Zur Elektronentheorie.

II. Grundlagen für eine allgemeine Dynamik des Elektrons.

Von

A. Sommerfeld in Aachen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904 durch W. Voigt.

§ 10. *Allgemeine Bemerkungen zur Berechnung der mechanischen Kraft.*

Die in meiner ersten Note[1]) gegebene Darstellung des Feldes eines beliebig bewegten Elektrons ist so einfach, daß es von hieraus möglich wird, die auf ein Elektron wirkende resultirende Kraft und Drehkraft bei beliebiger Bewegung zu berechnen und somit die Dynamik des Elektrons in allgemeinster Weise aufzubauen.

Bekanntlich hängt die elektrische und magnetische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ durch die Gleichungen zusammen:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Gehen wir von einem festen zu einem mitbewegten Coordinatensystem über, und bezeichnen wir die Differentiation nach der Zeit in einem mitbewegten Aufpunkte durch $\partial/\partial t$, so haben wir zu ersetzen (vgl. hierzu meine erste Note pag. 110 oben)

$$\dot{\mathfrak{A}} \text{ durch } \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} - (\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A}.$$

Es wird dann

$$(1)\qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

1) Göttinger Nachrichten 1904, Heft 2 pag. 99.

Nach einem Grundprincip der Lorentz'schen Elektronentheorie berechnet sich nun die mechanische Kraft $\mathfrak{f}$ pro Ladungseinheit aus der elektrischen Feldstärke vermehrt um das durch c geteilte Vektorprodukt aus magnetischer Feldstärke und Geschwindigkeit der Ladung. Dabei kommt für uns als diejenige Ladung, auf welche die Kraft $\mathfrak{f}$ wirkt, nur die eigene Ladung des Elektrons in Betracht, deren Geschwindigkeit in der früheren Bezeichnung

$$\mathfrak{v} + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$$

ist, unter $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl vom Mittelpunkte des Elektrons nach dem Sitz der Ladung, unter $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ (ausführlicher geschrieben $\mathfrak{v}_t$ und $\mathfrak{w}_t$) Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des Elektrons zur Zeit t verstanden. Es wird daher

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\,\mathfrak{H}]$$

$$= -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} + [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] = \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}).$$

In dem Ausdrucke von $\mathfrak{f}$ tritt daher der Gradient der Größe $\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A})$ auf, welche teils als Convektionspotential (Searle), teils als elektrokinetisches Potential (Schwarzschild) bezeichnet wird. Man hat nämlich

$$42)\qquad \mathfrak{f} = -\operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Von der Kraft $\mathfrak{f}$ pro Ladungseinheit gehen wir zu der resultirenden Kraft $\mathfrak{F}$ für die Gesamtladung ε des Elektrons über. Bei gleichförmiger Volumladung und einem Radius a ist die Dichte

$$\varrho = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3},$$

und daher, wenn dS die Integration über das Volumen des Elektrons bedeutet:

$$43)\qquad \mathfrak{F} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\int \mathfrak{f}\,dS.$$

Bei gleichförmiger Oberflächenladung andrerseits wird die Dichte der Flächenbelegung

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi a^2}.$$

Es ist indessen wichtig zu beachten, daß die Oberflächenschicht ähnlich wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie eine singuläre Fläche für die Ausdrücke von φ und $\mathfrak{A}$ wird, in der die Differentialquotienten von φ und $\mathfrak{A}$ und daher auch die Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{f}$ einen Sprung erleiden können. Wir vermeiden alle hieraus entstehenden Schwierigkeiten, wenn wir die resultirende Kraft zunächst für eine Kugelfläche vom Radius $r \gtrless a$ berechnen, auf der wir uns dieselbe Ladung ε wie auf der Oberfläche des Elektrons ausgebreitet denken, und wenn wir erst nachträglich zur Grenze $r = a$ übergehen. Mit Rücksicht hierauf wird der Wert von $\mathfrak{F}$ bei Oberflächenladung folgendermaßen zu berechnen sein:

$$43')\qquad \mathfrak{F} = \lim_{r=a}\frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int \mathfrak{f}\,d\sigma,$$

wo $d\sigma$ die Integration über die Kugelfläche vom Radius r andeutet, während $\mathfrak{f}$ mit denjenigen Werten von φ und $\mathfrak{A}$ zu berechnen ist, die von einer geladenen Kugelfläche vom Radius a ausgehen. Ueberzeugender und näher liegend als das soeben vorgeschlagene Limes-Verfahren würde bei Oberflächenladung vielleicht das folgende sein: Wir ersetzen die unendlich dünne geladene Schicht vom Radius a durch eine endliche Kugelschale vom inneren und äußeren Radius $a-\delta$ und $a+\delta$. Verteilen wir abermals die Ladung ε gleichförmig auf diese Kugelschale, so wird die Dichte

$$\varrho = \frac{3\varepsilon}{4\pi\{(a+\delta)^3-(a-\delta)^3\}} = \frac{\varepsilon}{8\pi(a^2\delta+\cdots)},$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder höhere Potenzen von δ enthalten. Sodann bilden wir mit den Werten von φ und $\mathfrak{A}$, die der unendlich dünnen Ladungsschicht entsprechen, das Raumintegral von $\varrho\mathfrak{f}$ über diese endliche Kugelschale und erhalten schließlich, indem wir zur Grenze $\delta = 0$ übergehen:

$$43'')\qquad \mathfrak{F} = \lim_{\delta=0}\frac{\varepsilon}{8\pi(a^2\delta+\cdots)}\int \mathfrak{f}\,dS.$$

Ich habe mich überzeugt, daß der so berechnete Wert von $\mathfrak{F}$ vollständig mit dem nach (43') bestimmten übereinstimmt. Da seine Ableitung aber wesentlich umständlicher ist, so ziehe ich für die Darstellung das Limes-Verfahren (43′) vor.

In ähnlicher Weise ergiebt sich aus $\mathfrak{f}$ eine resultirende Drehkraft $\mathfrak{N}$. Wir definiren diese bei Volum- oder Oberflächenladung durch die Formeln:

$$44)\qquad \mathfrak{N} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\int[\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,dS,$$

$$44')\qquad \mathfrak{N} = \lim_{r=a} \frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int[\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,d\sigma.$$

Die Ausdrücke (43) und (44) genügen, um bei einer beliebig vorgelegten erzwungenen Bewegung des Elektrons die von seinem eigenen Felde hervorgebrachten Kraftwirkungen zu bestimmen. Es entsteht nun aber weiter die Frage nach den freien oder natürlichen Bewegungen des Elektrons, sei es unter dem Einfluß gegebener äußerer Kräfte, sei es ohne diesen Einfluß. Indem wir für's Erste von dem Vorhandensein äußerer Kräfte absehen, fragen wir insbesondere nach den kräftefreien Bewegungen des Elektrons.

Nach den Grundsätzen der gewöhnlichen Mechanik würde man, wenn m die träge Masse, Θ das (bei einer Kugel für alle Axen gleiche) Trägheitsmoment des Elektrons bedeutet, die kräftefreie Bewegung aus den Gleichungen zu bestimmen haben:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F},\quad \Theta\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{N}.$$

Die Elektronentheorie wagt es aber, den überkommenen Massenbegriff zu analysiren und auf die elektrischen Begriffe zurückzuführen, wozu die Beobachtungen von Kaufmann über Bequerelstrahlen und ihre theoretische Deutung durch Abraham die Unterlage liefern. Die Elektronentheorie leugnet daher das Vorhandensein wirklicher Maße oder wirklichen Trägheitsmomentes und ersetzt die vorstehenden Gleichungen durch die folgenden:

$$45)\qquad \mathfrak{F} = 0,\quad \mathfrak{N} = 0.$$

Die Bewegung des Elektrons erfolgt so, daß sich in jedem Augenblicke die an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{f}$ das Gleichgewicht halten, sowohl in Bezug auf Verschiebung wie auf Drehung.

Greifen außer den Kräften $\mathfrak{f}$ des eigenen Feldes noch äußere Kräfte $\mathfrak{f}_a$ an dem Elektron an, herrührend z. B. von einem von der Bewegung des Elektrons unabhängigen elektromagnetischen Felde oder von der Bewegung anderer Elektronen, so wird man auch diese am Elektron zu einer resultirenden Kraft und Drehkraft $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{N}_a$ zusammensetzen. Derselbe Gedankengang wie oben liefert dann statt (45) die Gleichungen:

$$45')\qquad \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_a = 0,\quad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}_a = 0.$$

Die Ausdrücke von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$, die zur Bestimmung der Bewegung dienen sollen, enthalten die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$, und zwar nicht nur die Werte dieser Geschwindigkeiten zur Zeit t, sondern auch (vermöge unserer Integraldarstellung von φ und $\mathfrak{A}$) diejenigen für alle früheren Zeitpunkte $t-\tau$, soweit dieselben nach den Ausführungen des § 7 in Betracht kommen. Die Gleichungen 45) und 45′) sind daher nicht Differentialgleichungen im gewöhnlichen Sinne, sondern Funktionalgleichungen (oder nach der Bezeichnungsweise von Hilbert Integralgleichungen). Wollen wir sie als Differentialgleichungen schreiben, was formal leicht geschehen kann, so finden wir Differentialgleichungen von unendlich hoher Ordnung.

Schon aus diesem Umstande erhellt die außerordentlich viel größere Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungsformen der Elektronenmechanik im Gegensatz zu derjenigen der gewöhnlichen Mechanik. Als „Anfangsbedingungen" kommen hier nicht nur Lage und Geschwindigkeit, sondern der ganze vorangehende Bewegungszustand während eines Zeitintervalles in Betracht, welches zwar im Allgemeinen sehr klein, aber immerhin endlich ist (nämlich von der Größenordnung $2a/|c-v|$ derjenigen Zeit, in welcher ein Lichtstrahl das Elektron in der Bewegungsrichtung überstreicht). Um eine bestimmte Bewegung des Elektrons einzuleiten, genügt es also nicht, seine Lage und Geschwindigkeit vorzugeben, sondern man müßte während des genannten Intervalles das Elektron zwangsweise der einzuleitenden Bewegung entsprechend führen, um sicher zu sein, daß es diese Bewegung selbsttätig weiter verfolgt.

Man versteht daher, daß in der Elektronentheorie beispielsweise die Galilei'sche Trägheitsbewegung keineswegs die einzige kräftefreie Bewegung ist, sondern daß außerdem kräftefreie Schwingungen von mannigfaltigstem Charakter um die Ruhe oder relativ gegen die gleichförmige Bewegung möglich sind. Den Beweis hierfür hat bereits Herglotz[1]) in einer außerordentlich

1) Zur Elektronentheorie, Göttinger Nachr. 1903, Heft 6.

eindringenden Arbeit geliefert, wobei er sich im Allgemeinen auf die kleinen Schwingungen des Elektrons relativ gegen die gleichförmige Rotation beschränkt.

Den deutlichsten Begriff dieser Schwingungsmöglichkeiten liefert § 20 der vorliegenden Note, in dem die kräftefreien Drehbewegungen bei ruhendem Mittelpunkt behandelt werden. Hier wird zunächst das Bewegungsgesetz in Form einer Integralgleichung aufgestellt; von derselben geht man zu einer von Integralzeichen freien Funktionalgleichung oder zu einer Differentialgleichung von unendlich hoher Ordnung über. Die möglichen Perioden der freien Drehschwingungen, welche in unendlicher Anzahl vorhanden sind, bestimmen sich dann durch eine transcendente Gleichung.

Bekanntlich ist die Berechnung der mechanischen Kraft $\mathfrak{F}$ von Poincaré zurückgeführt worden auf das Raumintegral des Strahlungsvektors (des Poynting'schen Energieflusses):

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

welches Raumintegral nach mechanischen Analogien als Bewegungsgröße oder als Impuls des Elektrons bezeichnet werden kann. Von Abraham[1]) systematisch ausgebaut, hat dieser Begriff in den einfachsten Bewegungsfällen (quasistationäre Bewegung) zu wichtigen und eleganten Folgerungen geführt, die wir im Folgenden (§§ 16 und 18) als erste Näherungen wiederfinden werden. Bei allgemeineren Fragen aber halte ich diesen Impulsbegriff nicht für den geeignetsten Ausgangspunkt und zwar aus zwei Gründen:

Einmal ist der Energiefluß $\mathfrak{S}$ (ähnlich wie die Energie selbst) eine quadratische Größe, die sich aus dem Produkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ berechnet. Für eine solche Größe gilt aber nicht, wie für die Feldstärken oder für ihre Potentiale, die Möglichkeit der Superposition verschiedener Zustände; auch hat man für sie direkt keine ähnlich einfachen Differentialgleichungen wie die Maxwell-schen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Denken wir insbesondere an die Resultate unserer ersten Note, so haben wir für φ und $\mathfrak{A}$ bequeme Darstellungen durch ein einfaches Integral nach der Zeit gewonnen, aus denen sich ganz entsprechende Darstellungen für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ ergeben. Dagegen würde auf diesem Wege für $\mathfrak{S}$ und für den Impuls eine Darstellung durch das Produkt zweier Zeitintegrale folgen, mit der analytisch nichts anzufangen wäre. Wir würden also das Einfachere aus dem Complicirteren ableiten, wenn wir die Berechnung der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Impulsbegriff gründen.

1) Principien der Dynamik des Elektrons, Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 105.

Sodann ist zu beachten, daß wir bei der Berechnung des Impulses, indem wir die Integration des Strahlungsvektors auch über die entfernteren Partien des Raumes ausdehnen, einen Ballast mitnehmen, der mit der eigentlichen Frage nichts zu schaffen hat. In Wirklichkeit hängt die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ nur von den Zuständen des Elektrons in einem kurzen, der Zeit t vorhergehenden Intervalle oder unter Umständen in mehreren solchen Intervallen ab. Die während dieses Intervalles von dem Elektron ausgehenden Wirkungen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum fortpflanzen, füllen nur einen beschränkten, dem Elektron benachbarten Raumteil aus. Wenn daher nach der Impulsmethode auch die Zustände in entfernteren Raumteilen zur Berechnung von $\mathfrak{F}$ herangezogen werden, so bedeutet dieses einen Umweg, welcher im Allgemeinen die Durchsichtigkeit der Berechnung beeinträchtigen muß.

Im Uebrigen wird auch nach unserer Methode die Bestimmung von Kraft und Drehmoment in der hier festgehaltenen Allgemeinheit nicht ganz mühelos. Um ein Bild von den naturgemäß auftretenden Schwierigkeiten zu geben, wollen wir etwa die Integration des skalaren Potentials, Gl. 17), über die geladene Oberfläche des Elektrons ins Auge fassen und feststellen, daß je nach dem Werte von τ nur für einen gewissen Teil der Oberfläche $\lambda = 1$, für den Rest $\lambda = 0$ ist, und daß daher die Integration nur über einen je nach dem Werte von τ zu begrenzenden Teil der Oberfläche des Elektrons zu erstrecken ist. Die hier in Betracht kommenden Verhältnisse werden durch die Fig. $2a$ und b geschildert. Ist $v < c$ (untere Figur, Unterlichtgeschwindigket), so überholt die von der früheren Lage P des Elektrons ausgehende Störung die Bewegung des Elektrons; in der Lage O des Elektrons zur Zeit t wird daher im Allgemeinen nur eine gewisse, dem Punkte P abgewandte Kugelkalotte von der dem Zeitpunkte $t-\tau$ entsprechenden Erregung gedeckt, so daß nur für diese Kugelkalotte $\lambda = 1$ ist. Dagegen wird im Falle $v > c$ (obere Figur, Ueberlichtgeschwindigkeit), wo die Bewegung des Elektrons die von der früheren Lage P ausgehende Erregung ihrerseits überholt, nur eine dem Punkte P zugewandte Kugel-

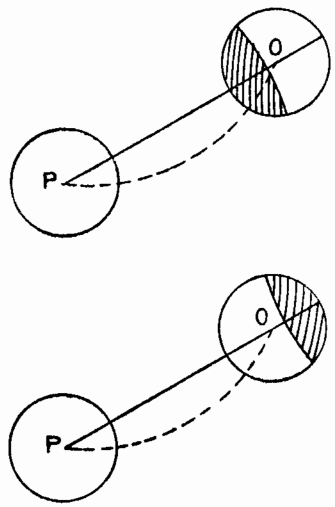

Fig. $2a$, Fig. $2b$.

kalotte von der Störung erreicht, so daß nur für diese Kalotte $\lambda = 1$ ist.

Um die hiernach erforderlichen Fallunterscheidungen zu vermeiden, empfiehlt es sich, für λ, λ', $\varkappa$, $\varkappa'$ nicht die in § 8 berechneten expliciten Ausdrücke, sondern die entsprechenden ursprünglichen Integraldarstellungen zu verstehen, die von selbst die jedesmal in Frage kommenden Werte 0 oder 1 etc. annehmen und die, nach Art eines Dirichlet'schen discontinuirlichen Faktors, die verschiedenen Wertemöglichkeiten in einen einheitlichen analytischen Ausdruck zusammenfassen.

Ferner werden wir unsere Aufgabe vorläufig beschränken. Wir wollen nämlich, wenn wir die von der Translation herrührende Kraft und Drehkraft betrachten, von einer gleichzeitigen Rotation absehen (§§ 11—18) und umgekehrt bei der dynamischen Untersuchung der Rotation die Translation als verschwindend, d. h. den Mittelpunkt des Elektrons als ruhend voraussetzen (§§ 19 und 20). Die Formeln, die ich für den allgemeinen Fall gleichzeitiger Translation und Rotation erhalten habe, sind einstweilen nicht so einfach, daß ich sie hier mitteilen möchte. Im Uebrigen wird der Charakter der Translation sowie der der Rotation in keiner Weise beschränkt; wir verstehen also unter der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine nach Richtung und Größe beliebig wechselnde Lineargeschwindigkeit und unter der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ eine nach Axe und Größe beliebig wechselnde Winkelgeschwindigkeit.

Auch die Möglichkeit einer Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit wird in Erwägung gezogen (§ 13). Dabei zeigt sich das zunächst etwas überraschende Resultat: Ueberlichtgeschwindigkeit bei Volumladung ist möglich, d. h. sie kann durch einen endlichen Kraft- und Energieaufwand unterhalten werden; Ueberlichtgeschwindigkeit bei Oberflächenladung ist unmöglich, d. h. die zu ihrer Unterhaltung erforderliche Kraft ist — gleichviel ob die Bewegung gerade oder krummlinig, beschleunigt oder constant gedacht wird — unendlich groß. Bei Volumladung ist auch der Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit selbst mit keinem Unendlichwerden der Kraft verbunden; bei Oberflächenladung zeigt sich dies Unendlichwerden unmittelbar nach dem Passiren der Lichtgeschwindigkeit. Die soeben geschilderten Unterschiede zwischen Volumladung und Oberflächenladung werden durch die folgende Bemerkung verständlich: die Gefahr einer Ausartung der Kraft des Eigenfeldes wächst mit wachsender Concentration der Ladung. Gehen wir zu der äußersten Concentration, nämlich zur Punktladung über, so wird eine unendlich große Kraft schon bei Unterlichtgeschwindigkeit zu jeder Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung erfordert; (man vgl. die in § 11 abzuleitenden Werte von $\mathfrak{F}$, welche sämtlich mit $a = 0$ unendlich werden). Denken wir uns andrerseits die ursprünglich über das Volumen verteilte Ladung auf die Oberfläche dieses Volumens concentrirt, so wird die Kraft abermals unendlich, aber erst bei Ueberlichtgeschwindigkeit.

Freilich liegt es nahe, auf Grund dieser Erfahrungen der Oberflächenladung überhaupt ihre Existenzberechtigung abzusprechen, ebenso wie man schon in den Anfängen der Elektronentheorie gezwungen war, die punktförmigen Elektronen aufzugeben, oder wie man andrerseits in der Molekularphysik gezwungen war, von der Annahme punktförmiger Atome abzusehen. In der That spricht das unterschiedliche Verhalten von Oberflächen- und Volumladung in der principiellen Frage der Ueberlichtgeschwindigkeit entschieden gegen die Gleichberechtigung beider Annahmen und zu Gunsten der alleinigen Zulassung von Volumladung. Nur der Umstand, daß die Formeln für Oberflächenladung in mancher Hinsicht einfacher werden und zur ersten Orientirung geeigneter sind, veranlaßt uns, im Folgenden beide Annahmen weiter durchzuführen.

§ 11. *Der Translations-Bestandteil der mechanischen Kraft.*

Die Berechnung der resultirenden mechanischen Kraft $\mathfrak{F}$ wird ziemlich einfach, wenn wir reine Translation, d. h. $\mathfrak{w} = 0$ voraussetzen. Mit $\mathfrak{w} = 0$ wird $\mathfrak{A}_2 = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und es verschwindet in der Gl. 42) für $\mathfrak{f}$ das letzte Glied.

a. Oberflächenladung. Nach Gl. 16) und 21) haben wir in diesem Falle bei Einführung von zwei neuen Größen χ und u:

$$46)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \chi\, d\tau, \quad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\chi\, d\tau, \\ \chi &= \int_0^\infty u \sin as \sin cs\tau \frac{ds}{s}, \quad u = \frac{\sin Rs}{R}. \end{aligned}\right.$$

Wir beachten, daß in der hier definirten Funktion u die Coordinaten $x\,y\,z$ nur in der Verbindung $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ vorkommen. Wir können daher die Operation „grad" in der Weise an χ ausführen, daß wir statt nach $x\,y\,z$ nach $\xi\,\eta\,\zeta$, d. h. statt nach den Componenten des Vektors $\mathfrak{r}$ nach denen von $\mathfrak{T}$ differenziren, was wir durch den Index $\mathfrak{T}$ andeuten wollen.

Nach Gl. 42) haben wir nun:

$$47)\quad -\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon}\,\mathfrak{f} = \int_0^\infty \{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\chi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\chi\,d\tau.$$

Bezeichnen wir ferner den über die Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwert der skalaren Funktion χ mit:

$$\bar\chi = \frac{1}{4\pi r^2}\int \chi\,d\sigma,$$

so ergiebt sich nach Gl. 43'):

$$48)\quad -\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F} = \lim_{r=a}\left\{\int_0^\infty \{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\bar\chi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\bar\chi\,d\tau\right\}.$$

Es kommt also lediglich darauf an, das Integral $\bar\chi$ auszuwerten. Wäre χ eine Potentialfunktion, d. h. eine Lösung der Gleichung $\Delta\chi = 0$, so hätten wir nach einem bekannten Gaussischen Satz unmittelbar $\bar\chi = \chi_0$, d. h. gleich dem Werte von χ im Mittelpunkte 0 unserer Kugel. Um eine ähnliche Beziehung für den vorliegenden Fall abzuleiten, beachte man, daß die in χ vorkommende Größe

$$u = \frac{\sin sR}{R}$$

eine Lösung der Gl. $\Delta u + s^2 u = 0$ ist. Für alle stetigen Lösungen dieser Gl. leitet man nun aus dem Green'schen Satze, und zwar genau auf demselben Wege[1]), auf dem man den Gaussischen Mittelwertsatz findet, die folgenden beiden Gleichungen ab:

$$49)\quad \begin{cases} 4\pi u_0 = -\dfrac{d}{dr}\dfrac{\cos sr}{r}\displaystyle\int u\,d\sigma + \dfrac{\cos sr}{r}\displaystyle\int \dfrac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma, \\[2ex] 0 = -\dfrac{d}{dr}\dfrac{\sin sr}{r}\displaystyle\int u\,d\sigma + \dfrac{\sin sr}{r}\displaystyle\int \dfrac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma, \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. Pockels, Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, pg. 208 und 209, Gl. 61) und 63). Man erhält die beiden Gl., indem man den Green'schen Satz $\int (u\Delta v - v\Delta u)\,dS = \int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$ einmal auf die Funktionen u und $v = \frac{\cos s\varrho}{\varrho}$, das andere Mal auf die Funktionen u und $v = \frac{\sin s\varrho}{\varrho}$ anwendet. Im ersten Falle ist der Nullpunkt $\varrho = 0$ durch eine verschwindend kleine Kugel von der Integration auszuschließen. Das Raumintegral dS verschwindet wegen der Differentialgl. $\Delta u + s^2 u = 0$, $\Delta v + s^2 v = 0$, das Oberflächenintegral $d\sigma$ ist auf die Kugel $\varrho = r$ zu beziehen, auf welcher v und $\partial v/\partial n$ constant sind.

wo u_0 den Wert von u im Mittelpunkte des Elektrons ($x = y = z = 0$) bedeutet:

$$u_0 = \frac{\sin sT}{T}.$$

Indem man das zweite Integral rechts in 49) eliminirt, ergiebt sich:

$$4\pi u_0 \frac{\sin sr}{r} = -\left\{\frac{\sin sr}{r}\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r} - \frac{\cos sr}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\right\}\int u\,d\sigma = \frac{s}{r^2}\int u\,d\sigma.$$

Von dem hier bestimmten Oberflächenintegral $\int u\,d\sigma$ gelangen wir unmittelbar zu dem Mittelwerte $\bar u$ von u, der analog dem Mittelwerte $\bar\chi$ von χ zu definiren ist:

$$\bar u = \frac{1}{4\pi r^2}\int u\,d\sigma = u_0\frac{\sin sr}{sr} = \frac{1}{s}\frac{\sin sT}{T}\frac{\sin sr}{r}.$$

Gehen wir zu χ zurück, so haben wir gleichzeitig:

$$50)\quad \bar\chi = \frac{1}{Tr}\int_0^\infty \sin sT \sin sr \sin sa \sin cs\tau\,\frac{ds}{s^2}.$$

Es bleibt noch die Integration nach s auszuführen, was in § 14 unter a) geschehen wird. Wir entnehmen den dortigen Ergebnissen Folgendes: Definirt man vier besondere Werte von τ, nämlich $\tau_1'\,\tau_1''\,\tau_2'\,\tau_2''$ durch die Gleichungen:

$$51)\quad \begin{cases} \tau_1')\ldots c\tau + T = r - a, & \tau_1'')\ldots c\tau - T = r - a, \\ \tau_2')\ldots c\tau + T = r + a, & \tau_2'')\ldots c\tau - T = r + a, \end{cases}$$

wobei unter unwesentlicher Einschränkung der Allgemeinheit (vgl. § 14 Schluß) vorausgesetzt werden möge, daß jede dieser Gl. nur **eine** brauchbare, positive Wurzel hat, so gilt:

$$\begin{aligned} &\text{für } 0 < \tau < \tau_1' \ldots \bar\chi = 0, \\ &\;\text{„}\;\; \tau_1' < \tau < \tau_1'' \ldots \bar\chi = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} + \frac{c\tau - r + a}{rT}\right), \\ &\;\text{„}\;\; \tau_1'' < \tau < \tau_2' \ldots \bar\chi = \frac{\pi}{8}\frac{2}{r}, \\ &\;\text{„}\;\; \tau_2' < \tau < \tau_2'' \ldots \bar\chi = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} - \frac{c\tau - r - a}{rT}\right) \\ &\;\text{„}\;\; \tau_2'' < \tau\,\infty \ldots \bar\chi = 0. \end{aligned}$$

Indessen ist hervorzuheben, daß diese Ausdrücke nur dann gelten, wenn man voraussetzt, daß die Bewegung in der der Zeit t vorangehenden Epoche mit **Unterlichtgeschwindigkeit** $v < c$

erfolgt sei. In diesem Falle ist der von dem Elektron während der Zeit τ zurückgelegte Weg jedenfalls kleiner als $c\tau$; dasselbe gilt umsomehr von dem gradlinigen Fahrstrahl T (Verbindungslinie des Elektronenmittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ und t), so daß wir die Bedingung der Unterlichtgeschwindigkeit wie folgt schreiben können (vgl. auch pag. 384):

$$T < c\tau.$$

Welche Werte $\bar{\chi}$ im Falle $T > c\tau$ (Ueberlichtgeschwindigkeit) annimmt, wird in § 13 anzugeben sein.

Setzen wir diese Werte von $\bar{\chi}$ in 48) ein, so zerfällt das Integral nach τ in die drei Integrationen:

$$\int_{\tau_1'}^{\tau_1''} .. \, d\tau + \int_{\tau_1''}^{\tau_2'} .. \, d\tau + \int_{\tau_2'}^{\tau_2''} .. \, d\tau.$$

Wir bemerken zunächst, daß wir die Differentiation nach t in dem letzten Gliede von 48) unter dem Integralzeichen ausführen können; denn die durch Differentiation der Integrationsgrenzen τ_1', τ_1'' .. entstehenden Terme heben sich wegen des stetigen Verlaufes von $\bar{\chi}$ gegenseitig auf. Ferner wollen wir von $\bar{\chi}$ einen constanten, von τ unabhängigen Bestandteil absondern, nämlich in den drei Integrationsintervallen $(\tau_1' \tau_1'')$, $(\tau_1'' \tau_2')$, $(\tau_2' \tau_2'')$ bez. den Bestandteil:

$$\frac{\pi}{8}\frac{1}{r}, \quad \frac{\pi}{8}\frac{2}{r}, \quad \frac{\pi}{8}\frac{1}{r}.$$

Da diese Werte auch von T und t unabhängig sind, also ihr $\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}$ und ihr Differentialquotient $\partial/\partial t$ verschwindet, so entspricht ihnen bei passender Zusammenfassung der Integrationen auf der rechten Seite von 48) lediglich der Betrag:

$$\frac{\pi}{8}\lim_{r=a}\frac{1}{r}\left\{\int_{\tau_1'}^{\tau_2'}\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}\,d\tau + \int_{\tau_1''}^{\tau_2''}\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}\,d\tau\right\}$$

$$= \frac{\pi}{8}\lim_{r=a}\frac{1}{r}\left\{\mathfrak{v}_{t-\tau_1'} - \mathfrak{v}_{t-\tau_2'} + \mathfrak{v}_{t-\tau_1''} - \mathfrak{v}_{t-\tau_2''}\right\}.$$

Hier gehen wir sogleich zur Grenze $r = a$ über. Nach den Definitionsgleichungen 51) wird dann, da τ und T nicht negativ werden können und da $T < c\tau$ sein sollte, notwendig $\tau_1' = \tau_1'' = 0$ sowie $T_1' = T_1'' = 0$; die Grenzwerte von τ_2', τ_2'' für $r = a$ mögen kurz mit τ', τ'' bezeichnet werden; sie sind durch die Gl. bestimmt:

52) $$c\tau' + T' = 2a, \quad c\tau'' - T'' = 2a,$$

wobei wir durch die Striche bei T angedeutet haben, daß der zu τ', τ'' gehörige Funktionswert T einzutragen ist[1]. Der vorige Ausdruck verwandelt sich nun in:

$$\frac{\pi}{8}\frac{1}{a}\left\{2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''}\right\}.$$

Nachdem somit einige Terme von $\bar{\chi}$ vorweggenommen sind, können wir Gl. 48), wenn wir dieselbe mit $\pi/8a$ dividiren, folgendermaßen schreiben:

53) $$-\frac{16\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = 2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''}$$
$$+ \lim_{r=a}\left\{\int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\frac{c\tau - r + a}{T}\,d\tau\right.$$
$$\left. + \int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{v}_{t-\tau}\frac{c\tau - r + a}{T}\right)d\tau\right\}$$
$$- \lim_{r=a}\left\{\int_{\tau_2'}^{\tau_2''}\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\frac{c\tau - r - a}{T}\,d\tau\right.$$
$$\left. + \int_{\tau_2'}^{\tau_2''}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{v}_{t-\tau}\frac{c\tau - r - a}{T}\right)d\tau\right\}.$$

Was den Grenzübergang $r = a$ anlangt, so kann man in den beiden letzten Integralen ohne Weiteres $r = a$ setzen, wobei die Integrationsgrenzen in τ', τ'' übergehen. In den beiden ersten Integralen dagegen ist Vorsicht geboten, weil der Nenner T mit verschwindendem τ_1', τ_1'' selbst verschwindet.

Das erste Integral der rechten Seite lautet, da:

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\mathfrak{T}}{T^3},$$

mit der Abkürzung $r - a = \delta$:

$$-\lim_{\delta=0}\int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{c\tau - \delta}{T^3}\mathfrak{T}\,d\tau.$$

Hier können wir $\mathfrak{T}$ und T unter der Annahme eines bereits hinreichend kleinen τ_1'' durch Näherungsformeln ersetzen, in denen

1) Die geometrische Bedeutung der so bestimmten Zeitpunkte τ', τ'' kann im Anschluß an Fig. 2b dahin erklärt werden, daß die den Zeitpunkten $\tau < \tau'$ entsprechende Erregung die ganze Oberfläche des Elektrons in ihrer Lage zur Zeit t deckt, daß für $\tau' < \tau < \tau''$ nur noch ein Teil dieser Oberfläche von der betreffenden Erregung erfaßt wird, während bei $\tau > \tau''$ die Erregung bereits vollständig über die Lage des Elektrons zur Zeit t hinweggestrichen ist.

nur erste Potenzen von τ berücksichtigt werden. Aus der Definition von $\mathfrak{T}$ (Gl. 11)) folgt in erster Näherung:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{v}_t . \tau, \quad T = v_t . \tau;$$

mit demselben Recht können wir setzen:

$$c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau}) = c^2 - v_t^2.$$

Gleichzeitig liefern die Gl. 51) für τ_1', τ_1'', die Näherungswerte:

$$(c + v_t)\tau_1' = \delta, \quad (c - v_t)\tau_1'' = \delta.$$

Das fragliche Integral kann daher folgendermaßen ausgewertet werden:

$$-\frac{c^2 - v_t^2}{v_t^2}\frac{\mathfrak{v}_t}{v_t}\left\{c \log \frac{c + v_t}{c - v_t} - 2v_t\right\}.$$

Offenbar wäre uns dieser Betrag verloren gegangen, wenn wir von vornherein $\delta = 0$ gesetzt hätten.

Man erkennt ferner leicht, indem man von den soeben entwickelten Näherungsformeln Gebrauch macht, daß das zweite Integral der rechten Seite von 53) in der Grenze $\delta = 0$ verschwindet. Fügen wir schließlich die beiden letzten Integrale hinzu, nachdem wir in denselben $r = a$ gemacht und für grad $1/T$ den oben angegebenen Wert $-\mathfrak{T}/T^3$ eingetragen haben, so erhalten wir den folgenden definitiven Wert der resultirenden Kraft:

$$\text{54)} \quad -\frac{16\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = 2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''} - \frac{c^2 - v_t^2}{v_t^2}\frac{\mathfrak{v}_t}{v_t}\left\{c \log \frac{c + v_t}{c - v_t} - 2v_t\right\}$$

$$+ \int_{\tau'}^{\tau''}\left(\left\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\mathfrak{T}}{T^3} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}}{T}\right)(c\tau - 2a)\, d\tau.$$

b. Volumladung. Die Gln. 46), durch welche wir oben φ und $\mathfrak{A}$ darstellten, können für den Fall von Volumladung direkt übernommen werden, vorausgesetzt, daß wir unter χ (in Uebereinstimmung mit 18), 18') und 22)) den folgenden Ausdruck verstehn:

$$\text{46')} \quad \chi = 3\int_0^\infty u \frac{\sin as - as \cos as}{(as)^2} \sin cs\tau \frac{ds}{s}, \quad u = \frac{\sin Rs}{R}.$$

Der Mittelwert $\bar{\chi}$ von χ entsteht jetzt durch Integration über das Innere der Kugel vom Radius a und Division durch den Inhalt dieser Kugel. Man hat also, unter dS ein Raumelement derselben verstanden:

$$\bar{\chi} = \frac{3}{4\pi a^3}\int \chi\, dS.$$

Bei dieser Bedeutung von $\bar{\chi}$ liefert Gl. 48) nach wie vor den Ausdruck der resultirenden Kraft $\mathfrak{F}$, wobei jedoch jetzt das Zeichen „Limes“ fortfallen und direkt $r = a$ gesetzt werden kann.

Um $\bar{\chi}$ zu bestimmen, führen wir die Raumintegration zunächst an dem von den räumlichen Coordinaten allein abhängigen Factor $u = \sin Rs/R$ von χ aus. Aus der Differentialgleichung $\Delta u + s^2 u = 0$ zusammen mit dem Green'schen Satze folgt:

$$\int u\, dS = -\frac{1}{s^2}\int \Delta u\, dS = -\frac{1}{s^2}\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

wo sich die Oberflächenintegration $d\sigma$ auf die Kugel vom Radius a erstreckt. Den Wert des hier in Frage kommenden Oberflächenintegrals entnimmt man den Gl. 49), wenn man in denselben (umgekehrt wie früher) $\int u\, d\sigma$ eliminirt, wobei $r = a$ gesetzt werden darf. Man erhält durch geeignete Multiplikation und Subtraktion aus 49):

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -4\pi u_0 \frac{\sin as - as \cos as}{s}$$

und daher:

$$\int u\, dS = 4\pi u_0 \frac{\sin as - as \cos as}{s^3}, \quad u_0 = \frac{\sin Ts}{T},$$

$$\text{50')} \quad \bar{\chi} = \frac{9}{Ta}\int_0^\infty \sin Ts \left(\frac{\sin as - as \cos as}{a^2 s^2}\right)^2 \sin c\tau s \frac{ds}{s^2}.$$

Die hier noch erforderliche Integration nach s werden wir in § 14 unter b) ausführen. Dort ergiebt sich, wenn man unter τ' und τ'' die durch 52) definirten Zeitpunkte versteht, wenn man überdies Unterlichtgeschwindigkeit $(T < c\tau)$ voraussetzt und die Abkürzung

$$\text{51')} \quad f(x) = \frac{1}{20}\frac{x^5}{a^2} - x^3 + 2a x^2 - \frac{8}{5}a^3$$

benutzt, die folgende Wertbestimmung von $\bar{\chi}$ nebst den daraus folgenden Werten von $\mathrm{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi}$:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \,..\, \bar{\chi} = \frac{3\pi}{16a^3}\frac{f(c\tau + T) - f(c\tau - T)}{T},$$

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial T} = \frac{3\pi}{16a^3}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau + T) - f(c\tau - T)}{T},$$

$$\text{„ } \tau' < \tau < \tau'' \,..\, \bar{\chi} = -\frac{3\pi}{16a^3}\frac{f(c\tau - T)}{T},$$

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = -\frac{3\pi}{16a^3}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau - T)}{T},$$

$$\text{„ } \tau'' < \tau < \infty \,..\, \bar{\chi} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = 0.$$

Wir setzen diese Werte in 48) ein, indem wir die Limes-Zeichen unterdrücken und mit $3\pi/16a^3$ die ganze Gleichung dividiren. Die Differentiation nach t darf wieder unter dem Integralzeichen nach τ ausgeführt werden. Das definitive Resultat schreiben wir folgendermaßen, indem wir die Integrationen passend zusammenfassen:

$$54') \quad -\frac{32\pi a^4 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} =$$
$$\int_0^{\tau'}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau+T)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau+T)}{T}\right)d\tau$$
$$-\int_0^{\tau''}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau-T)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau-T)}{T}\right)d\tau.$$

Allerdings ist hierbei im Auge zu behalten, daß wegen des bei $\tau=0$ verschwindenden Nenners T nur die Differenz der beiden vorstehenden Integrale, nicht aber das einzelne derselben einen Sinn hat. Wollten wir diesen Uebelstand vermeiden, so müßten wir in dem ersten Integral ersetzen $f(c\tau+T)$ durch $f(c\tau+T)$ $-f(c\tau-T)$ und dafür das zweite Integral erstrecken von τ' bis τ''. Wir ziehen indessen die obige kürzere Schreibweise vor, indem wir ausdrücklich den Vorbehalt machen, daß in der Nähe von $\tau=0$ die beiden Integrationen in Eins zusammenzufassen sind. Derselbe Vorbehalt ist zu beachten, wenn T etwa für einen von Null verschiedenen τ-Wert verschwinden sollte; in diesem Falle bleibt der Differenzenquotient $\{f(c\tau+T)-f(c\tau-T)\}/T$, auf den es bei richtiger Zusammenfassung der Integrale allein ankommt, endlich, während der einzelne Quotient $f(c\tau+T)/T$ unendlich groß wird. Uebrigens ist dieser Fall notwendig verbunden mit dem Auftreten mehrerer Wurzeln τ', τ'', von dem wir am Ende von § 14 sprechen werden.

§ 12. *Der Translations-Bestandteil des Drehmomentes.*

Indem wir wie im vorigen Paragraphen $\mathfrak{w}=0$ (reine Translation) und $T<c\tau$ (Unterlichtgeschwindigkeit) voraussetzen, gehen wir von der Drehkraft für die Ladungseinheit $\mathfrak{n}=[\mathfrak{r}\mathfrak{f}]$ zu der Drehkraft $\mathfrak{N}$ durch Integration über die Gesamtladung über.

a. Oberflächenladung. Wir übernehmen für φ, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{f}$ die Ausdrücke 46) und 47). Für $\mathfrak{n}$ erhalten wir dann:

$$55) \quad -\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon}\mathfrak{n}=\int_0^\infty\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}[\mathfrak{r}\operatorname{grad}\chi]\,d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty[\mathfrak{r}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,\chi\,d\tau.$$

Wir beachten wie früher, daß $\operatorname{grad}\chi=\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\chi$ und schreiben:

$$[\mathfrak{r}\operatorname{grad}\chi] = -\operatorname{rot}_{\mathfrak{x}}\{\mathfrak{r}\chi\};$$

um von $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{N}$ überzugehen, ist es dann nur nötig, den über die Oberfläche des Elektrons oder, genauer gesagt, über eine Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\mathfrak{r}\chi\,d\sigma$$

zu kennen. Durch diesen stellt sich $\mathfrak{N}$ in folgender Weise dar:

$$56) \quad \frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\int_0^\infty\left(\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\operatorname{rot}_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{r}\chi}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\mathfrak{r}\chi}\,\mathfrak{v}_{t-\tau}\right]\right)d\tau$$

Um $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ auszuwerten, ziehen wir zunächst den auf der Kugeloberfläche veränderlichen Faktor von χ (s. Gl. 46)):

$$u = \frac{\sin sR}{R}$$

in Betracht und bilden:

$$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma.$$

Man kann den Wert dieses Integrals aus den beiden folgenden zu 49) analogen Gleichungen entnehmen:

$$57) \quad \left\{\begin{aligned} 4\pi r\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}u_0 &= -\frac{d^2}{dr^2}\frac{\cos sr}{r}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma+\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,\\ 0 &= -\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma+\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma.\end{aligned}\right.$$

Dieselben lassen sich folgendermaßen ableiten: Man setze in dem Green'schen Satz:

$$\int(u\Delta v-v\Delta u)\,dS=\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

u gleich dem obigen Wert und zunächst:

$$v = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin sr}{r} = \frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}.$$

Es genügen dann u und v den Differentialgleichungen $\Delta u+s^2u=0$, $\Delta v+s^2v=0$, so daß die über das Innere der Kugel vom Radius r zu erstreckende Raumintegration auf der linken Seite der Green-schen Gleichung verschwindet. Auf der rechten Seite, wo die Integration über die Kugeloberfläche vom Radius r zu erstrecken ist, kann man den nur von r abhängigen Bestandteil von

v und $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{x}{r}\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}$, nämlich $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}$ und $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}$

vor das Integralzeichen ziehen; es ergiebt sich dann die zweite der Gl. 57), nur daß darin der Vektor $\mathfrak{r}$ durch eine seiner Componenten (x) ersetzt ist. Wählt man andrerseits:

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin sr}{r} \text{ oder } v = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\sin sr}{r},$$

so treten die Componenten y und z an die Stelle von x, so daß die fragliche Vektorgleichung vollständig bewiesen ist.

Um in entsprechender Weise zur ersten der Gl. (57) zu gelangen, wähle man in der Green'schen Gleichung u wie vorher und

$$v = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos sr}{r} = \frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r}.$$

Man hat dann den Mittelpunkt $r = 0$ unserer Kugel von der Integration auszuschließen und das Oberflächenintegral der rechten Seite außer über die Kugel vom Radius r über eine concentrische von dem sehr kleinen Radius ϱ zu erstrecken. Die auf letzterer nur wenig veränderliche Funktion u kann man entwickeln:

$$u = u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x}x + \frac{\partial u_0}{\partial y}y + \frac{\partial u_0}{\partial z}z + \cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{x}{\varrho} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{y}{\varrho} + \frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{z}{\varrho} + \cdots$$

Das Oberflächenintegral über die Kugel ϱ wird dann:

$$\int_\varrho \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\left(u_0\int x\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial x}\int x^2\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial y}\int xy\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial z}\int xz\,d\sigma + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\int x^2\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial y}\int xy\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial z}\int xz\,d\sigma + \cdots\right)$$

Es ist aber:

$$\int x\,d\sigma = \int xy\,d\sigma = \int xz\,d\sigma = 0,$$

$$\int x^2\,d\sigma = \frac{1}{3}\int (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma = \frac{4\pi}{3}\varrho^4;$$

das in Rede stehende Oberflächenintegral reducirt sich also auf:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\cos s\varrho}{\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\right)\frac{4\pi}{3}\varrho^4\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

und wird für $\varrho = 0$ einfach gleich:

$$4\pi\frac{\partial u_0}{\partial x} = 4\pi\frac{\partial u_0}{\partial \xi}.$$

Von da aus erhält man die erste der Gl. (57), nur daß darin die Vektoren $\mathfrak{r}$ und grad durch ihre x-Componenten x und $\partial/\partial\xi$ ersetzt sind. Man gewinnt weiterhin die vollständige Vektorgleichung, wenn man ferner wählt:

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos sr}{r} \text{ und } v = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\cos sr}{r}.$$

Eliminirt man aus den Gl. (57) das zweite der rechts stehenden Integrale, so erhält man den gesuchten Wert von $\overline{\mathfrak{r}u}$ zunächst in der Form:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}\cdot\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r} - \frac{d^2}{dr^2}\frac{\cos sr}{r}\cdot\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\right\}\overline{\mathfrak{r}u}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\cdot \operatorname{grad} u_0.$$

Die Ausrechnung der $\{\ \}$ liefert den einfachen Wert s^3/r^2. Da ferner $u_0 = \sin sT/T$, so hat man schließlich:

58) $$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{r}{s^3}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\frac{\sin sT}{T}.$$

Hieraus ergiebt sich nach (46):

59) $$\overline{\mathfrak{r}\chi} = \int_0^\infty \overline{\mathfrak{r}u}\sin as\sin cs\tau\frac{ds}{s} =$$

$$\int_0^\infty \operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\frac{\sin sT}{sT}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{sr}\sin as\sin cs\tau\frac{ds}{s^2}.$$

Zunächst schließen wir aus dem vorstehenden Ausdruck, daß

$$\operatorname{rot}_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{r}\chi} = 0, \quad \text{da } \operatorname{rot}_{\mathfrak{x}}\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\frac{\sin sT}{sT} = 0.$$

Infolge dessen verschwindet in (56) das erste Glied der rechten Seite für alle Werte von τ. Es geschah aber gerade wegen dieses ersten Gliedes bez. wegen des ihm entsprechenden ersten Gliedes in (48), daß wir im vorigen Paragraphen zwischen dem Grenzwert für $r = a$ und dem Werte für $r = a$ selbst unterscheiden mußten. Im vorliegenden Fall wird nun diese Unterscheidung überflüssig und wir können direkt statt (56) schreiben:

60) $$-\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon^2}\mathfrak{R} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty [\overline{\mathfrak{r}\chi}\,\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,d\tau.$$

Mit der Ausführung der Integration nach s in dem Ausdrucke von $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ werden wir uns in § 14 unter c) beschäftigen. Dort zeigt sich, daß man bei Unterlichtgeschwindigkeit die folgenden Fälle zu unterscheiden hat:

$$0<\tau<\tau' \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{\pi}{12}\frac{\mathfrak{T}}{a}$$

$$\tau'<\tau<\tau'' \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{\pi}{12}\frac{\mathfrak{T}}{a}\frac{2(a^2-aT+T^2)-(c\tau-a)(c\tau+T)}{4T^3}(2a+T-c\tau),$$

$$\tau''<\tau<\infty \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = 0.$$

Trägt man dies in 60) ein und multiplicirt rechts und links mit $12a/\pi$, so ergiebt sich:

$$61)\qquad -\frac{24\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,d\tau$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau'}^{\tau''}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\frac{2(a^2-a\,T+T^2)-(c\tau-a)(c\tau+T)}{4T^3}(2a+T-c\tau)\,d\tau.$$

Wie man sieht, wird der Translationsbestandteil des Drehmomentes bei stetiger Bewegungsrichtung ziemlich klein, da er unter dem Integralzeichen mit dem in $[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]$ steckenden Sinus zwischen der Sehne $\mathfrak{T}$ und der Tangente $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ an die Bahncurve multiplicirt ist. Bei geradliniger Bewegung, wo $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ dauernd dieselbe Richtung haben, wird ohne Weiteres

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Wenn die Bahncurve eben ist, steht die Axe des Drehmomentes senkrecht auf der Bahnebene.

b. Volumladung. Wir können auch jetzt zur Darstellung von $\mathfrak{N}$ die Gl. (60) benutzen, wenn wir darin unter χ den Ausdruck 46′) und unter $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ den über das Innere des Elektrons erstreckten Mittelwert von $\mathfrak{r}\chi$ verstehen; denn es wird sich ähnlich wie vorher zeigen, daß auch jetzt $\mathrm{rot}_{\mathfrak{T}}\overline{\mathfrak{r}\chi}$ verschwindet. Bei der nämlichen Bedeutung von $u = \sin Rs/R$ wie unter a) bilden wir

$$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{3}{4\pi a^3}\int \mathfrak{r}u\,dS.$$

Es ist aber wegen der Differentialgleichungen $\varDelta u + s^2 u = 0$, $\varDelta\mathfrak{r} = 0$:

$$\int \mathfrak{r}u\,dS = -\frac{1}{s^2}\int(\mathfrak{r}\varDelta u - u\varDelta\mathfrak{r})\,dS =$$
$$-\frac{1}{s^2}\int\left(\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial n}\right)d\sigma = -\frac{1}{s^2}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{s^2 a}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma,$$

wobei sich $\int d\sigma$ auf die Oberfläche des Elektrons bezieht.

Wir haben bereits oben gesehen (Gl. 58), in der nunmehr $r = a$ zu setzen ist), daß

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{a}{s}\frac{d}{da}\frac{\sin sa}{sa}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT}.$$

Daraufhin liefert die zweite der Gl. (57) mit $r = a$:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{a}{s}\frac{d^2}{da^2}\frac{\sin sa}{sa}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT}.$$

Folglich wird:

$$-\frac{1}{s^2}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{s^2 a}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma = -\frac{4\pi a^3}{s}\frac{\mathfrak{T}}{T}\Big\{\;\Big\}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT},$$

und

$$58')\qquad \overline{\mathfrak{r}u} = 3\frac{\mathfrak{T}}{sT^2}\Big\{\;\Big\}\frac{\sin sT - sT\cos sT}{sT},$$

wo beide mal in der $\{\;\}$ steht:

$$\Big\{\;\Big\} = \frac{1}{s^2}\frac{d^2}{da^2}\frac{\sin sa}{sa} - \frac{1}{s^2 a}\frac{d}{da}\frac{\sin sa}{sa} = \frac{3\sin sa - 3sa\cos sa + (sa)^2\sin sa}{(sa)^3}$$

Aus 46′) folgt nun:

$$59')\qquad \overline{\mathfrak{r}\chi} = 3\int_0^\infty \overline{\mathfrak{r}u}\,\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^2}\sin cs\tau\,\frac{ds}{s}$$
$$= \frac{9\mathfrak{T}}{aT^3}\int_0^\infty\Big\{\;\Big\}\frac{\sin as - as\cos as}{as}(\sin sT - sT\cos sT)\sin cs\tau\,\frac{ds}{s^4}.$$

Das hier noch vorkommende Integral nach s wird in § 14 unter d) ausgewertet werden. Versteht man unter τ', τ'' die durch 52) bestimmten Zeitpunkte und unter g, G die folgenden Funktionen 5ten, 7ten Grades ihres Argumentes:

$$60')\qquad \begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{10}\dfrac{x^5}{a^4} - \dfrac{4}{3}\dfrac{x^3}{a^2} + \dfrac{2x^2}{a} - \dfrac{8a}{15}, \\[2ex] G(x) = \displaystyle\int_{2a}^{x} g(v)(v-c\tau)\,dv, \end{cases}$$

so findet man dort bei Unterlichtgeschwindigkeit:

$$\text{für } 0<\tau<\tau' \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{9\pi\mathfrak{T}}{32a\,T^3}(G(c\tau+T) - G(c\tau-T)),$$

$$\text{„}\quad \tau'<\tau<\tau'' \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = -\frac{9\pi\mathfrak{T}}{32a\,T^3}G(c\tau-T),$$

$$\text{„}\quad \tau''<\tau<\infty \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = 0.$$

Diese Ausdrücke tragen wir in 60) ein. Multipliciren wir noch rechts und links mit dem Faktor $32a/9\pi$, so folgt bei passender Zusammenfassung der zunächst von 0 bis τ' und von τ' bis τ'' zu erstreckenden Teilintegrale und bei Berücksichtigung des am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Vorbehaltes:

$$61') \qquad -\frac{64\pi a^2 c}{9\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\, G(c\tau+T)\frac{d\tau}{T^3} - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\, G(c\tau-T)\frac{d\tau}{T^3}.$$

Ueber Größe und Axenrichtung von $\mathfrak{N}$, insbesondere bei geradliniger und ebener Bewegung ist dasselbe zu sagen wie pag. 382 im Falle von Oberflächenladung.

§ 13. *Ergänzung betreffend Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Die oft aufgeworfene und in verschiedener Weise beantwortete Frage nach der Möglichkeit der Ueberlichtgeschwindigkeit wird im Folgenden dahin entschieden, daß eine Ueberschreitung der Lichtgeschwindigkeit bei räumlicher Ladungsverteilung durchaus möglich ist, d. h. daß dieselbe in keiner Weise einen unendlichen Arbeitsaufwand erfordert, daß sie dagegen bei flächenhafter Ladungsverteilung unmöglich wird, weil dazu eine unendliche Kraft und Arbeit nötig wäre.

Im Voraus möge bemerkt werden, daß nicht die Alternative $v \gtrless c$ (Ueberlichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit) sondern die Alternative $T \gtrless c\tau$ (der von dem Elektronenmittelpunkte zurückgelegte Weg größer oder kleiner als der Lichtweg während der gleichen Zeit) für das Folgende entscheidend ist. Wir bemerkten schon pag. 374 oben, daß die Ungleichung $v < c$ mit Notwendigkeit die Ungleichung $T < c\tau$ zur Folge hat. Das Umgekehrte aber ist nicht ohne Weiteres der Fall. Bei krummliniger Bewegung kann ersichtlich sehr wohl $v > c$ und trotzdem unter Umständen $T < c\tau$ sein. Wir setzen daher für das Folgende ausdrücklich fest, daß wir die Bezeichnung „Ueberlichtgeschwindigkeit" in dem Sinne auffassen wollen, daß es sich um eine Bewegung handelt, bei der dauernd oder zeitweilig $T > c\tau$ ist. Man kann dabei die folgenden Unterfälle unterscheiden, die sich übrigens im Folgenden mit wesentlich denselben Formeln behandeln lassen werden:

I. In der der Zeit t vorangehenden Epoche war, soweit sie für die Integration nach τ in Frage kommt, dauernd $T > c\tau$.

II. In eben dieser Epoche war zunächst $T > c\tau$, für größere τ, d. h. weiter zurückliegende Zeitpunkte dagegen $T < c\tau$.

III. Es war zunächst $T < c\tau$, dagegen früher $T > c\tau$.

In den beiden letzteren Fällen hat also ein Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit oder, genauer gesagt, eine vorübergehende Gleichheit zwischen „Elektronenweg" T und Lichtweg $c\tau$ stattgefunden. Auf eine asymptotisch-dauernde Gleichheit zwischen Elektronenweg und Lichtweg kommen wir zum Schluß dieses Paragraphen zu sprechen.

a. Volumladung. Wir beginnen mit dem hier einfacheren Fall einer gleichförmigen Volumladung. Ersichtlich ist an den anfänglichen Formeln 46'), 48), 50') des § 11 nicht das Geringste zu ändern, da bei ihnen die frühere Voraussetzung $T < c\tau$ überhaupt nicht in Frage kam. Diese machte sich erst geltend bei der Bestimmung des Mittelwertes von χ. Wir entnehmen aber den Erörterungen des § 14e), daß es nur nötig ist, $c\tau - T$ zu ersetzen durch $|c\tau - T|$, um die Berechnung von $\bar{\chi}$ auch für den Fall $T > c\tau$ aufrecht halten zu können. Diese Ersetzung hat stattzufinden sowohl in dem Argumente der Funktion f, wie in der Definitionsgleichung von τ'' sowie in der Schlußformel 54') für $\mathfrak{F}$:

$$62) \qquad -\frac{32\pi a^4 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = \int_0^{\tau'}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau+T)}{T} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau+T)}{T}\right)d\tau - \int_0^{\tau''}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(|c\tau-T|)}{T} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(|c\tau-T|)}{T}\right)d\tau,$$

$$62') \qquad c\tau'+T' = 2a, \quad |c\tau''-T''| = 2a.$$

Gl. 62) umfaßt nunmehr nicht nur die Fälle I., II., III. dauernder oder vorübergehender Ueberlichtgeschwindigkeit, sondern auch die früher allein betrachteten Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Daß Gl. 62) in keinem Falle zu einem unendlichen $\mathfrak{F}$ Anlaß geben kann, folgt aus der Definition der Funktion f Gl. 51') und ihrem Verhalten für kleine Werte von τ, für welche wegen Verschwinden des Nenners T zunächst ein Unendlichwerden in Frage kommen kann. Für kleine τ ist näherungsweise (bis auf höhere Potenzen von τ) $T = v\tau$, $\mathfrak{T}/T = \mathfrak{v}/v$, $c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau}) = c^2 - v^2$,

$$f(c\tau + T) = -\frac{8}{5}a^3 + 2a(c\tau + T)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau + T)}{T} = \frac{8}{5}\frac{a^3}{T^2} - \frac{2a(c\tau + T)^2}{T^2} + \frac{4a(c\tau + T)}{T},$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(|c\tau - T|)}{T} = \frac{8}{5}\frac{a^3}{T^2} - \frac{2a(c\tau - T)^2}{T^2} - \frac{4a(c\tau - T)}{T}.$$

Fassen wir nun, wie es durch die Schlußbemerkung von § 11 vorgeschrieben wurde, die beiden Integrationen auf der rechten Seite von 62) in der Nähe von $\tau = 0$ zusammen, so heben sich in der Differenz die Beträge mit $8a^3/5$ gegenseitig fort, und man erhält als Wert des Integranden einfach:

$$8a\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}c\tau\,d\tau$$

so daß also die verschwindenden Nenner in Wegfall gekommen sind, und zwar unabhängig davon, ob $T \gtrless c\tau$ ist.

Wenn dagegen T für irgend einen Wert $\tau > 0$ verschwinden sollte, so gilt in dessen Umgebung jedenfalls die Bedingung der Unterlichtgeschwindigkeit $c\tau > T$; daß auch dann ein Unendlichwerden ausgeschlossen ist, wurde bereits am Ende von § 11 betont.

b. Oberflächenladung. Abermals gelten die anfänglichen Formeln des § 11 bis zu Gl. 50) einschl. ungeändert auch im Falle $T > c\tau$. Dagegen sind die Definitionsgleichungen 51) und die folgenden Angaben über $\overline{\chi}$ nach § 14e) dahin abzuändern, daß im Falle $T > c\tau$ gilt:

$$0 < \tau < \tau_1' \ldots \overline{\chi} = 0,$$

$$\tau_1' < \tau < \tau_1'' \ldots \overline{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} + \frac{c\tau - r + a}{rT}\right),$$

$$\tau_1'' < \tau < \tau_2' \ldots \overline{\chi} = \frac{\pi}{8}\frac{2c\tau}{rT},$$

$$\tau_2' < \tau < \tau_2'' \ldots \overline{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(-\frac{1}{r} + \frac{c\tau + r + a}{rT}\right),$$

$$\tau_2'' < \tau < \infty \ldots \overline{\chi} = 0,$$

und daß zur Berechnung von τ_1'' und τ_2'' die Gleichungen dienen:

$$T - c\tau = r - a, \quad T - c\tau = r + a.$$

In dem Intervalle $\tau_1' < \tau < \tau_1''$ ist der Wert von $\overline{\chi}$ gegen früher ungeändert geblieben. Berechnet man daher grad $\overline{\chi}$ und geht in dem zugehörigen zwischen τ_1' und τ_1'' integrirten Gliede von $\mathfrak{F}$ zur Grenze $r - a = \delta = 0$ über, so erhält man wie früher einen endlichen Grenzwert, der sich nur dadurch etwas modificirt, daß

der Näherungswert von τ_1'' bei kleinem δ nicht mehr $\delta/(c - v)$ wie früher, sondern $\delta/(v - c)$ lautet.

Dagegen ist in dem Intervalle $\tau_1'' < \tau < \tau_2'$ der Wert von $\overline{\chi}$ wesentlich von dem früheren verschieden. Er giebt hier nicht mehr einen verschwindenden Gradienten, sondern liefert:

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{T}}\,\overline{\chi} = -\frac{\pi}{8}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{2c\tau}{rT^2}.$$

In Folge dessen tritt bei der Ausrechnung der rechten Seite von Gl. 48) gegen früher der folgende Term hinzu:

$$-\operatorname*{Lim}_{\delta = 0}\frac{\pi}{8}\int_{\tau_1''}^{\tau_2'}\left\{c^2 - (\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{2c\tau}{rT^2}\,d\tau.$$

Mit verschwindendem δ geht τ_1'' in 0, τ_2' in τ' über; das Integrationsintervall bleibt also endlich. Wir bestimmen den Näherungswert des Integranden an der unteren Grenze des Integrationsintervalles, wo wir für $\mathfrak{T}, T\ldots$ die oben angegebenen Näherungswerte bei verschwindendem τ eintragen können; derselbe lautet:

$$\frac{\pi}{4}(v^2 - c^2)\frac{\mathfrak{v}}{v}\frac{c}{rv^2}\cdot\frac{d\tau}{\tau}$$

Bei der Integration nach τ liefert daher die untere Grenze τ_1'' einen Beitrag zu dem Werte des fraglichen Integrals, welcher als Faktor

$$\log\tau_1'' = \log\frac{\delta}{v - c}$$

enthält und welcher im Limes logarithmisch unendlich wird. Dieser Beitrag kann sich bei der Ausrechnung der rechten Seite von 48) gegen keinen der anderen Terme fortheben, da die noch hinzukommenden ferneren Beiträge, wie man leicht erkennt, durchaus endlich sind.

Wir haben also das Resultat, daß bei Oberflächenladung im Zeitpunkte t die zu einer Bewegung erforderliche Kraft $\mathfrak{F}$ notwendig unendlich (und zwar positiv unendlich im Sinne der Bewegungsrichtung $\mathfrak{v}_t$ gerechnet) wird, sobald während der unmittelbar vorhergehenden Zeitpunkte $t - \tau$ die Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit erfolgt ist, in dem Sinne, daß $T > c\tau$ war. Betrachten wir eine beschleunigte Bewegung, welche mit Unterlichtgeschwindigkeit anhebt, so kann dieselbe die Lichtgeschwindigkeit selbst noch mit endlichem Kraftaufwande erreichen (vgl. auch § 16). Denn für den Moment des Durchganges durch die Lichtgeschwindigkeit gilt noch der frühere Wert (54) für $\mathfrak{F}$; in diesem wird das Unendlichwerden des Logarithmus für $v_t = c$ durch den Faktor $c^2 - v^2$ aufgehoben. Eine weiter fortgesetzte Beschleunigung aber, bei welcher $T > c\tau$ würde, ist für ein oberflächlich-geladenes Elektron undenkbar.

Bei Volumladung dagegen kann, soweit ich sehe, ein Unendlichwerden der Kraft nur dann Platz greifen, wenn sich das Elektron fortgesetzt mit einer Geschwindigkeit bewegt hat, die der Lichtgeschwindigkeit genau oder bei wachsendem τ asymptotisch oder oscillatorisch gleich war, und wenn das Elektron aus diesem Bewegungszustande heraus beschleunigt oder verzögert werden soll. In diesem Falle wird nämlich die Integrationsgrenze τ'' (Gl. 62')) in unserer Darstellung 62) unendlich, wodurch zugleich die Möglichkeit eines Unendlichwerdens von $\mathfrak{F}$ gegeben ist. Uebrigens wurde bereits in der Anmerkung zu § 5 darauf hingewiesen, daß auch die dort gegebene Darstellung des Feldes zu unendlichen Werten führen kann, wenn im Limes $\tau = \infty$ die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt war.

§ 14. *Nachträgliche Berechnung einiger Integrale.*

Wir haben noch die über die Werte von $\bar{\chi}$ und $\overline{r\chi}$ in den vorangehenden Paragraphen gemachten Angaben zu beweisen. Wir thun dieses, indem wir die fraglichen Integrale der Reihe nach auf die Integrale a), b), c), d) des § 8 zurückführen. Zunächst wird dabei Unterlichtgeschwindigkeit $T < c\tau$ vorausgesetzt.

a) Von der in Gl. 50) definirten Größe χ gehen wir über zu:

$$S = Tr\bar{\chi} = \int_0^\infty \sin sT \sin sr \sin sa \sin cs\tau \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin sT \sin sr \left\{\cos(a - c\tau)s - \cos(a + c\tau)s\right\} \frac{ds}{s^2}.$$

Ersetzt man in dem Integrale (a) des § 8 x, y, z durch s, T, r und t durch eine neue Integrationsvariable α, so erkennt man unmittelbar, daß

$$S = \frac{1}{2}\int_{|a - c\tau|}^{a + c\tau} (a)\, d\alpha.$$

Der Wert von (a) war aber $\pi/4$ oder 0, je nachdem aus den Strecken y, z, t, d. h. hier aus den Strecken T, r und α ein Dreieck gebildet werden konnte oder nicht.

Um letzteres bequem entscheiden zu können, beziehen wir uns auf Fig. 3. In dieser haben wir nach der Abscissenrichtung die Länge $c\tau$, nach der Ordinatenrichtung die Integrationsvariable α aufgetragen; die Längen $0R$ und $0T$ der Ordinatenaxe sind gleich r und a gemacht, wobei, was erlaubt ist, $r > a$ gewählt wurde. Ferner sind in der Figur die Curven

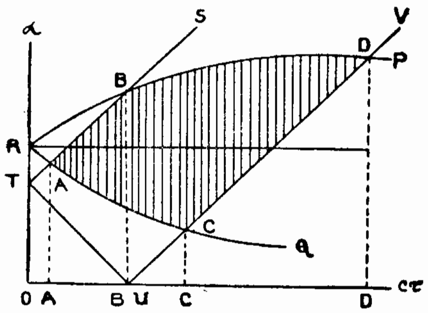

Fig. 3.

$$RP: \ \alpha = r + T \quad \text{und} \quad RQ: \ \alpha = r - T$$

sowie die unter 45° gegen die Axen geneigten Geraden

$$ST: \ \alpha = a + c\tau, \quad TU: \ \alpha = a - c\tau, \quad UV: \ \alpha = -a + c\tau$$

construirt. Wegen $T < c\tau$ schneiden die Geraden ST und UV unsere Curve RP; die Schnittpunkte auf dieser Curve sind mit B, D, die auf RQ gelegenen mit A, C bezeichnet; dieselben Buchstaben mögen auch die zugehörigen Punkte der Abscissenaxe markiren, welche ersichtlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{array}{llll} A) & r - T = c\tau + a & \text{woraus sich ergebe} & \tau = \tau_1', \\ B) & r + T = c\tau + a & \quad " & \tau = \tau_1'', \\ C) & r - T = c\tau - a & \quad " & \tau = \tau_2', \\ D) & r + T = c\tau - a & \quad " & \tau = \tau_2''. \end{array}$$

Man erkennt nun, daß für die Integration nach α nur das in der Figur schraffirte Gebiet in Betracht kommt, d. h. daß für jeden Wert von $c\tau$ die in diesem Gebiet enthaltene Strecke der zugehörigen Ordinatenrichtung das Integrationsintervall für α bestimmt. Denn es genügen nur die zu Punkten dieses Gebietes gehörigen α-Werte gleichzeitig der Bedingung der Dreiecksmöglichkeit ($r - T < \alpha < r + T$) und der durch die Integrationsgrenzen von S festgelegten Beschränkung ($|a - c\tau| < \alpha < a + c\tau$).

Da (a) im schraffirten Gebiet constant gleich $\pi/4$ ist, so ergiebt sich S gleich $\pi/8$ multiplicirt in das eben genannte Integrationsintervall, d. h.

für das Gebiet $0A \,..\, 0 < \tau < \tau_1'$, $S = 0$,

" " " $AB \,..\, \tau_1' < \tau < \tau_1''$, $S = \dfrac{\pi}{8}(a + c\tau - r + T)$,

" " " $BC \,..\, \tau_1'' < \tau < \tau_2'$, $S = \dfrac{\pi}{8} 2T$, für das Gebiet $CD\,..\,\tau_2' < \tau < \tau_2''$, $S = \frac{\pi}{8}(r + T - c\tau + a)$,

„ „ „ $D\infty\,..\,\tau_2'' < \tau < \infty$, $S = 0$.

Aus den so bestimmten Werten von S folgen nach Division mit rT unmittelbar die auf pg. 373 angegebenen Werte von $\bar{\chi}$ und es sind die hier unter A), B), C), D) angeführten Definitionsgleichungen der Zeitpunkte $\tau_1', .. \tau_2''$ mit den Definitionsgleichungen 51) derselben identisch.

b) Von der in 50') definirten Größe $\bar{\chi}$ gehen wir über zu:

$$S = \frac{Ta^3\bar{\chi}}{9} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as\cos as}{as^2}\right)^2 \sin Ts \sin cs\tau \frac{ds}{s^2}.$$

Dieses Integral läßt sich auf das Integral (b) des § 8 zurückführen. Wir setzen in (b) $x = s$, $y = a$ und bilden zunächst:

$$(B) = \int_0^a (b)\, z\, dz = \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as\cos as}{as^2}\right)^2 \sin st \frac{ds}{s}.$$

Ersetzen wir dann noch in (B) die Größe t durch eine neue Integrationsvariable β, so wird ersichtlich:

$$S = \frac{1}{2}\int_{c\tau - T}^{c\tau + T} (B)\, d\beta.$$

Die Wertbestimmung von (b) war verschieden, je nachdem y die größte der drei Strecken y, z, t, also in unserer jetzigen Bezeichnung, je nachdem a die größte der drei Strecken a, z, β ist oder nicht. Da jedenfalls $a > z$ (vgl. die Integrationsgrenzen in (B)), so haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden: $a > \beta$ und $a < \beta$. Außerdem wollen wir den letzteren Fall noch weiter zergliedern in $a < \frac{\beta}{2}$ und $\frac{\beta}{2} < a < \beta$.

Fall $a > \beta$. Dann gilt für $z < a - \beta$ (Dreieck a, z, β unmöglich):

$$(b) = \frac{\pi}{2}\frac{z\beta}{a^2},$$

und für $a - \beta < z < a$ (Dreieck a, z, β möglich):

$$(b) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right)$$

Hieraus folgt:

$$(B) = \frac{\pi}{2}\frac{\beta}{a^2}\int_0^{a-\beta} z^2\,dz + \frac{\pi}{8}\int_{a-\beta}^a \left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right) z\,dz$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{4}{3}a\beta - \beta^2 + \frac{\beta^4}{12a^2}\right).$$

Fall $\beta > a > \frac{\beta}{2}$. Das Dreieck a, z, β ist unmöglich, wenn $z < \beta - a$; alsdann haben wir nach § 8, da a nicht mehr die größte der drei Strecken a, z, β ist:

$$(b) = 0.$$

Für den Rest des Integrationsintervalles, nämlich für $\beta - a < z < a$ ist dagegen das Dreieck möglich und daher:

$$(b) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(B) = \frac{\pi}{8}\int_{\beta - a}^a \left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right) z\,dz$$

Dieser Ausdruck erweist sich aber bei näherer Betrachtung mit dem vorherigen Werte von (B) als identisch, so daß diese beiden Fälle weiterhin nicht getrennt zu werden brauchen.

Fall $\frac{\beta}{2} > a$. Das Dreieck a, z, β ist jetzt im ganzen Integrationsintervall $0 < z < a$ unmöglich, da selbst an der oberen Grenze desselben $z + a = 2a < \beta$ ist. Mithin ist in diesem Falle durchweg $(b) = 0$ und dadurch auch:

$$(B) = 0.$$

Um von (B) zu S überzugehen, betrachten wir Fig. 4. Darin ist als Abscisse $c\tau$, als Ordinate β aufgetragen. Die Gerade RT stellt die Linie $\beta = 2a$, die Curven OP nnd OQ bez. $\beta = c\tau + T$ und $\beta = c\tau - T$ dar. Als Integrationsgebiet kommt nach der Definition von S lediglich das schraffirte Stück der Figur in Betracht, und zwar für jeden Wert von $c\tau$ der zu dieser Abscisse gehörige senkrechte Durchschnitt durch das schraffirte Gebiet. Denn es ist den beiden Bedingungen $\beta < 2a$ und $c\tau - T < \beta < c\tau + T$ lediglich in den Punkten des schraffirten Gebietes genügt. Die Ecken dieses Gebietes sind die Punkte $0, A, B$ und gehören zu den Abscissen $\tau = 0$, $\tau = \tau'$, $\tau = \tau''$, von denen sich die beiden letzteren berechnen aus:

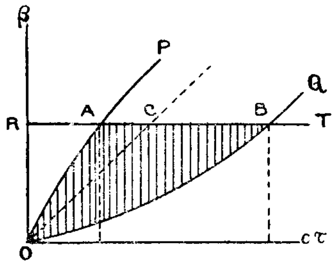

Fig. 4.

$$c\tau + T = 2a \text{ und } c\tau - T = 2a,$$

so daß diese Werte τ', τ'' mit den in 52) bestimmten Werten identisch sind.

Man hat nun nach der Figur:

$$\text{für } 0<\tau<\tau' \ldots S = \frac{\pi}{48}\int_{c\tau - T}^{c\tau + T}\left(4a\,\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right)d\beta,$$

$$\text{„ } \tau'<\tau<\tau'' \ldots S = \frac{\pi}{48}\int_{c\tau - T}^{2a}\left(4a\,\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right)\delta\beta$$

$$\text{„ } \tau''<\tau<\infty \ldots S = 0.$$

Führen wir die Funktion ein:

$$f(x) = \int_{2a}^{x}\left(4a\,\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right)d\beta = \frac{1}{20}\frac{x^5}{a^2} - x^3 + 2a\,x^2 - \frac{8}{5}a^3$$

so können wir die vorhergehende Wertbestimmung von S bequemer so schreiben:

$$0<\tau<\tau' \ldots S = \frac{\pi}{48}\left(f(c\tau+T) - f(c\tau - T)\right),$$

$$\tau'<\tau<\tau'' \ldots S = -\frac{\pi}{48}f(c\tau - T)$$

$$\tau''<\tau<\infty \ldots S = 0,$$

was mit den pag. 377 für $\overline{\chi}$ gemachten Angaben übereinstimmt.

c) Um den in 59) definirten Vektor $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ zu bestimmen, betrachten wir das Integral:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin sr - sr\cos sr}{sr}\,\frac{\sin sT - sT\cos sT}{sT}\sin as \sin cs\tau\,\frac{ds}{s^2},$$

welches mit $\mathfrak{T}/T^2$ multiplicirt jenem Vektor gleichkommt. Wir leiten S aus dem Integral (c) in § 8 ab. Setzen wir nämlich dort $x = s$, $y = r$, $z = T$ und führen wir statt t eine neue Integrationsvariable γ ein, so haben wir ersichtlich:

$$S = \frac{1}{2}\int_{|a - c\tau|}^{a + c\tau}(c)\,d\gamma.$$

Bei der Ausrechnung von S knüpfen wir an Fig. 3 an, in welcher uns der senkrechte Durchschnitt durch das schraffirte Gebiet wieder das für jeden Wert von $c\tau$ in Betracht kommende Integrationsintervall liefert. Nach § 8 hat dabei (c) in den Punkten des schraffirten Gebietes den Wert:

$$(c) = \frac{\pi}{8}\frac{r^2 + T^2 - \gamma^2}{rT}.$$

Wegen der Form des schraffirten Gebietes wären dabei zunächst wie unter a) die verschiedenen Teile OA, AB, ... der Ab-

scissenaxe zu unterscheiden und dementsprechend verschiedene Darstellungen für S zu berechnen, je nachdem τ liegt zwischen 0 und τ_1', zwischen τ_1' und τ_2'' etc. Indessen wurde bereits pag. 381 betont, daß für die Berechnung von $\mathfrak{R}$ diese Unterscheidung überflüssig ist und daß man bereits unter dem Integralzeichen $r = a$ setzen darf. Thun wir dieses, so fallen in Fig. 3 die Punkte A, B, R, T unter sich zusammen und wir haben nur die drei Fälle $0<\tau<\tau'$, $\tau'<\tau<\tau''$, $\tau''<\tau<\infty$ zu unterscheinen, unter τ', τ'' die in 52) definirten Zeitpunkte verstanden, die für $r = a$ aus τ_2' und τ_2'' hervorgehen. Nach der Fig. wird nun, wenn wir auch in den Ausdrücken von S und (c) nunmehr r durch a ersetzen:

$$\text{für } 0<\tau<\tau' \ldots S = \frac{\pi}{16}\int_{a-T}^{a+T}\frac{a^2 + T^2 - \gamma^2}{aT}d\gamma = \frac{\pi}{12}\frac{T^2}{a},$$

$$\text{„ } \tau'<\tau<\tau'' \ldots S = \frac{\pi}{16}\int_{c\tau - a}^{a+T}\frac{a^2 + T^2 - \gamma^2}{aT}d\gamma =$$

$$\frac{\pi}{16}\,\frac{2(a^2 + T^2 - aT) - (c\tau - a)(c\tau + T)}{3aT}(2a + T - c\tau),$$

$$\text{„ } \tau''<\tau<\infty \ldots S = 0.$$

Geht man von S zu $\overline{\mathfrak{r}\chi} = \mathfrak{T}S/T^2$ über, so erhält man die bereits pag. 382 angegebenen Werte.

d) Von dem in 59') definirten Vektor $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ spalten wir den Faktor $9\mathfrak{T}/aT^3$ ab und betrachten:

$$S = \int_0^\infty \left\{\;\right\}\frac{\sin as - as\cos as}{as}(\sin sT - sT\cos sT)\sin cs\tau\,\frac{ds}{s^4},$$

wo in der $\{\;\}$ der pag. 383 angegebene Ausdruck steht. Wir leiten S aus dem Integral (d) des § 8 ab und setzen zu dem Zwecke dort: $x = s$, $y = z = a$, $t = \delta$ (gleich einer neuen Integrationsvariabeln). Bilden wir zunächst eine Hülfsgröße:

$$(D) = \frac{1}{2}\int_{c\tau - u}^{c\tau + u}(d)\,d\delta = \int_0^\infty\left\{\;\right\}\frac{\sin as - as\cos as}{as}\sin su \sin cs\tau\,\frac{ds}{s^2},$$

so erkennen wir leicht, daß

$$S = \int_0^T (D)\,u\,du.$$

Nun ergiebt sich aus der früheren Wertbestimmung von (d) für $y = z = a$ und für $t = \delta$:

$$(d) = \frac{\pi}{16}\left\{\frac{3}{2} - \frac{\delta^2}{a^2} - \frac{(a - \delta^2)(3a + \delta)}{2a^4}\right\}\ldots \text{ wenn } \delta < 2a$$

$$(d) = 0 \ldots \text{ wenn } \delta > 2a.$$

Hieraus folgt der Wert von (D). Schreiben wir abkürzend:

$$g(x) = \int_{2a}^{x}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^3(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta = \frac{x^5}{10a^4}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{a^2}+\frac{2x^2}{a}-\frac{8a}{15}$$

so wird:

$$\text{für } c\tau+u<2a\ldots(D) = \frac{\pi}{32}\int_{c\tau-u}^{c\tau+u}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^3(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta$$

$$= \frac{\pi}{32}(g(c\tau+u)-g(c\tau-u)),$$

$$\text{,, } c\tau-u<2a<c\tau+u\,..(D) = \frac{\pi}{32}\int_{c\tau-u}^{2a}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^3(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta$$

$$= -\frac{\pi}{32}g(c\tau-u),$$

$$\text{,, } 2a<c\tau-u\ldots(D) = 0.$$

Hierfür können wir kürzer schreiben:

$$(D) = (D_1)-(D_2)$$

$$(D_1) = \frac{\pi}{32}g(c\tau+u) \text{ oder } (D_1)=0, \text{ je nachdem } c\tau+u<2a \text{ oder } >2a,$$

$$(D_2) = \frac{\pi}{32}g(c\tau-u) \text{ ,, } (D_2)=0, \text{ ,, ,, ,, } c\tau-u<2a \text{ ,, } >2a.$$

Dementsprechend werden wir auch setzen:

$$S = S_1-S_2,\ S_1 = \int_0^T(D_1)\,u\,du,\ S_2 = \int_0^T(D_2)\,u\,du$$

Führen wir nun in S_1 bez. S_2 statt u die neue Variable:

$$v = c\tau+u \quad \text{bez.} \quad v = c\tau-u$$

ein, so wird:

$$S_1 = \frac{\pi}{32}\int g(v)(v-c\tau)\,dv,\ S_2 = \frac{\pi}{32}\int g(v)(v-c\tau)\,dv.$$

Die Integration in S_1 ist zu erstrecken von $v = c\tau$ bis $v = c\tau+T$, falls $c\tau+T<2a$, sonst von $v = c\tau$ bis $v = 2a$. Dies entspricht gerade dem Teile OAC des in Fig. 4 schraffirten Gebietes. Andrerseits ist die Integration in S_2 zu erstrecken von $v = c\tau$ bis $v = c\tau-T$, falls $c\tau<2a$ und also auch $v = c\tau-u<2a$, im anderen Falle von $v = 2a$ bis $v = c\tau-T$. Diese Integrationsvorschrift entspricht gerade dem Teile OCB des in Fig. 4 schraffirten Gebietes, wobei aber die Integration im Sinne der abnehmenden Ordinaten v, von dem oberen Rande OCB nach dem unteren OB hin zu erstrecken ist. Die Differenz $S_1-S_2 = S$ wird daher

gefunden, indem wir das Integral

$$\int g(v)(v-c\tau)\,dx$$

in Fig. 4 bei jedem Werte von $c\tau$ über den zur Abscisse $c\tau$ gehörigen senkrechten Durchschnitt durch das schraffirte Gebiet im Sinne der wachsenden v erstrecken.

Daraus ergiebt sich unmittelbar die folgende Wertbestimmung von S, welche mit den pag. 383 für $\overline{r\chi}$ gemachten Angaben übereinstimmt: Es sei

$$G(x) = \int_{2a}^{x} g(v)(v-c\tau)\,dv;$$

dann gilt:

$$\text{für } 0<\tau<\tau'\ldots S = \frac{\pi}{32}(G(c\tau+T)-G(c\tau-T))$$

$$\text{,, } \tau'<\tau<\tau''\ldots S = -\frac{\pi}{32}G(c\tau-T)$$

$$\text{,, } \tau''<\tau<\infty\ldots S = 0.$$

e) Wir wollen jetzt die beschränkende Bedingung $T<c\tau$ fallen lassen, welche stets erfüllt war, wenn keine Ueberlichtgeschwindigkeiten vorkommen. Demgegenüber kann jetzt T ganz beliebig sein, so daß wir weder Ueberlichtgeschwindigkeit noch einen Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit ausschließen.

Ohne irgend welche Umstände ist dies bei den Betrachtungen unter a) und b) möglich. Wir bemerken, daß in den dortigen beiden Integralen S die Größen T und $c\tau$ symmetrisch vorkommen und daß eine Unsymmetrie zwischen T und $c\tau$ in den Endwerten von S nur dadurch zu Stande kommen konnte, daß wir unter a) und b) mit der Voraussetzung $T<c\tau$ operirten. Indem wir nun die Größen T und $c\tau$ mit einander vertauschen, geht die bisherige Voraussetzung $T<c\tau$ in ihr Gegenteil über. Die zugehörigen Endwerte von S müssen dann ebenfalls durch Vertauschung von T und $c\tau$ aus den früheren hervorgehen.

Wir schreiben das Ergebnis mit Benutzung des Zeichens $|\ |$ des absoluten Betrages sogleich so, daß es auch den früheren Fall $T<c\tau$ mit umfaßt; dabei ist dieses Zeichen nicht nur in den Werten von S selbst, sondern auch in den Definitionsgleichungen τ'', τ_1'' etc. zu verwenden. Das Ergebnis lautet bei dem unter a) betrachteten Integral S:

$$\text{für } 0<\tau<\tau_1' \text{ wird } S = 0,$$

$$\text{,, } \tau_1'<\tau<\tau_1'' \text{ ,, } S = \frac{\pi}{8}(c\tau+T+a-r),$$

$$\text{,, } \tau_1''<\tau<\tau_2' \text{ ,, } S = \frac{\pi}{8}(c\tau+T-|c\tau-T|),$$

für $\tau_2' < \tau < \tau_2''$ „ $S = \frac{\pi}{8}(a + r - |c\tau - T|)$,

„ $\tau_2'' < \tau < \infty$ „ $S = 0$.

Die Bedeutung der Grenzwerte $\tau_1', \ldots$ ist dabei allgemein aus den folgenden Gleichungen zu entnehmen:

$$\tau_1') \ldots c\tau + T = r - a,$$
$$\tau_1'') \ldots |c\tau - T| = r - a,$$
$$\tau_2') \ldots c\tau + T = r + a,$$
$$\tau_2'') \ldots |c\tau - T| = r + a.$$

Entsprechend modificirt sich das Resultat unter b). Es gilt allgemein:

für $0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{48}\{f(c\tau + T) - f(|c\tau - T|)\}$,

„ $\tau' < \tau < \tau'' \ldots S = -\frac{\pi}{48} f(|c\tau - T|)$,

„ $\tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0$;

dabei bestimmen sich τ', τ'' aus den Gleichungen:

$$\tau') \ldots c\tau + T = 2a, \quad \tau'') \ldots |c\tau - T| = 2a.$$

Noch sei hervorgehoben, obwohl es für das Folgende belanglos ist, daß sowohl bei Unter- wie bei Ueberlichtgeschwindigkeit mehrere Wurzeln der die Grenzen $\tau', \tau'', \tau_1', \ldots$ definirenden Gleichungen vorkommen können, falls die Bewegung sehr schnell veränderlich ist. Man erkennt aus den Figuren dieses Paragraphen leicht, daß dann bei der Wertbestimmung von S weitere Intervalle der Variabeln $c\tau$ zu unterscheiden und bei der Berechnung von $\mathfrak{F}$ weitere Integrale zwischen den Wurzeln der genannten Gleichungen hinzuzufügen sind.

§ 15. *Geradlinige Bewegung im Allgemeinen. Stationäre Bewegung bei Unter- und Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Wir wollen hier die beträchtlichen Vereinfachungen zusammenstellen, die an den allgemeinen Formeln anzubringen sind, wenn die Bewegung im Besonderen geradlinig erfolgt. Da hierbei $\mathfrak{v}_t$, $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ und $\mathfrak{T}$ die unveränderliche Richtung der Bewegung haben, so fällt nach (54) und (54') auch $\mathfrak{F}$ in diese Richtung. Indem wir dieses im Gedächtnis behalten, können wir v und T statt $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{T}$ schreiben. Während man bei allgemeiner Bewegung hat

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_t) - (\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau})}{T}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau})}{T},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_t)}{T},$$

dürfen wir bei geradliniger Bewegung einfacher setzen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v_t - v_{t-\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = v_{t-\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = v_t.$$

a) Oberflächenladung. Unter dem Integralzeichen in Gl. (54) können wir nun schreiben:

$$63) \qquad -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}}{T} = +\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T} + \frac{v_t v_{t-\tau}}{T^2}.$$

Hier hebt sich das letzte Glied der rechten Seite gegen das in (54) enthaltene, bei geradliniger Bewegung gleichlautende Glied:

$$-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\frac{\mathfrak{T}}{T^3} = -\frac{v_t v_{t-\tau}}{T^2}.$$

Unser Integral wird daher:

$$c^2\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau - 2a}{T^2}\,d\tau + \int_{\tau'}^{\tau''}(c\tau - 2a)\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T}\,d\tau.$$

Der zweite Bestandteil läßt sich durch partielle Integration umformen, wobei zu beachten ist, daß nach (52)

$$\frac{c\tau'' - 2a}{T''} = +1, \quad \frac{c\tau' - 2a}{T'} = -1$$

und daß nach Obigem

$$\frac{v_{t-\tau}}{T} = \frac{\partial}{\partial \tau}\log T;$$

es ergiebt sich:

$$\int_{\tau'}^{\tau''}(c\tau - 2a)\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T}\,d\tau = v_{t-\tau''} + v_{t-\tau'} - c\log\frac{T''}{T'}.$$

Fassen wir alles zusammen, so können wir statt (54) bei geradliniger Bewegung schreiben:

$$64) \qquad \frac{-16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\frac{c^2}{v_t^2}\log\frac{c + v_t}{c - v_t} + \log\left\{\frac{c + v_t}{c - v_t}\frac{T'}{T''}\right\} + \frac{2c}{v_t} + c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau - 2a}{T^2}\,d\tau$$

b) Volumladung. An Stelle von (63) benutzen wir hier zur Vereinfachung die folgende Gleichung, die sich aus den am Anfange dieses Paragraphen angegebenen Beziehungen für $\partial T/\partial t$ und $\partial T/\partial \tau$ leicht beweisen läßt:

$$63') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f}{T} = v_t v_{t-\tau}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} - \frac{\partial}{\partial \tau}v_{t-\tau}\frac{f}{T} \pm \frac{c v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f}{\partial T};$$

dabei ist in dem letzten Gliede das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem das Argument von f gleich $c\tau + T$, oder gleich $c\tau - T$ bez., wie wir der Allgemeinheit wegen lieber sagen wollen, gleich $|c\tau - T|$ ist.

Setzen wir dies in die allgemeingültige Gl. (62) ein, so hebt sich das erste Glied der rechten Seite von (63') gegen das in (62) vorkommende Glied:

$$-\frac{\mathfrak{T}}{T}(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} = -v_t v_{t-\tau}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T}.$$

In dem zweiten Gliede der rechten Seite von (63') läßt sich die Integration nach τ ausführen. Dasselbe liefert zu $\mathfrak{F}$ die folgenden Beiträge:

$$-\int_0^{\tau'}\frac{d}{d\tau}v_{t-\tau}\frac{f(c\tau+T)}{T}d\tau + \int_0^{\tau''}\frac{d}{d\tau}v_{t-\tau}\frac{f(|c\tau-T|)}{T}d\tau$$
$$= \left[v_{t-\tau}\frac{f(|c\tau-T|)}{T}\right]_0^{\tau''} - \left[v_{t-\tau}\frac{f(c\tau+T)}{T}\right]_0^{\tau'}.$$

An der oberen Grenze τ'' und τ' wird das Argument von f in beiden Teilen dieses Ausdrucks gleich $2a$ (Gl. (62')) und es ist $f(2a)$ nach der Definition von f in § 14b) gleich Null. An der unteren Grenze 0 wird jeder der beiden Teile wegen des Nenners T unendlich groß, aber in solcher Weise, daß ihre Differenz verschwindet (man vgl. die Bedeutung von $f(x)$ in § 14 b) und berücksichtige insbesondere, daß das Glied mit der ersten Potenz von x in f fehlt). Somit liefert das zweite Glied der rechten Seite von (63') keinen Beitrag zu $\mathfrak{F}$, wenn wir, wie es durch die Schlußbemerkung zu § 11 vorgeschrieben wurde, die beiden genannten Teile richtig zusammenfassen.

Das dritte Glied in (63') vereinigen wir mit dem Gliede

$$\frac{\mathfrak{T}}{T}c^2\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} = \frac{c^2}{T}\frac{\partial f}{\partial T} - \frac{c^2}{T^2}f$$

in Gl. (62) und erhalten nach Division mit c:

$$\text{64')}\quad -\frac{32\pi a^4}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = \int_0^{\tau'}\left\{\frac{c+v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T} - \frac{c}{T^2}f(c\tau+T)\right\}d\tau$$
$$-\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c-v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T} - \frac{c}{T^2}f(|c\tau-T|)\right\}d\tau.$$

Wir machen eine Anwendung dieser Formeln auf den einfachsten Fall der stationären Bewegung. Hier ist

$$v_t = v_{t-\tau} = v, \quad T = v\tau,$$
$$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{2a}{|c-v|}, \quad T' = \frac{2av}{c+v}, \quad T'' = \frac{2av}{|c-v|}.$$

Bei Oberflächenladung müssen wir uns nach § 13 auf Unterlichtgeschwindigkeit beschränken; bei Volumladung werden wir dagegen die stationäre Bewegung mit Unter- und Ueberlichtgeschwindigkeit gesondert zu untersuchen haben.

c) Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Von den vier Termen der rechten Seite von (64) verschwindet der zweite; der vierte ergiebt:

$$\frac{c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{c}{\tau} - \frac{2a}{\tau^2}\right)d\tau =$$
$$\frac{c^2}{v^2}\log\frac{\tau''}{\tau'} + \frac{2ac}{v^2}\left(\frac{1}{\tau''} - \frac{1}{\tau'}\right) = \frac{c^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v} - \frac{2c}{v};$$

er hebt sich also gegen den ersten und dritten Term in (64) und es ergiebt sich $\mathfrak{F} = 0$, d. h. das wohlbekannte Resultat: die stationäre Translation ist bei Unterlichtgeschwindigkeit eine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons.

d) Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Wie mehrfach hervorgehoben, sind die beiden Integrationen in (64') zusammenzufassen, da jede von ihnen bei $\tau = 0$ divergiren würde. Wollen wir sie gesondert ausführen, was hier bequemer ist, so müssen wir von f den für $\tau = 0$ nicht verschwindenden Teil abspalten. Wir setzen etwa (vgl. Gl. (51')):

$$f(x) = -\frac{8}{5}a^3 + x^2\varphi(x), \quad \varphi(x) = 2a - x + \frac{1}{20}\frac{x^3}{a^2}.$$

Der constante Teil von f giebt folgenden Beitrag zur rechten Seite von (64'):

$$-\frac{8}{5}a^3c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{T^2} = -\frac{8}{5}\frac{a^3c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c}{v}a^2.$$

Sodann führen wir in dem ersten bezw. zweiten Integral von (64') als neue Integrationsvariable ein:

$$x = c\tau + T = (c+v)\tau \text{ bez. } x = c\tau - T = (c-v)\tau.$$

Beide Variable x laufen dann nach Definition der Grenzen τ', τ'' von 0 bis $2a$ und es wird im ersten Integral:

$$\frac{\partial f(c\tau + T)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c+v},$$

im zweiten Integral:

$$\frac{\partial f(c\tau - T)}{\partial T} = -2x\varphi(x) - x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c-v}.$$

Der variable Teil von f liefert daher zur rechten Seite von (64′) den Beitrag:

$$\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x) + x\,\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx$$
$$+\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x) + x\,\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \frac{c(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx$$
$$= \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x) + x\,\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx$$
$$= \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\frac{d}{dx}\{x\varphi(x)\}\,dx = \frac{4ac}{v}\,\varphi(2a) = \frac{8}{5}\frac{c}{v}\,a^2.$$

Dieser Beitrag hebt sich gegen denjenigen des constanten Teiles von f. Wir haben also wieder $\mathfrak{F} = 0$ und das unter c) ausgesprochene Resultat.

e) Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Der constante Teil von f liefert mit Rücksicht auf die veränderte Bedeutung von $\tau'' = 2a/(v-c)$ zur rechten Seite von (64′) den Beitrag:

$$-\frac{8}{5}\,\frac{a^3c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\,\frac{c^2}{v^2}\,a^2.$$

Was den variabeln Teil betrifft, so setzen wir in dem ersten bezw. zweiten Integral von (64′):

$$x = c\tau + T = (c+v)\tau \text{ bez. } x = |c\tau - T| = T - c\tau = (v-c)\tau,$$

so daß beide Variable x wieder von 0 bis $2a$ laufen. Man hat nun im ersten Integral wie unter d):

$$\frac{\partial f(c\tau + T)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c+v},$$

im zweiten Integral im Gegensatz zu d):

$$\frac{\partial f(T - c\tau)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{v-c}.$$

Der Beitrag des variabeln Teiles von f lautet daher:

$$\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx$$
$$-\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \frac{c(v-c)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx;$$

der Unterschied gegen die entsprechende Gleichung unter d) besteht darin, daß die zweite Zeile das umgekehrte Vorzeichen hat, wie dort. Wir erhalten von hieraus für den fraglichen Beitrag weiter:

$$2\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{2c^2}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx =$$
$$2\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)\int_0^{2a}\varphi\,dx + 2\int_0^{2a}\frac{d}{dx}\{x\varphi\}\,dx$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von φ:

$$\frac{22}{5}\,a^2\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) + \frac{8}{5}\,a^2.$$

Fügen wir den Beitrag des constanten Teiles von f hinzu, so wird nach Gl. (64′):

$$-\frac{32\pi a^4}{3\varepsilon^2}\,\mathfrak{F} = 6a^2\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right),$$

also:

65) $$-\mathfrak{F} = \frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right).$$

Die gleichförmige Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit ist keine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons. Es muß vielmehr nach Gl. (45′) eine äußere Kraft $\mathfrak{F}_a$ zur Verfügung stehn, welche $\mathfrak{F}$ das Gleichgewicht hält, wenn anders die gleichförmige Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit Bestand haben soll. Da $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_a = 0$ sein soll, so wird $\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}$ ebenfalls durch (65) bestimmt.

Der Richtung nach fällt diese äußere Kraft in die Translationsrichtung des Elektrons. Was ihre Größe betrifft, so bemerken wir, daß sich dieselbe für $v = c$ stetig an den bei Unterlichtgeschwindigkeit geltenden Wert $\mathfrak{F} = 0$ anschließt, (vgl. Fig. 5), und daß sie sich mit wachsendem v dem

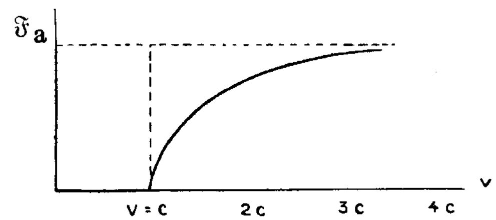

Fig. 5.

Werte

$$\frac{9}{4}\frac{\varepsilon^2}{4\pi a^2}.$$

asymptotisch annähert. Letztere Größe ist gleich der elektrostatischen Coulomb'schen Abstoßung zweier im Abstande a befindlicher Punktladungen von dem Betrage $3\varepsilon/2$.

§ 16. *Quasistationäre geradlinige Bewegung, elektromagnetische Masse.*

Unter quasistationärer Bewegung versteht man eine solche, die sich von der stationären nur wenig unterscheidet. Wir haben zunächst diese allgemeine Aussage für den Fall der geradlinigen quasistationären Bewegung zu verschärfen.

Bedeuten v und p ohne Index die Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t, so wird für eine frühere Zeit $t-\tau$:

66) $$v_{t-\tau} = v - p\tau + \cdots$$

Wir nehmen nun an, daß schon das Glied $p\tau$ und um so mehr die nicht hingeschriebenen, mit den Differentialquotienten von p behafteten Glieder klein gegen v sind für alle in Betracht kommenden Werte der Integrationsvariabeln τ. Indem wir auf den größten Wert τ'' von τ achten und für diesen in erster Näherung den bei der stationären Bewegung gültigen Wert $\frac{2a}{|c-v|}$ einsetzen, präcisiren wir unsere Voraussetzung so:

$$\frac{2ap}{|c-v|} \text{ klein gegen } v$$

oder

$$\frac{2ap}{v^2} \text{ klein gegen } \frac{|c-v|}{v}.$$

Je mehr sich also v der Lichtgeschwindigkeit nähert, um so mehr ist die Größe von p zu beschränken, damit die Bewegung noch als quasistationär behandelt werden kann. Wenn v beträchtlich von c verschieden ist, z. B. $v = c/2$, so genügt es, daß

$$\frac{2ap}{v^2} \text{ klein gegen } 1.$$

Es bedeutet aber $2a/v$ die Zeit, während welcher das Elektron mit der Geschwindigkeit v um seinen Durchmesser fortrückt und daher $2ap/v = \Delta v$ die Geschwindigkeitsänderung während dieser Zeit. Unsere vorstehende Bedingung verlangt also, wenn v wesentlich von c verschieden ist, lediglich

$$\Delta v \text{ klein gegen } v.$$

Der Begriff der quasistationären Bewegung ist hiernach ein sehr weiter; er umfaßt, wenn v nicht nahezu gleich c ist, alle Fälle von nicht extravaganter Beschleunigung.

Wir berechnen nun:

66') $$T = \int_{t-\tau}^{t} v_u du = v\tau - \frac{p}{2}\tau^2, \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{v\tau}\left(1 + \frac{p\tau}{2v}\right)$$

und bestimmen die Grenzen τ', τ'' unter der Voraussetzung $v < c$ aus den Gleichungen:

$$c\tau' + v\tau' - \frac{p}{2}\tau'^2 = 2a, \qquad c\tau'' - v\tau'' + \frac{p}{2}\tau''^2 = 2a,$$

aus welchen sich in erster Näherung die bei stationärer Bewegung gültigen Werte:

67) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{2a}{c-v}, \quad T' = \frac{2av}{c+v}, \quad T'' = \frac{2av}{c-v}$$

ergeben; indem wir diese in das mit p behaftete kleine [1]) Glied der vorstehenden Gleichungen einsetzen, finden wir leicht in zweiter Näherung:

68) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}\left(1 + \frac{ap}{(c+v)^2}\right), \quad \tau'' = \frac{2a}{c-v}\left(1 - \frac{ap}{(c-v)^2}\right).$$

Die entsprechenden Werte von T sind $T' = 2a - c\tau'$, $T'' = -2a + c\tau''$, d. h.:

68') $$T' = \frac{2av}{c+v}\left(1 - \frac{acp}{v(c+v)^2}\right), \quad T'' = \frac{2av}{c-v}\left(1 - \frac{acp}{v(c-v)^2}\right).$$

Bei Ueberlichtgeschwindigkeit $v > c$ sind, während τ' und T' ersichtlich die vorstehenden Werte behalten, τ'' und T'' folgendermaßen zu bestimmen:

68'') $$\tau'' = \frac{2a}{v-c}\left(1 + \frac{ap}{(v-c)^2}\right), \quad T'' = \frac{2av}{v-c}\left(1 + \frac{acp}{v(v-c)^2}\right)$$

Zur Abkürzung der Formeln führen wir die beiden dimensionslosen Zahlen ein:

69) $$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{2ap}{c^2}.$$

1) Damit das genannte Glied in der Gleichung für τ'' thatsächlich relativ klein sei gegen die anderen Glieder der linken Seite, müssen wir allgemein verlangen:

$$\frac{p}{2}\tau'' \text{ klein gegen } c - v \text{ oder } \frac{ap}{v^2} \text{ klein gegen } \left(\frac{c-v}{v}\right)^2;$$

hierdurch wird unsere ursprüngliche Forderung, in ihrer Anwendung auf die Umgebung der Lichtgeschwindigkeit, noch weiter verschärft.

a) Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Auf der rechten Seite von (64) lauten die drei ersten Terme, in den Abkürzungen β und γ geschrieben:

$$-\frac{1}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\log\left(1-\frac{\gamma}{2\beta(1+\beta)^2}\right)-\log\left(1-\frac{\gamma}{2\beta(1-\beta)^2}\right)+\frac{2}{\beta}$$

oder, sofern γ als kleine Größe behandelt wird:

$$70)\qquad \frac{2\gamma}{(1-\beta^2)^2}-\frac{1}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{2}{\beta}.$$

Der vierte Term von (64) wird wegen (66'):

$$\frac{1}{\beta^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{2a}{c\tau^2}\right)\left(1+\frac{p\tau}{v}\right)d\tau.$$

Multipliciren wir aus, so dürfen wir in den mit p behafteten kleinen Gliedern für τ', τ'' die ersten Näherungen (67) einsetzen. Wir erhalten so:

$$70')\qquad \frac{\gamma}{\beta^2}\left(\frac{2}{1-\beta^2}-\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Dagegen müssen wir in den von p freien Gliedern genauer rechnen und die zweiten Näherungen (68) benutzen. Hieraus entspringt:

$$70'')\qquad \frac{1}{\beta^2}\left(\log\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{\gamma(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2}-\left(2\beta-\frac{\gamma}{(1-\beta^2)}\right)\right).$$

Wie man sieht, ist (70'') mit (70) entgegengesetzt gleich. Es bleibt daher auf der rechten Seite von (64) nur der Ausdruck (70') übrig und man erhält:

$$-\frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}=\gamma\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right),$$

oder

$$71)\qquad -\mathfrak{F}=\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)p.$$

Den Faktor von p in dieser Gleichung nennen wir mit Lorentz elektromagnetische Masse oder mit Abraham specieller longitudinale elektromagnetische Masse. Er beträgt:

$$71')\qquad \mu=\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Der Sinn dieser Bezeichnung ergiebt sich unmittelbar daraus, daß unsere quasistationäre Bewegung keine mögliche kräftefreie Bewegung ist, weil bei ihr nicht $\mathfrak{F}=0$ ist, daß sie vielmehr eine

äußere Kraft $\mathfrak{F}_a$ erfordert, von solcher Größe, daß

$$\mathfrak{F}+\mathfrak{F}_a=0 \text{ oder } \mathfrak{F}_a=-\mathfrak{F}=\mu p.$$

Bei quasistationärer Bewegung gilt also, wie in der gewöhnlichen Mechanik, Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung. Es liegt aber auf der Hand, daß diese Proportionalität nur eine näherungsweise, durch Vernachlässigung der höheren Potenzen und Differentialquotienten von p hervorgerufene ist. Auch das Unendlichwerden von μ für $\beta=1$ ist nur durch diese Vernachlässigung verschuldet (vgl. hierzu § 17); überhaupt ist die Anwendung unserer Formeln auf die Umgebung von $\beta=1$ unerlaubt, weil wir der zu Anfang dieses Paragraphen oder der in der Anm. zu pg. 403 ausgesprochenen Bedingung der quasistationären Bewegung in der unmittelbaren Nähe von $\beta=1$ durch keinen noch so kleinen Wert von γ genügen können.

b) Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Wir haben die rechte Seite von (64') für die bei quasistationärer Bewegung gültigen Werte von $v, T\ldots$ auszurechnen. Wie im vorigen Paragraphen spalten wir von f den constanten Teil ab und setzen: $f(x)=-\frac{8}{5}a^3+x^2\varphi(x)$. Der constante Teil liefert dann zur rechten Seite von (64') den Beitrag (vgl. (66')):

$$-\frac{8}{5}a^3c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{T^2}=-\frac{8}{5}\frac{a^3c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(1+\frac{p\tau}{v}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Indem wir in dem mit p behafteten Gliede die Werte (67) für τ', τ'', in dem von p freien Gliede die genaueren Werte (68) benutzen, entsteht:

$$72)\qquad -\frac{4}{5}\frac{a^2c}{v}\left(2-\frac{\gamma}{\beta(1-\beta^2)}+\frac{\gamma}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Wir berechnen darauf das erste Integral der rechten Seite von (64') für den variabeln Teil von f. Führen wir als neue Integrationsvariable ein $x=c\tau+T$, so finden wir mit Rücksicht auf (66) und (66'), indem wir fortgesetzt die mit p behafteten Glieder als kleine Größen behandeln:

$$d\tau=\frac{dx}{c+v}\left(1+\frac{px}{(c+v)^2}\right),\quad \frac{c+v_{t-\tau}}{T}=\frac{(c+v)^2}{vx}\left(1-\frac{px}{2v}\frac{2v-c}{(c+v)^2}\right),$$

$$\frac{c}{T^2}=\frac{c(c+v)^2}{v^2x^2}\left(1+\frac{pcx}{v(c+v)^2}\right),\quad \frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T}=2x\varphi+x^2\frac{d\varphi}{dx};$$

unser erstes Integral wird daher:

$$\text{72}')\quad \begin{aligned} &\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(1+\frac{pcx}{2v(c+v)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx \\ &-\frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{px}{v(c+v)}\right)\varphi\,dx. \end{aligned}$$

In entsprechender Weise behandelt, giebt das zweite Integral der rechten Seite von (64′) mit $x = c\tau - T$:

$$\text{72}'')\quad \begin{aligned} &-\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(1+\frac{pcx}{2v(c-v)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx \\ &-\frac{c(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{px}{v(c-v)}\right)\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Indem wir die Differenz beider bilden, sondern wir die von p freien Glieder von den mit p behafteten und erhalten:

$$\frac{2c}{v}\int_0^{2a}\left(\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx+\frac{pc^2}{v^2(c^2-v^2)}\int_0^{2a}\left(2x\varphi+x^2\frac{d\varphi}{dx}\right)dx$$
$$=\frac{2c}{v}[x\varphi]_0^{2a}+\frac{pc^2}{v^2(c^2-v^2)}[x^2\varphi]_0^{2a},$$

d. h.:

$$\text{73)}\quad \frac{8}{5}\frac{a^2c}{v}+\frac{8}{5}\frac{a^3c^2p}{v^2(c^2-v^2)}.$$

Das erste dieser Glieder hebt sich gegen das erste Glied von (72), wie es zu erwarten war, weil $\mathfrak{F}$ mit verschwindendem p selbst verschwinden muß. Führen wir im zweiten dieser Glieder die Abkürzungen β und γ ein, so ergiebt sich als Summe von (72) und (73):

$$\frac{4}{5}a^2\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\gamma$$

und es folgt aus (64′):

$$\text{74)}\quad -\mathfrak{F}=\frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi a c^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)p.$$

Dieser Wert, sowie der für die elektromagnetische Masse daraus folgende unterscheidet sich nur durch den Faktor 6/5 von von dem für Oberflächenladung gefundenen, Gl. (71) und (71′). Unser Resultat stimmt sowohl bei Oberflächen- wie bei Volumladung mit dem Abraham'schen überein; der Unterschied in den Zahlenfaktoren rührt lediglich von der anderen Wahl der Einheit

für ε her (hier elektrostatische, sog. rationelle Einheit, dort elektromagnetische, conventionelle Einheit).

c) Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Wir gehen auch jetzt von Gl. (64′) aus und zerlegen f in seinen constanten und seinen variabeln Teil. Der Beitrag des constanten Teiles berechnet sich ähnlich wie in (72), nur ist dabei die abgeänderte Bedeutung von τ'' (Gl. (68″)) zu beachten. Man erhält:

$$\text{75)}\quad -\frac{4}{5}\frac{a^2}{\beta^2}\left(2+\frac{\gamma}{\beta^2-1}+\frac{\gamma}{\beta}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Der Beitrag des variabeln Teils von f im ersten Integral der Gl. (64′) ist nach wie vor durch (72′) gegeben; statt (72″) aber erhalten wir, indem wir die Integrationsvariable $x = T - c\tau$ einführen:

$$\text{75}')\quad \begin{aligned} &\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(1-\frac{pcx}{2v(v-c)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx \\ &+\frac{c(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{px}{v(v-c)}\right)\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Die Differenz von (72′) und (75′) wird nun:

$$2\int_0^{2a}\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx-\frac{2c^2}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx-\frac{pc^2}{v^2(v^2-c^2)}\int_0^{2a}\left(2x\varphi+x^2\frac{d\varphi}{dx}\right)dx$$
$$=2\Big[x\varphi\Big]_0^{2a}+2\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\int_0^{2a}\varphi\,dx-\frac{pc^2}{v^2(v^2-c^2)}\Big[x^2\varphi\Big]_0^{2a},$$

also wegen der Bedeutung von φ bei Benutzung der Abkürzungen β und γ:

$$\text{76)}\quad +\frac{4}{5}a^2\left(2+\frac{11}{2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}-\frac{\gamma}{\beta^2(\beta^2-1)}\right).$$

Indem wir den Beitrag (75) des constanten Gliedes von f hinzufügen, erhalten wir aus (64′):

$$\text{77)}\quad -\mathfrak{F}=\frac{3\varepsilon^2}{40\pi a^2}\left(\frac{15}{2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}-\frac{2\gamma}{\beta^2(\beta^2-1)}-\frac{\gamma}{\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Hier ist die zur Unterhaltung der quasistationären Bewegung erforderliche Kraft $\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}$ natürlich nicht mit der Beschleunigung p bez. mit γ proportional, weil schon die stationäre Bewegung bei Ueberlichtgeschwindigkeit Kraftaufwand erfordert.

Spaltet man $\mathfrak{F}_a$ in einen von der Beschleunigung unabhängigen Teil $\mathfrak{F}_1$ und einen derselben proportionalen Teil $\mathfrak{F}_2$, so wird

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}$$

selbstverständlich mit der in § 15 e) gefundenen Kraft identisch. Andrerseits ergiebt sich

$$78)\qquad \mathfrak{F}_2 = -\frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\frac{2}{\beta^2(\beta^2-1)}+\frac{1}{\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)p.$$

Das negative Vorzeichen in (78) bringt es mit sich, daß der zur Beschleunigung p gehörige Bestandteil $\mathfrak{F}_2$ der Kraft dieser Beschleunigung entgegen gerichtet ist und daß, was die Gesammtkraft $\mathfrak{F}_a$ betrifft, zur Aufrechterhaltung einer verzögerten Bewegung eine größere Kraft gehört wie zur Aufrechterhaltung einer beschleunigten!

In der Ausdrucksweise der gewöhnlichen Mechanik könnte man sagen: $\mathfrak{F}_1$ wird zur Ueberwindung einer dissipirenden Wirkung (nämlich der Ausstrahlung), $\mathfrak{F}_2$ zur Ueberwindung einer gewissen Trägheitswirkung benötigt. Wollte man auch zu dieser Trägheitswirkung eine scheinbare Masse $\mu = \mathfrak{F}_2/p$ hinzudefiniren, so würde dieselbe negativ ausfallen!

Es liegt nahe, im Anschluß an Gl. (77) nach einer möglichen kräftefreien, quasibeschleunigten Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit zu fragen, indem man $\mathfrak{F} = 0$ setzt und daraus den Wert von γ entnimmt, z. B. in der Form:

$$78')\qquad \frac{\beta^2}{\gamma} = \frac{2}{15}\left(\frac{2\beta^2}{(\beta^2-1)^2}+\frac{\beta}{\beta^2-1}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Man könnte hiernach zu jedem Geschwindigkeitsverhältnis β das Beschleunigungsverhältnis γ bestimmen und weiterhin den Ablauf der kräftefreien Bewegung durch Integration finden. Indessen zeigt sich, daß die vorstehende Gleichung mit der am Anfang dieses § entwickelten Grundbedingung quasistationärer Bewegungen im Allgemeinen unverträglich ist, da sie ganz enorme Beschleunigungen zur Folge haben würde. Wir forderten dort:

$$\frac{2\,ap}{v^2} \text{ klein gegen } \frac{|c-v|}{v},$$

d. h. bei Ueberlichtgeschwindigkeit

$$\frac{\gamma}{\beta^2} \text{ klein gegen } \frac{\beta-1}{\beta} \text{ oder } \frac{\beta^2}{\gamma} \text{ groß gegen } \frac{\beta}{\beta-1}.$$

Bei großem β müßte also bei einer als quasistationär zu behandelnden Bewegung β^2/γ groß gegen 1 sein, während sich nach (78') β^2/γ mit wachsendem β der Null nähert. Auch schon für kleine β ($\beta = 2$ oder 3) widerspricht, wie man leicht zahlenmäßig nachrechnet, Gl. (78') der eben aufgestellten Forderung und wird erst für solche Werte von β, die der Einheit ziemlich nahe liegen, mit jener verträglich, widerspricht dann aber immer noch der verschärften Forderung aus Anm. 1 pag. 403. Die durch (78') gegebene Bewegung liegt daher durchweg außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Formel (77), aus der wir sie ableiteten, und hat somit keinen Anspruch auf Glaubwürdigkeit.

Die Frage nach der (oder richtiger nach einer) kräftefreien Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit scheint ebenso schwierig zu sein, wie sie mit Rücksicht auf die Theorie der γ-Strahlen des Radiums dringlich ist. Nach dem Vorangehenden scheint es bis zu einem gewissen Grade wahrscheinlich, daß diese Bewegung eine sehr rasch sich selbst beschleunigende ist.

§ 17. *Gleichförmig beschleunigte Bewegung.*

Zur richtigen Beurteilung des Begriffes „elektromagnetische Maße" ist es gut, neben der quasi-beschleunigten auch eine wirklich beschleunigte Bewegung zu betrachten. Wir beschränken uns dabei auf Oberflächenladung und Unterlichtgeschwindigkeit und setzen die Bewegung als gleichförmig beschleunigt voraus (p constant, aber der Größe nach nicht beschränkt). Die Gl. (66) und (66') für $v_{t-\tau}$ und T gelten dann in Strenge; die dort vorkommende Größe $v = v_t$ ist linear von t abhängig, aber von τ unabhängig, während p nach Voraussetzung sowohl von t als von τ unabhängig ist. Was $1/T^2$ betrifft, so verzichten wir auf die Potenzentwicklung nach τ, da wir p nicht mehr als klein voraussetzen. Vielmehr wollen wir $1/T^2$ in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{v^2\tau^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{p}{v\tau}+\frac{p^2}{2v^2}\frac{1}{1-\frac{p\tau}{2v}}+\frac{p^2}{4v^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^2}\right).$$

Hiernach ist das Integral in (64) leicht auszuführen. Wir schreiben, indem wir die den vier vorstehenden Partialbrüchen entsprechenden Glieder mit I, II, III, IV bezeichnen

$$c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{T^2}\,d\tau = \frac{c^2}{v^2}(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}),$$

$$\mathrm{I} = \int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\frac{d\tau}{\tau^2} = \log\frac{\tau''}{\tau'}+\frac{2a}{c}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\mathrm{II} = \frac{p}{v}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\frac{d\tau}{\tau} = \frac{p}{v}(\tau''-\tau')-\frac{2ap}{cv}\log\frac{\tau''}{\tau'}$$

$$\mathrm{III} = \frac{p^2}{2v^2}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}d\tau = \frac{p}{v}\int\left\{-1+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}\right\}d\tau$$

$$= -\frac{p}{v}(\tau''-\tau')-2\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\log\frac{1-\frac{p\tau''}{2v}}{1-\frac{p\tau'}{2v}}$$

$$\mathrm{IV} = \frac{p^2}{4v^2}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-2}d\tau$$

$$= \frac{p}{2v}\int\left\{-\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-2}\right\}d\tau$$

$$= \log\frac{1-\frac{p\tau''}{2v}}{1-\frac{p\tau'}{2v}}+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{p\tau''}{2v}}-\frac{1}{1-\frac{p\tau'}{2v}}\right).$$

Wir führen die Abkürzungen β und γ (Gl. (68)) ein und berücksichtigen, daß

$$T' = v\tau'\left(1-\frac{p\tau'}{2v}\right),\quad T'' = v\tau''\left(1-\frac{p\tau''}{2v}\right);$$

dann können wir folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV} = \frac{2a}{c}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)+\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\log\frac{\tau''^2\,T'}{\tau'^2\,T''}$$
$$+\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\left(\frac{v\tau''}{T''}-\frac{v\tau'}{T'}\right);$$

nach (64) wird also:

$$\frac{-16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\log\frac{T'}{T''}+\frac{2}{\beta}+\frac{2a}{c\beta^2}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)$$

79) $$+\frac{\beta-\gamma}{\beta^3}\log\frac{\tau''^2\,T'}{\tau'^2\,T''}+\frac{2\beta-\gamma}{2\beta^2}\left(\frac{c\tau''}{T''}-\frac{c\tau'}{T'}\right).$$

Dabei sind die Größen τ', τ'', T', T'' als Wurzeln der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(c+v)\tau'-\frac{p}{2}\tau'^2 = 2a,\quad T' = 2a-c\tau',$$

$$(c-v)\tau''+\frac{p}{2}\tau''^2 = 2a,\quad T'' = c\tau''-2a.$$

Durch Auflösung derselben erhält man, indem nur die positiven Wurzeln in Betracht kommen (bei τ' nur die kleinere der beiden positiven Wurzeln vgl. hierzu die Anm. zu pag. 414):

79′) $$\left\{\begin{aligned} \tau' &= \frac{c}{p}(1+\beta)\left(1-\sqrt{1-\frac{2\gamma}{(1+\beta)^2}}\right),\\ \tau'' &= \frac{c}{p}(1-\beta)\left(-1+\sqrt{1+\frac{2\gamma}{(1-\beta)^2}}\right),\\ T' &= \frac{c^2}{p}(1+\beta)\left(\frac{\gamma}{1+\beta}-1+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{(1+\beta)^2}}\right),\\ T'' &= \frac{c^2}{p}(1-\beta)\left(\frac{-\gamma}{1-\beta}-1+\sqrt{1+\frac{2\gamma}{(1-\beta)^2}}\right).\end{aligned}\right.$$

Ist nun γ klein gegen $1-\beta$, was im wesentlichen der Bedingung des quasistationären Zustandes (vgl. den Anfang von § 16) entspricht, so kann man die sämtlichen vier vorstehenden Größen nach Potenzen von γ entwickeln und höhere Potenzen von γ vernachlässigen. Trägt man diese Entwickelungen in (79) ein, so ergiebt sich Proportionalität zwischen $\mathfrak{F}$ und γ bez. $\mathfrak{F}$ und p und der Faktor von p wird mit der elektromagnetischen Maße (Gl. (71′) identisch. Insoweit stimmt also die quasibeschleunigte Bewegung mit der wirklich beschleunigten hinreichend genau überein.

Dies trifft aber alles nicht mehr zu in derjenigen Umgebung der Lichtgeschwindigkeit, in der das ein für allemal gegebene γ nicht mehr klein ist gegen $1-\beta$. Insbesondere wollen wir für die Stelle $\beta = 1$ die Abhängigkeit der Kraft $\mathfrak{F}$ von γ bestimmen. Natürlich setzen wir nach der Bedeutung von γ immer noch γ als klein gegen 1 voraus.

Aus (79′) folgt nun zunächst für $\beta = 1$:

$$\tau' = \frac{2c}{p}\left(1-\sqrt{1-\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{c}{p}\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^2}{16}+\cdots\right),\quad \tau'' = \frac{c}{p}\sqrt{2\gamma},$$

$$T' = \frac{c^2}{p}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma^2}{16}+\cdots\right),\quad T'' = \frac{c^2}{p}(\sqrt{2\gamma}-\gamma)$$

und, wenn wir in (79) eintragen:

80) $$-\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon^2}{4\pi a^2}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}+\frac{\gamma}{8}\log\frac{\gamma}{8}+\cdots\right).$$

Beim Durchgange durch die Lichtgeschwindigkeit ist also $\mathfrak{F}$ nicht mehr mit der ersten Potenz von γ (oder p), sondern bei kleinem γ annähernd mit der Quadratwurzel proportional. Wollen wir auch hier eine elektromagnetische Maße μ definiren, indem wir das Verhältnis $-\mathfrak{F}/p = \mu$ setzen, so ergiebt sich:

$$80') \qquad \mu = \frac{\varepsilon^2}{2\pi a c^2 \gamma}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} + \frac{\gamma}{8}\log\frac{\gamma}{8} + \cdot\cdot\right).$$

Bei gleichförmig beschleunigter Bewegung wird also für die Lichtgeschwindigkeit selbst (und ebenso in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit) die Maße eine Funktion der in γ enthaltenen Beschleunigung. (Bei ungleichförmig beschleunigter Bewegung würden auch die Differentialquotienten der Beschleunigung in den Ausdruck der Maße eingehn).

Wir heben noch hervor, daß unsere Formeln (80) und (80') einen endlichen Wert für Kraft und Maße ergeben. Das Unendlich-Werden dieser Größen für $\beta = 1$ im Falle der quasistationären Bewegung rührt lediglich daher, daß wir dort eine Entwickelung nach ganzen Potenzen von γ vorgenommen hatten, die im Falle $\beta = 1$ unzulässig und durch eine solche nach gebrochenen Potenzen zu ersetzen ist. Auch diese Betrachtungen zeigen, was bereits in § 13 allgemein ausgesprochen wurde, daß es möglich ist, ein Elektron mit endlichem Arbeitsaufwand bis auf die Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen[1]). Bei Volumladung, auf welchen Fall sich die vorangehenden Betrachtungen allerdings nicht unmittelbar beziehen, ist es sogar nach den allgemeinen Ueberlegungen des § 13 möglich, das Elektron beliebig weit über die Lichtgeschwindigkeit hinaus zu beschleunigen.

Wir haben schließlich noch Fig. 6[2]) zu erläutern. In dieser ist als Abscisse das Geschwindigkeitsverhältnis β aufgetragen und zwar, da sich die Fig. auf Oberflächenladung bezieht, das Intervall $\beta = 0$ bis $\beta = 1$ dieses Verhältnisses. Die Ordinate stellt den Wert von $-\mathfrak{F}/p$ bei gleichförmig beschleunigter Bewegung dar, also diejenige Größe, die wir als Maße μ definirt haben. Die den einzelnen Curven beigegebenen Zahlen bedeuten den für jede einzelne Curve charakteristischen Wert von $\gamma = 2ap/c^2$. Wenn wir die Ordinaten mit diesem Werte γ multipliciren, erhalten wir eine (nicht verzeichnete) Curvenschaar, welche direkt die Größe $-\mathfrak{F}$

1) Zu demselben Ergebniss gelangt P. Hertz in seiner schönen Dissertation: Untersuchungen über unstetige Bewegungen des Elektrons, Göttingen 1904.

2) Von Herrn Dr. M. Winkelmann freundlichst berechnet und gezeichnet.

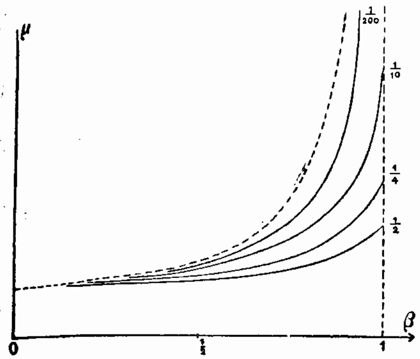

Fig. 6.

für verschiedene Beschleunigungen veranschaulicht, da ja $\mu\gamma$ bis auf den constanten Faktor $2a/c^2$ mit $-\mathfrak{F}$ identisch ist. Diese $\mathfrak{F}$-Curven würden sich in sofern umgekehrt anordnen, wie die verzeichneten μ-Curven, als bei gleichem β größeren Werten von γ auch größere Ordinaten von $-\mathfrak{F}$ entsprechen würden. Wir heben dies ausdrücklich hervor, damit Fig. 6 nicht der selbstverständlichen Thatsache zu widersprechen scheine, daß der Kraftbedarf zur Unterhaltung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung bei Unterlichtgeschwindigkeit um so größer ist, je größer die Beschleunigung.

Da bei gleichförmig beschleunigter Bewegung v eine ganze lineare Funktion von t ist, so kann die Abscissenaxe unserer Fig. auch ohne Weiteres als Zeitskala gelesen werden. Die Fig. zeigt uns dann, wie im Verlaufe der Bewegung die Maße μ zunimmt.

Außer den μ-Curven (ausgezogen) ist in der Fig. diejenige Grenzcurve (punktirt) eingezeichnet, welche der quasistationären Bewegung, also gewissermaßen dem Falle $\gamma = 0$, entspricht. Naturgemäß fallen unsere μ-Curven bei kleinem β ein Stück weit mit dieser Grenzcurve merklich zusammen und trennen sich um so später von ihr ab, je kleiner γ. Man kann noch hervorheben, daß die den Werten $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{100}$ entsprechenden Beschleunigungen ganz außerordentlich groß sind, daß also merkliche Abweichungen von der Grenzcurve der quasistationären Bewegungen bei mäßigen Beschleunigungen erst in nächster Nähe der Lichtgeschwindigkeit ($\beta = 1$) auftreten.

Die bisherige Behandlung der Frage hat noch insofern etwas Unbefriedigendes, als das dauernde Bestehen einer gleichförmigen Beschleunigung in der Vergangenheit das Vorkommen von (negativ gerichteten) Ueberlichtgeschwindigkeiten voraussetzen würde, die wie wir wissen bei Oberflächenladung unmöglich sind. Ist z. B. der Geschwindigkeitsverlauf einfach gegeben durch $v = pt$ (so daß also für $t = 0$ die Bewegung ihren Sinn umkehrt), so hätten wir bei dauernder Gültigkeit dieses Bewegungsgesetzes für $t < -c/p$ Ueberlichtgeschwindigkeit. Mann kann daher wünschen, die Fragestellung schließlich noch in folgender Weise abzuändern: Für $t<0$ ist das Elektron in Ruhe ($v=0$), für $t>0$ in gleichförmig beschleunigter Bewegung ($v=pt$). Welches ist in diesem Falle der Verlauf von $\mathfrak{F}$ und derjenige von μ?

Für $t<0$ haben wir jedenfalls $\mathfrak{F}=0$, während μ gänzlich unbestimmt und sinnlos wird.

Für $t=0$ ist ebenfalls noch $\mathfrak{F}=0$, sowie $\mu=-\mathfrak{F}/p=0$.

Für $t>0$ muß der jeweils erforderliche Kraftaufwand aus Gl. (64) von Neuem berechnet werden, wobei namentlich die jetzt erforderliche Neubestimmung der Grenzen $\tau'\tau''$ zu beachten ist[1]). Man erkennt aber unmittelbar, daß, wenn man aus der früheren Gl. (79′) einen Wert von τ'' berechnet, welcher sich $<t$ ergiebt, daß dann auch der frühere Wert von $\mathfrak{F}$ und μ ungeänderte Gültigkeit behält. In der That, wenn $\tau''<t$ und daher auch $\tau'<t$, so gehört das Zeitintervall von $t-\tau'$ bis $t-\tau''$ durchweg zu positiven Werten von t; während dieses Zeitintervalles herrschte bereits gleichförmige Beschleunigung; die Bestimmung von $\mathfrak{F}$ zur Zeit t, welche nur von der Geschichte des Elektrons während jenes Zeitintervalles abhängt, ist also dieselbe, wie wenn die gleichförmige Beschleunigung stets bestanden hätte, und unabhängig davon, daß wir jetzt für $t<0$ Ruhe vorausgesetzt haben.

Aus Gl. (79′) ergiebt sich aber $\tau''<t$, wenn

$$t>\frac{c}{p}\left(\beta-1+\sqrt{(1-\beta)^2+2\gamma}\right).$$

Da $pt=v_t$ und $v_t/c=\beta$, können wir hierfür schreiben:

$$1>(1-\beta)^2+2\gamma \quad \text{oder} \quad 1-\beta<\sqrt{1-2\gamma}.$$

Ist überdies 2γ klein gegen 1, so können wir weiter schließen:

$$1-\beta<1-\gamma \quad \text{oder} \quad \beta>\gamma.$$

Hieraus folgt: Im Falle $\gamma=1/200$ stellt die zugehörige Curve Fig. 6 in dem weitaus größten Teile ihres Verlaufes die Verhältnisse auch für den Fall richtig dar, daß bis zum Zeitpunkte $t=0$ Ruhe herrschte; sie ist nur in dem schmalen Intervall von $\beta=0$ bis $\beta=1/200$ dahin abzuändern, daß sie in einer nicht näher untersuchten Weise von 0 bis zu der in Fig. 6 für $\beta=1/200$ verzeichneten Ordinate ansteigt. Aehnliches gilt für $\beta=\frac{1}{10}$, $\beta=\frac{1}{4}$, wobei jedoch der abzuändernde Teil der Curve einen größeren Bruchteil des Gesamtverlaufes ausmacht, so daß sich hier der Einfluß der für $t<0$ vorausgesetzten Ruhe auf einen immer größeren Teil der folgenden Beschleunigungsepoche erstreckt. Für $\gamma=1/2$ endlich macht sich dieser Einfluß im ganzen Intervalle bis heran zu $\beta=1$ geltend und ist daher die ganze früher verzeichnete Curve mit Ausnahme ihrer Endordinate für die zuletzt vorausgesetzten Verhältnisse nicht mehr brauchbar.

1) In diesem Zusammenhange möge Folgendes nachgetragen werden: Die quadratische Gl. für τ' auf pag. 411 liefert zunächst zwei positive Wurzeln, von denen wir in (79′) die kleinere ausgesondert haben. Die größere gehört zu einem weit zurückliegenden Stadium der Bewegung, in welchem Ueberlichtgeschwindigkeit herrschte. Bei der jetzigen verbesserten Form der Problemstellung, nach welcher das Elektron ursprünglich in Ruhe war, ist jene größere Wurzel ohne Bedeutung; daß wir sie früher ausschlossen, kann daher mit Rücksicht auf die gegenwärtige Fassung des Problems gerechtfertigt werden.

§ 18. *Gleichförmige Bewegung im Kreise. Elektromagnetische Centrifugalkraft und elektromagnetische transversale Maße.*

Auch bei der kreisförmigen Bewegung läßt sich die allgemeine Darstellung der Kraft wenngleich in anderer Richtung wie bei der geradlinigen Bewegung wesentlich vereinfachen.

Eine gleichförmige kreisförmige Bewegung erhalten wir durch den Ansatz

$$81)\qquad \mathfrak{v}_t=v\,e^{int},\quad \mathfrak{v}_{t-\tau}=v\,e^{in(t-\tau)},$$

wenn wir v und n als constant ansehen; die zwei Componenten von $\mathfrak{v}$ in der Bahnebene ergeben sich durch Zerlegung in Reelles und Imaginäres. n bedeutet die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs oder die Anzahl der Umläufe in 2π Secunden. Da v die Lineargeschwindigkeit, ergiebt sich der Radius der Kreisbahn zu

$$r=v/n.$$

Aus $\mathfrak{v}$ folgt

$$81')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}&=v\,\frac{e^{int}-e^{in(t-\tau)}}{in}=\frac{2v}{n}\,e^{in\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}\sin\frac{n\tau}{2},\\ T&=|\mathfrak{T}|=\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2},\quad \frac{\mathfrak{T}}{T}=e^{in\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Ferner finden wir leicht durch Ausrechnung oder geometrische Ueberlegung:

$$81'')\qquad (\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})=v^2\cos n\tau.$$

a. Oberflächenladung. Das in Gl. (54) vorkommende Integral nimmt daraufhin bei Kreisbewegung die folgende Form an:

$$82)\quad \frac{n^2}{2}e^{int}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}e^{\frac{-in\tau}{2}}-i\frac{e^{-in\tau}}{\sin\frac{n\tau}{2}}\right)(c\tau-2a)d\tau.$$

Da die Bewegung vollständig cyklisch, kommt es auf den Wert von t in keiner Weise an; wir können daher $t=0$ setzen. Für $t=0$ wird $\mathfrak{v}_t$ reell; dementsprechend liefert der reelle Teil von $\mathfrak{F}$ die mit $\mathfrak{v}$ gleichgerichtete, in die Bahn fallende Componente $\mathfrak{F}_s$ der Kraft, der imaginäre Teil die zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Normalcomponente $\mathfrak{F}_n$. Indem wir an die üblichen Bezeichnungen der Mechanik anknüpfen, können wir $\mathfrak{F}_n$ als Centrifugalkraft, $\mathfrak{F}_s$ als Tangentialwiderstand, $\mathfrak{F}$ als scheinbare oder elektromagnetische Gesamt-Trägheitskraft bezeichnen. Da nach der Erklärung dieser Größen durch den reellen und den imaginären Teil von (82) $\mathfrak{F}_s$ positiv im Sinne von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{F}_n$ positiv im Sinne des nach dem Mittelpunkte hin gezogenen Radius gerechnet wird, so ist zu erwarten, das sowohl $\mathfrak{F}_s$ als $\mathfrak{F}_n$ im Allgemeinen negatives Vorzeichen haben werden.

Wir bilden nun, um zum Tangentialwiderstande zu gelangen, den reellen Teil des auf der rechten Seite von (82) vorkommenden Integrales für $t=0$. Dieser wird:

$$\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}-2\right)\cos\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)d\tau$$

$$=\frac{n^2}{2}\frac{c^2-v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{\cos\frac{n\tau}{2}}{\sin^2\frac{n\tau}{2}}(c\tau-2a)d\tau-\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\cos\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)d\tau$$

$$=-n\frac{c^2-v^2}{2v^2}\left[\frac{c\tau-2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}\right]_{\tau'}^{\tau''}+nc\frac{c^2-v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{\sin\frac{n\tau}{2}}$$

$$-n\left[\sin\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)\right]_{\tau'}^{\tau''}+nc\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\frac{n\tau}{2}d\tau.$$

Nach der Definition der τ',τ'' ist aber (s. Gl. (52) und (81')):

$$83)\quad c\tau'+\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau'}{2}=2a,\quad c\tau''-\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau''}{2}=2a$$

also

$$\frac{c\tau'-2a}{\sin\frac{n\tau'}{2}}=-\frac{2v}{n},\quad \frac{c\tau''-2a}{\sin\frac{n\tau''}{2}}=+\frac{2v}{n},$$

$$(c\tau'-2a)\sin\frac{n\tau'}{2}=-\frac{2v}{n}\sin^2\frac{n\tau'}{2},\quad (c\tau''-2a)\sin\frac{n\tau''}{2}=+\frac{2v}{n}\sin^2\frac{n\tau''}{2}.$$

Daher wird der Wert unseres Integrals:

$$-2\frac{c^2-v^2}{v}+c\frac{c^2-v^2}{v^2}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{n\tau''}{4}}{\operatorname{tg}\frac{n\tau'}{4}}-v(2-\cos n\tau'-\cos n\tau'')$$

$$-2c\left(\cos\frac{n\tau''}{2}-\cos\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Bilden wir andrerseits den reellen Teil der vom Integralzeichen freien Glieder in Gl. (54) für $t=0$, so ergiebt sich

$$2v-v\cos n\tau'-\cos n\tau''-\frac{c^2-v^2}{v^2}\left(c\log\frac{c+v}{c-v}-2v\right);$$

im Ganzen erhalten wir daher nach Forthebung einiger entgegengesetzt gleicher Terme aus (54):

$$84)\quad \frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}_s=\frac{c^2-v^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v}\frac{\operatorname{tg}\frac{n\tau'}{4}}{\operatorname{tg}\frac{n\tau''}{4}}-2\left(\cos\frac{n\tau''}{2}-\cos\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Sodann nehmen wir, um zur „Centrifugalkraft" zu gelangen, den imaginären Teil von (82); derselbe lautet für $t=0$:

$$-\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2}\frac{c\tau-2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}d\tau=$$

$$-\frac{n^2}{2}\frac{c^2+v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}d\tau+\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)d\tau.$$

Das zweite Integral läßt sich ausführen; mit Rücksicht auf die Definition von τ',τ'' haben wir nämlich:

$$\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)\,d\tau = -n\left[\cos\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)\right]_{\tau'}^{\tau''}$$

$$+nc\int_{\tau'}^{\tau''}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau = -2v\left(\cos\frac{n\tau''}{2}\sin\frac{n\tau''}{2}+\cos\frac{n\tau'}{2}\sin\frac{n\tau'}{2}\right)$$

$$+2c\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right) = -v(\sin n\tau''+\sin n\tau')$$

$$+2c\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Nehmen wir die vom Integralzeichen freien Glieder in Gl. (54) hinzu, so haben einen für $t=0$ nichtverschwindenden imaginären Teil nur die Glieder $-(\mathfrak{v}_{-\tau'}+\mathfrak{v}_{-\tau''})$. Ihr imaginärer Teil lautet:

$$+v(\sin n\tau'+\sin n\tau'')$$

und hebt sich, wie man sieht, gegen einen Bestandteil des vorher entwickelten Ausdrucks. Im Ganzen ergiebt sich somit einfach:

$$85)\quad \frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}_n = \frac{n^2}{2c}\frac{c^2+v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}\,d\tau-2\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right).$$

b. Volumladung. Da bei der gleichförmigen Kreisbewegung T und daher auch die in (62) vorkommende Funktion $f(c\tau+T)$ bez. $f(|c\tau-T|)$ von t unabhängig werden, so haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f}{T} = \frac{f}{T}\,in\,\mathfrak{v}_{t-\tau}.$$

Bezeichnen wir das Argument der Funktion f in dem ersten oder zweiten Integral der Gl. (62) mit dem gleichen Buchstaben x, so können wir jenen beiden Integralen die gemeinsame Form geben (vgl. (81), (81') und (81'')), in der wir sogleich $t=0$ setzen:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{e^{\frac{-in\tau}{2}}\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}\left(\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial T}-f(x)\right)+\frac{ie^{-in\tau}}{\sin\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}d\tau.$$

der reelle Teil hiervon beträgt:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(x)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau;$$

der imaginäre Teil wird:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{-\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(x)}{\partial T}+\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}d\tau.$$

Spalten wir also $\mathfrak{F}$ wieder in einen Tangentialwiderstand $\mathfrak{F}_s$ und eine Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$, so ergiebt sich nach (62), wenn wir die Differenz der vorstehenden Integralwerte für $x=c\tau+T$ und $x=|c\tau-T|$ bilden:

$$84')\quad \frac{-32\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F}_s = \frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau'}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos nt-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(c\tau+T)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau$$
$$-\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(|c\tau-T|)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau$$

und

$$85')\quad \frac{32\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F}_n$$
$$=\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau'}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(c\tau+T)\right\}d\tau$$
$$-\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(|c\tau-T|)\right\}d\tau.$$

Eine allgemeine Ausführung der Integration wie im Falle der Oberflächenladung scheint kaum möglich. Will man die obigen Ausdrücke in Strenge weiter behandeln, so wird es sich empfehlen, in den beiden Integralen die bereits soeben genannten Variabeln zu benutzen:

$$86)\quad x = c\tau+\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2}\quad\text{bez.}\quad \pm x = c\tau-\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2}.$$

Man hätte dann die Aufgabe, τ selbst sowie $\sin n\tau/2$, $\cos n\tau$ etc. durch x auszudrücken. Diese Aufgabe wird in der Astronomie bei dem Problem der Planetenbewegung behandelt, mit welchem Probleme ja unser kreisförmig bewegtes Elektron eine offenbare

Analogie aufweist; die Gl. (86) sind identisch mit der sog. Kepler'schen Gleichung.

Obwohl gerade die kreisförmigen Bahnen und ihr möglicher Zusammenhang mit den Spektrallinien mich zu dieser ganzen Untersuchung veranlaßt haben, muß ich ihre genauere Behandlung hier zurückstellen. Ich zeige daher nur noch, wie sich in erster Näherung aus unseren allgemeinen Formeln der Wert der sog. transversalen elektromagnetischen Maße ergiebt.

Wir setzen zu dem Ende voraus, daß innerhalb des ganzen Integrationsintervalles von τ' bis τ'' die Größe $\frac{n\tau}{2}$ eine kleine Zahl sei. In diesem Falle haben wir nach (83), wenn wir Ueberlichtgeschwindigkeit nicht ausschließen:

87) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{2a}{|c-v|}.$$

Unsere Voraussetzung verlangt nun

$$\frac{n}{2}\tau'' = \frac{na}{|c-v|} \text{ klein gegen } 1$$

Beachten wir noch, daß n die Winkelgeschwindigkeit, v die Bahngeschwindigkeit im Kreise, also v/n der Bahnradius (r) ist, so können wir die vorige Bedingung auch so umschreiben:

88) $$\frac{a}{r}\frac{v}{|c-v|} \text{ klein gegen } 1, \text{ oder } r \text{ groß gegen } a\frac{v}{|c-v|}.$$

Es handelt sich also bei der beabsichtigten Näherung um Bahnen von großem Krümmungsradius. Den Maaßstab für die erforderliche Größe des Krümmungsradius liefert dabei der Radius des Elektrons a selbst, wenn wir denselben noch mit dem Geschwindigkeitsverhältnis $v/|c-v|$ multipliciren. Z. B. verlangt (88) wenn v klein gegen c ist, daß r nur etwa von der Ordnung a zu sein braucht. Ist dagegen etwa $v = c/2$ oder v groß gegen c, so müssen wir verlangen, daß r groß gegen a sei. Je mehr sich v der Lichtgeschwindigkeit nähert, um so größer muß r vorausgesetzt werden. Jedenfalls gestattet (88) in jedem Falle, die Gültigkeit der folgenden Näherungsformeln genau zu umgrenzen.

Da eine gleichförmig durchlaufene Kreisbahn von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung nur wenig abweicht, so können wir die jetzt zu behandelnden Bewegungen ebenso wie die des § 16 als quasistationär bezeichnen. Unsere Bedingung (88) sagt alsdann aus, unter welchen Umständen eine Kreisbewegung als quasistationär bezeichnet werden kann.

a. Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Indem wir in Gl. (84) und (85) für jeden Wert von τ, insbesondere für $\tau = \tau'$ und $\tau = \tau''$ setzen:

$$\cos\frac{n\tau}{2} = 1, \ \mathrm{tg}\frac{n\tau}{4} = \frac{n\tau}{4}, \ \sin\frac{n\tau}{2} = \frac{n\tau}{2}$$

ergiebt sich unmittelbar:

$$\mathfrak{F}_t = 0, \ \mathfrak{F}_n = \frac{\varepsilon^2 n}{16\pi a^2}\left(\frac{c^2+v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{c\tau}\,d\tau - (\tau''-\tau')\right)$$

$$= \frac{\varepsilon^2 n}{16\pi a^2}\left(\frac{c^2-v^2}{2v^2}(\tau''-\tau') - \frac{a(c^2+v^2)}{cv^2}\log\frac{\tau''}{\tau'}\right).$$

Tragen wir die Näherungswerte (87) für τ', τ'' ein und benutzen die bequeme Abkürzung $\beta = v/c$, so wird

89) $$\mathfrak{F}_t = 0, \ \mathfrak{F}_n = \frac{\varepsilon^2 n}{8\pi ac}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1+\beta^2}{2\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Der Tangentialwiderstand verschwindet also in erster Näherung, so daß in der Bahnrichtung keine äußere Kraft erforderlich ist, um eine Kreisbewegung von geringer Krümmung zu unterhalten. Dagegen ist in radialer Richtung eine äußere Kraft nötig, welche der elektromagnetischen Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$ das Gleichgewicht hält. Wir setzen

$$\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}_n = \mu p, \ p = \frac{v^2}{r} = vn,$$

so daß p die Centripetalbeschleunigung der Kreisbewegung und μ die scheinbare oder elektromagnetische Maße bedeutet.

Aus (89) ergiebt sich

89') $$\mu = \frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(-\frac{1}{\beta^2} + \frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Da dieser Wert von dem in § 16, Gl. (71) berechneten verschieden ist, bezeichnen wir ihn im Gegensatz zu jenem als transversale Maße. Es rührt natürlich nur von den getroffenen Vernachlässigungen her, daß diese Maße von der Beschleunigung

$p = vn$ oder der Umlaufszahl $1/n$ unabhängig wird. Wenn wir genauer rechnen, indem wir die erste Näherung durch eine zweite corrigiren, würden wir insbesondere für die Umgebung der Lichtgeschwindigkeit keine reine Proportionalität zwischen $\mathfrak{F}_a$ und p und daher bei μ keine Unabhängigkeit von p finden.

b. Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. In den Gl. (84'), (85') setzen wir wiederum $\cos n\tau = 1$, $\sin\frac{n\tau}{2} = \frac{n\tau}{2}$; die Grenzen τ', τ'' haben dann die einfachen Werte (87). Wir zerlegen f in einen constanten Teil $-8a^3/5$ und einen variabeln Teil $x^2\varphi(x)$, wobei das Argument von f mit x bezeichnet ist.

Den Beitrag des constanten Teiles von f zur rechten Seite von (84') oder (85') bezeichnen wir mit I, den des variabeln Teiles im ersten oder zweiten Integral mit II und III. In I rechnen wir mit der Integrationsvariabeln τ, in II und III mit der schon genannten Variabeln x. Es bedeutet daher x in II bez. III:

$$x = c\tau + T = c\tau + \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2} = (c+v)\tau,$$

bez.

$$x = c\tau - T = c\tau - \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2} = (c-v)\tau.$$

Man hat nun in (84')

$$\mathrm{I} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{8}{5}a^3\frac{c^2-v^2}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_{2a/c+v)}^{2a/(c-v)}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{vc},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c+v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

$$\mathrm{III} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c-v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

also

$$\begin{aligned}\mathrm{II-III} &= \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{cv}\int\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}\int\varphi\,dx\\ &= \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}\int\left(x\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\right)dx = \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}[x\varphi]_0^{2a}\\ &= +\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{vc},\end{aligned}$$

somit

$$\text{90)}\qquad \mathrm{I+II-III} = 0, \quad \mathfrak{F}_s = 0.$$

Andererseits wird in (85'):

$$\mathrm{I} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{8}{5}a^3\frac{c^2+v^2}{nv^2}\int_{2/(c+v)}^{2/(c-v)}\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{4}{5}\frac{na}{c}\frac{c^2+v^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c-v}{nv}\int_0^{2a}\left(x^2\frac{d\varphi}{dx}+2x\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2+v^2}{v^2n}\int_0^{2a}x\varphi\,dx,$$

$$\mathrm{III} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{c+v}{nv}\int_0^{2a}\left(x^2\frac{d\varphi}{dx}+2x\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2+v^2}{v^2n}\int_0^{2a}x\varphi\,dx,$$

also

$$\mathrm{II-III} = \frac{n}{a^2v}[x^2\varphi]_0^{2a} = \frac{8}{5}\frac{an}{v},$$

mithin

$$\text{90')}\qquad \mathfrak{F}_n = \frac{3\varepsilon^2}{32\pi a^2}(\mathrm{I+II-III}) = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2 n}{8\pi a}\left(\frac{1}{v} - \frac{c^2+v^2}{2v^2c}\log\frac{c+v}{c-v}\right).$$

Wiederum ist der Tangentialwiderstand der Kreisbewegung gleich Null. Die zur Ueberwindung der elektromagnetischen Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$ erforderliche Kraft schreiben wir

$$\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}_n = \mu p;$$

dabei ist die Beschleunigung $p = vn$ und es ergiebt sich für die elektromagnetische transversale Maße

$$\text{90'')}\qquad \mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(-\frac{1}{\beta^2} + \frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Das Verhältnis dieser Maße zu der bei Oberflächenladung, Gl. (89'), beträgt ebenso wie im Falle der longitudinalen Maße (§ 16) 6 : 5. Die Werte (89') und (90'') stimmen mit den zuerst von Abraham gefundenen Formeln überein, wenn man die verschiedene Wahl der Einheit für ε berücksichtigt. (vgl. den Schluß von § 16 b).

c. Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Indem wir wieder an (84') und (85') anknüpfen haben wir unter τ'' die Größe $2a/(v-c)$, unter x in dem zweiten Integrale die Variable $(v-c)\tau$ zu verstehen. Mit den früheren Bezeichnungen I, II, III erhalten wir aus (84'):

$$\mathrm{I} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{8}{5}a^3\frac{c^2-v^2}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_{2a/(c+v)}^{2a/(v-c)}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{v^2},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c+v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\, dx,$$

$$\mathrm{III} = +\frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(v-c)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\, dx,$$

also

$$\mathrm{II}-\mathrm{III} = -\frac{2(c^2-v^2)}{a^2v^2}\int_0^{2a}\varphi\, dx = -\frac{22}{5}\frac{c^2-v^2}{v^2}$$

und

$$91)\qquad \mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III} = -6\frac{c^2-v^2}{v^2},\quad \mathfrak{F}_t = -\frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right).$$

Daß der Tangentialwiderstand jetzt nicht verschwinden kann, folgt daraus, daß bei Ueberlichtgeschwindigkeit eine wenig gekrümmte ebenso wie eine geradlinige Bewegung keine mögliche kräftefreie Bewegung darstellt. In der That deckt sich Gl. (91) mit dem für die stationäre geradlinige Bewegung gefundenen Werte von $\mathfrak{F}$ (§ 15, Gl. (65)).

Behandelt man (85') in derselben Weise, so ergeben sich genau die unter b) genannten Ausdrücke von I, II, III, mit dem einzigen Unterschiede, daß unter dem Logarithmus-Zeichen zu ersetzen ist $c-v$ durch $v-c$. Infolge dessen können wir sogleich das Endresultat hinschreiben:

$$91')\qquad -\mathfrak{F}_n = \mu p,\quad \mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Die Entwickelung dieses Wertes von μ nach absteigenden Potenzen von β ($\beta > 1$) lautet:

$$\mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)\beta^{-4}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^{-6}+\cdots\right);$$

in entsprechender Weise erhält man aus (90') bei Entwickelung

nach aufsteigenden Potenzen von β ($\beta < 1$):

$$\mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^2+\cdots\right).$$

Die transversale elektromagnetische Maße ist daher (im Gegensatz zur longitudinalen) nicht nur bei Unterlichtgeschwindigkeit, sondern auch bei Ueberlichtgeschwindigkeit notwendig positiv.

Ganz andere Verhältnisse aber treten auf, wenn wir die Voraussetzung der geringen Krümmung oder der quasistationären Bewegungsform fallen lassen. Bei „wirklich normal-beschleunigten“ Bewegungen d. h. bei Kreisbahnen von geringer Krümmung kann die elektromagnetische Centrifugalkraft (und daher auch die hinzu zu definirende Maße) ihr Vorzeichen umkehren und insbesondere gleich Null werden. Wir kommen dann ähnlich wie Herglotz zu möglichen Kreisschwingungen des Elektrons, welche in radialer Richtung kräftefrei erfolgen.

§ 19. *Kraft und Drehmoment bei reiner Rotation. Elektromagnetisches Trägheitsmoment.*

Während wir in § 11 und 12 $\mathfrak{w} = 0$ setzten, sei jetzt $\mathfrak{v} = 0$; der Mittelpunkt des Elektrons bleibe also dauernd in Ruhe. Es wird dann

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r},\quad \mathfrak{A}_1 = 0.$$

Das skalare Potential φ nimmt seinen aus der Elektrostatik bekannten Wert an und liefert keinen Beitrag zur Kraft $\mathfrak{F}$ und zum Drehmomente $\mathfrak{N}$. Vielmehr kommt es lediglich auf das Potential $\mathfrak{A}_2$ an, aus welchem sich die Kraft pro Ladungseinheit nach (42) folgendermaßen berechnet:

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial t}+\frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2].$$

a) Oberflächenladung. Es ist jetzt am einfachsten, die expliciten Ausdrücke (28) und (30) für $\mathfrak{A}_2$ zu Grunde zu legen. Wir schreiben hiernach:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{r}]\,\chi\, d\tau,$$

wobei

$$92)\qquad \chi = \frac{a^2+r^2-c^2\tau^2}{2r^3}\ \text{bez.}\ \chi = 0,$$

je nachdem ein Dreieck aus den Strecken $a, r, c\tau$ möglich ist oder nicht. Man bildet leicht

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty\left\{2\,\mathfrak{w}_{t-\tau}\chi + [\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]]\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr}\right\}d\tau;$$

da nach einer bekannten Formel

$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]] = \mathfrak{w}_{t-\tau}r^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}),$$

kann man hiefür auch schreiben:

$$\text{93)}\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty\left\{\mathfrak{w}_{t-\tau}\left(2\chi + r\frac{d\chi}{dr}\right) - \frac{\mathfrak{r}}{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r})\frac{d\chi}{dr}\right\}d\tau.$$

Gehen wir von $\mathfrak{f}$ zur resultirenden Kraft

$$\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int\mathfrak{f}\,d\sigma$$

über und bezeichnen wir die über die Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwerte durch Ueberstreichen, so haben wir

$$\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{F} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathfrak{A}_2} + \overline{[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]}.$$

Auf unserer Kugelfläche ist r selbst sowie χ und $d\chi/dr$ constant, $\mathfrak{r}$ dagegen veränderlich. Lösen wir $\mathfrak{r}$ in seine Componenten x, y, z auf, so enthält

$\mathfrak{A}_2$ lediglich erste Potenzen von $x\,y\,z$,

$[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]$ „ „ und dritte Potenzen von $x\,y\,z$.

Man erkennt aber sofort, daß die Mittelwerte aller ungeraden Potenzen der Coordinaten verschwinden, z. B. daß

$$\overline{x} = 0, \ldots,\ \overline{x^3} = 0,\ \overline{x^2y} = 0, \ldots$$

Daraus ergiebt sich, daß **bei reiner Rotation** $\mathfrak{F}$ **verschwindet**, was ja sehr verständlich ist.

Wir gehen jetzt zum resultirenden Drehmomente

$$\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int[\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,d\sigma$$

über und erhalten zunächst:

$$\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\overline{[\mathfrak{r}\mathfrak{A}_2]} + \overline{\left[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]\right]}\right\}.$$

Das letzte dreifache Vektorprodukt läßt sich vereinfachen; es ist nach der schon benutzten Regel:

$$[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2] = \mathfrak{r}(\mathfrak{w}_t\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2) - \mathfrak{w}_t(\mathfrak{r}\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2),$$

und daher wegen $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}] = 0$ und Gl. (93):

$$\left[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]\right] = -[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t](\mathfrak{r}\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2)$$
$$= -\frac{\varepsilon}{8\pi a}[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t]\int_0^\infty(\mathfrak{r}\mathfrak{w}_{t-\tau})\,2\chi\,d\tau.$$

Dieser Ausdruck ebenso wie $[\mathfrak{r}\mathfrak{A}_2]$ ist in den auf der Kugeloberfläche veränderlichen Componenten $x\,y\,z$ von $\mathfrak{r}$ vom zweiten Grade; die Mittelwerte der geraden Potenzen von $x\,y\,z$ sind aber im Allgemeinen nicht Null. Vielmehr hat man

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{r^2}{3},\quad \overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\overline{[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t](\mathfrak{r}\mathfrak{w}_{t-\tau})} = \frac{r^2}{3}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]$$

$$\overline{[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]]} = \mathfrak{w}_{t-\tau}r^2 - \overline{\mathfrak{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r})} = \tfrac{2}{3}\,\mathfrak{w}_{t-\tau}r^2.$$

Sonach erhält man:

$$\text{94)}\qquad -\frac{12\pi ac}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty\mathfrak{w}_{t-\tau}r^2\chi\,d\tau + \int_0^\infty[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\,r^2\chi\,d\tau\right\}.$$

Prüft man die Möglichkeit des Dreiecks aus den Seiten a, r und $c\tau$, so sieht man, daß dieses möglich ist, so lange $|a-r| < c\tau < a+r$. Die Grenzen dieses Bereiches gehen über in $\tau = 0$ und $\tau = 2a/c$, wenn man $r = a$ werden läßt; dabei kann der Grenzübergang ohne Weiteres unter dem Integralzeichen vollzogen werden. Indem man für χ den Wert (92) einsetzt und die Winkelbeschleunigung $d\mathfrak{w}/dt$ mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet, erhält man:

$$\text{95)}\qquad -\frac{24\pi a^2c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \int_0^{2a/c}\{\mathfrak{q}_{t-\tau} + [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\}\{2a^2 - c^2\tau^2\}\,d\tau.$$

Handelt es sich um **stationäre Rotation**, so ist

$$\mathfrak{q}_{t-\tau} = 0,\quad \mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t,\ \text{also}\ [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t] = 0$$

und daher

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Die stationäre Rotation ist daher eine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons.

Ist die Rotation eine gleichförmig beschleunigte, wobei die Axe der Beschleunigung mit derjenigen der augenblicklichen Umdrehung nicht zusammenzufallen braucht, so haben wir:

$$\mathfrak{q}_{t-\tau} = \mathfrak{q}_t, \quad \mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t - \tau\,\mathfrak{q}_t;$$

wegen

$$\int_0^{2a/c}(2a^2 \quad c^2\tau^2)\,d\tau = \frac{4}{3}\frac{a^3}{c}, \int_0^{2a/c}(2a^2 - c^2\tau^2)\,\tau\,d\tau = 0$$

erhält man

96) $$-\mathfrak{N} = \Theta\,\mathfrak{q}_t, \quad \Theta = \frac{\varepsilon^2 a}{18\pi c^2},$$

Θ kann als scheinbares elektromagnetisches Trägheitsmoment bezeichnet werden. Die gleichförmig beschleunigte Rotation ist also keine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons. Sie benötigt vielmehr ein äußeres Drehmoment $+\mathfrak{N}$, welches das von dem eigenen Felde des Elektrons herrührende Drehmoment $-\mathfrak{N}$ in jedem Augenblicke in's Gleichgewicht setzt.

b) Volumladung. Um die vorstehenden Rechnungen auf den Fall von Volumladung zu übertragen, haben wir nur die Bedeutung von χ abzuändern. Im Anschluß an die Gl. (29), (31) und (31′) verstehen wir unter χ jetzt die folgende Funktion:

92′) $$\chi = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 + 2r^2 - 2c^2\tau^2}{4r^3} - \frac{(r - c\tau)^3(3r + c\tau)}{4a^2 r^3}\right)$$

(Dreieck $a, r, c\tau$ möglich)

$$\chi = \frac{6\,c\tau}{a^2} \text{ oder } = 0$$

Dreieck $a, r, c\tau$ unmöglich, a größte oder nicht größte Seite). Die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{A}_2$, rot $\mathfrak{A}_2$, $[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]$ rot $\mathfrak{A}_2]]$ sind dann direkt auf den jetzigen Fall zu übernehmen.

Wenn wir die Integration über das Volumen des Elektrons so disponiren, daß wir zunächst über eine Kugel vom Radius r und dann nach r von 0 bis a integriren, so sehen wir unmittelbar wie unter a), daß die mit ungeraden Potenzen von $x\,y\,z$ behafteten Glieder Null ergeben und daß daher, wie selbstverständlich,

$$\mathfrak{F} = 0$$

wird.

Was die geraden Potenzen von $x\,y\,z$ betrifft, so fanden wir oben für den über die Kugelfläche r erstreckten Mittelwert

$$\overline{x^2} = \frac{r^2}{3}, \text{ d. h. } \int x^2 d\sigma = 4\pi\frac{r^4}{3}.$$

Daraus folgt für das über das Innere der Kugel a erstreckte Integral von $x^2\chi$, wo χ (Gl. (92′)) nur von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt:

$$\int x^2\chi\,dS = \int_0^a \chi\,dr \int x^2\,d\sigma = \frac{4\pi}{3}\int_0^a \chi\,r^4\,dr,$$

und daher für den räumlichen Mittelwert:

$$\overline{x^2\chi} = \frac{3}{4\pi a^3}\int x^2\chi\,dS = \frac{1}{a^3}\int_0^a \chi\,r^4\,dr.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem unter a) benutzten Mittelwerte $\overline{x^2\chi} = r^2\chi/3$, so erkennt man: um die früheren Rechnungen auf den jetzigen Fall übertragen zu können, hat man nur in (94) χ zu ersetzen durch $3\chi r^2 dr/a^3$ und hat die Integration nach r von 0 bis a hinzuzufügen, sowie das Limeszeichen wegzulassen. Es ergiebt sich:

94′) $$-\frac{4\pi a^4 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{w}_{t-\tau}\,d\tau \int_0^a \chi r^4\,dr + \int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\,d\tau \int_0^a \chi r^4 dr.$$

Hinsichtlich der noch erforderlichen Auswertung des Integrales $\int \chi r^4\,dr$ unterscheiden wir zunächst die folgenden drei Fälle (vgl. Fig. 7, wo $c\tau$ als Abscisse, r als Ordinate aufgetragen ist):

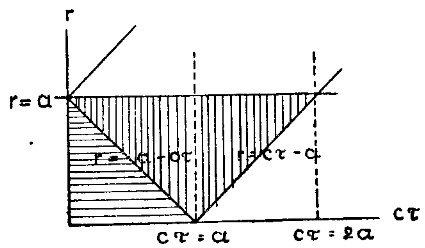

Fig. 7.

1. $c\tau < a$. Das Dreieck $r, a, c\tau$ ist unmöglich, wenn $r < a - c\tau$ (wagrecht schraffirtes Gebiet in Fig. 7); in diesem Falle gilt für χ der Wert $6\,c\tau/a^2$, da a die grösste der drei Seiten $a, c\tau, r$. Für den Rest des Integrationsintervalles von $r = a - c\tau$ bis $r = a$ (senkrecht schraffirtes Gebiet in Fig. 7), dagegen ist jenes Dreieck möglich und es gilt für χ der Wert (92′). Wir haben also, solange $c\tau < a$:

$$\int_0^a \chi r^4\,dr = \frac{6\,c\tau}{a^2}\int_0^{a - c\tau} r^4\,dr - F(a - c\tau),$$

wenn wir die Abkürzung einführen:

$$F(x) = \frac{3}{8}\int_a^x \left(a^2 + 2r^2 - 2c^2\tau^2 - \frac{(r-c\tau)^3(3r+c\tau)}{a^2}\right) r\,dr.$$

2. $a < c\tau < 2a$. Die Dreiecksbildung ist unmöglich und es ist $\chi = 0$, wenn $r < -a + c\tau$. (Das entsprechende Gebiet ist in Fig. 7 nicht schraffirt). Dagegen gilt für χ der Wert (92'), für den Rest des Integrationsintervalles $-a + c\tau < r < a$ (senkrecht schraffirt). Es wird daher jetzt:

$$\int_0^a \chi r^4 dr = -F(c\tau - a).$$

3. $2a < c\tau$. Jetzt ist durchweg $\chi = 0$ und daher auch $\int \chi r^4 dr = 0$.

Weiterhin zeigt man leicht, daß die unter 1) und 2) angegebenen Ausdrücke thatsächlich nicht verschieden sind, so daß nur die beiden Fälle $c\tau \gtrless 2a$ auseinander zu halten sind. Zu dem Zwecke bilde man etwa die Differenz der unter 1) und 2) gegebenen Ausdrücke:

94'') $$\frac{6c\tau}{a^2}\int_0^{a-c\tau} r^4 dr + F(c\tau - a) - F(a - c\tau).$$

Um $F(c\tau - a) - F(a - c\tau)$ zu berechnen, hat man in dem Integral $F(x)$ die untere Grenze durch $a - c\tau$, die obere durch $c\tau - a$ zu ersetzen; bei der Integration zwischen diesen Grenzen geben alle ungeraden Potenzen den Beitrag Null; man kann also setzen:

$$F(c\tau - a) - F(a - c\tau)$$
$$= -\frac{3}{8a^2}\int_{a-c\tau}^{c\tau-a} (r^4 c\tau - 9r^4 c\tau + 3r^2c^3\tau^3 - 3r^2c^3\tau^3)\,d\tau$$
$$= \frac{3c\tau}{a^2}\int_{a-c\tau}^{c\tau-a} r^4 dr = \frac{6c\tau}{a^2}\int_0^{c\tau-a} r^4 dr.$$

Mithin verschwindet in der That der Ausdruck (94'') und man hat einfach

$$\text{für } c\tau < 2a \ldots \int_0^a \chi r^4 dr = -F(c\tau - a)$$
$$\text{„} \quad c\tau > 2a \ldots \int_0^a \chi r^4 dr = 0.$$

Rechnet man das für $F(x)$ angegebene Integral aus, indem man $x = c\tau - a$ setzt, so ergiebt sich:

$$F(c\tau - a) = \frac{3}{16a^2}\left(\frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau\right).$$

Aus (94') erhält man daher:

95') $$\frac{64\pi a^6 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \int_0^{2a/c}\{\mathfrak{q}_{t-\tau} + [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\}\,\Phi(\tau)\,d\tau$$

mit der Abkürzung

95'') $$\Phi(\tau) = \frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau.$$

Bei gleichförmiger Rotation ($\mathfrak{q}_{t-\tau} = 0$, $\mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t$) haben wir natürlich wieder $\mathfrak{N} = 0$, d. h. eine mögliche kräftefreie Bewegung.

Bei gleichförmig beschleunigter Rotation ($\mathfrak{q}_{t-\tau} = \mathfrak{q}_t$, $\mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t - \tau\mathfrak{q}_t$) ergiebt sich

$$\frac{64\pi a^6 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \mathfrak{q}_t\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,d\tau - [\mathfrak{q}_t\mathfrak{w}_t]\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,\tau\,d\tau.$$

Man findet aber leicht durch Integration von (95''), daß:

$$\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,d\tau = -\frac{64}{3.35}\frac{a^7}{c}, \quad \int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,\tau\,d\tau = 0$$

Infolgedessen kann man im vorliegenden Falle schreiben:

96') $$-\mathfrak{N} = \Theta\mathfrak{q}_t, \quad \Theta = \frac{\varepsilon^2 a}{35\pi c^2}.$$

Dieser Wert des „elektromagnetischen Trägheitsmomentes" ist, ebenso wie der frühere, Gl. (96), bereits von Abraham[1]) für quasistationäre (unendlich wenig beschleunigte) Drehung abgeleitet worden; unsere Entwickelungen zeigen, daß dieselben Werte auch für gleichförmige Beschleunigung von beliebigem Betrage gültig sind.

§ 20. *Kräftefreie Rotationsschwingungen.*

Die Möglichkeit von kräftefreien Schwingungen des Elektrons darf ein ganz besonderes Interesse beanspruchen, weil hierin am deutlichsten der Gegensatz zwischen materieller und Elektronen-Mechanik zum Ausdruck kommt. In der Mechanik der Materie sind Schwingungen eines Punktes oder Systems um eine Ruhelage nur möglich, wenn dieser Lage ein Minimum der potentiellen

1) L. c. p. 171.

Energie entspricht, d. h. wenn jeder Entfernung aus der fraglichen Lage eine äußere Kraft nach Art der Reaktion einer elastischen Befestigung entgegenwirkt. In der Elektronenmechanik dagegen sind solche Schwingungen ohne irgend ein äußeres Kraftfeld möglich. Das bewegte Elektron schafft sich unter Umständen selbst die elastische Gegenkraft, welche es zurücktreibt. Am anschaulichsten liegen vielleicht die Verhältnisse bei cirkularen Schwingungen, wo wir sie in rohen Umrissen etwa so beschreiben können: Indem das Elektron die eine Hälfte einer Kreisbahn durcheilt, entsteht eine im Aether inducirte Wirkung, die sich ausbreitet. Wenn das Elektron auf die andere Hälfte der Kreisbahn übergegangen ist, fängt es jene Wirkung zum Teil auf. Eine mögliche kräftefreie Kreisbahn liegt nun vor, wenn der aufgefangene Betrag der Kraft gerade ausreicht, um die elektromagnetische Trägheit der fortgesetzten Kreisbewegung zu compensiren und das Elektron über die andere Hälfte der Kreisbahn hinüber zu treiben. Schon diese rohe Ueberlegung zeigt allerdings, daß die Schwingungsperioden, auf die man so geführt wird, sehr klein werden, nämlich von der Ordnung derjenigen Zeit, in der das Licht die fragliche Bahn überstreicht, also viel kleiner, als man es im Interesse der Erklärung optischer Erscheinungen wünschen möchte. Immerhin scheint die Möglichkeit solcher Schwingungen darzuthun, daß die „elastische Koppelung" des Elektrons, die man für die Theorie der dielektrischen Erregung sowie für die der Dispersion und des Zeeman-Effektes nötig hat und die hier die Rolle eines der Elektronentheorie fremden „deus ex machina" spielt, entbehrlich werden kann, daß man nämlich Aussicht hat, diese elastische Gegenkraft aus den Bewegungen des Elektrons selbst zu deduciren. Nur auf diesem Wege ist eine restlose Erklärung des Zeeman-Effektes und der Spektrallinien denkbar.

Den einfachsten Typus kräftefreier Schwingungen bilden die Rotationsschwingungen, bei denen wir an die Formeln des vorigen Paragraphen anknüpfen. Wir setzen:

a) Oberflächenladung voraus, lassen den Mittelpunkt des Elektrons in Ruhe und nehmen an, daß die Drehaxe dauernd ihre Richtung beibehält, während die Größe der Drehgeschwindigkeit beliebig wechselt. In Gl. (95) des vorigen Paragraphen wird alsdann $[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t] = 0$. Da wir eine ohne äußeren Kraftaufwand mögliche Schwingung suchen, setzen wir gleichzeitig $\mathfrak{N} = 0$. Wir erhalten so aus (95):

97) $$\int_0^{2a/c} \mathfrak{q}_{t-\tau} \left\{2a^2 - c^2\tau^2\right\} d\tau = 0.$$

Die Bewegungsgleichung erscheint hier als Integralgleichung. Man kann sie leicht in die Form einer Funktionalgleichung umschreiben. Dabei ist es bequem, sie vorher einmal nach t zu differenziren; da

$$\frac{d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{dt} = \frac{-d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{d\tau},$$

erhält man durch partielle Integrationen mit der Abkürzung $\tau' = 2a/c$:

$$\int_0^{\tau'} \frac{d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{dt} \left\{2a^2 - c^2\tau^2\right\} d\tau$$
$$= 2a^2(\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + 4ac\,\mathfrak{w}_{t-\tau'} + 2c^2(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t) = 0$$

oder, bei durchgehender Benutzung der Abkürzung τ':

98) $$\frac{\tau'^2}{4}(\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + \tau'\,\mathfrak{w}_{t-\tau'} + \varphi_{t-\tau} - \varphi_t = 0.$$

Diese Gleichung setzt den Drehwinkel φ und seine Differentialquotienten $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{q}$ in den Zeitpunkten t und $t-\tau'$ mit einander in Beziehung.

Will man dieselbe Gleichung formal in eine reine Differentialgleichung umschreiben, d. h. in eine solche, die nur auf einen Zeitpunkt bezügliche Größen enthält, so wird man entwickeln:

$$\varphi_t = \varphi_{t-\tau'} + \tau'\mathfrak{w}_{t-\tau'} + \frac{\tau'^2}{2}\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \cdots$$

$$\mathfrak{q}_t = \mathfrak{q}_{t-\tau'} + \tau'\,\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} + \frac{\tau'^2}{2}\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} + \cdots;$$

man findet, wenn man den Hinweis auf den Zeitpunkt $t-\tau'$ als nunmehr belanglos fortläßt, nach Division mit τ'^3:

$$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\dot{\mathfrak{q}} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\tau'\ddot{\mathfrak{q}} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\tau'^2\dddot{\mathfrak{q}} + \cdots = 0.$$

Wir können diese Gl. ohne Weiteres dreimal nach t integriren, wobei die Integrationsconstanten wegen der vorausgesetzten Periodicität der Bewegung gleich Null zu nehmen sind, und erhalten:

99) $$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\varphi + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\tau'\mathfrak{w} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\tau'^2\mathfrak{q} + \cdots = 0.$$

Als reine Differentialgleichung geschrieben wird also unsere Bewegungsgleichung von unendlich hoher Ordnung.

Sie läßt sich ebenso lösen, wie eine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten von endlicher Ordnung, nämlich durch den Ansatz:

$$\varphi = A e^{\alpha t} = A e^{\beta \frac{t}{\tau'}};$$

die Größe $\beta = \alpha\tau'$, welche natürlich nichts mit dem früher so bezeichneten Geschwindigkeitsverhältnis v/c zu thun hat, ist aus der Potenzreihe zu bestimmen:

$$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\beta + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\beta^2 + \cdots = 0$$

Summirt man die Reihe in naheliegender Weise durch die Exponentialfunktion, so erhält man die folgende transcendente Gleichung für die Eigenschwingungen:

$$\frac{1}{4}(e^\beta - 1) - \frac{e^\beta - 1 - \beta - \frac{1}{2}\beta^2}{\beta^2} = 0$$

d. h.:

$$100)\qquad e^\beta = \frac{2+\beta}{2-\beta}.$$

Nach Analogie mit den linearen Differentialgleichungen endlicher Ordnung wird man schließen dürfen, daß sich die allgemeinste Rotationsbewegung von fester Axe mittels der Wurzeln β_i dieser Gleichung und willkürlicher Constanten A_i in folgender Weise darstellen läßt:

$$\varphi = \sum A_i e^{\beta_i t/\tau'}.$$

Uebrigens ist die Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung hierbei keineswegs unentbehrlich. Macht man nämlich in der gleichwertigen Funktionalgleichung (98) den Ansatz $\varphi_t = A e^{\beta t/\tau'}$ so findet man unmittelbar:

$$\frac{\beta^2}{4}(e^{-\beta} + 1) + \beta e^{-\beta} + e^{-\beta} - 1 = 0,$$

was mit (100) übereinstimmt.

Um die Gl. der Eigenschwingungen zu lösen, rechnen wir aus ihr β aus und erhalten

$$\frac{\beta}{2} = \frac{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}}{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}};$$

setzen wir also noch $\beta/2 = i\gamma$, so entsteht die in der mathematischen Physik wohlbekannte Gleichung:

$$101)\qquad \gamma = \operatorname{tg} \gamma.$$

Nach der üblichen graphischen Methode findet man in einem Diagramm (γ, y) unendlich viele reelle Wurzeln φ als Schnittpunkte der Geraden $y = \gamma$ mit der Curve $y = tg\,\gamma$, zu denen im Besonderen auch $\gamma = 0$ gehört. Der asymptotische Wert dieser Wurzeln für großes positives oder negatives m wird

$$\gamma = (2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

Die kleinste nicht-verschwindende Wurzel beträgt, wie man leicht aus den trigonometrischen Tafeln entnimmt, etwa $\gamma = 4{,}50$.

Daß Gleichung (101) keine rein imaginären oder complexen Wurzeln haben kann, folgt aus der Betrachtung des Integrales

$$\int_0^1 \sin\alpha\gamma \sin\alpha\bar{\gamma}\, d\alpha,$$

welches, wenn γ und $\bar{\gamma}$ conjugirt imaginäre oder conjugirt complexe Wurzeln sind, einerseits nach Gl. (101) verschwinden müßte, andrerseits notwendig positiv ist.

Unser Elektron ist hiernach einer unendlichen Serie freier Schwingungen fähig, deren jede rein harmonisch und ungedämpft erfolgt. Nach dem ursprünglichen Ansatz $\varphi = A e^{\beta t/\tau'} = A^{2i\gamma t/\tau'}$ bestimmt sich die Schwingungsdauer τ aus der Gl.

$$\frac{2\pi i}{\tau} = \frac{2i\gamma}{\tau'},\quad \tau = \frac{\pi\tau'}{\gamma};$$

die Dauer der Grundschwingung und das asymptotische Gesetz für die Dauer der Oberschwingungen wird daher:

$$\tau_1 = \frac{\pi\tau'}{4{,}50},\quad \tau_m = \frac{2\tau'}{2m+1}.$$

Ziehen wir es vor, die Schwingung wie in der Optik gebräuchlich, durch ihre „Wellenlänge" zu charakterisiren, so werden wir setzen $\lambda = c\tau$, und erhalten wegen der Bedeutung von $\tau' = 2a/c$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi a}{4{,}50},\quad \lambda_m = \frac{4a}{4m+1}.$$

Diese Wellenlängen sind außerordentlich klein, da diejenige der Grundschwingung nur von der Größenordnung des Elektronendurchmessers wird. Das „Spektrum" des rotirenden Elektrons, d. h. die Gesamtheit der möglichen Schwingungszahlen, bildet eine unendliche Serie, deren Häufungsstelle im Unendlichen liegt und deren Linien asymptotisch äquidistant werden.

Mit den optischen Spektren bietet hiernach der vorstehend betrachtete Vorgang noch keine befriedigende Analogie dar, einerseits wegen der Höhe der Schwingungszahlen, andrerseits wegen der Anordnung der Spektrallinien. Es kommt hinzu, daß unsere Schwingungen ungedämpft verlaufen und daher keine Ausstrahlung geben.

Trotzdem berechtigen die hier gemachten Erfahrungen, wie mir scheint, zu einem wichtigen Rückschluß auf das Problem der Spektrallinien. Man pflegt in der Theorie der Dispersion dem schwingenden Molekül (oder Elektron) soviel Freiheitsgrade zuzusprechen, als das Spektrum Linien zählt, auf Grund eines Satzes über materielle Systeme, wonach die Anzahl der Eigenschwingungen eines jeden Systems mit der Anzahl seiner Freiheitsgrade übereinstimmt. Im Gegensatz hierzu sahen wir oben, daß das um eine feste Axe rotirende Elektron, dem ersichtlich nur ein Grad der Bewegungsfreiheit zukommt, bereits unendlich viele freie Schwingungen aufweist. Der tiefere Grund hiefür liegt, vom Standpunkt der allgemeinen Mechanik aus, offenbar darin, daß es nicht auf das Elektron allein, sondern auf das System Elektron + Aether ankommt, und daß wir dem Aether selbstverständlich unendlich viele (elektromagnetische) Freiheitsgrade zuschreiben müssen.

Es scheint hiernach nicht sehr gewagt, auch für diejenigen, zur Zeit noch unbekannten Elektronenschwingungen, welche den Spektrallinien entsprechen, die Vermutung auszusprechen: Zu jedem besonderen Schwingungsmodus des Elektrons oder zu jedem Grade der Bewegungsfreiheit desselben gehören unendlich viele Spektrallinien, nämlich die Linien ein und derselben Serie. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Elektrons ist nicht gleich der Anzahl der Spektrallinien, sondern gleich der Anzahl der Serien, (wobei man jede Serie mit derjenigen Multiplicität zählen wird, die sich bei der Zeeman-Zerlegung für jede ihrer Linien ergiebt).

b) Volumladung. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den freien Rotationsschwingungen einer Oberflächenladung und einer Volumladung besteht darin, daß die letzteren notwendig

gedämpft erfolgen, die ersteren, wie wir sahen, zeitlich ungedämpft verlaufen. Eine Erklärung dieses Unterschiedes wird sich aus der Energiewanderung in beiden Fällen nachweisen lassen, auf die wir aber hier nicht eingehen können[1]).

Wir haben jetzt an Gl. (95') des vorigen § anzuknüpfen, daselbst $\mathfrak{N} = 0$ zu setzen (kräftefreie Schwingung) und das Glied mit $[\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{w}_t]$ zu streichen (Rotation um eine der Richtung nach feste Axe). Die Bewegungsgleichung des rotirenden Elektrons schreibt sich dann zunächst als Integralgleichung in der Form:

$$97')\qquad \int_0^{\tau'} \mathfrak{q}_{t-\tau}\,\Phi(\tau)\,d\tau = 0, \quad \tau' = 2a/c$$

Wir gehen von hier aus durch fortgesetzte partielle Integration zu einer vom Integralzeichen freien Funktionalgleichung über. Zu dem Zwecke ist es bequem, die Gl. vorher fünfmal nach t zu differenziren. Da $\partial\mathfrak{q}/\partial t = -\partial\mathfrak{q}/\partial\tau$, erhält man zunächst nach Eintragung des Wertes von Φ aus Gl. (95''):

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\left(\frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau\right)d\tau = 0.$$

Auf das erste Glied von Φ angewandt liefert nun der Proceß der partiellen Integration, wenn nachträglich wieder die Differentialquotienten nach τ durch solche nach t ersetzen werden:

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\tau^6\,d\tau = \ddddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^6 + 6\dddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^5 + 6.5\,\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau}\,\tau'^4$$
$$+ 6.5.4.\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^3 + 6.5.4.3\,\mathfrak{q}_{t-\tau'}\tau'^2 + 6.5.4.3.2\,\mathfrak{w}_{t-\tau'}\tau'$$
$$+ 6.5.4.3.2.1.(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t).$$

Ebenso erhalten wir, dem zweiten Gliede von Φ entsprechend:

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\tau^4\,d\tau = \ddddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau}\tau'^4 + 4\dddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^3 + 4.3\,\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^2$$
$$+ 4.3.2\,\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau' + 4.3.2.1\,(\mathfrak{q}_{t-\tau'} - \mathfrak{q}_t)$$

u. s. f. In der Summe ergiebt sich, wenn man den gemeinsamen Faktor c^6 unterdrückt:

$$98')\qquad \frac{1}{5}\tau'^5\dddot{\mathfrak{q}}_t + \tau'^4(\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} - \mathfrak{q}_t) + 12\,\tau'^3\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}$$
$$+ 12\,\tau'^2(5\,\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + 144\,\tau'\mathfrak{w}_{t-\tau'} + 144(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t) = 0.$$

1) Ich habe dies inzwischen in einem Vortrag vor dem 3. internat. Mathematiker-Congreß zu Heidelberg ausgeführt, vgl. die Verhandlgn. d. Congr.

Dies die gesuchte **Funktionalgleichung**. Wir sehen davon ab, sie in Form einer Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung umzuschreiben, was sich natürlich ohne Weiteres machen läßt, und geben sogleich die Bedingung dafür an, daß

$$\varphi = A e^{\beta t/\tau'}$$

ein partikuläres Integral derselben wird. Die Bedingung lautet:

$$\frac{1}{5}\beta^5 + \beta^4(e^{-\beta}-1) + 12\beta^3 e^{-\beta} + 12\beta^2(5e^{-\beta}+1)$$
$$+ 144\beta e^{-\beta} + 144(e^{-\beta}-1) = 0$$

oder

$$100') \quad e^{-\beta}(\beta^4 + 12\beta^3 + 60\beta^2 + 144\beta + 144) + \frac{1}{5}\beta^5 - \beta^4 + 12\beta^2 - 144 = 0.$$

Dieselbe ist bereits von Herglotz[1]) als Fundamentalgleichung der kleinen Rotationsschwingungen angegeben worden. Auch hebt Herglotz hervor, daß sie nicht nur für die kleinen Schwingungen (d. h. unter Vernachlässigung höherer Potenzen der Schwingungsamplitude), sondern, wie unsere Ableitung unmittelbar zeigt, in Strenge für beliebige Amplituden Gültigkeit hat.

Die Wurzeln der Gl. (100') sind bereits von Herglotz studirt worden, auf dessen Arbeit wir dieserhalb verweisen. Es giebt wieder unendlich viele Wurzeln, die aber nicht mehr rein imaginär sind, sondern einen negativen reellen Teil haben, sowie eine reelle. Letztere Wurzel ist diejenige vom kleinsten absoluten Betrag: $\beta = -2{,}34$.

Wir fügen noch das asymptotische Gesetz für die Wurzeln von großem absoluten Betrage hinzu. Gl. (100') können wir nach Division mit β^4 schreiben:

$$e^{-\beta} = -\frac{\beta}{5}(1 - \cdots),$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder klein sind, da sie negative Potenzen von β enthalten. Machen wir nun für β den Ansatz $\beta = 2i\pi m + h + ik$, wo $|h|$ und $|k|$ als klein gegen $|m|$ vorausgesetzt werden, so ergiebt sich

$$e^{-h}\cos k = -\frac{h}{5} + \cdots, \quad e^{-h}\sin k = \frac{1}{5}(2\pi m + k) + \cdots,$$

also näherungsweise, wenn h und k sowie alle nicht hingeschriebenen Glieder gegen m vernachlässigt werden:

1) Man beachte, daß die bei Herglotz mit z bezeichnete Größe bei uns der Größe $-\beta$ entspricht.

$$e^{-h} = \frac{2\pi m}{5}, \quad h = -\log\frac{2\pi m}{5}, \quad k = \frac{\pi}{2},$$

womit sich für die großen Wurzeln unserer Gleichung das folgende asymptotische Gesetz ergiebt:

$$\beta = -\log\frac{2\pi m}{5} + \frac{4m+1}{2}\pi i \ldots \text{ im Limes für } m = \pm\infty$$

Ueber die Beziehung des so erhaltenen Spektrums zu denjenigen der Optik ist dasselbe zu sagen wie unter a).