $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ ausgedrückt werden. Es ist zum Beispiel

$$p_n(\vartheta) = P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \vartheta) \quad (74)$$

p_n und q_n erfüllen als Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung die Relation

$$q_n \frac{dp_n}{d\vartheta} - p_n \frac{dq_n}{d\vartheta} = \frac{1}{\pi \operatorname{sh} \vartheta} \quad (75)$$

Drückt man hier nach (66) und (67) p_n, q_n und ihre Ableitungen durch f_n, g_n und ihre Ableitungen aus, so bekommt man

$$f_n \frac{dg_n}{d\vartheta} - g_n \frac{df_n}{d\vartheta} = \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\pi \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \quad (76)$$

eine Beziehung, von der wir bereits Gebrauch gemacht haben. Es bleibt uns noch übrig, für unsere Funktionen Ausdrücke herzuleiten, die für numerische Berechnung dienen können. Wir wollen sie durch hypergeometrische Reihen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

ausdrücken. Wir haben

$$g_n(\vartheta) = \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} e^{-(n-\frac{1}{2})\vartheta} (1 - e^{-2\vartheta})^2 \cdot F\left(n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n+1, e^{-2\vartheta}\right) \quad (77)$$

$$f_n(\vartheta) = \frac{1}{8} e^{-(n-\frac{1}{2})\vartheta} (1 - e^{-2\vartheta})^2 F\left(n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3, 1 - e^{-2\vartheta}\right) \quad (78)$$

Am wichtigsten ist der Fall eines nicht zu dicken Ringes, wenn $\vartheta = \vartheta_0$ ziemlich gross ist. In diesem Fall konvergiert die Reihe (77) für $g_n(\vartheta)$ sehr schnell und ist zur numerischen Berechnung gut geeignet. Die Reihe (78) für $f_n(\vartheta)$ dagegen konvergiert langsam; sie lässt sich aber auf Grund der bekannten Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion nach Potenzen von $e^{-2\vartheta}$ ordnen (wobei ein logarithmisches Glied auftritt) und auf diese Weise in eine schnell konvergente Reihe transformieren.

Um diese ziemlich komplizierten Ausdrücke für die Koeffizienten der transformierten Reihe möglichst zu vereinfachen, führen wir die Zahlen

$$a_s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s+1} \quad (79)$$

ein, die aus der rekurrenten Formel

$$a_0 = 1 \quad a_s = a_{s-1} - \frac{1}{2s(2s+1)} \quad (80)$$

berechnet werden können. Die Zahlen a_s streben mit wachsendem s dem Grenzwert $\lg 2$ zu, wobei für grosse s die Näherungsgleichung

$$a_s \sim \lg 2 + \frac{1}{4s+3} \quad (81)$$

gilt. Die transformierte Reihe für $f_n(\vartheta)$ lässt sich nun, wie folgt, ausdrücken:

$$f_n(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} e^{-(n-\frac{1}{2})\vartheta} (1 - e^{-2\vartheta})^2 \cdot \left[-f_n^{(1)}(\vartheta) + f_n^{(2)}(\vartheta)\right]$$

Hier bezeichnet $f_n^{(1)}(\vartheta)$ die endliche Summe

$$f_n^{(1)}(\vartheta) = \frac{2n}{2n+1} \left(e^{2\vartheta} + \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2}{1} e^{4\vartheta} + \dots \right)$$

$$+ \frac{(2n-2)(2n-4) \cdot 2 \cdot 4}{(2n-1)(2n-3) \cdot 1 \cdot 3} e^{\vartheta} + \dots \quad (83)$$

und $f_n^{(2)}(\vartheta)$ die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} & \bullet f_n^{(2)}(\vartheta) = \vartheta + 2 \lg 2 - a_0 - a_n + \\ & + \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \frac{3}{2} e^{-2\vartheta} (\vartheta + 2 \lg 2 - a_1 - a_{n+1}) + \\ & + \frac{(2n+3)(2n+5) \cdot 3 \cdot 5}{(2n+2)(2n+4) \cdot 2 \cdot 4} e^{-4\vartheta} (\vartheta + 2 \lg 2 - a_2 - a_{n+2}) + \dots \quad (84) \end{aligned}$$

Wir wollen auch die hypergeometrische Reihe angeben, die in dem Ausdruck für $g_n(\vartheta)$ auftritt:

$$\begin{aligned} F\left(n + \frac{3}{2}, n + 1, e^{-2\vartheta}\right) &= 1 + \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \frac{3}{2} \cdot e^{-2\vartheta} + \\ &+ \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+2)(2n+4)} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^{-4\vartheta} + \dots \quad (85) \end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Reihe dieselben Koeffizienten enthält wie der Ausdruck (84) für $f_n^{(2)}(\vartheta)$.

Zur Berechnung der Funktionen $f_n(\vartheta)$ und $g_n(\vartheta)$ für kleine Werte von ϑ kann man sie durch hypergeometrische Funktionen des Argumentes $th^2 \frac{\vartheta}{2}$ ausdrücken. Da aber dieser Fall von keinem besonderen Interesse ist, wollen wir auf die Wiedergabe der Formeln verzichten.

Alle Funktionen $f_n(\vartheta)$ und $g_n(\vartheta)$ können mit Hilfe der rekurrenten Beziehung (73) durch $f_0(\vartheta)$, $f_1(\vartheta)$, $g_0(\vartheta)$, $g_1(\vartheta)$ ausgedrückt werden; die letzteren Grössen drücken sich ihrerseits durch vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung aus. Die Berechnung nach der rekurrenten Formel ist aber für grosse Werte von ϑ nur für die Funktionen $f_n(\vartheta)$ zweckmässig, denn die $g_n(\vartheta)$ werden nach dieser Formel als Differenzen zweier nahezu gleicher grosser Zahlen ausgedrückt, so dass es bequemer ist, diese Funktionen unmittelbar aus den Reihen (77) und (85) zu bestimmen.

Diese Arbeit wurde im Auftrage des Zentralen Radio-Laboratoriums ausgeführt.

UNTERSUCHUNG DER ELEKTRISCHEN LEITFÄHIGKEIT UND DER HOCHSPANNUNGSPOLARISATION AN SALPETERKRISTALLEN. II.

Von Boris Hochberg und Valentine Joffé.

(Eingegangen am 22. Dezember 1931).

Es wurde die Bildung der Polarisation an NaN_3 Kristallen untersucht. Es wurde die Frage nach dem Durchstrom (Reststrom) im Prozesse der Polarisationsbildung erörtert. Bei der Bildung der Polarisation tritt in der Nähe von beiden Elektroden eine Raumladung auf, die allmählich die von der Elektrode weiter liegenden Kristallteile erfüllt. Die Zerstreuung der Raumladung bei Entladung geht entgegengesetzt vor sich. Es wurde die Dichte der Raumladung in der Polarisationssschicht und die Wirkung der im Kristalle aus den Elektroden diffundierenden Verunreinigungen grob untersucht.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit stellt die Fortsetzung der in der Zeitschrift für Physik im Jahre 1930 veröffentlichten Arbeit dar.¹ Sie stützt sich auf eine ausführlichere Untersuchung der Hauptergebnisse, die in der erwähnten Arbeit erhalten wurden. Letztere werden unten kurz erörtert. Beide Arbeiten beziehen sich ausschliesslich auf die Untersuchung des Mechanismus der elektrischen Leitfähigkeit und auf die Bildung der Hochspannungspolarisation in Salpeterkristallen (NaN_3). Aus der Grösse der Polarisationskapazität, die wir als Verhältnis der im Kristalle angehäuften Elektrizitätsmenge zum Potential der gebildeten Polarisation definieren und aus den geometrischen Dimensionen des Kristalls wurde der Sitz der im Kristall gebildeten Raumladung beim Stromdurchgang bestimmt. Es wurde gezeigt, dass die Raumladungen an beiden Elektroden in einer dünnen Schicht von der Grössenordnung 10^{-2} mm konzentriert sind.

¹ ZS. f. Phys. 66, 172, 1930.