1897. ANNALEN № 4.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 60.

1. *Ueber electrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden; von Max Planck.*

(Aus den Sitzungsber. der k. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin, phys.-math. Klasse, vom 20. Febr. 1896; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

§ 1.

In meiner vorigen Mittheilung[1]) an die Akademie habe ich die Bedingungen der stationären Resonanz untersucht, welche eintritt, wenn eine vollkommen periodische, im übrigen beliebige, im freien Luftraum fortschreitende electromagnetische Welle auf einen geradlinigen Resonator trifft, dessen Lineardimensionen klein sind gegen die Länge der erregenden Welle. Es ergaben sich damals für die vom Resonator emittirte und absorbirte Energie aus den allgemeinen Maxwell'schen Feldgleichungen ganz bestimmte Beträge, ohne dass ein näheres Eingehen auf die Natur des Resonators nöthig gewesen wäre. Wenn im Resonator Vernichtung von electrischer Energie durch Joule'sche Wärme stattfindet, so wird beim stationären Mitschwingen sowohl diese als auch der Betrag der Emission durch Absorption von Energie gedeckt. Wenn aber, wie häufig bei den Hertz'schen Schwingungen, und immer bei denjenigen Schwingungen, welche die Wärmestrahlung der Substanzen bilden, die Joule'sche Wärme gar nicht in Betracht kommt, so ist die Absorption genau gleich der Emission. Dann äussert sich der Einfluss der Natur des Resonators nur in einer einzigen charakteristischen Constanten: der Phasendifferenz zwischen der erregenden (primären) und der erregten (secundären) Welle, welche von dem Unterschied der Eigenperiode des Resonators und der Periode der primären

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Berlin, math.-phys. Klasse, 21. März 1895, p. 289; Wied. Ann. 57. p. 1. 1896.

Welle herrührt.[1]) In welcher Weise aber die Phasendifferenz durch diesen Unterschied der Perioden, sowie durch andere Eigenschaften des Resonators beeinflusst wird, lässt sich nicht unmittelbar übersehen, ebensowenig die weitere Frage, wie der stationäre Zustand überhaupt zu Stande kommt. Dies wird erst möglich, wenn man zur Betrachtung von Schwingungen mit veränderlicher Amplitude und Wellenlänge übergeht, wobei der Allgemeinheit halber auch die erregende Welle als veränderlich anzunehmen ist. Dann zeigt sich allerdings ein etwas näheres Eingehen auf die Natur des Resonators als nothwendig; doch wollen wir, um speciellere Voraussetzungen möglichst zu vermeiden, zunächst untersuchen, ob nicht, ähnlich wie in dem Falle stationärer Resonanz, auch hier sich Sätze allgemeinerer Art aufstellen lassen, ohne dass man allzu tief in beschränkende Annahmen einzugehen braucht. Das wird sich nun in der That als durchführbar erweisen unter einer gewissen Bedingung, welche ganz der früher gemachten Annahme entspricht, dass die Lineardimensionen des Resonators klein sind gegen die Wellenlänge. Nur kann man hier, bei veränderlichen Wellen, nicht mehr von einer Wellenlänge in bestimmtem Sinne sprechen, sondern man muss statt dessen einführen das Product der bekannten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und einer gewissen Zeitgrösse, welche ich unten den reciproken Werth der „verhältnissmässigen Aenderungsgeschwindigkeit" des electromagnetischen Feldes nennen werde. Die Bedingung, dass dieses Product gross ist gegen die Lineardimensionen des Resonators, schliesst, wie sich zeigen wird, zugleich die andere mit ein, dass die Schwingungen schwach gedämpft sind.

Wie im Falle der stationären Resonanz findet auch bei veränderlichen Schwingungen im Resonator Emission und Absorption electromagnetischer Energie statt. Betrachten wir einmal den Specialfall, dass die erregende Welle Null ist; dann ergiebt sich auch die Absorption gleich Null, und wir erhalten das einfache Abklingen einer irgendwie einmal im Resonator angefachten Schwingung. Da wir die Joule'sche Wärme gar nicht in Betracht ziehen wollen, so erfolgt die Verausgabung der Schwingungsenergie nur durch Emission. Hier kommt also der Einfluss der Dämpfung durch Strahlung am charakteristischsten zum Vorschein, über den zuerst einige allgemeinere Worte vorausgeschickt werden sollen.

So oft bisher die Dämpfung einer electrischen oder akustischen Schwingung rechnerisch behandelt wurde, ist gewöhnlich die Rolle, welche die Ausstrahlung bei der Dämpfung spielt, ausser Betracht gelassen worden, oder, wenn von ihr ausdrücklich die Rede war, hat man sie doch von vornherein als in das Glied mit inbegriffen angenommen, welches die Dämpfung durch Leitungswiderstand bez. durch Reibung bezeichnet.[1]) Und doch sind beide Arten von Dämpfung im Grunde verschieden. Die letztgenannte spielt bei langsamen Schwingungen die Hauptrolle. Je schneller die Schwingungen werden, um so kleiner wird bekanntlich bei der nämlichen Reibungsconstanten das logarithmische Decrement. Gerade das Umgekehrte findet statt bei der Dämpfung durch Strahlung. Während diese bei langsamen Schwingungen im allgemeinen ganz zu vernachlässigen ist, nimmt ihre Bedeutung für schnellere Schwingungen rasch zu, so dass sie schon bei den Hertz'schen Schwingungen, wenn der Leitungsdraht nicht gar zu dünn ist, den Einfluss der inneren Dämpfung übersteigt. Doch ist dies, wie ich am Schluss dieser Arbeit an einem speciellen Beispiel zeigen werde, nicht so zu verstehen, als ob die durch Strahlung bewirkte Dämpfung mit wachsender Schwingungszahl unter allen Umständen zunimmt; denn sie hängt nicht allein von der Schwingungszahl ab.

Ein weiterer charakteristischer Unterschied ist, dass die Dämpfung durch Reibung oder durch Leitungswiderstand wesentlich von der inneren Beschaffenheit des Resonators ab-

1) Die Periode der Resonatorschwingung ist beim stationären Mitschwingen, wie selbstverständlich, ganz allein durch die Periode der erregenden Welle bestimmt.

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 12. 1889, hat zuerst eine Berechnung der während einer electrischen einfach periodischen Schwingung ausgestrahlten Energie ausgeführt, und Hr. Poincaré, Oscillations électriques, Paris 1894, p. 92 ff., hat eine Methode zur Bestimmung der Dämpfung durch Strahlung angegeben, die jedoch von der hier entwickelten gänzlich verschieden ist. Weiter ist mir keine Behandlung dieses Gegenstandes bekannt.

hängt, die Dämpfung durch Strahlung dagegen nur von den Bedingungen, welche an der Grenze und im Innern des Mediums gelten, das den Resonator umgiebt, im übrigen aber gar nicht von der Natur des Resonators. Die Dämpfung durch Reibung oder Leitungswiderstand kann man in gewissen Fällen gänzlich ausser acht lassen, ohne einen principiellen Fehler zu begehen, die durch Strahlung niemals. Denn es hindert einerseits nichts, anzunehmen, dass die Joule'sche Wärme in gewissen gut leitenden Substanzen, oder dass die innere Reibung, etwa in einer schwingenden Stimmgabel, ganz zu vernachlässigen ist. Andererseits aber verliert auch eine absolut elastische Stimmgabel, welche in der Luft schwingt, unter allen Umständen Energie in ganz bestimmtem Betrage durch Aussendung von Wellen in die Luft. Wenn sie isolirt im Vacuum schwingt, kann man allerdings von jeglicher Dämpfung absehen, dann fällt aber auch die Möglichkeit der Erregung von Schwingungen durch Resonanz fort. Bei electrischen Schwingungen fehlt die Analogie mit dem akustischen Vacuum ohnehin völlig. Hiermit hängt auch zusammen, was ich schon in meiner früheren Arbeit erwähnt habe: dass die Berücksichtigung der durch Strahlung bewirkten Dämpfung für jeden Resonator, auch bei absoluter Uebereinstimmung seiner Eigenperiode mit der Periode der erregenden Welle, ein bestimmtes endliches Maximum des Mitschwingens ergiebt, während man im Falle der Beschränkung auf Reibungswiderstände die Stärke der Resonanz bei vollständiger Uebereinstimmung der Perioden beliebig gross, und bei verschwindender Reibung über alle Grenzen gross findet, im Widerspruch mit den Thatsachen.

Die bei weitem wichtigste Eigenschaft der Dämpfung durch Strahlung ist aber die, dass sie dem Princip der Erhaltung der Energie Genüge leistet, ohne dass man ausser der Schwingungsenergie noch eine andere Energieart einzuführen braucht, während bei der inneren Dämpfung stets Schwingungsenergie verloren geht und Wärme erzeugt wird. Man muss daher die durch Strahlung bewirkte Dämpfung zu den sogenannten conservativen Wirkungen rechnen. Dieser „conservativen Dämpfung“ kann man dann die durch Reibung oder Leitungswiderstand bewirkte Dämpfung, welche immer im Sinne der Verzehrung von Schwingungsenergie thätig ist, als „consumptive Dämpfung“ gegenüberstellen. Das Studium der conservativen Dämpfung scheint mir desshalb von hoher Wichtigkeit zu sein, weil sich durch sie ein Ausblick eröffnet auf die Möglichkeit einer allgemeinen Erklärung irreversibler Processe durch conservative Wirkungen — ein Problem, welches sich der theoretisch-physikalischen Forschung täglich drängender entgegenstellt. Doch muss die Weiterführung dieses Gedankens anderen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

§ 2.

Es sollen nun die Schwingungen eines im Luftraum oder Vacuum befindlichen geradlinigen electrischen Resonators untersucht werden, auf den irgend eine gegebene electromagnetische Welle trifft, unter der Annahme, dass die Dämpfung lediglich durch Strahlung erfolgt. Eine etwa stattfindende innere Dämpfung und Erzeugung von Joule'scher Wärme lässt sich übrigens leicht zur Vervollständigung der unten aufzustellenden Energiegleichung anbringen. Wir machen, wie in der vorigen Arbeit, einen Punkt des Resonators zum Anfangspunkt der Coordinaten und legen die Z-Axe in die Richtung der in ihm stattfindenden electrischen Schwingungen, setzen ferner allgemeiner als dort:

$$F = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{1}$$

Dann stellen folgende Ausdrücke die 6 Componenten der electrischen und der magnetischen Kraft in einer vom Resonator nach allen Richtungen ausgehenden Welle vor, gültig für alle Zeiten t und für solche Entfernungen r, welche gross sind gegen die Lineardimensionen des Resonators:

$$\tag{2} \begin{cases} X = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial z} & Y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial z} \qquad Z = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ L = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial t} & M = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial t} \qquad N = 0 \end{cases}$$

oder, wenn man die Polarcoordinaten einführt:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta \qquad y = r \sin \varphi \sin \vartheta \qquad z = r \cos \vartheta$$

$$(3)\quad \begin{cases} X = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ Y = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ Z = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(1-3\cos^2\vartheta) \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} L = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial t}\sin\varphi\sin\vartheta \\ M = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial t}\cos\varphi\sin\vartheta, \\ N = 0 \end{cases}$$

wobei

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \Delta F = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

Nun nehmen wir ausser dieser vom Resonator ausgehenden, als „secundär“ zu bezeichnenden Welle eine irgendwo in grosser Entfernung erregte „primäre“ Welle an, welche über den Resonator und das ihn umgebende Feld hinwegstreicht. Ihre Kraftcomponenten seien $X' Y' Z' L' M' N'$. Dieselben sind überall ausserhalb der primären Erreger endliche und stetige Functionen des Ortes und der Zeit und brauchen nicht periodisch zu sein. Dann stellen auch die Summen:

$$X'+X \quad Y'+Y \quad Z'+Z \quad L'+L \quad M'+M \quad N'+N$$

einen im Luftraum möglichen electromagnetischen Vorgang dar, der auch in Wirklichkeit eintreten wird, wenn die entsprechenden Grenzbedingungen erfüllt sind. Es handelt sich nun darum, diesen Vorgang zu untersuchen und die für den Resonator gültigen Grenzbedingungen zu befriedigen. Zu diesem Zwecke führen wir von vornherein eine vereinfachende Beschränkung ein. Wir setzen nämlich fest, dass die Lineardimensionen des Resonators klein sein sollen gegen alle diejenigen Längen, welche durch den Ausdruck:

$$(5)\qquad c \cdot \frac{X}{\frac{\partial X}{\partial t}}$$

dargestellt werden, falls man für X irgend eine electrische oder magnetische Kraftcomponente der primären oder secundären Welle in irgend einem Punkte des Luftraumes zu irgend einer Zeit einsetzt. Man kann diese Beschränkung auch so ausdrücken, dass das Product der Länge des Resonators und der „verhältnissmässigen Aenderungsgeschwindigkeit“ des electromagnetischen Feldes klein sein soll gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c. Für periodische oder nahezu periodische Wellen heisst dies, dass der Resonator klein sein soll gegen die Wellenlänge.

Berechnen wir nun für den betrachteten Vorgang die Energiemenge, welche im Zeitelement dt durch eine Kugelfläche mit dem Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt nach aussen strömt. Den Radius der Kugel R können und wollen wir gross annehmen gegen die Lineardimensionen des Resonators, dagegen klein gegen alle Ausdrücke von der Form (5). Das heisst:

$$(6)\qquad \frac{R}{c}\frac{\partial X}{\partial t} \text{ klein gegen } X.$$

Da nun nach den allgemeinen Gleichungen des electromagnetischen Feldes das Product $(1/c)(\partial X/\partial t)$ von der Grössenordnung der räumlichen Differentialquotienten $(\partial N/\partial y)$ etc. ist, so folgt, dass das Product von R in einen räumlichen Differentialquotienten einer Kraftcomponente klein ist gegen die Kraftcomponente selbst.

Aus dem Satze von Poynting ergiebt sich die gesuchte Energieströmung als:

$$\frac{c\,dt}{4\pi}\int dS\left[\{(Y'+Y)(N'+N)-(Z'+Z)(M'+M)\}\cos(rx)+\ldots\right],$$

wobei die angedeutete Summation sich auf die cyklische Vertauschung der Buchstaben xyz bezieht und die Integration über alle Elemente dS der Kugelfläche zu erstrecken ist. Diese Energiemenge zerfällt in 3 Theile:

$$(7)\qquad E_1 + E_2 + E_3$$

entsprechend der Zerlegung des Ausdrucks:

$$(Y'+Y)(N'+N)-(Z'+Z)(M'+M)$$

in die 3 Theile:

$$(Y'N'-Z'M') + (YN-ZM) + (Y'N+YN'-Z'M-ZM')$$

und ebenso für die beiden anderen, auf y und z bezüglichen Glieder.

1. Der erste Theil der ausströmenden Energie ist:

$$E_1 = \frac{c\,dt}{4\pi}\int dS\Big[(Y'N'-Z'M')\,\frac{x}{R} + (Z'L'-X'N')\,\frac{y}{R} + (X'M'-Y'L')\,\frac{z}{R}\Big].$$

Er entspricht dem Fall, dass der Resonator ganz beseitigt und die primäre Welle allein im Felde vorhanden ist. Da nun die primäre Welle für sich allein einen in der Natur möglichen Vorgang darstellt, so bedeutet nach dem Energieprincip E_1 zugleich die Abnahme der gesammten innerhalb der Kugelfläche befindlichen Energie der isolirten primären Welle in der Zeit dt. Bezeichnen wir daher die innerhalb der Kugel vom Radius R befindliche electromagnetische Energie für den Fall, dass die primäre Welle allein im Felde vorhanden gedacht wird, mit V, so haben wir:

(8) $$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial t}\,dt.$$

2. Der zweite Theil der ausströmenden Energie ist:

$$E_2 = \frac{c\,dt}{4\pi}\int dS\Big[(YN-ZM)\,\frac{x}{R} + (ZL-XN)\,\frac{y}{R} + (XM-YL)\,\frac{z}{R}\Big].$$

Er entspricht der Ausstrahlung des Resonators. Zur Ausführung der Integration benutzen wir die durch (3) und (4) in Polarcoordinaten ausgedrückten Werthe der electrischen und magnetischen Kraftcomponenten und erhalten zunächst:

$$E_2 = \frac{dt}{4\pi}\int dS\sin^2\vartheta\,\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial R} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right),$$

wobei der Kürze halber statt $(\partial F/\partial r)^{r=R}$ einfach $\partial F/\partial R$ gesetzt ist. Da nun in dem Oberflächenintegral F nur von R und t abhängt, so erhält man:

$$E_2 = \frac{dt}{4\pi}\,\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial R} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)\int dS\sin^2\vartheta,$$

$$E_2 = \tfrac{2}{3}R\,dt\,\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial R} - \frac{R}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)$$

oder anders geschrieben:

(9) $$E_2 = \frac{dt}{3}\,R\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)^2 - \frac{2R}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right\}.$$

Hierin ist nach (1) zu setzen:

$$F = \frac{1}{R}f\left(t-\frac{R}{c}\right).$$

Also

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{R}f''\left(t-\frac{R}{c}\right),$$

wenn unter f'' der zweite Differentialquotient von f nach t verstanden wird. Ebenso:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t} = -\frac{1}{R^2}f'\left(t-\frac{R}{c}\right) - \frac{1}{cR}f''\left(t-\frac{R}{c}\right).$$

Hieraus erhält man, in abgekürzter Schreibweise:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{1}{R^3}f'f'' - \frac{1}{cR^2}f''^2$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2R^3}f'^2 + \frac{1}{cR^2}f'f''\right) + \frac{1}{cR^2}f'f'''.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

(10) $$\frac{R}{3}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)^2 + \frac{2R}{c^2}\left(\frac{1}{2R^3}f'^2 + \frac{1}{cR^2}f'f''\right)\right\} = W,$$

so wird aus (9):

(11) $$E_2 = dt\left(\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{2}{3c^3}f'f'''\right).$$

Da endlich nach der Voraussetzung (6) für alle Zeiten:

(12) $\frac{R}{c}f'$ klein gegen f, ebenso $\frac{R}{c}f''$ klein gegen f', u. s. w.,

so kann man ohne merklichen Fehler in dem Ausdruck von f $R=0$ gesetzt denken und f als Function von t allein betrachten.

3. Der dritte Theil der aus der Kugelfläche ausströmenden Energie ist:

$$E_3 = \frac{c\,dt}{4\pi}\int dS\Big[(Y'N + YN' - Z'M - ZM')\,\frac{x}{R} + \cdots\Big]$$

oder, wenn man für X, Y, Z, L, M, N nach (3) und (4) ihre Werthe setzt:

$$E_3 = -\frac{dt}{4\pi}\int dS\sin\vartheta\Big[(X'\cos\varphi\cos\vartheta + Y'\sin\varphi\cos\vartheta$$
$$- Z'\sin\vartheta)\,\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial t} + c(L'\sin\varphi - M'\cos\varphi)\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial R}\right)\Big].$$

Da nun die gestrichelten Grössen nebst ihren Differentialquotienten im Centrum der Kugel endlich und stetig sind, so lassen sie sich für alle Punkte in der nächsten Umgebung des Centrums nach dem Taylor'schen Satze als lineäre Functionen der rechtwinkeligen Coordinaten xyz darstellen, und zwar gilt diese Entwickelung auch noch für die Punkte der Kugelfläche, weil nach der zu (6) gemachten Bemerkung das Product von R in einen räumlichen Differentialquotienten einer Kraftcomponente klein ist gegen die Kraftcomponente selber. Wir haben daher für irgend einen Punkt der Kugelfläche:

$$X' = X'_0 + \left(\frac{\partial X'}{\partial x}\right)_0 R \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$+ \left(\frac{\partial X'}{\partial y}\right)_0 R \sin\vartheta \sin\varphi + \left(\frac{\partial X'}{\partial z}\right)_0 R \cos\vartheta$$

u. s. w. für die übrigen 5 Kraftcomponenten, wobei der Index 0 bedeutet, dass $r = 0$ zu setzen ist.

Dann ergiebt die Substitution des Werthes von F aus (1) und die Integration über die ganze Kugelfläche, unter Vernachlässigung der Glieder, welche R im Zähler als Factor haben:

$$E_3 = -\frac{dt}{3}\left[2Z'_0 f' - \left\{\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial L'}{\partial y}\right)_0\right\} c f\right].$$

Nun ist aber nach den Gleichungen des electromagnetischen Feldes:

$$\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial L'}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial Z'_0}{\partial t}.$$

Folglich:

$$E_3 = -\frac{dt}{3}\left[2Z'_0 f' - \frac{\partial Z'_0}{\partial t} f\right]$$

oder:

(13) $$E_3 = dt\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(Z'_0 f) - Z'_0 f'\right],$$

wobei f auch wieder, wie oben in dem Ausdruck von E_2, ohne wesentlichen Fehler als Function von t allein betrachtet werden kann.

§ 3.

Die gesammte im Zeitelement dt aus der angenommenen Kugelfläche ausströmende Energie (7) ist nach dem Energieprincip gleich der Abnahme der innerhalb der Kugelfläche befindlichen Energie, also, wenn wir die letztere mit U bezeichnen:

(14) $$\frac{\partial U}{\partial t} dt + E_1 + E_2 + E_3 = 0,$$

oder mit Substitution der Werthe aus (8), (11) und (13):

(15) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(U + V + W + \frac{1}{3} Z'_0 f\right) - \frac{2}{3c^3} f' f''' - f' Z'_0 = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung wird sich f als Function der Zeit t bestimmen und somit die Aufgabe lösen lassen, die Schwingung des Resonators anzugeben, falls die in seine Richtung fallende electrische Kraftcomponente Z'_0 der erregenden Welle für alle Zeiten gegeben ist. Man ersieht sogleich aus der Gleichung, dass im Allgemeinen

(16) f''' von der Grössenordnung $c^3 Z'_0$

sein wird.

Vor allem handelt es sich nun um den Werth der gesammten innerhalb der Kugel vom Radius R vorhandenen Energie U. Untersuchen wir zunächst das den Resonator unmittelbar umgebende electromagnetische Feld, bis zur Entfernung R, welche gross ist gegen die Lineardimensionen des Resonators. Soweit die Gleichungen (1) und (2) in diesem Raum überhaupt gelten, lässt sich erkennen, dass hier überall die Kraftcomponenten der primären Welle verschwindend klein sind gegen die der secundären Welle. Denn nach (16) ist:

$$Z'_0 \text{ von der Grössenordnung } \frac{f'''}{c^3}.$$

Aber nach (12) ist durch Differentiation nach t:

$$\frac{R}{c} f''' \text{ klein gegen } f''.$$

Folglich:

(17) $$Z'_0 \text{ klein gegen } \frac{f''}{R c^2},$$

was nach (2) und (1) nichts anderes heisst, als dass Z'_0 klein ist gegen Z für $r = R$. Wir können also, wenn es sich um die Berechnung der Energie U handelt, in der Entfernung R und um so mehr in allen kleineren Entfernungen, auch da, wo die Gleichungen (2) gar nicht mehr gelten, die primäre Welle gegen die secundäre ganz vernachlässigen. Fassen wir nun die letztere ins Auge, für solche Entfernungen r, welche kleiner als R, aber immer noch gross sind gegen die Lineardimensionen des Resonators.

Da nach (6) überall und zu allen Zeiten:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \text{ klein gegen } \frac{c}{R} F.$$

oder:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \text{ klein gegen } \frac{c}{R} \frac{\partial F}{\partial t},$$

so ist a fortiori überall:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \text{ klein gegen } \frac{c^2}{R^2} F.$$

Nun ist innerhalb des betrachteten Gebietes F/R^2 von gleicher oder kleinerer Grössenordnung als F/r^2, und F/r^2 ist nach (1) von gleicher Ordnung wie $\partial^2 F/\partial z^2$; also haben wir für das betrachtete Gebiet:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \text{ klein gegen } c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

und die Gleichungen (2) gehen über in:

$$(18) \quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & Y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & Z = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ L = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} & M = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} & N = 0. \end{cases}$$

Die electrischen Kraftcomponenten lassen sich daher schreiben:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

d. h. sie haben ein Potential:

$$\varphi = -\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

und mit der schon wiederholt benutzten Annäherung:

$$\varphi = -f(t) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = f(t) \cdot \frac{z}{r^3},$$

das Potential eines electrischen Dipols vom Moment $f(t)$, gerichtet nach der Z-Axe. Hierdurch ist das electrische Feld in dem untersuchten Gebiet (r kleiner als R, aber gross gegen den Resonator) bis auf verschwindend kleine Grössen bestimmt.

Für solche Entfernungen r, die in endlichem Verhältniss zu den Dimensionen des Resonators stehen, bleibt noch eine weit ausgedehnte Willkür in den Annahmen über die Beschaffenheit des Feldes bestehen. Wir wollen nun in der Folge den einfachsten Fall voraussetzen, dass die gesammte

innerhalb der Kugelfläche mit dem Radius R befindliche Energie von derselben bekannten Form ist, wie die Energie eines in einfachen Schwingungen begriffenen electromagnetischen Systems, bei denen sich fortwährend electrische und magnetische Energie ineinander umwandeln. Die erstere setzen wir proportional dem Quadrat des Moments $f(t)$ des electrischen Dipols, die letztere proportional dem Quadrat der Intensität des electrischen Stromes zwischen den Enden des Dipols, welche durch $f'(t)$ bestimmt wird. Also haben wir:

$$(19) \qquad U = \tfrac{1}{2} K f^2 + \tfrac{1}{2} L f'^2,$$

wobei K und L positive Constanten bedeuten, die von der Beschaffenheit des Resonators abhängen, nicht aber von R, weil sich das Feld, dessen Energie U ist, bis auf Entfernungen vom Resonator erstreckt, welche im Vergleich zu dessen Grösse als unendlich anzusehen sind.

Ferner ist:

$$K \text{ gross gegen } \frac{1}{R^3}$$

und

$$L \text{ gross gegen } \frac{1}{c^2 R},$$

wie sich ergiebt, wenn man durch Quadrirung der Kraftcomponenten in (3) und (4), zunächst für $r = R$, den Ausdruck der Energiedichte des Feldes bildet und weiter bedenkt, dass die Energiedichte in der Entfernung R vom Resonator jedenfalls klein ist gegen die Energiedichte in Entfernungen, welche klein gegen R sind.

Bei dieser Grössenordnung von K und L folgt aus (12), dass a fortiori für alle Zeiten:

$$(20) \quad \begin{cases} Kf \text{ gross gegen } \dfrac{1}{c^3} f''' \\ \text{und} \\ Lf \text{ gross gegen } \dfrac{1}{c^3} f'. \end{cases}$$

Nun ist leicht zu sehen, dass in Gleichung (15) die Grössen V, W und $\tfrac{1}{3} Z_0' f$ gegen U verschwinden, wobei man nur die Werthe von V und W in (8) und (10), sowie die Grössenordnung von Z_0' in (16) zu berücksichtigen hat. Ausdrücklich muss aber bemerkt werden, dass die Glieder, die wir hier in Gleichung (15) vernachlässigen, keineswegs klein, zum Theil sogar gross sind gegen die folgenden Glieder derselben Gleichung, welche wir beibehalten, und deren Einfluss erst bei der Integration über grössere Zeiten hervortritt. Die vorgenommene Vereinfachung ergiebt somit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{2}{3c^3} f' f''' - f' Z'_0 = 0$$

oder nach (19):

$$Kff' + Lf'f'' - \frac{2}{3c^3} f' f''' - f' Z'_0 = 0. \tag{21}$$

Für diese aus 4 Gliedern bestehende Gleichung ist charakteristisch, dass jedes der beiden ersten Glieder nach (20) und (16) gross ist gegen jedes der beiden letzten Glieder. Infolge dessen sind die beiden ersten Glieder von der nämlichen Grössenordnung, also:

$$Kf \text{ von der Grössenordnung } Lf''. \tag{22}$$

Vernachlässigt man, um eine erste Annäherung zu gewinnen, die beiden letzten Glieder ganz, so ergiebt sich in bekannter Weise eine einfach periodische, ungedämpfte und unerzwungene Schwingung, deren Periode von dem Verhältniss $K:L$ abhängt. Die Berücksichtigung der folgenden kleinen Glieder ergiebt daher eine geringe Abweichung von einer einfach periodischen Schwingung, und zwar liefert das dritte Glied den Einfluss der ausgestrahlten Energie, das vierte den Einfluss der aus der primären Welle absorbirten Energie.

Aus den Beziehungen (20) und (22) lässt sich eine wichtige Bedingung zwischen den Constanten K und L ableiten. Nach (20) ist:

$$Lf'' \text{ gross gegen } \frac{1}{c^3} f'''. \tag{23}$$

Dagegen ist nach (22):

$$Lf''' \text{ von derselben Grössenordnung wie } Kf'.$$

Folglich:

$$Lf'' \text{ gross gegen } \frac{Kf'}{c^3 L}$$

oder:

$$Lf''' \text{ gross gegen } \frac{Kf''}{c^3 L}$$

oder endlich, mit abermaliger Benutzung der Beziehung (23), a fortiori:

$$Lf''' \text{ gross gegen } \frac{K}{c^6 L^2} f''',$$

und dies ist nur möglich, wenn

$$K \text{ klein gegen } c^6 L^3. \tag{24}$$

Mit Weglassung des Factors f' in (21) erhält man die lineare Differentialgleichung:

$$Kf + Lf'' - \frac{2}{3c^3} f''' = Z'_0, \tag{25}$$

welche sich, wie man sieht, von der Gleichung einer durch eine äussere Kraft Z'_0 erzwungenen und durch Reibung gedämpften Schwingung nur dadurch unterscheidet, dass der Einfluss der Dämpfung nicht durch ein Glied mit f', sondern durch ein Glied mit f''' dargestellt wird.

§ 4.

Die zuletzt gewonnene Differentialgleichung für die Schwingung im Resonator ist von dritter Ordnung, lässt sich aber sogleich allgemein auf eine solche zweiter Ordnung zurückführen. Denn von den drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$K + Lx^2 - \frac{2}{3c^3} x^3 = 0,$$

welche bekanntlich der Bildung des allgemeinen Integrals zu Grunde gelegt werden müssen, sind offenbar zwei complex, liefern also eine alternirende Schwingung; die dritte aber ist positiv und entspricht daher einem Vorgang, bei dem die Werthe der Kräftecomponenten beständig zunehmen. Indem wir einen solchen Vorgang, der hier keine Bedeutung hat, ausschliessen, lösen wir die Differentialgleichung (25) dadurch, dass wir setzen:

$$\alpha f(t) + \beta f'(t) + f''(t) = \varphi(t) \tag{26}$$

und die Constanten α und β, sowie die Function φ geeignet bestimmen. Dies geschieht am einfachsten auf folgendem Wege: durch Differentiation der letzten Gleichung nach t, Multiplication mit $2/3\,c^3$ und Addition zu (25) erhalten wir:

$$Kf + \frac{2\alpha}{3c^3} f' + \left(L + \frac{2\beta}{3c^3}\right) f'' = Z'_0 + \frac{2}{3c^3} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Weiter ergiebt sich durch Multiplication von (26) mit $(L+2\beta/3c^3)$ und Subtraction von der letzten Gleichung:

$$\left\{K-\alpha\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)\right\}f+\left\{\frac{2\alpha}{3c^3}-\beta\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)\right\}f'$$
$$=Z_0'+\frac{2}{3c^3}\frac{d\varphi}{dt}-\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)\varphi.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man setzt:

$$K-\alpha\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)=0,$$
$$\frac{2\alpha}{3c^3}-\beta\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)=0,$$
$$Z_0'+\frac{2}{3c^3}\frac{d\varphi}{dt}-\left(L+\frac{2\beta}{3c^3}\right)\varphi=0.$$

Von diesen drei Gleichungen ergeben die beiden ersten unter Berücksichtigung der Beziehung (24) mit derselben Annäherung, die wir bis jetzt immer benutzt haben:

$$\alpha=\frac{K}{L}\qquad\qquad \beta=\frac{2K}{3c^3L^2}$$

und die dritte unter Berücksichtigung der Beziehung (20), die, wie für f, so auch für φ gilt:

$$\varphi=\frac{Z_0'}{L},$$

sodass die Differentialgleichung (26) übergeht in:

$$Lf''+\frac{2K}{3c^3L}f'+Kf=Z_0'. \tag{27}$$

Dies ist die bekannte Form der Gleichung für eine durch eine gegebene äussere Kraft angeregte und durch innere Reibung gedämpfte Schwingung. Sie lehrt, dass bei schwach gedämpften Schwingungen die Dämpfung durch Strahlung sich von der Dämpfung durch Reibung nur dadurch unterscheidet, dass der Dämpfungscoefficient im zweiten Glied der Gleichung nicht eine von der Substanz des Resonators abhängige Constante, sondern eine ganz bestimmte Grösse ist, umgekehrt proportional dem Quadrate der Periode der maximalen Resonanz und dem Cubus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im umgebenden Medium.

Die Periode der maximalen Resonanz (hier nur unwesentlich unterschieden von der Eigenperiode des Resonators, die infolge der Dämpfung etwas grösser ist) wird gegeben durch:

$$\tau_0=2\pi\sqrt{\frac{L}{K}} \tag{28}$$

und das logarithmische Decrement der Dämpfung durch:

$$\sigma=\tau_0\frac{K}{3c^3L^2}=\frac{2\pi}{3c^3}\sqrt{\frac{K}{L^3}} \tag{29}$$

oder auch:

$$\sigma=\frac{16\pi^4}{3\lambda^3K} \tag{30}$$

wenn $\lambda=c\tau_0$ die Wellenlänge im Luftraum bezeichnet.

Aus (24) folgt, wie schon wiederholt bemerkt wurde, dass σ eine kleine Zahl ist.

Umgekehrt ergeben sich K und L aus σ und τ_0 in folgender Weise:

$$K=\frac{16\pi}{3c^3\sigma\tau^3},$$
$$L=\frac{4\pi^2}{3c^3\sigma\tau_0}.$$

Man kann also das ganze Verhalten des Resonators, anstatt durch K und L, auch durch τ_0 und σ charakterisiren und erhält dann aus (27) die Schwingungsgleichung:

$$f''+\frac{2\sigma}{\tau_0}f'+\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}f=\frac{3c^3\sigma\tau_0}{4\pi^2}Z_0'. \tag{31}$$

§ 5.

Wir wollen das gefundene Schwingungsgesetz zunächst dazu verwenden, um den in meiner vorigen Untersuchung behandelten Fall der stationären Resonanz, wie sie durch eine vollkommen periodische primäre Welle hervorgerufen wird, vollständiger zu erledigen, als es damals, ohne ein näheres Eingehen auf die Natur des Resonators, möglich war. Dort blieb in dem Ausdruck, welcher die Abhängigkeit der Amplitude α der Resonatorschwingung von der A der primären Welle darstellt, noch eine gewisse Constante, die Phasendifferenz $\delta'-\delta$, unbestimmt, und es liess sich von vornherein nur soviel sagen, dass dieselbe um so kleiner sein wird, je besser die Uebereinstimmung ist zwischen der Periode der primären Welle und der Eigenperiode des Resonators. Hier werden wir erkennen, in welcher Weise jene Phasendifferenz bei gegebener Periode τ der primären Welle von den charakteristischen Constanten σ und τ_0 des Resonators abhängt.

Die primäre Welle sei wieder gegeben durch:[1]

$$Z_0' = A\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta'\right).$$

Die Secundärschwingung im Falle der stationären Resonanz wieder durch:

$$f = \alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right),$$

wobei A und α positiv gewählt sind. Dann wird die Differentialgleichung (31) für alle Zeiten befriedigt, wenn:

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{16\pi^4\alpha}{3c^3\sigma\tau_0 A}\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_0^2}\right)$$

und:

$$(32)\qquad \cos(\delta' - \delta) = \frac{16\pi^3\alpha}{3c^3\tau\tau_0^2 A}.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{\tau_0}{\tau} - \frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Da A und $\alpha > 0$, so kann man $\delta' - \delta$ zwischen $+\pi/2$ und $-\pi/2$ annehmen. Im allgemeinen wird nun, da σ klein ist, die Differenz $\delta' - \delta$ nahe gleich $\pi/2$ oder $-\pi/2$ werden, d. h. α verschwindet, und es findet keine merkliche Resonanz statt. Nur in dem speciellen Fall, dass $(\tau_0 - \tau)/\tau$ klein ist, rückt $\delta' - \delta$ von dem Grenzwerth fort, und es tritt Resonanz ein. Dann kann man ohne wesentlichen Fehler die letzte Formel schreiben:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{2\pi}{\sigma}\,\frac{\tau_0 - \tau}{\tau}$$

oder nach (30):

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{3\lambda^3 K}{8\pi^3}\,\frac{\tau_0 - \tau}{\tau}.$$

Ferner aus (32):

$$\alpha = \frac{3\lambda^3 A}{16\pi^3}\cos(\delta' - \delta).$$

1) l. c. Gleichung (11).

Diese Formeln bleiben gültig auch für den allgemeinen Fall, dass $\tau_0 - \tau$ ganz beliebig ist, da dann die Resonanz ohnehin verschwindet. Die letzte ist identisch mit der früher für die stationäre Resonanz gefundenen Beziehung.

§ 6.

Wir betrachten schliesslich den speciellen Fall, dass die primäre Welle verschwindet, also $Z_0' = 0$. Dann haben wir im Resonator einfach eine Schwingung, die mit constanter Dämpfung abklingt. Wenn man die Constanten des Resonators K und L kennt, lässt sich aus den obigen Formeln die Periode τ_0 und das logarithmische Decrement σ berechnen, und wir können dadurch die Theorie mit der Erfahrung vergleichen.

Am eingehendsten hat sich mit dem Studium der electrischen Resonanz Hr. **Bjerknes** beschäftigt. Seine Resonatoren waren allerdings kreisförmig gebogen, sodass die hier entwickelten Formeln nicht unmittelbar auf seine Messungen mit Resonatoren anwendbar sind; dagegen befand sich unter seinen „Oscillatoren" ein geradliniger, in der Form eines vollständigen Umdrehungskörpers.[1] Als Capacitäten dienten zwei Messingscheiben von je 30 cm Durchmesser, welche in ihren Mittelpunkten an Messingröhren von etwas mehr als 1 cm Dicke befestigt waren. Diese Röhren konnten wieder über zwei dünnere Röhren gleiten, sodass die Gesammtlänge des Oscillators durch Ausziehen zwischen 74 und 135 cm verändert werden konnte. Die dünneren Röhren waren durch kleine Messingknöpfe verschlossen, zwischen welchen die primären Funken spielten.

Die Constanten K und L dieses Apparates lassen sich aus der Gleichung (19) entnehmen. Bedenkt man nämlich, dass f das Moment des electrischen Dipols, also das Product aus der augenblicklichen Ladung ε einer Scheibe und dem Abstand l der Scheiben bedeutet, so folgt:

$$(33)\qquad f = \varepsilon\, l,$$

1) V. **Bjerknes**, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. 20. Afd. I. Nr. 5. Ueber electrische Resonanz II. p. 6. 1895.

ferner:

$$f' = l\frac{d\varepsilon}{dt} = lJ, \tag{34}$$

wenn J die Intensität des Stromes im Leiter bezeichnet. Nun sei die electrostatische Capacität einer einzelnen Scheibe mit dem Durchmesser D:[1])

$$C = \frac{D}{\pi}.$$

Dann ist die electrische Energie einer mit ε geladenen Scheibe:

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{C} = \frac{\pi\varepsilon^2}{2D}$$

und die electrische Energie des ganzen Feldes bis zu Entfernungen, welche gross gegen l, aber klein gegen die Wellenlänge sind, angenähert gleich der Summe der von beiden Scheiben einzeln herrührenden Energien:

$$\frac{1}{2}Kf^2 = \frac{\pi\varepsilon^2}{D}$$

oder mit Rücksicht auf (33):

$$K = \frac{2\pi}{l^2 D}.$$

Für die magnetische Energie desselben Feldes erhält man ferner aus (19) und (34) den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}Lf'^2 = \frac{1}{2}Ll^2J^2.$$

Es ist also das Product Ll^2 nichts anderes als das Selbstpotential[2]) des geradlinigen Leiters im electrostatischen Maasse:

$$Ll^2 = \frac{2l}{c^2}\log\frac{2l}{e\varrho}$$

oder

$$L = \frac{2}{c^2 l}\log\frac{2l}{e\varrho},$$

wenn ϱ den Radius des ringförmigen Querschnitts bezeichnet.

Die gefundenen Werthe von K und L in (28) eingesetzt ergeben für die Eigenperiode des Oscillators:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{lD}{\pi}\log\frac{2l}{e\varrho}}$$

1) Z. B. Kirchhoff, Vorlesungen über Electricität, p. 36.
2) Z. B. M. Wien, Wied. Ann. **53.** p. 929. 1894.

und für die Wellenlänge:

$$\lambda^2 = 4\pi l D\log\frac{2l}{e\varrho}. \tag{35}$$

Das logarithmische Decrement σ endlich folgt aus (30):

$$\sigma = \frac{8\pi^3 l^2 D}{3\lambda^3}. \tag{36}$$

Für den Bjerknes'schen Oscillator ist nach den obigen Angaben $D = 30$ cm, $\varrho = 0{,}5$ cm zu setzen. Für l und λ hat Hr. Bjerknes[1]) folgende zusammengehörige Werthe gemessen, alles in Centimetern:

$l =$	74	99	134
$\lambda =$	357,6	413,5	518,0.

Hiernach ist die Voraussetzung der Theorie, dass λ gross ist gegen l, zwar angenähert, aber doch nicht so weit erfüllt, dass man eine genaue Uebereinstimmung der theoretischen mit den experimentellen Werthen erwarten könnte. Mit den drei angegebenen Werthen von l berechnet sich λ aus der Formel (35) zu:

$$\lambda = 361{,}7 \qquad 431{,}2 \qquad 516{,}7$$

wodurch die Theorie, soweit es hier möglich ist, bestätigt wird. Mit den theoretischen Werthen von λ erhält man ferner in den drei Fällen aus der Formel (36) das logarithmische Decrement der Dämpfung durch Strahlung:

$$\sigma = 0{,}29 \qquad 0{,}30 \qquad 0{,}32.$$

Die Dämpfung ist also immerhin so schwach, dass die Anwendung der theoretischen Formel für eine angenäherte Berechnung gerechtfertigt wird. Wie man ersieht, wächst die Dämpfung hier mit zunehmender Wellenlänge, da in der Gleichung (36) mit wachsendem λ der Zähler schneller zunimmt als der Nenner (vgl. die Bemerkung oben p. 579).

Hr. Bjerknes hat aus verschiedenen Versuchen das logarithmische Decrement seines geradlinigen Oscillators im Gesammtmittel zu 0,4 berechnet.[2]) Sinn und Grösse der Abweichung des wirklichen Werthes von dem theoretischen er-

1) V. Bjerknes, a. a. O. p. 9.
2) V. Bjerknes, a. a. O. p. 34.

klären sich wohl hauptsächlich aus den beiden folgenden Umständen:

Erstlich ist zu berücksichtigen, dass der oben berechnete Werth von σ sich auf den isolirt aufgestellten Oscillator bezieht, während bei den Bjerknes'schen Versuchen ziemlich dicht neben dem Oscillator, nur wenige Centimeter von ihm entfernt, die für die Messungen benutzte lange Drahtleitung ihren Anfang nahm, durch welche die Abfuhr der Energie noch weiter gefördert wird.

Zweitens ist der Einfluss der „consumptiven" Dämpfung in Betracht zu ziehen, welche von dem Leitungswiderstand sowohl der Messingröhren, als auch namentlich des Funkens herrührt. Beträgt der Gesammtwiderstand der Leitung w Ohm, also im electrostatischen Maasse:

$$\frac{w \cdot 10^9}{c^2},$$

so ist wegen der Joule'schen Wärme die Energiegleichung (14) zu vervollständigen durch das Glied:

$$+ \frac{J^2 \, w \cdot 10^9}{c^2} d\,t.$$

Dies bedingt in der Gleichung (21) den Zusatz:

$$+ \frac{J^2 w \, 10^9}{c^2}$$

oder, da nach (34):

$$J = \frac{f'}{l},$$

$$+ \frac{w \cdot 10^9}{l^2 c^2} f'^2.$$

Somit erhält man in der Gleichung (27) noch das weitere Dämpfungsglied:

$$+ \frac{w \cdot 10^9}{l^2 c^2} f',$$

welches, durch das dort schon vorhandene dividirt, das Verhältniss der Dämpfung durch Leitungswiderstand: σ_w zu der Dämpfung durch Strahlung: σ liefert:

$$\frac{\sigma_w}{\sigma} = \frac{w \cdot 10^9}{l^2 c^2} \cdot \frac{3 c^3 L}{2 K}$$

oder mit Berücksichtigung von (28):

$$\frac{\sigma_w}{\sigma} = \frac{3}{8 \pi^2} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \frac{w \cdot 10^9}{c}.$$

Setzen wir nun $c = 3 \cdot 10^{10}$, und nehmen schätzungsweise den Widerstand des Funkens (die Rohrleitung kommt dagegen nicht in Betracht) zu $w = 10$ Ohm an, im Anschluss an eine Berechnung von Hrn. Bjerknes, so ergiebt sich damit für die drei oben berechneten Fälle:

$$\frac{\sigma_w}{\sigma} = 0{,}30 \qquad 0{,}24 \qquad 0{,}19$$

und daraus das logarithmische Decrement der consumptiven Dämpfung:

$$\sigma_w = 0{,}09 \qquad 0{,}07 \qquad 0{,}06$$

Mithin die Gesammtdämpfung des isolirt aufgestellten Oscillators:

$$\sigma + \sigma_w = 0{,}38 \qquad 0{,}37 \qquad 0{,}38,$$

welche den gemessenen Werthen schon näher kommt. Immerhin spielt bei den hier betrachteten Schwingungen die Strahlung offenbar die Hauptrolle unter den dämpfenden Wirkungen, während der Leitungswiderstand, sowie etwaige andere Umstände erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Dies steht auch in vollkommener Uebereinstimmung mit den Anschauungen, zu welchen Hr. Bjerknes durch seine Versuche gelangt ist.