

Das in γ_3 vorkommende Glied mit dem Faktor ω^{-2} hebt sich hier nicht gegen ein entsprechendes Glied in γ_1 fort; denn das in γ_1 vorkommende Glied mit dem Faktor ω^{-2} ist von t unabhängig, das entsprechende Glied in γ_3 aber enthält den Faktor $\frac{ct}{a}$.

Drittes Intervall $t > t'$. Hier wird eine Parallele zur Achse $t = 0$ innerhalb des zwischen den Linien $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ liegenden Parallelstreifens von den Geraden P_1 und P_2 nicht mehr getroffen (vgl. Fig. 18). Hier gelten also die früheren, in § 18 aufgestellten Relationen, und die Funktionen Φ'_1 und Φ'_2 kommen nicht mehr in Betracht. Es wird nach (169^a), § 18:

$$(257) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \left[\Phi_{1x} \left(\frac{2a}{c+v} \right) + \Phi_{2x} \left(\frac{2a}{c-v} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{1x} \left(\frac{2a}{c+v} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{2x} \left(\frac{2a}{c-v} \right) \right]$$

$$= 0 \quad \text{für } t > \frac{2a}{c-v}.$$

Im stationären Zustand erfolgt also auch bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand die Bewegung kräftefrei.

Will man aber von der Elektronenbewegung Anwendungen auf die Mechanik machen, um letztere elektrodynamisch aufzufassen, so handelt es sich immer um den Übergang aus der Ruhelage zur Bewegung; nach unseren Resultaten wirken bei Beginn der Bewegung stets verzögernde Kräfte des Elektrons auf sich selbst. Da wir kein Mittel haben, diese Kraft willkürlich aufzuheben, so geschieht also eine Bewegung, die etwa eine sehr kleine Zeit mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt ist, im nächsten Momente schon mit anderer Geschwindigkeit; es kann also in Wirklichkeit der stationäre kräftefreie Zustand niemals zustande kommen.

Man könnte einwerfen, daß es überhaupt keine ruhenden Elemente gibt, indem die gewöhnliche Mechanik nur von relativer Ruhe spricht, hier aber absolute Ruhe (für $t < 0$) vorausgesetzt wurde. Das ist allerdings richtig; aber dann erfolgen die Bewegungen schwerlich mit konstanter Geschwindigkeit; wenn dies aber doch geschehen sollte, so hätte die Dynamik die Aufgabe, den Einfluß einer Geschwindigkeitsänderung zu untersuchen, und da würde sich sofort in ganz analoger Weise ergeben, daß das Elektron dabei eine verzögernde Kraft auf sich selbst ausübt.

Ganz analoge Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man den elektrischen Strom als eine Elektronenbewegung mit konstanter Geschwindigkeit auffassen will; denn man sieht nicht ein, wie eine solche Bewegung zustande kommt. Bei dem Sommerfeldschen Resultate dagegen, nach welchem eine kräftefreie Bewegung von Anfang an (d. h. von $t = -\infty$ an) bestehen sollte, hätte man sich vorstellen können, daß die erwähnte Schwierigkeit zu überwinden sei. Überdies ist zu beachten, daß jene Sommerfeldschen Formeln für die elektrischen und magnetischen Kräfte je für sich nicht die richtigen Ausdrücke ergeben (vgl. § 19).

Die Zeit, während welcher die anfängliche verzögernde Kraft wirkt, ist allerdings bei geringen Geschwindigkeiten außerordentlich klein $\left(= \frac{2a}{c-v} \right)$, aber bei größeren Werten von v (wie z. B. beim elektrischen Strome) wird ihre Dauer beträchtlich. Auch

die Kraft, die als Funktion von $\frac{ct}{a}$ und von $\omega = \frac{v}{c}$ gefunden wurde, ist nicht zu vernachlässigen, da sie negative Potenzen von ω und t enthält, wie aus den Gleichungen (255) und (256) hervorgeht.

Es bleibt noch zu vergleichen, wie sich die Sommerfeldschen Formeln bei dem jetzt betrachteten Anfangszustand verhalten. Wie schon hervorgehoben wurde (vgl. § 16) stimmt seine Fundamentalformel, aus der alles andere durch scheinbar zulässige Operationen abgeleitet wird, mit unserer Gleichung (34), § 3 wesentlich überein. Diese Gleichung aber bezieht sich ausschließlich auf den von uns zuerst vorausgesetzten Anfangszustand, also für gleichförmige Bewegung, auf den soeben in § 19 behandelten Fall. Die jetzt in § 20 (und früher in § 15) gemachte (physikalisch näher liegende) Voraussetzung über den Anfangszustand wird daher von Sommerfeld in seiner ursprünglichen Arbeit nicht behandelt; darauf bezieht sich aber die spätere Fortsetzung.¹⁾ Hier wird die Bedingung $T = v\tau$ für $\tau < t$ und $T = vt$ für $\tau > t$ eingeführt, also die jetzige zweite Voraussetzung berücksichtigt; für dieselbe wird auch eine verzögernde Kraft gefunden; da aber seine allgemeine Ausgangsformel (nach den von ihm vorgenommenen Umformungen) mit der unsrigen nicht übereinstimmt, so sind natürlich auch seine Resultate von den unsrigen verschieden.

Die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit erhält man, indem man in vorstehenden Formeln $\omega = 1$ setzt. Dann wird die durch (250) dargestellte Linie P_2 (Fig. 18) parallel zur Linie $\tau = t$, und der Einfluß des Anfangszustandes dauert für alle Zeiten fort; die Größe t_0 wird unendlich groß; die Linie $\tau = t + t_0$ verschiebt sich also ins Unendliche, und wir kommen so niemals aus dem zweiten Intervalle heraus, in welchem eine von t abhängige verzögernde Kraft gemäß Gleichung (255) dauernd wirkt.

§ 21. Die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit.

Ebenso wie bei Unterlichtgeschwindigkeit ist bei Überlichtgeschwindigkeit in den Integralen Φ_1^* und Φ_2^* überall der Faktor 2 im Nenner hinzuzufügen, also insbesondere in den Gleichungen (123), (126), (127), (128) und (135), vgl. S. 342. Dasselbe gilt dann für das Beispiel der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in § 13; wir erhalten jetzt:

$$(171) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t) + \Phi_{1x}^*(t) = \frac{\varepsilon a}{20\omega^2} \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 \left[(10 - 30\omega^2) + (23 - 14\omega^2 + 15\omega^4) \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 \right]$$

und am Ende der ersten Lage den Wert:

$$(172) \quad \varphi_x \left(\frac{2a}{v+c}\right) = \frac{\varepsilon a}{20\omega^2(1+\omega)^4} (33 + 20\omega - 34\omega^2 - 60\omega^3 - 15\omega^4),$$

und für die wirkende Kraft in der ersten Lage erhalten wir den Wert:

$$(174) \quad \tilde{\mathfrak{F}}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left(\varphi_x + \frac{1}{c} V_x\right) = -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2 \omega^2} \left[2\omega^3 \left(\frac{ct}{2a}\right) + \frac{1}{2} (1 - 6\omega^2 - 3\omega^4) \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{20} (23 - 9\omega^2 + 45\omega^4 + 5\omega^6) \left(\frac{ct}{2a}\right)^4 \right].$$

¹⁾ Göttinger Nachrichten 1905, S. 201 ff.

In (175^a) und (175^b) ist auf der rechten Seite wieder der Nenner 2 hinzuzufügen. Da die Berechnung der Kraft nicht weiter durchgeführt wurde, so wird an den weiteren Formeln von § 13 nichts geändert.

Geht man von der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand aus, so beginnt die Bewegung in der dritten Lage, so daß sofort vom Beginne ab die entsprechenden Gleichungen zur Anwendung kommen. Es ist die früher für den stationären Endzustand anzuwendende Formel. Die Ausführung der Integration muß aber jetzt in etwas anderer Weise geschehen, ganz wie es für Unterlichtgeschwindigkeit in § 20 soeben erörtert wurde. Entsprechend zu den Gleichungen (240) haben wir:

$$(258) \quad \begin{aligned} \xi &= T = v \tau \quad \text{für } 0 < \tau < t \\ \xi &= T = v t \quad \text{für } t < \tau < t + t_0, \quad \text{wo } t_0 = \frac{2a}{v-c}, \end{aligned}$$

und die kritischen Kurven werden:

$$(259) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c+v} (= t^0) \quad \text{für } \tau < t \\ \tau &= -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c} \quad \text{für } \tau > t; \end{aligned}$$

sie liegen ganz analog, wie die entsprechenden in Figur 18; nur ist jetzt $\frac{v}{c} > 1$, die Neigung gegen die t -Achse also größer als 45°. Die wirkende Kraft wird, analog zu (254), gleich folgendem Ausdrucke gefunden, wie sogleich näher erörtert werden soll:

$$(260) \quad \begin{aligned} \delta_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_{0x}'(t, t) + \Phi_{1x}'(t, t) + \Phi_{0x}''(\tau^{00}, t) - \Phi_{0x}''(t, t) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{1x}''(\tau^{00}, t) - \Phi_{1x}''(t, t) + \Phi_{2x}''(t + t_0, t) - \Phi_{2x}''(\tau^{00}, t) + \frac{1}{c} \Psi_{1x}'(t, t) \right]. \end{aligned}$$

Die Glieder mit den Funktionen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_0', \Phi_1', \Psi_1$ sind nach Analogie zu (254) sofort verständlich; aus den Gleichungen (128) ergeben sich folgende Definitionen, indem man dort $T = vt$ setzt und jetzt unter τ^{00} den aus der zweiten Gleichung (259) fließenden Wert:

$$(261) \quad \tau^{00} = -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c}$$

versteht (vgl. S. 280 und 342):

$$(262) \quad \begin{aligned} \Phi_{0x}'(a, t) &= \frac{\varepsilon c^2}{20 a^3 v^2 t^2} \int_0^a \tau [6 c^4 \tau^4 - 10 a^2 c^2 \tau^2 + (c^2 \tau^2 - v^2 t^2) (15 a c \tau - 4 c^2 \tau^2)] d\tau \\ \Phi_{1x}''(a, t) &= \frac{3 \varepsilon c^2}{16 a^3 v^2 t^2} \int_0^a \tau (v^2 t^2 - c^2 \tau^2) (vt + c\tau - 2a) (vt - c\tau + 2a) d\tau. \end{aligned}$$

Um das Glied mit Φ_{2x}'' zu begründen, müssen wir zunächst die zweite kritische Kurve in ihrem Verlaufe innerhalb des Parallelstreifens ($\tau = t$ und $\tau = t + t_0$) untersuchen; ihre Gleichung $T - c\tau = 2a$ wird hier:

$$(263) \quad vt - c\tau = 2a.$$

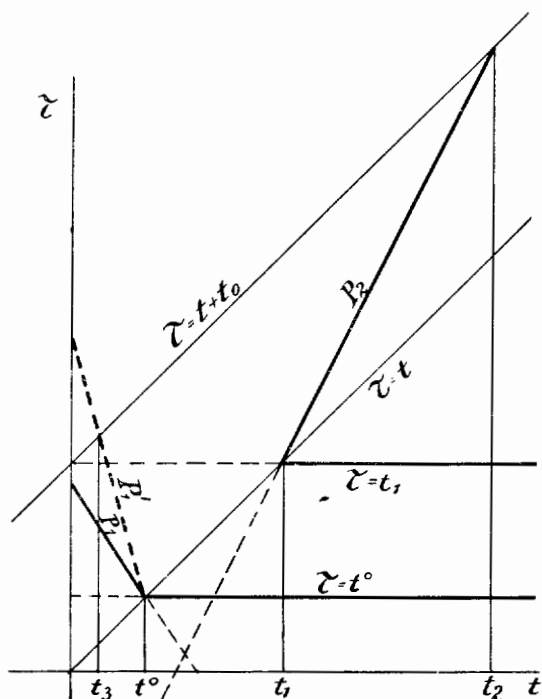


Fig. 19.

eingeschlossen. Für $t < t^0$ kommt daher für τ das Intervall von τ^{00} bis $t + t_0$ in Betracht, wie aus der erwähnten Figur sofort ersichtlich ist; und zwar ist das Integral Φ_{2x}^* hier durch folgende Gleichung definiert:

$$(265) \quad \Phi_{2x}^*(a, t) - \Phi_{2x}^*(\beta, t) = \frac{3\epsilon c}{8a} \int_{\beta}^a [(a^2 - c^2 \tau^2) W_1^* - W_2^* + 2c\tau W_0^*] d\tau,$$

wobei nach (134) (134^e) zu setzen ist.

$$(266) \quad W_0^* = \frac{c^2 \tau^2 - v^2 t^2}{8a^2 v^2 t^2} [c^2 \tau^2 - v^2 t^2 + 4a^2 + 4ac\tau],$$

$$W_1^* = \frac{1}{6a^2 v^2 t^2} [2(a^2 + v^2 t^2 + avt) \sqrt{(a-vt)^2} - \{3a^2 + 3v^2 t^2 - (a+c\tau)^2\} (a+c\tau)],$$

$$W_2^* = \frac{1}{30a^2 v^2 t^2} [2(a^2 + v^2 t^2 + 3avt) \sqrt{(a-vt)^3} - (a+c\tau)^3 \{5(a^2 + v^2 \tau^2) - 3(a+c\tau)^2\}],$$

wenn über das Vorzeichen der Quadratwurzel in der sogleich zu besprechenden Weise verfügt wird.

Um das Gültigkeitsintervall der Formel (260) genau festzustellen, muß man noch die Fälle:

$$c < v < 2c \quad \text{und} \quad v > 2c$$

unterscheiden. Im ersten Falle ($c < v < 2c$) liegt die Gerade P_1 so, wie in Figur 19 die stark angezogene Linie; sie schneidet die Achse $t = 0$ zwischen den Punkten $\tau = \frac{2a}{c+v} = t^0$

Sie stellt eine gerade Linie dar, welche in Fig. 19 mit P_2 bezeichnet ist; sie schneidet die Achse $t = 0$ im Punkte $\tau = -\frac{2a}{c}$ und die Linie $\tau = t$ im Punkte $\tau = t = \frac{2a}{v-c}$, die Achse $\tau = 0$ im Punkte $t = \frac{2a}{v} > \frac{2a}{v+c}$; sie verläuft also ganz unterhalb der Linie $\tau = t$ für $0 < t < \frac{2a}{v-c}$; erst für $t > \frac{2a}{v-c}$ tritt sie in den Streifen zwischen den Parallelen $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ ein, der für uns jetzt in Betracht kommt. Nun liefert nach unseren allgemeinen Erörterungen in § 10 das Integral Φ_2^* einen von Null verschiedenen Beitrag nur in dem Gebiete, der τ - t -Ebene, in welchem:

$$(264) \quad T + c\tau > 2a, \quad T - c\tau < 2a$$

ist. Dieses Gebiet ist in unserem Falle zwischen den Linien P_1 und P_2 (und den Linien $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$) in Figur 19

und $\tau = \frac{2a}{v-c}$. In diesem Falle gilt die Formel (260) für das ganze Intervall $0 < t < \frac{2a}{c+v}$.

In anderen Falle ($v > 2c$) schneidet die Linie P_1 (d. i. die punktierte Linie P'_1 in Fig. 19) die Achse $t = 0$ oberhalb der Stelle $\tau = \frac{2a}{v-c}$; sie trifft deshalb die Linie $\tau = t + t_0$ in dem Punkte:

$$(267) \quad \tau = \frac{4av}{v^2 - c^2}, \quad t = \frac{2a(v-2c)}{v^2 - c^2} \quad (= t_3),$$

welcher auf der Seite $t > 0$ liegt und deshalb zu berücksichtigen ist. Da nun die Integration ursprünglich gemäß (244) bis zur Grenze $t + t_0$ ausgedehnt werden soll, und da jetzt ein Teil der Linie $\tau = t + t_0$ noch unterhalb der Linie P_1 liegt, so haben wir an Stelle von (260), wenn der Index x an Φ und Ψ fortgelassen wird:

$$(268) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t, t) + \Phi_0^*(t + t_0, t) - \Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t + t_0, t) - \Phi_1^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t, t) \right] \quad \text{für } 0 < t < t_3,$$

wo t_3 durch (267) definiert ist, und:

$$(269) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t, t) + \Phi_0^*(t^0, t) - \Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t^0, t) - \Phi_1^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t, t) + \Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(t^0, t) \right] \quad \text{für } t_3 < t < t^0.$$

Diese beiden Gleichungen gelten im zweiten Falle ($v > 2c$) an Stelle der Gleichung (260).

Es erübrigt noch das Vorzeichen der in den Ausdrücken W_1^* und W_2^* gemäß (266) vorkommenden Quadratwurzel zu bestimmen. Für $t < t^0$ ist:

$$vt + ct < 2a, \quad \text{also } vt < 2a.$$

Demgemäß zerfällt das Intervall $0 < t < t^0$, in dem die Gleichung (260) gilt, in zwei Teile; für $0 < t < \frac{a}{v}$ ist in (266) der Ausdruck $\sqrt{(a-vt)^2}$ gleich $vt - a$ zu setzen, dagegen für $\frac{a}{v} < t < t^0$ ist derselbe Ausdruck gleich $a - vt$ zu wählen (vgl. die allgemeine Erörterung hierüber auf S. 283). Im zweiten Falle ($v > 2c$) ist in gleicher Weise das Intervall, in welchem die Gleichung (268) gilt, in zwei Teilintervalle zu zerlegen oder dasjenige für Gleichung (269), und zwar je nachdem ω außerhalb oder innerhalb der Werte $2 \pm \sqrt{3}$ liegt.

Zwischen den Linien $t = t^0$ und $t = t_1$ liegen die Linien P_1 und P_2 ganz innerhalb des Gebietes $\tau < t$, kommen also nicht in Betracht und wir erhalten (vgl. Figur 19):

$$(270) \quad \begin{aligned} \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} & \left[\Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(t, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) \right] \quad \text{für } (t^0 =) \frac{2a}{c+v} < t < \frac{2a}{v-c} (= t_1). \end{aligned}$$

Wächst t über den Wert t_1 hinaus, so tritt die Linie P_2 in den Parallelstreifen zwischen den Linien $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ ein; sie ist daher mit zu berücksichtigen; sie zeigt uns, wie der Einfluß des Anfangszustandes allmählich verschwindet. Wir müssen jetzt den Wert von τ , welcher sich aus der Gleichung der Linie P_2 , d. h. aus (263), ergibt:

$$(271) \quad \tau_{01} = \frac{v}{c} t - \frac{2a}{c},$$

in die Integralgrenze von Φ_2^* einführen und finden:

$$(272) \quad \begin{aligned} \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} & \left[\Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t_1, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t_1, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(\tau_{01}, t) \right] \quad \text{für } t_1 < t < \frac{2av}{(v-c)^2} (= t_2), \end{aligned}$$

denn in dem Punkte $t = \frac{2av}{(v-c)^2}$ wird die Linie $\tau = t + t_0$ von der Linie P_2 geschnitten.

Hier tritt letztere aus dem für uns wichtigen Parallelstreifen heraus; es verschwindet somit der Einfluß der Anfangslage ganz und wir erhalten:

$$(273) \quad \begin{aligned} \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} & \left[\Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t_1, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t_1, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) \right] \quad \text{für } t > \frac{2av}{(v-c)^2}. \end{aligned}$$

In diesem Intervalle erhalten wir eine konstante Kraft, da bei konstanter Geschwindigkeit die Funktionen Φ und Ψ von ihrem zweiten Argumente unabhängig sind (anders Φ_1^* und Φ_2^*).

§ 22. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand.

Wie soeben in § 20 die gleichförmige Bewegung unter Annahme des zweiten (in § 15) besprochenen Anfangszustandes genauer behandelt wurde, so ist in gleicher Weise jeder andere Fall zu erledigen; es sei das hier noch an dem Beispiele der gleichförmig beschleunigten Bewegung gezeigt. Analog zu (240) haben wir hier gemäß Gleichung (179):

$$(274) \quad \begin{aligned} \xi = T = (v + qt)\tau - \frac{1}{2}q\tau^2 & \quad \text{für } 0 < \tau < t, \\ \xi = T = (v + qt)t - \frac{1}{2}qt^2 & \quad \text{„ } t < \tau < t + t_0. \end{aligned}$$

Dabei ist t_0 gemäß der Gleichung (198) durch den Wert (212) gegeben. Die kritischen Kurven sind also, analog wie in (241):

für $\tau < t$ die Hyperbel H_1 in Figur 14, dargestellt durch die Gleichung (181^b):

$$(275) \quad q\tau^2 - 2q\tau t - 2(c+v)\tau + 4a = 0,$$

und für $t < \tau < t + t_0$ die Kurve:

$$(275^a) \quad qt^2 + 2vt + 2c\tau - 4a = 0.$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach τ gibt den Wert τ^{00} , den wir jetzt an Stelle von obigem Werte (245) zu benutzen haben, nämlich:

$$(276) \quad \tau^{00} = -\frac{1}{2c}(qt^2 + 2vt - 4a).$$

Die Gleichung (275^a) stellt eine Parabel dar, welche die Achse t im Punkte $\tau = \frac{2a}{c}$ trifft, und die Achse $\tau = 0$ in den Punkten:

$$t = -\frac{v}{q} \pm \sqrt{\frac{v^2}{q^2} + \frac{2a}{q}};$$

letztere sind reell; sie trifft die Linie $\tau = t$ in denselben Punkten wie die Hyperbel H_1 ; wir haben:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{q}{c}t - \frac{v}{c}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{q}{c};$$

der Scheitel der Parabel liegt also an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} + \frac{v^2}{2cq};$$

die Kurve ist gegen die Achse $\tau = 0$ konkav gekrümmt; in Figur 20 ist sie mit P_2 bezeichnet; sie tritt an Stelle der geraden Linie P_1 in Figur 18.

Die andere kritische Kurve ist analog zu (242) aufzustellen, nämlich:

für $0 < \tau < t$ die Hyperbel H_2 in Figur 14:

$$(277) \quad q\tau^2 - 2q\tau t + 2(c-v)\tau - 4a = 0$$

und für $t < \tau < t_0 + t$ die Parabel:

$$(277^a) \quad qt^2 + 2vt + 4a - 2c\tau = 0.$$

Die Auflösung ergibt den Wert τ_{01} :

$$(278) \quad \tau_{01} = \frac{1}{2c}(qt^2 + 2vt + 4a).$$

Diese Parabel (P_2 in Figur 20) trifft die Linie $\tau = t$ in denselben Punkten wie die Hyperbel H_2 und schneidet die Achse $t = 0$ in demselben Punkte, wie die Parabel P_1 . Sie ist konvex gegen die Achse $\tau = 0$ gekrümmt; ihr Scheitel liegt an der Stelle:

$$(279) \quad t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} - \frac{v^2}{2cq}.$$

Für uns kommen nur die Teile derselben in Betracht, welche zwischen den beiden Parallelen $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ gelegen sind.

Innerhalb dieses Streifens ist aber auch die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit neu zu bestimmen; sie ist für $\tau < t$ durch die gerade Linie (180) gegeben,

für $\tau > t$ dagegen durch die Gleichung, welche entsteht, wenn man den zweiten Ausdruck für T aus (274) in die Gleichung $T = c\tau$ einsetzt, d. h. durch die Gleichung:

$$(280) \quad c\tau = vt + \frac{1}{2}q t^2.$$

Es ist dies eine Parabel, welche durch den Anfangspunkt geht, welche die Linie $\tau = t$ im Schnittpunkte mit der durch (180) dargestellten Linie L , d. h. im Punkte:

$$(281) \quad \tau = t = 2 \frac{c-v}{q} t_0$$

trifft, und deren Scheitel an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{cq}$$

gelegten ist; sie ist in Figur 20 mit L' bezeichnet. Die Parabeln (280) und (277^a) haben dieselbe Achse; sie schneiden sich nicht (berühren sich im Unendlichen von der dritten Ordnung); die Parabel P_2 verläuft demnach ganz im Gebiete der Unterlichtgeschwindigkeit

Die Parabeln P_1 und P_2 schneiden sich dagegen, und zwar auf der τ -Achse in dem Punkte:

$$t = 0, \quad \tau = \frac{2a}{c}.$$

Das von diesen Parabeln und der Linie $\tau = t$ gebildete Dreieck spielt hier ganz dieselbe Rolle, wie in Figur 19 das von derselben Linie und den dortigen Linien P_1 und P_2 gebildete Dreieck.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß die Schnittpunkte der Hyperbel H_2 mit der Geraden $\tau = t$ imaginär seien; dann schneidet auch die Parabel P_2 diese Gerade nicht, und wir erhalten deren Verlauf wie in Figur 20. Die Kräfte werden in den einzelnen Intervallen:

$$(282) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(t, t) + \Phi'_1(\tau^{00}, t) - \Phi_1(t, t) + \Phi'_2(\tau_{01}, t) - \Phi'_2(\tau^{00}, t) \right], \quad \text{für } 0 < t < t^0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Funktionen Ψ wegen des bei ihnen unter dem Integralzeichen auftretenden Faktors $v_x(t - \tau)$ jetzt in ganz der gleichen Weise auftreten wie vorher bei der früheren Voraussetzung über den Anfangszustand; es ist das ganz ebenso, wie in § 20. Die Gleichung (282) ist der Gleichung (254) genau analog gebildet. Es ist also Φ'_1 gemäß (244) dadurch bestimmt, daß in die allgemeine Gleichung (68), § 1 für T der Wert aus der zweiten Gleichung (274) eingesetzt wird, den wir mit T_0 bezeichnen wollen:

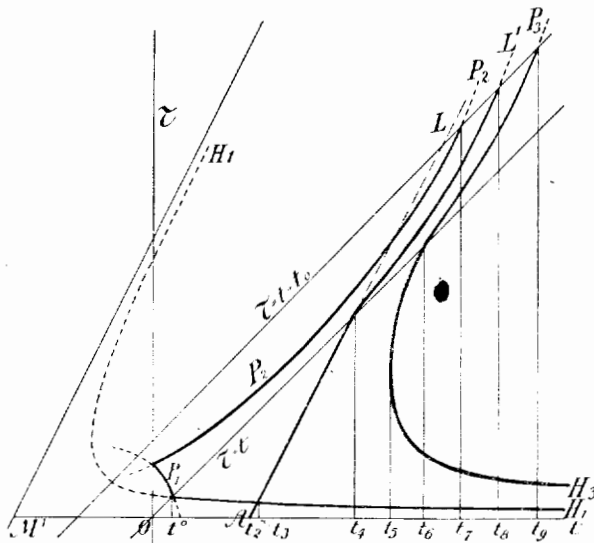


Fig. 20.

$$(283) \quad T_0 = vt + \frac{1}{2} q t^2;$$

es ist also:

$$(284) \quad \begin{aligned} \Phi_1'(a, t) - \Phi_1'(t, t) &= \frac{\varepsilon c}{20 a^3} \int_t^a T_0 (T_0^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2) d\tau \\ &= \frac{\varepsilon c}{20 a^3} [(T_0^3 - 10 a^2 T_0) (a - t) + \frac{5}{3} c^2 T_0 (a^3 - t^3)]. \end{aligned}$$

Ebenso entsteht Φ_2' aus dem allgemeinen Ausdrucke (75), § 18, indem man dort T überall durch den Wert T_0 ersetzt; wir haben demnach, analog zu (249):

$$(285) \quad \Phi_2'(a, t) - \Phi_2'(\beta, t) = \frac{\varepsilon c}{160 a^3 T_0^2} \int_\beta^a [-32 a^5 + 40 a^3 (c^2 \tau^2 - T_0^2) - 20 a^2 (c\tau - T_0)^2 (c\tau + 2 T_0) + (c\tau - T_0)^4 (c\tau + 4 T_0)] d\tau.$$

Bei Ausführung der Integration kann man dieselbe Umformung benutzen, wie oben in (249); die eckige Klammer unter dem Integralzeichen ist gleich:

$$\begin{aligned} &- 32 a^5 + 80 a^3 T_0 (c\tau - T_0) + 40 a^3 (c\tau - T_0)^2 - 20 a^2 (c\tau - T_0)^3 \\ &- 60 a^2 T_0 (c\tau - T_0)^2 + 5 T_0 (c\tau - T_0)^4 + (c\tau - T_0)^5; \end{aligned}$$

es wird also:

$$\begin{aligned} \Phi_2'(a, t) - \Phi_2'(\beta, t) &= \frac{\varepsilon}{160 a^3 T_0^2} [-32 a^5 c (a - \beta) + 40 a^3 T_0 \{(c a - T_0)^2 - (c \beta - T_0)^2\} \\ &\quad + \frac{1}{3} (40 a^3 - 60 a^2 T_0) \{(c a - T_0)^3 - (c \beta - T_0)^3\} \\ &\quad - 5 a^2 \{(c a - T_0)^4 - (c \beta - T_0)^4\} + T_0 \{(c a - T_0)^5 - (c \beta - T_0)^5\} \\ &\quad + \frac{1}{6} \{(c a - T_0)^6 - (c \beta - T_0)^6\}]. \end{aligned}$$

Im nächsten Intervalle ist die Parabel P_1 durch die Hyperbel H_1 zu ersetzen; für das Integrationsintervall $\tau^0 < \tau < t$ kommt jetzt auch die Funktion Φ_2 bzw. Ψ_2 zur Anwendung, wo Φ_2 durch (75), § 18, Ψ_2 durch (112), § 8 gegeben ist, und wir finden:

$$(286) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \right], \quad \text{für } t^0 < t < t_2. \end{aligned}$$

Die Hyperbel H_2 und der Wert τ_1 kommen hier nicht zur Geltung, da diese Hyperbel ganz außerhalb des Gebietes $\tau < t$ liegt, wenn ihre Schnittpunkte mit der Linie $\tau = t$, wie wir jetzt annehmen, imaginär sein sollen. Für das nächste Intervall kommen die der Überlichtgeschwindigkeit entsprechenden Funktionen zur Anwendung; wir haben, analog zu (188):

$$(287) \quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) + \Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t) \\ &\quad + \frac{1}{c} [\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \\ &\quad + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3. \end{aligned}$$

Hierbei ist der Wert τ^* wieder durch Gleichung (185), § 14 definiert.

Für das nächste Intervall kommt es auf den durch (192), § 14 definierten Wert:

$$t_4 = 2 \frac{c-v}{q} \quad (\text{in § 14 mit } t_6 \text{ bezeichnet})$$

an; er liegt bei imaginären Schnittpunkten der Hyperbel H_1 mit der Linie $\tau = t$ zwischen t_3 und t_5 (vgl. S. 305); es wird also:

$$(288) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau^*, t) \\ + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t) + \Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t) \\ + \frac{1}{c} [\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] + \Phi_2(\tau_{01}, t) - \Phi_2(t, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_4.$$

Im nächsten Intervalle ist nun die Linie L oberhalb der Linie $\tau = t$ durch die Parabel L' zu ersetzen, die hier die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit angibt; wir setzen entsprechend der Gleichung (280):

$$(289) \quad \tau_0 = \frac{v}{c} t + \frac{1}{2} \frac{q}{c} t^2;$$

dann wird (wenn t_5 wie oben in (190^a) definiert wird):

$$(290) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_0^*, t) - \Phi_2^*(t, t) + \Phi_2(\tau_{01}, t) - \Phi_2(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_5.$$

Die zu Anfang bestandene Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit macht sich also nur noch in den Gliedern Φ_2^* geltend, welche von dem Anfangszustande herrühren. Für das Intervall $t < \tau < \tau_0^*$ kommt jetzt auch die Funktion Φ_2^* in Betracht, welche aus Φ_2^* entsteht, wenn man T durch T_0 ersetzt; es ist also Φ_2^* durch (265) gegeben, wenn dort folgende Werte für die Größen W eingesetzt werden:

$$W_1^* = \frac{c^2 \tau^2 - T_0^2}{8a^2 T_0^2} [c^2 \tau^2 - T_0^2 + 4a^2 - 4ac\tau]$$

$$W_2^* = \frac{1}{6a^2 T_0^2} [2(a^2 + T_0^2 + aT_0)(T_0 - a) - \{3a^2 + 3T_0^2 - (a + c\tau)^2\}(a + c\tau)]$$

$$W_3^* = \frac{1}{30a^2 T_0^2} [2(a^2 + T_0^2 + 3aT_0)(T_0 - a)^3 - (a + c\tau)^3 \{5(a^2 + T_0^2) - 3(a + c\tau)^2\}].$$

Aber auch in der Gleichung der kritischen Kurve (142) ist jetzt T durch T_0 zu ersetzen; die Hyperbel H_3 , welche für $\tau < t$ zu berücksichtigen war und deren Gleichung in (189) vorlag, ist also für $\tau > t$ durch die Parabel:

$$(291) \quad c\tau = vt + \frac{1}{2} qt^2 - 2a$$

zu ersetzen, welche (in Figur 20 mit P_3 bezeichnet) durch den Schnittpunkt der Hyperbel H_3 mit der Linie $\tau = t$ hindurchgeht. Oberhalb dieser Kurve ist $T_0 - c\tau < 2a$; deshalb kommt in Gleichung (297) nun das Intervall $\tau_0^* < \tau < \tau_5$ in Betracht, wobei τ_5 durch (291), d. h. durch die Gleichung:

$$(292) \quad \tau_5 = \frac{v}{c} t + \frac{1}{2} \frac{q}{c} t^2 - \frac{2a}{c}$$

definiert ist.

Für die nächsten Intervalle kommen als charakteristische Grenzen neben t_6 nur noch die Schnittpunkte der Linie $\tau = t + t_0$ mit den Parabeln P_2 , L' und P_3 in Betracht; wir finden für den Schnittpunkt mit P_2 :

$$(293) \quad t_7 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{v}{c-v}},$$

für den Schnittpunkt mit L' :

$$(294) \quad t_8 = \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{c}{c-v}}$$

und für den Schnittpunkt mit P_3 :

$$(295) \quad t_9 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{2c-v}{c-v}}.$$

Wird zunächst $t > t_5$, so kommen die zwei Punkte in Betracht, in denen eine Parallele zur τ -Achse von der Hyperbel H_3 getroffen wird; sie sind durch die Werte τ_3 und τ_4 in (190) gegeben; es wird also:

$$(296) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(r^0, t) + \Phi_1^*(r^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(r^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t) + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\ + \Phi_2^*(\tau_0, t) - \Phi_2^*(t, t) + \Phi_2^*(\tau_{01}, t) - \Phi_2^*(\tau_0, t) \quad \text{für } t_5 < t < t_6.$$

Wird $t > t_6$, so tritt nun die Funktion Φ_2^* mit dem Argumente τ_4 wieder zurück, und wir finden:

$$(297) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(r^0, t) + \Phi_1^*(r^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(r^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_0, t) - \Phi_2^*(\tau_5, t) + \Phi_2^*(\tau_{01}, t) - \Phi_2^*(\tau_0, t) \quad \text{für } t_6 < t < t_7,$$

wo t_7 durch (293) definiert wird, und weiter:

$$(298) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(r^0, t) + \Phi_1^*(r^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(r^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_0, t) - \Phi_2^*(\tau_5, t) + \Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(\tau_0, t) \quad \text{für } t_7 < t < t_8,$$

wo t_8 durch (294) gegeben ist; dann:

$$(299) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(r^0, t) + \Phi_1^*(r^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(r^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(t + t_0) - \Phi_2^*(\tau_5, t) \quad \text{für } t_8 < t < t_9,$$

wenn t_9 gemäß (295) bestimmt wird. Hier, also nach Ablauf der Zeit t_8 , ist der Einfluß der anfänglichen Unterlichtgeschwindigkeit nicht mehr bemerkbar. Endlich wird:

$$(300) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\epsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0'(\tau^0, t) + \Phi_1'(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1'(\tau^0, t) + \Phi_2'(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2'(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_3.$$

Nach Ablauf der durch Gleichung (295) bestimmten Zeit t_3 ist also der Einfluß des Anfangszustandes auf die Bewegung des Elektrons ganz verschwunden; denn die Gleichung (300) ist mit (194^d) vollkommen identisch. Die Parabel P_3 wird hier in ähnlicher Weise benutzt, wie die Gerade P_2 bei der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in Figur 19, indem ihr Verlauf das allmähliche Verschwinden des Einflusses angibt, den der Anfangszustand auf die Bewegung ausübt.

Wenn man annimmt, daß die Linie $\tau = t$ von der Hyperbel H_2 in reellen Punkten getroffen wird, so kommen auch die in (183) gegebenen Werte t_1 und t_4 als Intervallgrenzen in Betracht, und die Zahl der zu unterscheidenden Fälle vermehrt sich noch außerordentlich. Es bietet die Durchführung indessen keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

§ 23. Quasistationäre Bewegung.

Ogleich die Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bei beiden naheliegenden Hypothesen über den Anfangszustand zu Beginn störenden Kräften unterworfen sind, obgleich es daher zweifelhaft ist, ob eine solche stationäre Bewegung hergestellt werden kann, möge noch untersucht werden, wie im Verhältnisse dazu eine nahezu stationäre Bewegung verläuft, d. h. eine Bewegung, bei der die höheren Potenzen der Beschleunigung q gegen die erste Potenz vernachlässigt werden dürfen. Wir führen diese Beschleunigung wieder mittels der Gleichungen:

$$(301) \quad v_x = v + q t, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0$$

ein, so daß v die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Es wird dann nach (179):

$$\xi = T = (v + q t) \tau - \frac{1}{2} q \tau^2.$$

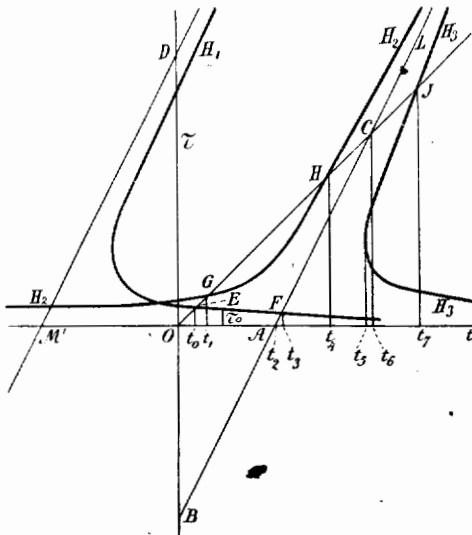


Fig. 14.

Wir hätten nun die in § 14 entwickelten Ausdrücke für die Kraft nach Potenzen von q zu entwickeln und die ersten beiden Glieder zu berechnen. Für $q = 0$ müssen sich die Formeln von § 14 auf diejenigen von § 12, bzw. § 19 reduzieren, so daß die ersten Glieder der Entwicklungen bekannt sind.

Um zunächst festzustellen, unter welchen Bedingungen eine solche „quasistationäre“ Bewegung eintreten kann, knüpfen wir an die Figur 14 an. In ihr war die Hyperbel H_1 an Stelle der bei gleichförmiger Bewegung auftretenden geraden Linie:

$$\tau = \frac{2a}{c + v}$$

getreten, und die Hyperbel H_2 an Stelle der Geraden:

$$\tau = \frac{2a}{c - v}.$$

Das kann nur vorkommen, wenn die Hyperbel H_2 die gerade Linie $\tau = t$ in reellen Punkten schneidet, d. h. wenn:

$$(302) \quad (c - v)^2 > 4 a q$$

ist, wie aus den obigen Gleichungen (183) sofort hervorgeht. Sicher muß ferner $t < t_2$ oder:

$$(303) \quad t < \frac{c - v}{q} \quad (= t_2)$$

bleiben, denn für $t = t_2$ wird $v + qt = c$, so daß die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird.

Einem Punkte der Hyperbel H_1 kommt nach (181°) die Ordinate:

$$\tau^0 = t + \frac{c + v}{q} - \sqrt{\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2 - \frac{4 a}{q}}$$

zu; wir schreiben diesen Wert in der Form:

$$\tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 a}{q \left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2}}\right),$$

oder durch Potenzentwicklung der Quadratwurzel, näherungsweise:

$$(304) \quad \tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right) \frac{2 a}{q \left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2} = \frac{2 a}{c + v + qt} = \frac{2 a}{c + v} \left(1 - \frac{qt}{c + v}\right).$$

Dieser Wert stimmt in der Tat mit dem entsprechenden der gleichförmigen Bewegung für kleine Werte von q überein; und zwar müssen, damit obige Näherungswerte gültig sind, folgende Ungleichungen bestehen:

$$(305) \quad \frac{4 a q}{(qt + c + v)^2} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{qt}{c + v} < 1,$$

von denen die erstere infolge der Bedingung (302) von selbst erfüllt ist. Für die Hyperbel H_2 wird nach Gleichung (184°):

$$\tau_1 = \left(t - \frac{c - v}{q}\right) \sqrt{1 + \frac{4 a q}{(qt - c + v)^2}}.$$

Hier ist der positive Wert der Quadratwurzel zu wählen; wegen der zweiten Ungleichung (305) ist daher:

$$\sqrt{(qt - c + v)^2} = c - v - qt$$

zu setzen, so daß wir erhalten:

$$(306) \quad \tau_1 = \frac{2 a}{c - v - qt} = \frac{2 a}{c - v} \left(1 + \frac{qt}{c - v}\right),$$

wobei zu den Ungleichungen (305) noch die Bedingungen:

$$(307) \quad \frac{4 a q}{(qt - c + v)^2} < 1, \quad \frac{qt}{c - v} < 1$$

hinzuzufügen sind, von denen wieder die erstere eine Folge der früheren Bedingungen ist, während die andere mit (303) zusammenfällt.

Nach Ablauf der Zeit t_1 ist die Bewegung nahezu stationär geworden; dann gibt Gleichung (184^b) für die wirkende Kraft den Wert:

$$\delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \right] \quad \text{für } t_1 < t < t_2,$$

wo nun Φ_1 und Φ_2 durch die obigen Gleichungen (68) und (75) in § 18, Ψ_1 und Ψ_2 durch die Gleichungen (108) und (112) in § 8 gegeben werden. Wir haben diese einzelnen Integrale nach Potenzen von q zu entwickeln. Es sei:

$$(308) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^0 + q \Phi_1', & \Psi_1 &= \Psi_1^0 + q \Psi_1', \\ \Phi_2 &= \Phi_2^0 + q \Phi_2', & \Psi_2 &= \Psi_2^0 + q \Psi_2'. \end{aligned}$$

Da sich für $q = 0$ der stationäre Zustand der gleichförmigen Bewegung ergeben muß, so besteht für die Summe die Relation:

$$(309) \quad \Phi_1^0 + \Phi_2^0 + \frac{1}{c} \Psi_1^0 + \frac{1}{c} \Psi_2^0 = 0$$

gemäß Gleichung (169^a), § 19. Diese Anfangswerte brauchen wir also nicht zu berechnen.

Die Funktionen Φ_0 und Φ_1 wurden durch Integrale der Form:

$$J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(T, \tau) d\tau$$

gegeben, wo $F(T, \tau)$ eine Funktion von T und τ bezeichnet, die aus den Gleichungen (68), (75) und (75^a) in § 18 zu entnehmen ist. Die Beschleunigung q kommt in den Grenzen und in T vor; es ist also bei Vernachlässigung der zweiten Potenz von q und der höheren Potenzen:

$$J = J_0 + q(J_1 + J_2),$$

wenn:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} F(v\tau, \tau) d\tau, & J_1 &= \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q} d\tau, \\ J_2 &= F(T_0'', \tau_0'') \left(\frac{\partial \tau''}{\partial q} \right)_0 - F(T_0', \tau_0') \left(\frac{\partial \tau'}{\partial q} \right)_0 \end{aligned}$$

gesetzt wird, und wenn mit τ_0' , τ_0'' , T_0' , T_0'' die betreffenden Anfangswerte für $q = 0$ bezeichnet werden. Wir können die nötige Rechnung indessen wesentlich durch folgende Überlegung vereinfachen. Es werde gemäß (179):

$$T = (v + qt)\tau - \frac{1}{2} z \tau^2$$

gesetzt, und zunächst nach Potenzen von z entwickelt, dann ist:

$$(310) \quad J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau - \frac{z}{2} \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau,$$

wo in $\frac{\partial F}{\partial v}$ nun $q = 0$ zu nehmen ist; denn wir haben:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T} \tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\tau^2}{2}, \quad \text{also:} \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} \tau = \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Nachträglich setzen wir dann $x = q$; in dem Faktor von $x (= q)$ konnten die Integrallgrenzen durch τ'_0 und τ''_0 ersetzt werden, da dadurch nur höhere Potenzen von q vernachlässigt sind. Das erste Glied der rechten Seite von (310) ist uns schon bekannt, wenn wir annehmen, daß die Grenzen τ' , τ'' einen der Werte:

$$0, \quad \tau^0, \quad \tau_1$$

annehmen, denn τ^0 und τ_1 hängen von q nur in der Verbindung $v + qt$ ab gemäß den Näherungsformeln (304) und (306). Bezeichnen wir also mit F_1 und F_2 die in den Integralen Φ_1 und Φ_2 unter den Integralzeichen stehenden Funktionen, und setzen den Integralen Φ_1 und Φ_2 ihre Argumente (v) bei, so wird:

$$(311) \quad \int_{\tau'}^{\tau''} F_1(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \int_0^{\tau^0} F_1(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \Phi_1(v + qt),$$

$$(312) \quad \int_{\tau'}^{\tau''} F_2(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \int_0^{\tau_1} F_2(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \Phi_2(v + qt).$$

Um diese Integrale zu finden, brauchen wir also in den Formeln für Φ_1 und Φ_2 nur überall v durch $v + qt$ zu ersetzen. Nun besteht die Gleichung (309) im stationären Zustande für alle Werte von v ($0 < v < c$), also auch, wenn man v durch $v + qt$ ersetzt, d. h. es ist:

$$(313) \quad \Phi_1(v + qt) + \Phi_2(v + qt) + \frac{1}{c} \Psi_1(v + qt) + \frac{1}{c} \Psi_2(v + qt) = 0.$$

Diese Ausdrücke liefern demnach keinen Beitrag zur Berechnung der Kraft δ_x . Es ist nämlich auch (wenn man nach Potenzen von q entwickelt):

$$c(\Phi_1 + \Phi_2) + \Psi_1 + \Psi_2 + qt \left[c \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + c \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \right] = 0,$$

worauf es hier eigentlich ankommt.

Im folgenden kommt es also nur auf das zweite Glied der rechten Seite von (310) an. Wir können dabei die schon ausgeführten Integrationen verwenden, wenn wir folgendes beachten. Es gelte für das unbestimmte Integral die Gleichung:

$$(314) \quad \int F(v\tau, \tau) d\tau = \frac{c}{\tau} + c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + c_3 \tau^3 + \dots,$$

so ist:

$$F(v\tau, \tau) = -\frac{c}{\tau^2} + c_1 + 2c_2 \tau + 3c_3 \tau^2 + \dots,$$

also offenbar:

$$(315) \quad \int \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = -\frac{\partial c}{\partial v} \log \tau + \frac{\partial c_1}{\partial v} \frac{\tau^2}{2} + \frac{\partial c_2}{\partial v} \frac{2\tau^3}{3} + \frac{\partial c_3}{\partial v} \frac{3\tau^4}{4} + \dots$$

Für Φ_1 ist nun nach (68), § 19 zu setzen:

$$\int F_1 d\tau = \left[(v^3 + 5vc^2) \frac{\tau^4}{4} - 5a^2 v \tau^2 \right] \frac{\varepsilon c}{20 a^3}.$$

Wir haben also:

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau d\tau = \left[-5a^2 \frac{2\tau^3}{3} + (3v^2 + 5c^2) \frac{\tau^5}{5} \right] \frac{\varepsilon c}{20a^3}$$

und:

$$(316) \quad \int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau d\tau = \frac{a^5}{(c+v)^3} \left[-\frac{5 \cdot 16}{3} + \frac{32}{5} \frac{3v^2 + 5c^2}{(c+v)^2} \right] \frac{\varepsilon c}{20a^3} \\ = \frac{a^2}{(c+v)^5} \frac{16}{15 \cdot 20} (5c^2 - 50vc - 7v^2) = \frac{16 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{300c^2(1+\omega)^5} (5 - 50\omega - 7\omega^2).$$

Für das Integral Φ_2 ist nach (167^a), § 19:

$$(317) \quad \int F_2 d\tau = \frac{\varepsilon a}{40\omega^2} \left[\frac{8a}{c\tau} + 20(1-\omega^2) \frac{c\tau}{2a} - 10(1-\omega)^2(1+2\omega) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^2 \right. \\ \left. + (1-\omega)^4(1+4\omega) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^4 \right];$$

also wird gemäß (314) und (315):

$$(317^a) \quad \int \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau d\tau = -\frac{2 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[-8 \log \tau + 20(1-\omega^2) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^2 - \frac{40}{3} (1-\omega)^2(1+2\omega) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^3 \right. \\ \left. + \frac{8}{5} (1-\omega)^4(1+4\omega) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right] \\ + \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^2} \left[-40\omega \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^2 + 80\omega(1-\omega) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^3 - 32\omega(1-\omega)^3 \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right],$$

oder, wenn man auf gemeinsamen Nenner bringt:

$$(317^b) \quad = \frac{\varepsilon a^2}{40c^2\omega^3} \left[16 \log \tau - 40 \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^2 + \frac{80}{3} (1-\omega)(1+\omega+\omega^2) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^3 \right. \\ \left. - \frac{16}{5} (1-\omega)^3(1+3\omega+6\omega^2) \left(\frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right].$$

Hierin hat man als obere und untere Grenze für τ bzw. die Werte:

$$(318) \quad \frac{2a}{c-v} \quad \text{und} \quad \frac{2a}{c+v}$$

einzusetzen; dann ergibt sich:

$$(319) \quad \int_0^{\tau_1} \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau d\tau = \frac{16\varepsilon a^2}{15 \cdot 40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[15 \log \frac{1+\omega}{1-\omega} - 150 \frac{\omega}{(1-\omega^2)^2} \right. \\ \left. + 50(1+\omega+\omega^2) \frac{3\omega+\omega^3}{(1-\omega)^2(1+\omega)^3} - 3(10\omega+20\omega^3+2\omega^5) \frac{1+3\omega+6\omega^2}{(1-\omega)^2(1+\omega)^5} \right]$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(320) \quad = \frac{16\varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \\ - \frac{16\varepsilon a^2}{600c^2 \cdot \omega^2 (1+\omega)^5 (1-\omega)^2} (30 + 90\omega + 40\omega^2 - 270\omega^3 + 16\omega^4 - 132\omega^5 - 14\omega^6).$$

Für das folgende ist es wichtig, das Verhalten dieses Ausdrucks in seiner Abhängigkeit von ω zu prüfen; um dasselbe in der Nähe von $\omega = 0$, d. h. für kleine Werte von ω zu erkennen, müssen wir nach Potenzen von ω entwickeln. Es ist:

$$\frac{1}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{3} + \frac{2\omega^2}{5} + \frac{2\omega^4}{7} + \dots = \frac{30 + 10\omega^2 + 6\omega^4}{15\omega^2} + \dots$$

Multiplizieren wir mit:

$$\begin{aligned} 15(1+\omega)^5(1-\omega)^2 &= 15(1+5\omega+10\omega^2+10\omega^3+\dots)(1-2\omega+\omega^2) \\ &= 15(1+3\omega+\omega^2-5\omega^3+\dots), \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{15}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \cdot (1+\omega)^5(1-\omega)^2 = (30+90\omega+40\omega^2-120\omega^3+\dots) \frac{1}{\omega^2}.$$

Man erkennt hieraus, daß die rechte Seite der Gleichung (320) bei Entwicklung nach Potenzen von ω mit dem Gliede:

$$(321) \quad \frac{16\varepsilon a^2 \omega}{40c^2} - \frac{120+270}{15} = \frac{4\varepsilon a^2}{c^2} \omega$$

beginnt, also für $\omega = 0$ verschwindet.

Bezeichnen wir mit $\Delta \Phi_i$ den Teil des Zuwachses der Funktion Φ_i , welcher auf das Resultat von Einfluß ist, d. h. welcher sich nicht infolge der Beziehung (313) schließlich heraushebt, so ist also nach (310), (316) und (320):

$$(322) \quad \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = -(I_1(\omega) + I_2(\omega)) \frac{q}{2},$$

wenn I_1 und I_2 bzw. die in (316) und (320) rechts stehenden Funktionen von ω bedeuten, die bis auf das Glied $\log \frac{1+\omega}{1-\omega}$ rational von ω abhängen. Die Entwicklung nach Potenzen von ω ergibt:

$$(323) \quad \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = -\frac{2\varepsilon a^2 q}{15c^2} \left(1 + \frac{18}{5}\omega^2 + \dots\right).$$

Etwas anders muß man bei Berechnung von $\Delta \Psi_1$ und $\Delta \Psi_2$ verfahren, denn in Ψ kommt die Geschwindigkeit v auch außerhalb der Funktion T unter dem Integralzeichen vor. Es sei gemäß (108) und (112):

$$\Psi = \int_{\tau}^{\tau_0} v_x(t-\tau) F(T, \tau) d\tau;$$

dann wird, da $v_x(t-\tau) = v + q(t-\tau)$ zu setzen ist, analog zu (310) und (312):

$$(324) \quad \begin{aligned} \Psi &= \int_{\tau_0}^{\tau_0} (v + qt) F(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau \\ &\quad - q \int_{\tau_0}^{\tau_0} \tau F(v\tau, \tau) d\tau - \frac{q}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0} v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Formel haben wir $\Delta \Psi_1$ und $\Delta \Psi_2$ zu berechnen. Für Ψ_1 erhalten wir nach Gleichung (108), § 8:

$$\begin{aligned} \int \tau F(v \tau, \tau) d\tau &= \frac{\varepsilon c}{4 a^3} \left[2 a^3 \tau^2 - 2 a^2 c \tau^3 + \frac{1}{5} (c^3 + v^2 c) \tau^5 \right] \\ &= \frac{\varepsilon a^2}{c} \left[2 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 - 4 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 + \frac{8}{5} (1 + \omega^2) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right], \end{aligned}$$

also durch Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau_0} \tau F(v \tau, \tau) d\tau = \frac{2 \varepsilon a^2}{c (1 + \omega)^2} \left[1 - \frac{2}{1 + \omega} + \frac{4}{5} \frac{1 + \omega^2}{(1 + \omega)^3} \right].$$

Es wird ferner für Ψ_1 :

$$\int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{\varepsilon c}{4 a^3} v \int [c \tau \cdot 2 \cdot v \tau \cdot \tau \cdot \tau] d\tau = \frac{\varepsilon c^2 v^2 \tau^5}{2 a^3 \cdot 5} = \frac{16 \cdot \varepsilon a^2 \omega^2}{5 c} \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau_0} v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{16 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{5 c} \frac{\omega^2}{(1 + \omega)^5}.$$

In Rücksicht auf (324) wird also, wenn das Zeichen Δ so definiert wird, wie es für die Gleichung (322) geschah:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 &= -\frac{q}{2} \frac{\varepsilon a^2}{c (1 + \omega)^2} \left[4 - \frac{8}{1 + \omega} + \frac{16}{5} \frac{1 + 2 \omega^2}{(1 + \omega)^3} \right] \\ (325) \quad &= -\frac{q}{2} \cdot \frac{4 \cdot \varepsilon a^2}{5 \cdot c (1 + \omega)^5} (-1 - 5 \omega + 13 \omega^2 + 5 \omega^3) \\ &= -\frac{q}{2} \frac{4 \cdot \varepsilon a^2}{5 \cdot c} (-1 + 23 \omega^2 + \dots). \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir für Ψ_2 nach (112), § 8, wenn dort der oben in § 18 angegebene Wert von $G(v \tau, c \tau)$ eingesetzt wird, unter Benutzung von (167^b), § 19:

$$\int F(v \tau, \tau) \tau \cdot d\tau = \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c} \left[-40 (1 - \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 + 40 (1 - \omega)^2 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 - 8 (1 - \omega)^4 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right]$$

und durch Einsetzen der Grenzen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} F(v \tau, \tau) \cdot \tau \cdot d\tau &= \frac{\varepsilon a^2 (1 - \omega)}{40 c (1 + \omega)^2} \left[-40 + 40 \frac{1 - \omega}{1 + \omega} - 8 \left(\frac{1 - \omega}{1 + \omega} \right)^3 \right] \\ (326) \quad &= \frac{\varepsilon a^2}{5 c} (-1 - \omega + \omega^2 \dots). \end{aligned}$$

Zur Auswertung des zweiten Bestandteiles der Änderung von Ψ_2 haben wir die in (314^a) und (315) enthaltene Regel anzuwenden, und zwar auf die rechte Seite der Gleichung (167^b), § 19; wir finden dadurch:

$$\int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{\varepsilon a^2 \omega}{40 c} \left[40 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 - 80 (1 - \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 + 32 (1 - \omega)^3 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right].$$

Nach (324) haben wir die Summe:

$$2 \int F(v\tau, \tau) \tau d\tau + \int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau$$

zu bilden; sie wird:

$$= \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c} \left[-40(2-3\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^2 + 80(1-\omega)(1-2\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^3 - 16(1-\omega)^3(1-3\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^5 \right],$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$(327) = \frac{\varepsilon a^2}{5c} \frac{1}{(1+\omega)^5} [-2 - 13\omega - 39\omega^2 + 65\omega^3 + 29\omega^4] = \frac{\varepsilon a^2}{5c} (-2 - 3\omega - 4\omega^2 \dots).$$

Bezeichnen wir also die in (325) und (327) rechts stehenden rationalen Funktionen von ω mit $-\frac{q}{2}\Gamma_3$ und Γ_4 , so wird:

$$(328) \quad \Delta(\Psi_1 + \Psi_2) = -\frac{q}{2}(\Gamma_3 + \Gamma_4) = -\frac{q}{2}\Gamma_5,$$

wo das Zeichen Δ dieselbe Bedeutung hat, wie in (322). In erster Annäherung wird:

$$(329) \quad \Delta(\Psi_1 + \Psi_2) = -\frac{q}{2} \frac{\varepsilon a^2}{5c} (-6 - 3\omega + 88\omega^2 + \dots).$$

Die auf das Elektron bei quasistationärer Bewegung wirkende Kraft wird hiernach:

$$(330) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \Delta \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{c} \Psi_1 + \frac{1}{c} \Psi_2 \right) \\ &= +\frac{3\varepsilon q}{8\pi a^3} \left(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \frac{1}{c} \Gamma_5 \right), \end{aligned}$$

wo $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5$ die soeben definierten Funktionen von ω bedeuten, oder für kleine Werte von ω :

$$(330^a) \quad \tilde{\mathfrak{F}}_x = -\frac{7\varepsilon^2 q}{20\pi a c^2} \left(1 + \frac{27}{14}\omega - \frac{396}{35}\omega^2 + \dots \right).$$

Dieses Resultat ist von dem bisherigen verschieden; nach Sommerfeld und Abraham sollte die Kraft durch den Ausdruck:

$$(330^b) \quad \frac{3\varepsilon^2 q}{20\pi a c^2} \left[-\frac{2}{\omega^2(1-\omega^2)} + \frac{1}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \right] = -\frac{\varepsilon^2 q}{5\pi a c^2} [1 + \frac{6}{5}\omega^2 + \dots]$$

dargestellt sein. Es ist bemerkenswert, daß das Glied mit $\log \frac{1+\omega}{1-\omega}$ hier in derselben Weise (und mit demselben Zahlenfaktor) auftritt, wie in unserer Gleichung (320); aber die hinzutretende rationale Funktion von ω ist eine andere.

Die Anwendbarkeit der Formel für die quasistationäre Bewegung ist durch die Ungleichungen (302), (303), (305) und (307) begrenzt. Wir haben also:

$$4aq < (c-v)^2, \quad qt < c-v.$$

Hierzu tritt aber noch eine weitere Beschränkung. Die Gleichung (330^a) wurde durch Entwicklung der früheren Ausdrücke nach Potenzen von q gewonnen; hierbei trat in dem Integrale $\Phi_2 T$ im Nenner auf, wo nach (179):

$$T = v\tau + qt\tau - \frac{1}{2}q\tau^2.$$

Auch der reziproke Wert von T mußte also nach positiven Potenzen von q entwickelt werden, und das ist nur möglich, wenn innerhalb der Integrationsgrenzen:

$$v > qt - \frac{1}{2}q\tau \quad \text{oder} \quad qt < v + \frac{1}{2}q\tau$$

ist. Der kleinste Wert, welchen τ (als untere Grenze) im Integrale Φ_2 annimmt, ist gleich $\frac{2a}{c+v}$; wir haben also:

$$(331) \quad qt < v + \frac{aq}{c+v};$$

das zweite Glied der rechten Seite ist sehr klein; es kann also näherungsweise:

$$(331^a) \quad qt < v$$

verlangt werden, d. h. die Zunahme der Geschwindigkeit darf nie gleich der Anfangsgeschwindigkeit v werden. Für kleine Werte von v ist daher das Gebiet der quasistationären Bewegung ein sehr beschränktes. Für $v=0$ muß auch $q=0$ werden, wie es natürlich ist, denn bei der Anfangsgeschwindigkeit Null kann überhaupt keine Bewegung zustande kommen.

Der Umstand, daß die Größe v in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, erhöht die Schwierigkeit ihrer Anwendung; denn der Zeitpunkt $t=0$ fällt außerhalb des Zeitraums, für welchen die Bewegung als quasistationär betrachtet werden darf. Während dieses Zeitraums ist die Geschwindigkeit gleich $v+qt$ zu setzen. Führt man aber diese Größe $v+qt$ an Stelle von v in die rechte Seite von (330) ein, so unterscheidet sich der neue Ausdruck (mit $v+qt$) von dem alten (mit v) bei Entwicklung nach Potenzen von q um Glieder zweiter und höherer Ordnung in q . Wenn man aber solche Glieder benutzen will, so hätte man alle vorkommenden Integrale von vornherein bis auf die entsprechenden Potenzen von q entwickeln müssen. Es ist daher nicht erlaubt, bei den Anwendungen in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit v durch eine spätere Geschwindigkeit $v+qt$ zu ersetzen. Bei Benutzung¹⁾ des Ausdrucks (330^b) dagegen pflegt man unter $v(= \omega \cdot c)$ die Geschwindigkeit der Zeit t zu verstehen; man bezeichnet den Faktor von q als longitudinale elektromagnetische Masse, und diese ist dann als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit definiert; unsere Formel (330) dagegen gibt diese Masse als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit; als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit kann man sie nach den vorstehenden Erörterungen nur angeben, wenn man von vornherein bei allen Entwicklungen auch die zweite Potenz von q berücksichtigt.

¹⁾ Z. B. bei der Berechnung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen; vgl. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig 1905, S. 195.

Die aufgestellten Formeln für die quasistationäre Bewegung sind zunächst nur für unsere erste Voraussetzung über den Anfangszustand abgeleitet, behalten aber bei unserer zweiten Voraussetzung (§ 15 und § 22) ihre Gültigkeit.

Um dies einzusehen, muß man sich die obige Figur 20 für unseren zweiten Zustand gezeichnet denken; es geschieht dies, indem man die Hyperbel H_2 , welche in Figur 14 (S. 364) auftritt, einzeichnet und die Parabel P_2 gleichzeitig so deformiert, daß sie die Linie $\tau = t$ in denselben reellen Punkten trifft, wie die Hyperbel H_2 . Alsdann gilt für $0 < t < t^0$ unverändert die Gleichung (282); die Gleichung (286) aber hat jetzt nur in dem Intervalle $t^0 < t < t_1$ Gültigkeit, wenn t_1 (ebenso wie in Figur 14) den ersten Schnittpunkt der Hyperbel H_2 mit der Linie $\tau = t$ bezeichnet und wieder durch die erste Gleichung (183) definiert ist. Für $t > t_1$ ist jetzt die Hyperbel H_2 ebenso anzuwenden, wie früher bei der ersten Voraussetzung über den Anfangszustand; für das Intervall $t_1 < t < t_2$ gilt demnach die frühere Gleichung (184^b) unverändert. Da nun nach obigem der quasistationäre Zustand eintritt, wenn t_2 sehr groß wird und wenn die Hyperbel H_2 sehr nahe mit einer Parallelen zur t -Achse zusammenfällt, so gelten auch obige Gleichungen (310), . . . (330^a) unverändert für die zweite Voraussetzung über den Anfangszustand.

Soll bei Überlichtgeschwindigkeit das Eintreten einer sogenannten quasistationären Bewegung untersucht werden, so sind die Gleichungen von § 14 nicht ohne weiteres anwendbar, denn in ihnen ist die Anfangsgeschwindigkeit v kleiner als c vorausgesetzt. Wählen wir aber jetzt $v > c$, so wird in Figur 14 die Strecke $0A$ negativ, $0B$ dagegen positiv. Der Mittelpunkt der durch Gleichung (182) dargestellten Hyperbel H_2 liegt also links vom Anfangspunkte 0 ; sie schneidet die Linie $\tau = t$ nicht und kommt also nicht in Betracht; die Hyperbel H_1 , dargestellt durch Gleichung (181^b), behält ihre Bedeutung; die Hyperbel H_3 in Figur 14 ist weit nach links zu verschieben; ihr Schnittpunkt J mit der Linie $\tau = t$ ist durch die Abszisse t_1 in Gleichung (191) dargestellt. Wir erhalten jetzt:

$$(332) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t, t) \quad \text{für } 0 < t < t^0$$

und weiter, wenn auch t_3 negativ wird:

$$(333) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t)$$

$$\text{für } t^0 < t < t_1,$$

endlich:

$$(334) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t_1 < t.$$

Dabei sind τ^0 und τ_3 ebenso wie früher durch die Gleichungen (181^c) und (190) definiert. Diese Gleichung (334) bleibt für alle größeren Werte von t gültig. Die Bewegung wird quasistationär, wenn die Hyperbeln H_1 und H_3 sich von zwei Parallelen zur t -Achse nur wenig unterscheiden. Es muß also τ^0 mit $\frac{2a}{c+v}$ nahe zusammenfallen; das gibt wieder die obigen Bedingungen (305); und es darf τ_3 sich von $\frac{2a}{v-c}$ nur wenig unterscheiden, und das führt auf die Bedingungen:

$$(335) \quad 4 a q < (q t + v - c)^2, \quad q t < v - c,$$

welche zu (307) analog sind. Außerdem muß $t > t_7$ sein, also:

$$(q t + v - c)^2 > 4 a q + (c - v)^2,$$

wodurch dann die erste Bedingung (335) von selbst erfüllt ist. Entwickelt man nun nach Potenzen von q , so ist zu beachten, daß für Überlichtgeschwindigkeit keine Relation der Form (313) besteht, daß vielmehr die linke Seite dieser Gleichung eine Funktion von $v + q t$ wird, ferner daß in den Funktionen Φ'_4 und Ψ' die Größe $T = (v + q t) \tau - \frac{1}{2} q \tau^2$ im Nenner auftritt, so daß auch wieder die Bedingung (331), bzw. (331^a) erfüllt sein muß.

Bei Abraham und Sommerfeld wird das oben in (330^b) angegebene Resultat auf Grund der Annahme abgeleitet, daß die quasistationäre Bewegung schon unendlich lange Zeit ange dauert habe. Da nun die Geschwindigkeit bei jeder (auch noch so kleinen) Beschleunigung nach unendlich langer Zeit beliebig groß wird, so scheint mir diese Ableitung (abgesehen von sonstigen Bedenken) einen Widerspruch in sich zu enthalten.

Berichtigungen und Zusätze.

- Seite 232 In Gleichung (1) muß es heißen: $c^2 \rho$ statt $\tau^2 \rho$.
- " 237 Zeile 10 v. o. " " " : das Vektorpotential dient zur Darstellung der durch die Bewegung erzeugten magnetischen Kräfte.
- " 238 " 11 v. o. muß es heißen: $\frac{d v_x}{d t}$ statt $\frac{d x_x}{d t}$.
- " 244 In Gleichung (32) " " " : $3 \varepsilon c$ statt 3ε .
- " 247 " " (40^a) " " " : $S_0 = \frac{\pi}{2} \beta \gamma$.
- " " " (41^a) " " " : $S_0 = \frac{\pi}{2} \beta \gamma$.
- " 249 " " (49^a) " " " : $3 \beta + \gamma$ statt $\beta - \gamma$.
- " 251 Zeile 14 v. o. " " " : P statt P_4 .
- " 254 Zu § 6 vgl. die Bemerkung S. 340, Zeile 16 v. o.
- " 259 ff. vgl. hierzu S. 340—342.
- " 262 Zeile 7 v. u. muß es heißen: $2 a$ statt a .
- " 276 " 7 und 1 v. u. muß es heißen: $+ 2 c \tau T$ statt $- 2 c \tau T$, so daß die daran geknüpfte Bemerkung über das Vorzeichen zu streichen ist.
- " 278 ff. Zu den Gleichungen (123) bis (135) vgl. die Bemerkung S. 342, Z. 9 v. o. ff.
- " 291 Zu § 12 vgl. § 19, S. 342 ff.
- " 295 Zu § 13 vgl. § 21, S. 354.
- " 298 Zeile 10 v. o. muß es heißen: Ψ'_{2xt} statt Ψ_{2xt} .
- " 301 " 5 v. o. " " " : $v - c$ statt $c - v$.

- Seite 307 In Gleichung (194) muß es heißen: Ψ_2^* statt Ψ_2 und Ψ_2 statt Ψ_1 .
- „ 307 Auf der linken Seite der Gleichung (194^c) ist + durch — zu ersetzen.
- „ 310 ff. Zu § 15 vgl. § 20, S. 347 ff. und § 21, S. 355 ff., sowie § 22, S. 358 ff.
- „ 312 Gleichung (204), im Zähler rechts muß es heißen: 4ω statt 4.
- „ 322 Zu § 16 vgl. die weiteren Entwicklungen in meinem Aufsätze „Zur Elektronentheorie“, Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. d. W., math.-phys. Klasse, Sitzung vom 6. Juli 1907. In dieser Abhandlung werden die Einwürfe widerlegt, die Herr Sommerfeld in einer am 8. Juni der Akademie vorgelegten Abhandlung gegen die von mir befolgte Methode erhoben hatte. Nur in einem nebensächlichen Punkte, wo es sich um Auswertung eines bei ihm vorkommenden Integrals (in § 16 mit Ω bezeichnet) handelte, konnte ich ihm recht geben. Insbesondere habe ich a. a. O. untersucht, welcher partiellen Gleichung die in meiner Gleichung (34) definierte Funktion genügt, wenn man die obere Grenze t des Integrals durch ∞ ersetzt.
- „ 332 Zeile 10 v. u. muß es heißen: $S \int_x^z S \int_x^z$ statt $S \int_x^z S \int_x^z$.
- „ 342 Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung (128) ist unter dem Integralzeichen der Faktor $(T^2 - c^2 \tau^2)$ hinzuzufügen.
- „ 343 Zeile 6 v. u. muß es heißen: $5 + 3\omega^2$ statt $3 + 5\omega^2$.
- „ 344 „ 1 v. o. „ „ „ : (75) statt (78).
- „ „ 3 v. o. „ „ „ : 480 „ 540.
- „ 348 „ 3 v. u. „ „ „ : (241) statt (240).
- „ In Figur 18, ist t_1 durch t' zu ersetzen.
- „ 350 In Gleichung (247) ist rechts der Faktor a hinzuzufügen.
- „ 365 Zeile 10 v. u. muß es heißen: $(1 + \sqrt{\quad})$ statt $\sqrt{\quad}$.