

# TECHNICAL PHYSICS

## OF THE USSR

Editor: JOFFE A.

Vol. IV

No. 10

ADMINISTRATION OF UNIVERSITIES AND SCIENTIFIC RESEARCH INSTITUTES OF THE  
PEOPLE'S COMMISSARIAT OF EDUCATION

SCIENTIFIC RESEARCH SECTOR OF THE PEOPLE'S COMMISSARIAT OF  
HEAVY INDUSTRY

---

STATE TECHNICAL-THEORETICAL PRESS — 1937

## SUR LE CALCUL DU RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE RECTILIGNE A PETITE DISTANCE

Par *P. Riazin*

Le présent article contient le calcul du champ électromagnétique engendré dans un milieu homogène non conduisant par une antenne rectiligne, étant donné, dans cette dernière, une distribution harmonique du courant.

Les équations, obtenues à l'aide de l'intégration précise des champs élémentaires des dipôles de Herz, sont valables à distance, ainsi qu'à proximité (pratiquement jusqu'à la surface même) de l'antenne.

Le cas de l'antenne demi-onde et de ses harmoniques est examiné en plus de détail, en portant surtout attention aux relations de phase du champ électromagnétique.

### Introduction

Depuis les premiers jours de la radiotechnique et jusqu'à présent, les problèmes relatifs à l'émission des ondes électromagnétiques par une antenne de longueur finie ont été, dans les limites dictées par la pratique, l'objet de nombreuses recherches mathématiques et expérimentales: néanmoins, ce problème est loin d'avoir obtenu une solution complète. En effet, le plus souvent ces études se sont bornées à des zones distantes de l'émetteur, tandis que dans un nombre de cas particuliers il est nécessaire de connaître le champ d'une antenne réelle non seulement à grande distance, mais aussi au voisinage immédiat de l'antenne; surface incluse. En général, les travaux touchant à ce dernier problème sont peu nombreux tandis que les études théoriques où l'on tient compte de la conductivité finie du sol, font entièrement défaut, du moins à ma connaissance.

Dans les quelques recherches publiées, faites dans l'hypothèse d'un milieu homogène et d'un sol parfaitement conducteur, les auteurs se servent pour la plupart de méthodes graphiques ou bien de méthodes de calcul basées sur l'intégration numérique, \* et une solution complète de problème y manque.

Quant aux travaux classiques de M. A b r a h a m, qui fut le premier à appliquer à l'étude du rayonnement électromagnétique des fils conducteurs \*\*

\* Voir G. W. P i e r c e, «Electric Oscillations and Electric Waves», vol. II; J. S. M c P e t r i e, J. E. E., 1931, p. 290; F. R. S t a n s e l, Proc. I. R. E., 24, May 1936.

\*\* Voir M. A b r a h a m, «Rundfunktechnik und Elektrodynamik», Jahrb. d. d. T 1901.

la méthode des «potentiels retardés» et qui donne une solution exacte et complète pour le champ électromagnétique des oscillations propres d'une ellipsoïde allongée de révolution, \* même ces travaux n'embrassent pas tous les côtés du problème qui pourraient présenter quelque intérêt pratique. Ainsi la solution de M. A b r a h a m du problème des oscillations propres d'une verge ne renferme pas le cas particulier, pourtant si fréquent dans la radiotechnique moderne, d'un nombre fractionnaire de demi-ondes stationnaires contenues dans l'antenne émettrice: de même, dans son étude sur le rayonnement d'une antenne, M. A b r a h a m n'a pas considéré le champ qui surgit à proximité de l'antenne, surtout au point de vue des relations de phase.

Dans l'article qui suit, l'auteur donne les expressions explicites du champ électromagnétique, basées sur la conception du champ à l'aide des potentiels retardés, ces expressions étant valables en mesure égale pour les zones proches et les zones éloignées des fils conducteurs linéaires contenant un nombre quelconque, en général fractionnaire, de demi-ondes stationnaires harmoniques.

A l'aide de ces expressions l'auteur examine en plus de détail le cas d'un nombre entier de demi-ondes, en particulier le cas d'une «antenne demi-onde», en portant surtout attention aux relations de phase.

### § 1. Relations fondamentales

En suivant M. A b r a h a m, nous allons exprimer le champ électromagnétique à l'aide des potentiels retardés moyennant la fonction de Herz, en d'autres mots, nous mettrons que le fil entier, dont la longueur est de l'ordre d'une demi-onde, constitue un ensemble de dipôles élémentaires et que le champ total peut être obtenu en intégrant les vecteurs des champs engendrés par chaque dipôle séparément.

Par raison de la symétrie axiale, les solutions ne contiennent qu'une seule composante du champ magnétique ( $H_\varphi$ ), tangente au cercle de latitude.

Mettons que l'onde stationnaire dans le fil conducteur est donnée par l'expression:

$$I = I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \tau'\right) \cdot \sin \omega t, \quad (1)$$

où  $I_0$  — est l'amplitude du courant dans le fil conducteur;  $\tau'$  — la distance mesurée le long de l'antenne en commençant du centre d'intensité pris comme origine;  $\lambda$  — la longueur de l'onde stationnaire dans le fil conducteur.

Etant donné un courant de la forme de (1), le champ magnétique d'un dipôle élémentaire pourra être présenté sous une forme réelle: \*\*

\* Voir plus loin.

\*\* Dans l'expression fondamentale nous allons conserver tous les membres, ce qui rend les résultats applicables à distance et aussi à proximité.

$$dH_{\varphi} = I_0 \frac{\omega}{c^2} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \frac{\sin \vartheta}{R'} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \tau' \right) \left[ \frac{\sin \omega \left( t - \frac{R'}{c} \right)}{\frac{\omega}{c} \cdot R'} + \cos \omega \left( t - \frac{R'}{c} \right) \right] d\tau'. \quad (3a)$$

Ici  $R'$  est le rayon vecteur qui joint le dipôle au point d'observations. Dans le but de simplifier les transformations à faire, nous introduisons une nouvelle échelle de longueur dans (3a):

$$R = \frac{\omega}{c} \cdot R' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot R'; \quad \tau = \frac{\omega}{c} \tau' = \frac{2\pi}{\lambda} \tau', \quad (3b)$$

et nous passerons des unités électriques CGSE aux unités magnétiques CGSM, c'est-à-dire nous mettrons  $I_0/c = I$ .

Après un nombre de modifications, l'expression (3a) se présentera sous la forme:

$$dH_{\varphi} = I \frac{\omega}{c} \cdot r \frac{\cos \tau}{R^2} \times \\ \times d\tau \left[ \left( \frac{\cos R}{R} + \sin R \right) \sin \omega t + \left( \cos R - \frac{\sin R}{R} \right) \right] \cos \omega t. \quad (3c)$$

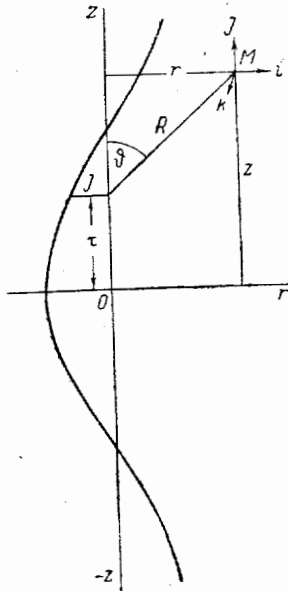


Fig. 1.

Pour obtenir le vecteur résultant, il faut prendre l'intégrale sur toute la longueur de l'antenne. Pour plus de généralité, nous prendrons l'intégrale indéfinie par rapport à  $\tau$  de l'équation (3c):

$$H_{\varphi} = I \frac{\omega}{c} \cdot r \left[ \sin \omega t \int \frac{\cos \tau}{R^2} \left( \sin R + \frac{\cos R}{R} \right) d\tau + \right. \\ \left. + \cos \omega t \int \frac{\cos \tau}{R^2} \left( \cos R - \frac{\sin R}{R} \right) d\tau \right]. \quad (4)$$

Dénotons les intégrales indéfinies de (4) respectivement par

$$\int \frac{\cos \tau}{R^2} \left( \cos R - \frac{\sin R}{R} \right) \cdot d\tau = a_{\varphi}, \quad (4a)$$

$$\int \frac{\cos \tau}{R^2} \left( \sin R + \frac{\cos R}{R} \right) d\tau = b_{\varphi}. \quad (4b)$$

Ici, comme dans (4),  $R$  est une fonction de  $\tau$  et, d'après la fig. 1, peut être représenté de la façon suivante:

$$R = \sqrt{(z - \tau)^2 + r^2}. \quad (5)$$

Il va sans dire que le champ électrique de l'antenne en question peut aussi être présenté sous forme quadratique. En omettant toutes les opérations intermédiaires, nous écrivons l'expression du champ électrique, rapporté à un système cylindrique de coordonnées.

La composante verticale est

$$E_z = I \frac{\omega}{c} (a_z \cdot \cos \omega t + b_z \cdot \sin \omega t), \quad (6)$$

où:

$$a_z = \int \frac{\cos \tau}{R^2} \left[ \left( 2 + r^2 - \frac{3R^2}{R^2} \right) \frac{\cos R}{R} + \left( 2 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \sin R \right] d\tau, \quad (6a)$$

$$b_z = \int \frac{\cos \tau}{R^2} \left[ \left( 2 + r^2 - \frac{3R^2}{R^2} \right) \frac{\sin R}{R} - \left( 2 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \cos R \right] d\tau. \quad (6b)$$

La composante horizontale est

$$E_r = I \frac{\omega}{c} (a_r \cdot \cos \omega t + b_r \cdot \sin \omega t), \quad (6c)$$

où:

$$a_r = \int \frac{\cos \tau}{R^2} (z - \tau) \left[ \frac{\cos R}{R} - \frac{3}{R^2} \left( \frac{\cos R}{R} + \sin R \right) \right] \cdot d\tau, \quad (6d)$$

$$b_r = \int \frac{\cos \tau}{R^2} (z - \tau) \left[ \frac{\sin R}{R} - \frac{3}{R^2} \left( \frac{\sin R}{R} - \cos R \right) \right] \cdot d\tau. \quad (6e)$$

Dans toutes ces formules, comme dans (4a),  $R$  représente le rayon vecteur qui joint un dipôle quelconque au point d'observation et qui, en même temps, d'après (5), est une fonction de  $\tau$ .

## § 2. Dédution de l'expression exacte du champ magnétique

Comme on peut le voir des expressions (4), (6a), (6b), (6c), (6d), (6e), la détermination du champ électromagnétique se réduit à la détermination des fonctions primitives sous le signe  $\int$  dans (4a) et (4b) pour le champ magnétique, et respectivement dans (6a), (6b), (6d), (6e) pour le champ électrique.

Il sera démontré plus loin que les intégrales (4a) et (4b) admettent des solutions qui s'expriment par des fonctions élémentaires. Nous trouverons ainsi des expressions pour le champ magnétique. Si le champ magnétique est connu, on peut, comme il sera démontré dans le paragraphe suivant, former, à l'aide des équations de Maxwell, les expressions du champ électrique sans avoir recours à l'intégration des expressions (6a), (6b), (6d), (6e).

Commençons par le champ magnétique et déterminons d'abord  $a_\varphi$  (voir (4a)):

$$a_\varphi = - \int \frac{\cos \tau \cdot \sin R}{R^3} \cdot d\tau + \int \frac{\cos \tau \cdot \cos R}{R^2} \cdot d\tau$$

où évidemment

$$a_{\varphi} = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin(R+\tau)}{R^3} d\tau - \frac{1}{2} \int \frac{\sin(R-\tau)}{R^3} d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{\cos(R+\tau)}{R^2} d\tau + \frac{1}{2} \int \frac{\cos(R-\tau)}{R^2} \cdot d\tau. \quad (7)$$

Introduisons les dénnotations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\sin(R+\tau)}{R^3} \cdot d\tau &= i_1, \\ \frac{1}{2} \int \frac{\sin(R-\tau)}{R^3} \cdot d\tau &= i_2, \\ \frac{1}{2} \int \frac{\cos(R+\tau)}{R^2} \cdot d\tau &= i_3, \\ \frac{1}{2} \int \frac{\cos(R-\tau)}{R^2} \cdot d\tau &= i_4. \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Transformons chacune des intégrales (7a) en introduisant des variables nouvelles. Mettons pour  $i_3$  et  $i_1$

$$R + \tau = \alpha. \quad (8)$$

Substituant  $R$  dans l'égalité  $(z-\tau)^2 = R^2 - r^2$  par sa valeur tirée de (8), on obtient:

$$(z-\tau)^2 = (\alpha-\tau)^2 - r^2$$

d'où

$$\tau = \frac{\alpha^2 - r^2 - z^2}{2(\alpha - z)}, \quad (8a)$$

$$d\tau = \frac{(\alpha - z)^2 + r^2}{2(\alpha - z)^2} \cdot d\alpha, \quad (8b)$$

$$R = \alpha - \tau = \frac{(\alpha - z)^2 + r^2}{2(\alpha - z)}. \quad (8c)$$

Remplaçant dans (4a) les facteurs  $R + \tau$ ,  $R$  et  $\tau$  sous le signe  $\int$  par leur expression à l'aide de  $\alpha$ , on obtient, après quelques réductions:

$$i_1 = \int \frac{\sin \alpha \cdot d(\alpha - z)^2}{[(\alpha - z)^2 + r^2]^2}, \quad (9)$$

$$i_3 = \int \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{(\alpha - z)^2 + r^2}. \quad (9a)$$

Considérons maintenant  $i_2$  et  $i_4$ ; posons:

$$R - \tau = \beta.$$

Alors

$$\tau = \frac{z^2 + r^2 - \beta^2}{2(\beta + z)}, \quad (9b)$$

$$d\tau = -\frac{(\beta + z)^2 + r^2}{2(\beta + z)^2} \cdot d\beta, \quad (9c)$$

$$R = \frac{(\beta + z)^2 + r^2}{2(\beta + z)}. \quad (9d)$$

La transformation des expressions pour  $i_2$  et  $i_4$  [voir (7)] à l'aide des formules (9b), (9c), (9d) donne respectivement

$$i_2 = - \int \frac{\sin \beta \cdot d(\beta + z)^2}{[(\beta + z)^2 + r^2]^2}, \quad (9e)$$

$$i_4 = - \int \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{(\beta + z)^2 + r^2}. \quad (9f)$$

En transformant (9) et (9b) à l'aide de l'intégration partielle, on obtient:

$$i_1 = - \frac{\sin \alpha}{(\alpha - z)^2 + r^2} + \int \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{(\alpha - z)^2 + r^2}, \quad (10)$$

$$i_2 = \frac{\sin \beta}{(\beta + z)^2 + r^2} - \int \frac{\cos \beta \cdot d\beta}{(\beta + z)^2 + r^2}. \quad (10a)$$

Enfin, portant dans (7) les valeurs de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  tirées de (9a), (9f), (10), (10a) et reprenant la variable, on obtient:

$$a_\varphi = \frac{\sin(R + \tau)}{(R + \tau - z)^2 + r^2} - \frac{\sin(R - \tau)}{(R - \tau + z)^2 + r^2}. \quad (11)$$

On voit que les intégrales des expressions pour  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  subissent la réduction deux à deux, de sorte que l'on obtient la solution de l'intégrale indéfinie (4a). Modifions l'expression (11):

$$a_\varphi = \sin R \cdot \cos \tau \left[ \frac{1}{(R + \tau - z)^2 + r^2} - \frac{1}{(R - \tau + z)^2 + r^2} \right] + \cos R \cdot \sin \tau \left[ \frac{1}{(R + \tau - z)^2 + r^2} + \frac{1}{(R - \tau + z)^2 + r^2} \right]. \quad (11a)$$

Réduisant au même dénominateur les membres entre parenthèses carrées, on obtient finalement:

$$a_\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{z - \tau}{R} \cdot \sin R \cdot \cos \tau + \cos R \cdot \sin \tau \right). \quad (11b)$$

et en analogie nous déduirons  $b_\varphi = \frac{1}{r^2} \left( -\frac{z - \tau}{R} \cos R \cos \tau + \sin R \sin \tau \right)$ .

### § 3. Détermination des expressions du champ électrique

Comme il a été mentionné plus haut, pour la détermination du champ électrique on peut se passer de l'emploi des intégrales compliquées (6a), (6b), (6d), (6e). La solution du problème devient facile, si l'on a recours à l'équation de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}.$$

On peut en déduire:

$$\mathbf{E} = c \int \text{rot } \mathbf{H} \cdot dt. \quad (12)$$

La constante arbitraire dans la partie droite de (12) peut être supposée nulle, puisqu'elle est indépendante du temps et, par conséquent, ne correspond qu'à la partie constante du champ, laquelle, en ce moment, ne nous intéresse pas.

Portant dans (4) les valeurs des intégrales (11b) et (11c) obtenues dans le paragraphe précédent, on a:

$$H_\varphi = H = I \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{z-\tau}{R} \cdot \sin R \cdot \cos \tau + \cos R \cdot \sin \tau \right) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \left( -\frac{(\tau-z)}{R} \cos R \cdot \cos \tau + \sin R \cdot \sin \tau \right) \sin \omega t \right\}. \quad (12a)$$

Déterminons le rot  $\mathbf{H}$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \cdot \text{rot}_r H + \mathbf{j} \text{rot}_z H + \mathbf{k} \text{rot}_\varphi H.$$

Ici  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sont des vecteurs de longueur 1 dirigés le long des axes  $r$ ,  $z$ ,  $\varphi$  d'un système cylindrique de coordonnées (voir fig. 1).

L'équation (12) est exprimée dans l'échelle convenue d'unités spatiales) déterminée par (3b). Donc, en calculant la composante du rot  $\mathbf{H}$  à l'aide de (12), il faut tenir compte du système d'unités, dans lequel on a exprimé  $H$ , ce qui introduit un facteur supplémentaire  $\frac{\omega}{c}$  dans les expressions des dérivées spatiales. On aura donc:

$$\text{rot}_r H = -\frac{\partial H}{\partial z'} = -\frac{\omega}{c} \frac{\partial H}{\partial z}; \\ \text{rot}_z H = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H); \\ \text{rot}_\varphi H = 0. \quad (12b)$$

Portant dans (12b) la valeur de  $H$  tirée de (12a), on obtient après différentiation:

$$\text{rot}_r H = -I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left\{ \left[ \frac{\sin R \cdot \cos \tau}{R} + \frac{(z-\tau)^2}{R^2} \cdot \cos R \cdot \cos \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(z-\tau)^2}{R^2} \sin R \cos \tau - \frac{\sin R \cdot \sin \tau (z-\tau)}{R} \right] \cos \omega t + \left[ -\frac{\cos R \cdot \cos \tau}{R} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(z-\tau)^2}{R^2} \cdot \sin R \cdot \cos \tau + \frac{(z-\tau)^2}{R^2} \cos R \cdot \cos \tau \right] \sin \omega t \right\}, \quad (12c) \\ \text{rot}_z H = I \frac{\omega}{c} \left\{ \left[ \frac{z-\tau}{R^2} \cos R \cdot \cos \tau - \frac{z-\tau}{R^3} \sin R \cdot \cos \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin R \cdot \sin \tau}{R} \right] \cdot \cos \omega t + \left[ \frac{z-\tau}{R^2} \sin R \cdot \cos \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z-\tau}{R^3} \cdot \cos R \cdot \cos \tau + \frac{\cos R \cdot \sin \tau}{R} \right] \cdot \sin \omega t \right\}.$$



Rangeant dans (12) le rot  $\mathbf{H}$  suivant les composantes, et y portant les valeurs de ces dernières tirées de (12c), on obtient, après intégration:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{i} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot I \left\{ \left[ \frac{\sin R \cdot \sin \tau (z - \tau)}{R} - \frac{\sin R \cdot \cos \tau}{R} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(z - \tau)^2}{R^2} \cos R \cdot \cos \tau + \frac{(z - \tau)^2}{R^3} \sin R \cdot \cos \tau \right] \sin \omega t + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\cos R \cdot \sin \tau (z - \tau)}{R} - \frac{\cos R \cdot \cos \tau}{R} + \frac{(z - \tau)^2}{R^2} \sin R \cdot \cos \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(z - \tau)^2}{R^3} \cos R \cdot \cos \tau \right] \cos \omega t \right\} + jI \frac{\omega}{c} \left\{ \left[ - \frac{\sin R \cdot \sin \tau}{R} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z - \tau}{R^2} \cos R \cdot \cos \tau - \frac{z - \tau}{R^3} \sin R \cdot \cos \tau \right] \sin \omega t - \left[ \frac{\cos R \cdot \sin \tau}{R} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z - \tau}{R^2} \cdot \sin R \cdot \cos \tau + \frac{z - \tau}{R^3} \cos R \cdot \cos \tau \right] \cos \omega t \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Dénotons par:

$$\left. \begin{aligned} a_z &= - \frac{\cos R \cdot \sin \tau}{R} + \frac{\tau - z}{R^2} \cdot \sin R \cdot \cos \tau + \\ &\quad + \frac{\tau - z}{R^3} \cos R \cdot \cos \tau, \\ b_z &= - \frac{\sin R \cdot \sin \tau}{R} - \frac{\tau - z}{R^2} \cos R \cdot \cos \tau + \\ &\quad + \frac{\tau - z}{R^3} \sin R \cdot \cos \tau, \\ a_r &= \frac{1}{r} \left[ - \frac{\cos R}{R} (\tau - z) \sin \tau - \frac{\cos R \cdot \cos \tau}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\tau - z)^2}{R^2} \sin R \cos \tau + \frac{(\tau - z)^2}{R^3} \sin R \cos \tau \right], \\ b_r &= \frac{1}{r} \left[ - \frac{\sin R \cdot \sin \tau}{R} (\tau - z) - \frac{\sin R}{R} \cos \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tau - z)^2}{R^2} \cos R \cos \tau + \frac{(\tau - z)^2}{R^3} \sin R \cos \tau \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

En prenant les dérivées des parties droites de l'équation (13a), on obtient des expressions identiques à celles qui se trouvent sous le signe  $\int$  des intégrales indéfinies (6a), (6b), (6d), (6e), de sorte que (13a) représente la solution de ces intégrales.

#### § 4. Calcul du champ d'émission d'une antenne demi-onde et du champ de ses harmoniques

Pour le calcul exact des ondes électro-magnétiques émises par des fils conducteurs rectilignes, étant donné une distribution sinusoïdale du cou-

rant le long du conducteur et un nombre fractionnaire ou entier de demi-ondes stationnaires dans ce dernier, on peut se servir des expressions (11a), (11b) et (11c). Nous allons examiner en plus de détail le rayonnement d'une antenne demi-onde et ses harmoniques et nous démontrerons que les formules approximées de M. A b r a h a m, qui expriment le champ dans la zone d'onde, peuvent être déduites des formules exactes que nous venons d'obtenir, en supposant la distance entre l'antenne et la zone d'onde suffisamment grande.

Pour que les formules (11b), (11c) et (13a) puissent être appliquées à tel ou autre cas particulier, il faut passer des intégrales indéfinies aux intégrales définies et substituer à  $\tau$  les limites correspondantes.

Il est à remarquer que dans l'échelle de longueur que nous venons de choisir dans le but de simplifier les opérations, la longueur de l'antenne devient égale à  $\pi$  (respectivement à  $n\pi$  pour la  $n$ -me harmonique). En effet

$$\tau = \frac{\pi \cdot n}{2l} \cdot \tau'. \text{ Remplaçant } \tau' \text{ par la demi-longueur de l'antenne, on obtient}$$

$$\tau = \frac{\pi n}{2}. \text{ Par conséquent l'intégration doit être effectuée entre les limites}$$

$$-\frac{n\pi}{2} \text{ et } +\frac{n\pi}{2} \text{ où } n \text{ est un nombre entier impair.}$$

L'expression du champ magnétique prend alors la forme suivante:

$$H = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{z-\tau}{R} \sin R \cdot \cos \tau + \cos R \cdot \sin \tau \right) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \left[ \left( -\frac{z-\tau}{R} \cos R \cos \tau + \sin R \cdot \sin \tau \right) \cdot \sin \omega t \right] \right]_{-\frac{n\pi}{2}}^{+\frac{n\pi}{2}}$$

d'où:

$$H = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} [\cos(\omega t - R_b) + \cos(\omega t - R_n)]. \quad (14)$$

Entre les mêmes limites, l'expression du champ électrique (13) devient:

$$\left. \begin{aligned} E_z = -I \frac{\omega}{c} & \left[ \left( \frac{\cos R_b}{R_b} + \frac{\cos R_n}{R_n} \right) \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\sin R_b}{R_b} + \frac{\sin R_n}{R_n} \right) \right] \sin \omega t, \\ E_r = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} & \left\{ \left[ \frac{\cos R_b}{R_b} \left( z - n \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\cos R_n}{R_n} \left( z + \frac{n\pi}{2} \right) \right] \cos \omega t + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\sin R_b}{R_b} \left( z - \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{\sin R_n}{R_n} \left( z + \frac{n\pi}{2} \right) \right] \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Dans (14) et (15),  $R_b$  et  $R_n$  sont des rayons vecteurs qui joignent les deux extrémités de l'antenne au point d'observation (fig. 2), et

$$\left. \begin{aligned} R_b &= \sqrt{\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) + r^2}, \\ R_n &= \sqrt{\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) + r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Les expressions (15) du champ électrique peuvent être rendues plus simples au point de vue mathématique. Ecrivons (15) sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -I \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\cos(\omega t - R_b)}{R_b} + \frac{\cos(\omega t - R_n)}{R_n} \right], \\ E_r &= I \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} \left[ \frac{z - \frac{n\pi}{2}}{R_b} \cos(\omega t - R_b) + \frac{\left(z + \frac{n\pi}{2}\right)}{R_n} \cos(\omega t - R_n) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Le champ électrique peut être considéré comme le résultat d'une superposition de deux champs:

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1} &= -I \frac{\omega}{c} \frac{\cos(\omega t - R_b)}{R_b}; \\ E_{r_1} &= I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \frac{z - \frac{n\pi}{2}}{R_b} \cos(\omega t - R_b); \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{z_2} &= -I \frac{\omega}{c} \frac{\cos(\omega t - R_n)}{R_n}; \\ E_{r_2} &= I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \frac{z + \frac{n\pi}{2}}{R_n} \cos(\omega t - R_n). \end{aligned} \right\} \quad (16c)$$

Prises séparément, les phases des composantes de chacun des champs (16b) et (16c) ou bien coïncident ou bien diffèrent de la quantité  $\pi$ ; les composantes  $E_{z_1}$ ,  $E_{r_1}$  et  $E_{z_2}$ ,  $E_{r_2}$  peuvent donc être représentées par le même vecteur polarisé linéairement. Alors

$$E_u = \sqrt{E_{z_1}^2 + E_{r_1}^2} = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cos(\omega t - R_b), \quad (17)$$

$$E_v = \sqrt{E_{z_2}^2 + E_{r_2}^2} = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cos(\omega t - R_n). \quad (17a)$$

Ces expressions du champ magnétique, excessivement simples au point de vue mathématique, sont rapportées à un système de coordonnées obliques. Déterminons la direction des nouveaux axes de coordonnées et l'angle qu'ils font. Dénotons par  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  les angles compris entre l'antenne et les axes  $uv$  de coordonnées, et par  $\vartheta_b$  et  $\vartheta_n$  — ceux qui sont compris entre  $R_b$ , resp.  $R_n$ , et l'antenne.

En divisant les égalités (16b) et (16c) membre à membre, on obtient;

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_{r_1}}{E_{z_1}} &= -\frac{Z - \frac{n\pi}{2}}{r} = \operatorname{tg} \vartheta_1, \\ \frac{E_{r_2}}{E_{z_2}} &= -\frac{Z + \frac{n\pi}{2}}{r} = \operatorname{tg} \vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

D'autre part, la figure 2 montre que:

$$\frac{-z - \frac{n\pi}{2}}{r} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_b} \quad (17c)$$

$$\frac{-z + \frac{n\pi}{2}}{r} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_n}$$

La comparaison des égalités (17b) et (17c) donne:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_b}; \operatorname{tg} \vartheta_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_n} \quad (17d)$$

d'où il s'ensuit que  $R_b \perp u$  et  $R_n \perp v$ .

La fig. 2 montre que l'angle  $uOv = \psi$  entre les coordonnées est égale à l'angle visuel, sous lequel les deux extrémités de l'antenne émettrice se présentent du point d'observation.\*

On sait que le champ de l'antenne envisagée peut être représenté sous la forme de la formule approximée:

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = \\ &= \frac{2I}{R_0} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2} \cos \vartheta_0\right)}{\sin \vartheta_0} \cos \omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right), \quad (18) \end{aligned}$$

Fig. 2. Orientations des axes de coordonnées en termes du champ d'une antenne «demi-onde».

où  $E_\vartheta$  et  $H_\varphi$  sont les composantes sphériques du champ;  $R_0$  — le rayon vecteur qui joint le milieu de l'antenne au point d'observation;  $\vartheta_0$  — l'angle compris entre  $R_0$  et la verticale. Il serait aisé de démontrer que, dans le cas limite, quand le point d'observation se trouve à une distance grande par rapport à la longueur d'onde, les expressions (14), (17) et (17a) amènent à (18).

\* Il est donc aisé de voir que le champ électro-magnétique de l'antenne demi-onde peut être écrit sous la forme:

$$E_u = H_u = \frac{I}{r'} \cos \omega\left(t - \frac{R'_b}{c}\right), \quad E_v = H_v = \frac{I}{r'} \cos \omega\left(t - \frac{R'_n}{c}\right).$$

Ecrivons (14) sous la forme:

$$H = 2I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cos \frac{R_n - R_b}{2} \cdot \cos \left( \omega t - \frac{R_n + R_b}{2} \right). \quad (18a)$$

Lorsque  $R \gg \lambda = 2\pi$ , on a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_n - R_b}{2} &= \frac{\pi \cdot n}{2} \cos \vartheta_0, \\ \frac{R_n + R_b}{2} &= R_0, \\ t &= R_0 \sin \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Portant (18b) dans (18a) et ramenant (18a) à l'échelle originelle des longueurs, on obtient l'expression (18) exacte. Comme dans la zone d'onde  $\psi$  est pratiquement nul, pour déterminer  $E_\vartheta = E$ , il faut ajouter ensemble les expressions (17) et (17a); alors

$$E_{\vartheta R \gg \lambda} = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} [\cos(\omega t - R_n) + \cos(\omega t - R_b)]. \quad (18c)$$

L'expression (18c) est identique à celle pour  $H$  (voir (14) et par conséquent amène à l'expression (18), ce qu'il fallait démontrer.

### § 5. Les relations de phase du champ électromagnétique

En examinant l'expression du champ sous la forme (18a), on voit immédiatement que l'onde magnétique en question est ellipsoïdale, et que les foyers du front ellipsoïdal de l'onde se trouvent aux deux extrémités de l'antenne émettrice. L'expression de la phase s'écrit:

$$\varphi_{\text{magn.}} = \frac{R_n + R_b}{2}, \quad (19)$$

ou bien, dans l'échelle originelle:

$$\varphi_{\text{magn.}} = \frac{R_n + R_b}{2} \cdot \frac{\omega}{c}. \quad (19a)$$

Les formules (17) et (17a) présentent des expressions mathématiques précises du champ électrique, mais comme elles sont rapportées à des coordonnées obliques, la loi des phases n'en ressort pas bien clairement et, en plus, elles ne donnent pas les relations de phase entre le champ électrique et le champ magnétique.

Nous allons donc modifier les formules (17) et (17a) pour éviter ces inconvénients.

Rapportons le champ électrique à un système rectiligne de coordonnées avec l'origine dans un point arbitraire du champ et les axes dirigés suivant la tangente  $\vartheta$  et la normale  $\varrho$  (fig. 2) à l'ellipse méridienne, dont les deux foyers  $F$  et  $F_1$  se trouvent aux extrémités de l'antenne.

Comme on le sait, les angles  $\vartheta MF_2$  et  $-\vartheta MF_1$  compris entre la tangente à l'ellipse dans le point  $M$  et les rayons vecteurs qui joignent les deux foyers

au point  $M$  sont égaux. Il est donc aisé de voir que les nouveaux axes  $O\theta$  et  $O\varrho$  suivent les directions des bissectrices des angles  $uMv$  et  $F_1MF_2$ . En projetant les composantes du champ électrique (17) et (17a) sur les nouveaux axes, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} [\cos(\omega t - R_n) + \cos(\omega t - R_b)] \cos \frac{\psi}{2} = H \cos \frac{\psi}{2}, \\ E_\varrho &= I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left[ \cos(\omega t - R_n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t - R_b) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ou:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= 2I \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{R_n - R_b}{2} \cos\left(\omega t - \frac{R_n + R_b}{2}\right), \\ E_\varrho &= -2I \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{R_n - R_b}{2} \sin\left(\omega t - \frac{R_n + R_b}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

En examinant le triangle  $F_1OF_2$ , on a

$$\cos \psi = \frac{R_b^2 + R_n^2 - \pi^2 n^2}{2R_b R_n},$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\psi}{2} &= \sqrt{\frac{(R_b + R_n)^2 - \pi^2 n^2}{4R_b R_n}}, \\ \sin \frac{\psi}{2} &= \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 - (R_n - R_b)^2}{4R_b R_n}}. \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

On peut conclure de (18a), (20) et (20a) que:

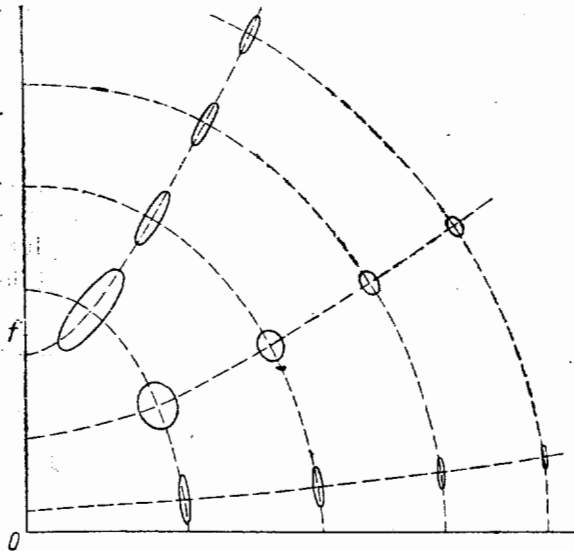


Fig. 3. Rotation du vecteur électrique au voisinage d'une antenne «demi-onde».

1. Dans un point quelconque, la phase de la composante  $E_\theta$  coïncide avec la phase de  $H$ , tandis que  $E_\varrho$  retarde par rapport à  $E_\theta$  et à  $H$  de  $90^\circ$ .

2. L'ensemble du champ électromagnétique peut être caractérisé comme un champ d'ondes ellipsoïdales, où les surfaces des phases égales forment un système d'ellipses confocales, avec les deux foyers aux extrémités de l'antenne.

3. Le champ électrique représente le champ d'un vecteur de révolution, dont

l'extrémité décrit une ellipse: les deux axes fondamentaux suivent les directions de  $O\theta$  et de  $O\varrho$ , étant l'un tangent et l'autre — normal au front de l'onde.

4. A mesure que la distance de l'antenne augmente, la valeur de  $E_\varrho$  diminue rapidement, tandis que le front ellipsoïdal tend vers une sphère. La fig. 3 montre l'aspect du vecteur de révolution dans le cas où l'antenne émet son onde fondamentale.

Rayons dans le plan équatorial

L'application des formules (18a), (20) et (20a) au cas particulier d'un plan équatorial donne:

$$R_H = R_b = R_o = \sqrt{r_o^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}}; \quad \cos \frac{\psi}{2} = \frac{r_o}{R_o};$$

$$H = 2I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r_o} \cos \left( \omega t - \sqrt{r_o^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}} \right);$$

$$E_\vartheta = 2I \frac{\omega}{c} \frac{\cos \left( \omega t - \sqrt{r_o^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}} \right)}{\sqrt{r_o^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}}};$$

$$E_\varrho = 0.$$

Il s'ensuit que:

1. La loi de proportionnalité inverse de l'intensité du champ magnétique à la première puissance de la distance mesurée perpendiculairement à l'antenne est valable à distance et au voisinage immédiat, jusqu'à la surface même, de l'antenne.

2. La répartition des phases du champ électrique et du champ magnétique au voisinage de l'antenne (à des distances comparables à la longueur d'onde) le long des rayons dans un plan équatorial suit la loi hyperbolique:

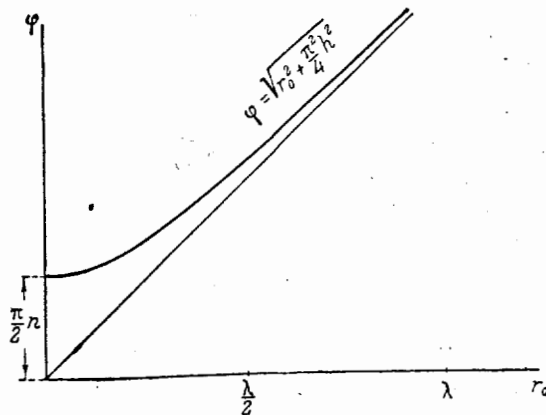


Fig. 4. Répartition de la phase des vecteurs électrique et magnétique dans un plan équatorial au voisinage d'une antenne «demi-onde».

$$\varphi = \sqrt{r_o^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}}.$$

La conception d'une répartition linéaire de phase n'est justifiée qu'à une certaine distance de l'antenne, là où la courbe hyperbolique de phase devient pratiquement une droite (voir fig. 4). Un calcul simple montre que, à une distance égale à la longueur d'onde ( $r_o = \lambda$ ), la phase calculée d'après la

loi linéaire diffère de 3% de sa valeur réelle: pour  $r_0 = \lambda/2$ , cette différence constitue déjà 10% et dans le cas limite, pour  $r_0 = 0$ , la phase réelle devient  $\frac{\pi}{2}$ , tandis que le calcul d'après la loi linéaire donne 0.

3. A petite distance la vitesse de propagation de phase le long du rayon équatorial est supérieure à la vitesse de la lumière et tend asymptotiquement vers l'infini à mesure que l'on se rapproche de l'antenne.

En effet, la phase instantanée est

$$\Omega = \omega t - \sqrt{r_0^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}},$$

donc la vitesse de phase sera déterminée de la condition suivante:

$$d\Omega = \omega dt - \frac{r_0 dr_0}{\sqrt{r_0^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}}};$$

d'où:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{\omega}{r_0} \cdot \sqrt{r_0^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4}}$$

ou bien, dans l'échelle originelle:

$$v = \frac{dr_0'}{dt} = C \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda u^2}{16 r_0'^2}}.$$

La relation entre  $v$  et  $r_0'$  est donnée dans la fig. 5.

4. Dans la zone proche et dans la zone d'onde, les phases des vecteurs du champ électrique et du champ magnétique sont égales; on sait que pour un dipôle elles ne coïncident que dans la zone d'onde, tandis que dans la zone proche, pour le cas limite

Fig. 5. Vitesse de phase de l'onde électromagnétique dans un plan équatorial au voisinage d'une antenne «demi-onde».

$r_0 = 0$ , elle diffèrent de la quantité  $\pi/2$ . \*

Champ dans les points zénithaux.

Dans le cas d'un rayon zénithal, la composante radiale, la seule qui existe, peut être obtenue des formules générales:

$$E_r = I \frac{\omega}{c} \frac{n\pi}{z^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} \cdot \sin(\omega t - z).$$

Ici  $z$  est la distance du milieu de l'antenne, étant donné  $z \gg \frac{n\pi}{2}$ .

Cette formule n'est valable que dans ceux des points zénithaux qui sont situés en dehors de l'antenne.

\* Voir Wilmothte and J. S. Petrie, J. E. E., 1928, p. 949.



**Lignes de force.** Ecrivons l'équation différentielle des lignes de force sous la forme suivante:

$$E_r \cdot \partial z - E_z \cdot \partial r = 0.$$

Portant dans cette formule l'expression du champ électrique (16a), on obtient

$$I \frac{\omega}{c} \left\{ \frac{\cos(\omega t - R_b)}{R_b} \left[ \left( z - \frac{n\pi}{2} \right) \partial z + r \cdot \partial r \right] + \frac{\cos(\omega t - R_n)}{R_n} \left[ \left( z + \frac{n\pi}{2} \right) \partial z - r \partial r \right] \right\} = 0,$$

d'où

$$\cos(\omega t - R_b) dR_b + \cos(\omega t - R_n) dR_n = 0.$$

Dans la dernière équation les variables sont séparées.

Après l'intégration on obtient:

$$\sin(\omega t - R_b) + \sin(\omega t - R_n) = C, \quad (21)$$

qui représente l'équation bien connue des lignes de force que F. H a c k, le premier, a déduit en se servant des travaux d'A b r a h a m. A l'aide de cette formule H a c k traça le tableau des lignes de force d'une antenne demi-onde.\*

### § 6. Répartition de l'énergie émise le long de l'antenne

Ordinairement on calcule l'énergie électro-magnétique émise par une antenne en déterminant le flux de Poynting à travers une surface sphérique éloignée, dans le centre de laquelle se trouve l'émetteur. De même on obtient la répartition de l'intensité du rayonnement à des angles différents par rapport à l'antenne.

Par contre, nous allons calculer l'énergie émise par une autre méthode en formant les expressions, vers lesquelles tend le champ à la surface du conducteur émetteur (c'est-à-dire, nous allons examiner l'énergie émise directement par l'antenne). Ainsi nous serons en état de calculer la répartition le long de l'antenne de l'énergie moyenne du rayonnement. Nous allons nous servir du vecteur de Poynting:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vartheta \cdot E_\varrho H_\varphi - \varrho E_\varphi H_\varrho].$$

Ici  $\vartheta$  et  $\varrho$  sont des vecteurs de longueur 1 dans la direction des ellipses, resp. des hyperboles, confocales, les membres entre parenthèses représentent les composantes du vecteur Poynting dans ces deux directions. Le second de ces membres donne 0 comme moyenne pendant la durée d'une période.

Le flux moyen de l'énergie émise par un élément  $dz$  dans le point  $z$  de l'antenne dans la direction  $\varrho$  normale à l'antenne (déterminé par le premier

\* Voir F. H a c k, «Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines linearen Oszillators», Ann. d. Phys., 1904.

membre entre parenthèses de l'expression ci-dessus) dans notre cas, étant donné  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  et  $H_\phi$ , sera exprimé comme suit:

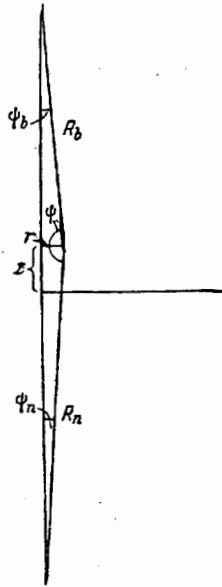


Fig. 6. Répartition de la densité de l'énergie moyenne du rayonnement le long de l'antenne.

$$dP_{\text{moyen.}} = \frac{c \cdot I^2}{\pi} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{r} \cos^2 \frac{R_n - R_b}{2} \times \right. \\ \left. \times \cos^2_{\text{moyen.}} \left( \omega t - \frac{R_n + R_b}{2} \right) 2\pi dz \right|_{r \rightarrow 0} \quad (22)$$

Si l'on trouve la vraie valeur de l'expression on obtient:

$$\psi_b = \frac{r}{\frac{\pi n}{2} - z}; \quad \psi_n = \frac{r}{\frac{\pi n}{2} + z} \quad (22a)$$

la signification de  $\psi_b$  et de  $\psi_n$  ressort de la fig. 6.

$$\psi_b = \frac{r}{\frac{\pi n}{2} - z}; \quad \psi_n = \frac{r}{\frac{\pi n}{2} + z} \quad (22b)$$

Portant (22b) dans (22a), il vient:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{r} = \frac{\pi n}{2} \frac{1}{\frac{\pi^2 n^2}{4} - z^2} \quad (22c)$$

à l'aide de (22c) et (22) il est aisé de déterminer l'énergie totale moyenne émise:

$$P_{e\text{moyen.}} = c I^2 \pi \cdot n \int_0^{\frac{\pi \cdot n}{2}} \frac{\cos^2 z \cdot dz}{\frac{\pi^2 n^2}{4} - z^2} \quad (22d)$$

Le coefficient à côté de  $dz$  sous le signe  $\int$  dans (22d)

$$W_{\text{moyen.}} = c I^2 \frac{\pi n \cos^2 z}{\frac{\pi n^2}{4} - z^2} \quad (22e)$$

dépend de la fonction exprimant la répartition de l'intensité de l'énergie émise le long de l'antenne. Le diagramme correspondant est donné dans la fig. 7. \*

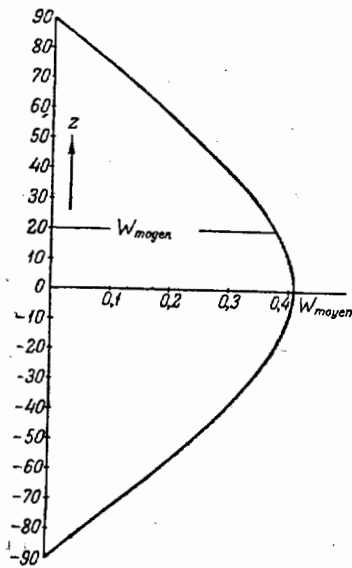


Fig. 7.

\* Il est intéressant de noter que, quelques trente ans de cela, Macdonald essayait de démontrer par la méthode mathématique que l'énergie est émise surtout par les extrémités de l'antenne, ce qui est entièrement faux. Voir Macdonald, Electric Waves, 1902.

Si dans (22e) on remplace  $z$  par son expression à l'aide de l'angle polaire  $\varphi$  compris entre la droite horizontale et l'asymptote de l'hyperbole  $\frac{R_n - R_b}{2} = z$ , tirée de la relation

$$z = \frac{\pi n}{2} \cos \varphi, \quad (22f)$$

on obtient la formule bien connue déterminant les diagrammes polaires du rayonnement pour une harmonique impaire quelconque. Il s'ensuit que l'expression de l'énergie totale du rayonnement (22d) est identique à celle que l'on obtient pour la même antenne, en ajoutant ensemble les flux des vecteurs de Poynting dans une zone éloignée: cette coïncidence justifie le choix de la méthode présente pour le calcul de l'énergie.

### § 7. Equation du champ des harmoniques paires

A l'aide des intégrales indéfinies (12a) et (13) du § 3 formons les expressions du champ électromagnétique engendré par les oscillations harmoniques paires de l'antenne (fig. 8).

Le point de milieu de l'antenne contient alors un noeud du courant. Pour que l'origine du système de coordonnées coïncide avec le milieu de l'antenne, nous allons modifier (12) et (13), en déplaçant tout le système à une distance de  $\frac{\pi n}{2}$  plus bas et nous poserons

$$\tau = \tau_1 + \frac{\pi}{2}; \quad z = z_1 + \frac{\pi}{2};$$

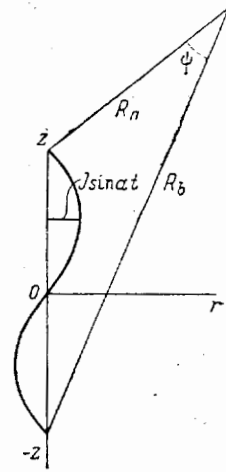


Fig. 8.

nous prendrons ensuite les intégrales définies des expressions ainsi obtenues entre les limites  $-\frac{n\pi}{2}$  et  $+\frac{n\pi}{2}$  où  $n$  est un nombre entier et pair.

Nous obtiendrons alors le champ des harmoniques paires en coordonnées cylindriques:

$$H' = 2I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \sin \frac{R_n - R_b}{2} \sin \left( \omega t - \frac{R_n + R_b}{2} \right), \quad (23)$$

$$E_r = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left[ \frac{z - \frac{n\pi}{2}}{R_b} \cdot \cos(\omega t - R_b) - \frac{z + \frac{n\pi}{2}}{R_n} \cdot \cos(\omega t - R_n) \right], \quad (23a)$$

$$E_z = -I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \left[ \frac{\cos(\omega t - R_b)}{R_b} - \frac{\cos(\omega t - R_n)}{R_n} \right]. \quad (23b)$$

Si l'on rapporte le champ électrique au système de coordonnées obliques  $uv$  mentionné plus haut, on obtient:

$$E_u = I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cos(\omega t - R_b), \quad (22c)$$

$$E_v = -I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cos(\omega t - R_n). \quad (22d)$$

Il est aisé de voir que, ainsi exprimées, les équations du champ ne diffèrent du champ pour les harmoniques impaires que par le signe de la composante  $E_v$ .

En projetant  $E_u$  et  $E_v$  sur les axes  $\vartheta_\rho$  qui suivent les directions des ellipses et des hyperboles confocales ayant leurs foyers aux deux extrémités de l'antenne, on obtient:

$$E'_\vartheta = 2I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{R_n - R_b}{2} \cdot \sin \left( \omega t - \frac{R_n + R_b}{2} \right), \quad (24)$$

$$E'_\rho = -2I \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( \frac{R_n - R_b}{2} \right) \cdot \cos \left( \omega t - \frac{R_n - R_b}{2} \right). \quad (24a)$$

On a conservé dans tout ce paragraphe les mêmes dénominations que plus haut.

La comparaison de (24) et (24a) avec (23) montre que, de même que pour les harmoniques impaires, les phases des vecteurs  $E'_\vartheta$  et  $H'$  coïncident partout, et que la phase de  $E'_\vartheta$  diffère de celles de  $E'_\rho$  et de  $H'$  de  $90^\circ$ .

Au voisinage de l'antenne le champ est ellipsoïdal au point de vue du front et hyperbolique, en ce qui concerne la direction des rayons.

Il est intéressant de comparer les résultats de cette note en ce qui concerne l'antenne demi-onde avec le travail bien connu de M. A b r a h a m sur les oscillations électriques dans un conducteur rectiligne. Cette comparaison a été faite par l'auteur dans un article publié sous le même titre dans le «Journ. de Ph. Techn.». Il y est démontré que les expressions des composantes du champ  $H$ ,  $H_\vartheta$ ,  $E_\varphi$  et les expressions correspondantes  $N$ ,  $X$ ,  $Y$  pour l'ellipsoïde de révolution d'A b r a h a m sont identiques, si l'on idéalise cet ellipsoïde en un segment géométrique de droite.

Le problème considéré dans ce travail s'est posé par suite du besoin d'étudier en détail la structure en phase du champ électromagnétique à petite distance de l'antenne, ce qui est essentiel dans une série de problèmes pratiques dans l'étude de la propagation des ondes herziennes auprès de la surface terrestre.

Ce travail a été effectué sous la direction du prof. P a p a l e x i, auquel l'auteur tient à exprimer ses remerciements sincères.

Moscou.

Institut Physique de l'Académie  
des Sciences de l'URSS.