

Strahlungsdämpfung und Selbstbeschleunigung in der klassischen Theorie des punktförmigen Elektrons

Von HELMUT STEINWEDEL

Einleitung

Sowohl die klassische Elektronentheorie als auch die Quantenelektrodynamik leiden unter den geläufigen Divergenzschwierigkeiten. Diese äußern sich nicht nur darin, daß die „Selbstenergie“ eines punktförmigen Elektrons divergiert,

d. h. das Integral $\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 d\tau$ keinen endlichen Wert hat, wenn man für \mathcal{E} die elektrische Feldstärke eines Punktelektrons einsetzt, sondern sie geben weiterhin Anlaß zur sogenannten „Selbstbeschleunigung“ [DIRAC (1938), ELIEZER (1947)].

Die Selbstbeschleunigung hängt ihrerseits eng mit der „Strahlungsdämpfung“ und der „Eigenkraft“ zusammen. Ein beschleunigtes Elektron verliert ständig Energie durch elektromagnetische Strahlung; wenn der Energiesatz erfüllt sein soll, muß sich also ein Elektron der Masse m und Ladung e in einem vorgegebenen äußeren Kraftfeld \mathfrak{R}_a anders bewegen, als wenn es ungeladen wäre, es muß auf das geladene Elektron noch eine weitere Kraft, die „Eigenkraft“ \mathfrak{R}_e , einwirken, die nur von seinem eigenen elektromagnetischen Feld herrühren kann.

Als Bewegungsgleichung des geladenen Elektrons ergibt sich daher¹⁾

$$(1) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$$

$$\text{mit} \quad \mathfrak{R}_e = e\mathcal{E}_{\text{ret}},$$

wobei \mathcal{E}_{ret} die vom Elektron erzeugte retardierte elektrische Feldstärke am jeweiligen Ort des Elektrons ist. Diese gilt es somit zunächst zu bestimmen.

Da die in die Eigenkraft eingehende Feldstärke ihrerseits von der Bewegung des Elektrons abhängt, werden wir versuchen, die Eigenkraft durch die kinematischen Größen des Elektrons [$\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\ddot{\mathbf{r}}}(t)$ usw.] auszudrücken. Gehen wir mit dem so gewonnenen Ausdruck dann in die Bewegungsgleichung (1) ein, so ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für $\mathbf{r}(t)$; diese sollte dann die Bewegung eines Elektrons in Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld beschreiben.

¹⁾ Wir beschränken uns der Einfachheit halber durchweg auf die nichtrelativistische Näherung; die grundsätzlichen Gesichtspunkte werden dadurch nicht berührt.

§ 1. Berechnung der Eigenkraft

Man könnte zunächst versucht sein, die Eigenkraft einfach über den Energiesatz herzuleiten. Die Strahlungsleistung eines beschleunigten Elektrons ist gegeben durch¹⁾

$$(2) \quad S = \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}^2.$$

Für die Eigenkraft \mathfrak{R}_e müßte also gelten

$$-(\mathfrak{R}_e \dot{r}) = \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}^2.$$

Diese Gleichung ist aber sicher nicht sinnvoll, da im Falle $\dot{r} = 0$ die Eigenkraft \mathfrak{R}_e unendlich werden müßte, falls $\ddot{r} \neq 0$ ist. Der Fehler, der hier begangen würde, ist, daß (2) zwar die ins Unendliche ausgestrahlte, jedoch nicht die gesamte vom Elektron ans Feld abgegebene Energie darstellt. Diese erhält man durch Berechnung des Energiestroms durch eine das Elektron unmittelbar umschließende mitbewegte Kugel und ergibt, wie unten ausgeführt, in der Tat das richtige Resultat. Ein einfacher und direkter Weg zur Bestimmung von $\mathfrak{R}_e = e \mathfrak{E}_{\text{ret}}$ führt indessen über die DIRACsche Darstellung der elektrischen Feldstärke eines beliebig bewegten punktförmigen Elektrons²⁾:

$$(3) \quad \mathfrak{E}_{\text{ret}} = -4e \int_{-\infty}^0 \frac{d\delta(\Gamma)}{d\Gamma} \left\{ \mathbf{r}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t) t \right\} d\Gamma$$

mit $\Gamma = t^2 - r^2$.

$\mathfrak{E}_{\text{ret}}$ ist dabei das retardierte elektrische Feld zur Zeit $t = 0$ und $\mathbf{r}(t)$ der vom Aufpunkt zum Elektron (!) zeigende Radiusvektor.

Durch Taylorentwicklung zur Zeit $t = 0$ erhält man

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_0 t^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}}_0 t^3 + \dots$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_0 t + \frac{1}{2} \dddot{\mathbf{r}}_0 t^2 + \dots$$

sowie

$$\delta(t^2 - r^2) = \delta(t^2 - r_0^2) + \left[\frac{d\delta(x)}{dx} \right]_{x=t^2-r_0^2} \cdot (r_0^2 - r^2)$$

¹⁾ Hier und im folgenden ist überall $c = 1$ gesetzt.

²⁾ In relativistischer Schreibweise ($x_4 = -x^4 = t$) lautet die Feldstärke eines punktförmigen Elektrons, das sich bei x befindet [DIRAC (1938)]:

$$F_{\mu\nu\text{ret}}(x') = -4e \int_{-\infty}^{\alpha_0} \frac{d\delta(\Gamma)}{d\Gamma} [(x'_\mu - x_\mu) \dot{x}_\nu - (x'_\nu - x_\nu) \dot{x}_\mu] d\alpha$$

Ein Punkt bedeutet dabei Ableitung nach der Eigenzeit α des Elektrons, und $\Gamma = -(x'_\mu - x_\mu)(x'^\mu - x^\mu)$; $\delta(\Gamma)$ ist die DIRACsche δ -Funktion. Ferner ist α_0 definiert durch $x'_4 - x_4(\alpha_0) = 0$. In nichtrelativistischer Näherung folgt daraus wegen $d\alpha = dt$ sofort (3) bzw. (11), wenn man $\{x'_\mu - x'_\mu\} = \{\mathbf{r}, t\}$ setzt, den (räumlichen und zeitlichen) Koordinatenursprung in den Aufpunkt legt.

so daß sich schließlich nach einigen partiellen Integrationen bei konsequenter Vernachlässigung aller in $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ usw. quadratischen Größen¹⁾ ergibt, wenn wir den Index 0 nunmehr überall fortlassen.

$$\mathfrak{E}_{\text{ret}} = -2e \int_{-\infty}^0 \delta(t^2 - r^2) \left\{ \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})}{t^2} + \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{2} + \frac{2}{3} \ddot{\mathbf{r}} t + \dots \right\} dt$$

Wegen $\delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta(t-r)}{r} + \frac{\delta(t+r)}{r} \right)$ wird daraus

$$(4) \quad \mathfrak{E}_{\text{ret}} = -\frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{e}{2r} \left\{ \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}) \right\} + \frac{2}{3} e \ddot{\mathbf{r}} + O(r).$$

Die auf das Elektron wirkende Kraft erhalten wir daraus durch Grenzübergang $r \rightarrow 0$ ²⁾

$$(5) \quad \mathfrak{R}_e = e \mathfrak{E}_{\text{ret}} = -\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} \frac{e^2}{2r} \ddot{\mathbf{r}} + \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{r}} \right)$$

Im Limes $r \rightarrow 0$ divergiert der erste, zu $\ddot{\mathbf{r}}$ proportionale Term. Seine Bedeutung ist wegen der Proportionalität zu $\ddot{\mathbf{r}}$ unmittelbar klar, er repräsentiert die Trägheitswirkung der (unendlichen) Selbstenergie $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^2}{2r}$ ³⁾. Der zweite Term bleibt dagegen endlich und stellt die sogenannte Strahlungskraft dar. Wir erhalten also als endgültige Bewegungsgleichung

$$\left(\text{mit der Abkürzung } \lim_{r \rightarrow 0} (4/3) (e^2/2r) = \delta m \right):$$

$$(6) \quad (m + \delta m) \ddot{\mathbf{r}} - \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{R}_a.$$

¹⁾ Nichtrelativistische Näherung!

²⁾ Dieser Grenzübergang ist für die beiden ersten Terme von \mathfrak{E} zunächst sinnlos, da das Resultat von der Richtung von \mathfrak{E} abhängt. Sinnvollerweise definiert man den Grenzwert jedoch durch Mittelung über alle Richtungen von \mathbf{r} : $\lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{E} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \iint \mathfrak{E} d\Omega$, wo $d\Omega$ das

Raumwinkelement ist. Eine Rechtfertigung für diese Definition ist z. B., daß die unten folgende Ableitung von \mathfrak{R}_e aus dem Energiesatz ebenfalls auf Gl. (5) führt, sowie die Rechnung von LORENTZ für ein ausgedehntes Elektron [vgl. Gl. (7a)]. Ferner bewirkt diese Definition, daß der statische Anteil von \mathfrak{E} [erster Term in (4)] keinen Beitrag zu \mathfrak{R}_e liefert, was man vernünftigerweise verlangen muß. Man erhält jedoch nicht den Faktor 4/3 im ersten Term von \mathfrak{R}_e , wenn man in (3) statt $\delta(\Gamma)$ eine weniger singuläre Funktion $f(\Gamma)$ einsetzt [z. B. $\delta(\Gamma - a^2)$, vgl. dazu A. LANDÉ (1949, 1950)] und nach dem Grenzübergang $r \rightarrow 0$, der dann ohne weiteres möglich ist, $f(\Gamma)$ in $\delta(\Gamma)$ ausarten läßt (im genannten Beispiel durch $a \rightarrow 0$). Dieses merkwürdige Verhalten rührt davon her, daß für alle solche Funktionen $f(\Gamma)$ die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors auch bei Anwesenheit von Ladungen überall verschwindet; vgl. die folgende Fußnote.

³⁾ Der Faktor 4/3 vor diesem Term in Gleichung (5) rührt davon her, daß man für den Zusammenhalt des Elektrons noch nichtelektrische Kräfte einführen muß, vgl. dazu BECKER, S. 34, 43 und 294. Nur in einer Theorie, in der die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors überall verschwindet, wird dieser Faktor gleich eins [SCHOCH und STEINWEDEL (1951)].

Dabei ist δm zwar unendlich, andererseits muß $M = m + \delta m$ aber gleich der experimentell bestimmten Elektronenmasse¹⁾ und somit endlich sein („Massenrenormalisierung“), so daß wir statt (6) schreiben müssen

$$(7) \quad M \ddot{r} - \frac{2}{3} e^2 \ddot{r} = \mathfrak{R}_e.$$

Das Problem der Strahlungsrückwirkung ist vor langer Zeit bereits von H. A. LORENTZ für ein ausgedehntes Elektron behandelt worden. LORENTZ findet für die Eigenkraft [LORENTZ (1916)] eines oberflächengeladenen Elektrons vom Radius ρ

$$(7a) \quad \mathfrak{R}_e = -\frac{4}{3} \frac{e^2}{2\rho} \ddot{r} + \frac{2}{3} e^2 \ddot{r} - \frac{1}{9} e^2 \rho' \ddot{r}' + \dots$$

Dieser Ausdruck geht für $\rho \rightarrow 0$ ersichtlich in Gleichung (5) über.

Einen anderen Weg zur Berechnung der Eigenkraft hat DIRAC (1938) beschritten. Es ist ($\mathfrak{E}_{av} =$ avanciertes Feld)

$$(8) \quad e \mathfrak{E}_{ret} = \frac{e}{2} (\mathfrak{E}_{ret} + \mathfrak{E}_{av}) + \frac{e}{2} (\mathfrak{E}_{ret} - \mathfrak{E}_{av}).$$

Bestimmt man beide Terme am Ort des Elektrons, so ergibt sich gerade²⁾

$$(9) \quad \frac{e}{2} (\mathfrak{E}_{ret} + \mathfrak{E}_{av}) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{e^2}{2r} \ddot{r}$$

$$\frac{e}{2} (\mathfrak{E}_{ret} - \mathfrak{E}_{av}) = \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}.$$

Die Aufteilung (8) ist also nur ein bequemes Hilfsmittel zur Berechnung von \mathfrak{R}_e , und die von DIRAC in seiner zitierten Arbeit vorgenommene Neuinterpretation der Teilfelder ist im wesentlichen eine andere Darstellung der Massenrenormalisierung.

Das gleiche gilt für die „Absorber Theory of Radiation“ von WHEELER und FEYNMAN (1945, 1949), die letzten Endes ebenfalls zur Bewegungsgleichung (5) führt. Die vom Gewohnten abweichende physikalische Interpretation der Herleitung kann an den aus (5) zu ziehenden Konsequenzen natürlich nichts ändern und spielt daher für die hier zu untersuchenden Fragen keine Rolle.

Die Berechnung von \mathfrak{R}_e [vgl. (3)ff.] aus dem retardierten Feld ist übrigens nicht ganz selbstverständlich. Da auch das avancierte Feld eine Lösung der Maxwellgleichung ist, hätten wir auch dieses zur Berechnung von \mathfrak{R}_e benutzen können und hätten [wie man aus (9) abliest, wenn man ret. und av. vertauscht] in (5) für den zweiten Term auf der rechten Seite das negative Vorzeichen erhalten. Da das avancierte Feld aber einlaufenden Wellen entspricht, wird dann ein ganz anderer Vorgang beschrieben, nämlich die Absorption elektromagnetischer Energie (statt Ausstrahlung). Hätten wir $\mathfrak{R}_e = (e/2) (\mathfrak{E}_{ret} + \mathfrak{E}_{av})$ gesetzt, so wäre der \ddot{r} proportionale Term in (5) überhaupt verschwunden, und das Feld des Elektrons entspräche etwa (cum grano salis) einem speziellen Streuprozeß. Die Verwendung der retardierten Felder ist also durch die physikalische Situation vorgeschrieben, welche durch die bekannte Ausstrahlungsbedingung hinreichend gekennzeichnet ist; einlaufende Wellen sind sinnvollerweise nicht zum Eigenfeld, sondern zum äußeren Feld zu zählen.

¹⁾ m nennt man auch die „mechanische“, δm die „elektromagnetische“ Masse.

²⁾ Dies ist unmittelbar evident, denn bei der Transformation $t \rightarrow -t$ bleiben $(\mathfrak{E}_{ret} + \mathfrak{E}_{av})$ und \ddot{r} invariant, während $(\mathfrak{E}_{ret} - \mathfrak{E}_{av})$ und \ddot{r}' das Vorzeichen wechseln.

Wie schon oben bemerkt, kann man die Eigenkraft auch direkt aus der vom Elektron ans Feld abgegebenen Energie berechnen. Es muß also sein

$$(10) \quad -\dot{r} \mathfrak{R}_e = \frac{1}{4\pi} \oint \left[((\mathfrak{E} \mathfrak{H}) d\mathfrak{f}) - \frac{1}{2} (\dot{r}, \mathfrak{E}^2 d\mathfrak{f}) \right]$$

wobei das Oberflächenintegral über eine das Elektron umschließende kleine Kugel zu erstrecken ist. Der zweite Term auf der rechten Seite rührt davon her, daß die Energieströmung, wie schon oben betont, durch eine mitbewegte Kugel zu berechnen ist; er bedeutet einfach die konvektiv mitgeführte Energie, die natürlich von der gesamten Ausstrahlung abzuziehen ist. Daß dieser Term im limes $r \rightarrow 0$ nicht verschwindet, ist natürlich eine Folge der Singularität des Feldes bei $r = 0$.

Wie oben ergibt sich für das Magnetfeld:

$$(11) \quad \mathfrak{H}_{ret} = -4e \int_{-\infty}^0 \frac{d\delta(I')}{dI'} [\dot{r} \mathfrak{r}] dt$$

und nach Taylorentwicklung und Integration

$$(11a) \quad \mathfrak{H}_{ret} = -\frac{e}{r^2} \left[\dot{r} \frac{\mathfrak{r}}{r} \right] + \frac{e}{2} \left[\ddot{r} \frac{\mathfrak{r}}{r} \right].$$

Unter Berücksichtigung von $d\mathfrak{f} = -\frac{\mathfrak{r}}{r} d\mathfrak{f}$, $((\mathfrak{E} \mathfrak{H}) \mathfrak{r}) = (\dot{r} \mathfrak{E}) \mathfrak{H}$ erhält man aus (10)

$$(\dot{r} \mathfrak{R}_e) = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \left(\left[\frac{\mathfrak{r}}{r} \mathfrak{E} \right] \mathfrak{H} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \dot{r} \right) \mathfrak{E}^2 \right\} d\mathfrak{f}$$

und durch Einsetzen von (4) und (11a) bei Berücksichtigung höchstens quadratischer Terme in \dot{r}, \ddot{r} usw. im Limes $r \rightarrow 0$

$$(\dot{r} \mathfrak{R}_e) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^2}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{2r^3} \left[\frac{\mathfrak{r}}{r} \dot{r} \right] \left[\dot{r} \frac{\mathfrak{r}}{r} \right] - \frac{2}{3r^2} \left[\frac{\mathfrak{r}}{r} \ddot{r} \right] \left[\dot{r} \frac{\mathfrak{r}}{r} \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \dot{r} \right) \left\{ \frac{1}{r^3} \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \ddot{r} \right) - \frac{2}{3r^2} \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \ddot{r} \right) \right\} \right) d\mathfrak{f}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} e^2 \left\{ -\frac{1}{r} (\dot{r} \dot{r}) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + (\dot{r} \ddot{r}) \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9} \right) \right\}$$

und daraus schließlich

$$(12) \quad (\dot{r} \mathfrak{R}_e) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{e^2}{2r} (\dot{r} \dot{r}) + \frac{2}{3} e^2 (\dot{r} \ddot{r}).$$

Bis auf einen zu \dot{r} senkrechten Term, der hier unbestimmt bleibt, ergibt sich also wieder Gl. (5).

Dieser einfache Ausdruck für \mathfrak{R}_e ist natürlich eine Besonderheit des elektromagnetischen Feldes. Für andere Feldtypen (z. B. Mesonfelder sowie lineare

Verallgemeinerungen der Elektrodynamik), die sich vom elektromagnetischen Feld im wesentlichen dadurch unterscheiden, daß in (3) bzw. (11) statt $\delta(I)$ eine andere Funktion $f(I)$ steht, hätten wir statt der einfachen Differentialgleichung (7) dritter Ordnung in $r(t)$ eine komplizierte Integrodifferentialgleichung erhalten [vgl. § 5].

§ 2. Lösungen der Bewegungsgleichung. Selbstbeschleunigung

Die Lösungen der Differentialgleichung (7) sind leicht zu übersehen, wenn die Gleichung linear ist, d. h. für

$$\begin{aligned} \text{I. } \mathfrak{R}_a &= 0 && \text{(freies Elektron)} \\ \text{II. } \mathfrak{R}_a &= -M\omega^2 r && \text{(harmon. Oszillator)} \end{aligned}$$

sowie für die dazugehörigen inhomogenen Gleichungen.

Zur Lösung der homogenen Gleichungen setzen wir in üblicher Weise $r = ae^{\alpha t}$ und erhalten im Falle I

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{2e^2}{3M} \alpha \right) = 0$$

also

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{3M}{2e^2}.$$

Infolgedessen lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des freien Elektrons

$$(13) \quad r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t + \ddot{r}(0) \left\{ \frac{e^{\alpha_3 t} - 1}{\alpha_3^2} - \frac{t}{\alpha_3} \right\}.$$

Im Falle II ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \frac{3M}{2e^2} \alpha^2 - \frac{3M}{2e^2} \omega^2 &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= \pm i\omega - \frac{1}{3} \frac{e^2 \omega^2}{M} + O(e^4); \quad \alpha_3 = \frac{3M}{2e^2} + \frac{2e^2 \omega^2}{3M} + O(e^4) \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet

$$(14) \quad r \approx e^{-\frac{1}{3} \frac{e^2 \omega^2}{M} t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) + c e^{\left(\frac{3M}{2e^2} + \frac{2e^2 \omega^2}{3M} \right) t}.$$

Da (7) eine Differentialgleichung dritter Ordnung ist, treten in den allgemeinen Lösungen (13), (14) jeweils drei Integrationskonstanten auf, d. h. wir können z. B. $r(0)$, $\dot{r}(0)$ und $\ddot{r}(0)$ willkürlich vorgeben. $\ddot{r}(0)$ als Integrationskonstante ist zunächst ungewohnt, da man in der gewöhnlichen Punktmechanik nur $r(0)$ und $\dot{r}(0)$ frei vorgeben kann. Hier handelt es sich jedoch um einen geladenen Massenpunkt in Wechselwirkung mit seinem Eigenfeld. Um das Eigenfeld genau zu kennen, müßte eigentlich die ganze „Vorgeschichte“ des Teil-

chens, mit anderen Worten seine Bahn für $t < 0$ bekannt sein, man sollte also sogar unendlich viele Integrationskonstanten oder auch eine willkürliche Funktion in der allgemeinen Lösung erwarten. Für beliebiges $f(I)$ [vgl. § 1, letzter Absatz, sowie § 5] wäre das auch sicher der Fall, und es ist eine bemerkenswerte Besonderheit der Elektrodynamik, daß der Anfangszustand des Eigenfeldes, soweit er die Bewegung des Elektrons beeinflußt, bereits durch eine einzige weitere Integrationskonstante, nämlich $\ddot{r}(0)$, hinreichend festgelegt werden kann.

Physikalisch völlig absurd sind dagegen in den allgemeinen Lösungen die mit der Zeit exponentiell anwachsenden Terme. Dieses exponentielle Anwachsen von $r(t)$ und damit auch von $\dot{r}(t)$, $\ddot{r}(t)$ usw. geht sogar ungeheuer schnell, da $\frac{2e^2}{3M c^3} \approx 6,4 \cdot 10^{-24}$ sec (bis auf den Faktor $\frac{2}{3}$ gleich klassischer Elektronenradius dividiert durch Lichtgeschwindigkeit) ist. Diese „Selbstbeschleunigung“ macht offensichtlich eine exakte Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung sinnlos. Nur in den Fällen, wo die Koeffizienten der störenden exponentiellen Terme verschwinden, also bei geeigneten Anfangsbedingungen, ergeben sich physikalisch sinnvolle Lösungen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß in der Regel nur ein einziger Wert der neu hinzukommenden Integrationskonstanten [z. B. $\ddot{r}(0) = 0$, vgl. (13)], in gewissen Fällen sogar überhaupt keiner¹⁾, eine vernünftige Lösung liefert; man hat also den Eindruck einer Art labilen Gleichgewichts²⁾. Woher nimmt das Elektron nun die für die Selbstbeschleunigung und die damit verbundene massive Ausstrahlung notwendige Energie?

§ 3. Energiebilanz

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir die Energiebilanz. Wir gehen dazu aus von Gleichung (12), die wir folgendermaßen umschreiben:

$$(15) \quad -(\dot{r} \mathfrak{R}_e) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\delta m}{2} \dot{r}^2 - \frac{2}{3} e^2 (\dot{r} \ddot{r}) \right\} + \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}^2.$$

Die Differenz der Strahlungsleistungen unmittelbar am Elektron und in großer Entfernung davon ist nach (2) und (15) gegeben durch

$$(16) \quad -(\dot{r} \mathfrak{R}_e) - \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}^2 = \frac{d}{dt} \frac{\delta m}{2} \dot{r}^2 - \frac{d}{dt} \frac{2}{3} e^2 (\dot{r} \ddot{r}).$$

Die durch Gleichung (16) beschriebene Energieemission muß somit in der Umgebung des Elektrons steckenbleiben. Die gesamte Feldenergie setzt sich folglich aus 3 Anteilen zusammen:

1. der konstanten Ruheenergie δm
2. der Energie des „Strahlungsfeldes“ $\int_{-\infty}^{t'} \frac{2}{3} e^2 \dot{r}^2 dt$

¹⁾ Wie ELIEZER (1947) zeigt, gibt es im Falle des Coulombpotentials (klassisches Modell des Wasserstoffatoms) höchstwahrscheinlich überhaupt keine vernünftige Lösung.

²⁾ Vgl. dazu unten § 4.

3. der zusätzlich zu δm im „Nahfeld“ enthaltenen Energie

$$\frac{\delta m}{2} \dot{r}^2 - \frac{2}{3} e^2 (\ddot{r} \dot{r}).$$

Der erste Term von 3. ist einfach die kinetische Energie der „elektromagnetischen Masse“ δm ; die zur Selbstbeschleunigung notwendige Energie kann daher nur vom zweiten Term herrühren.

Nach 3. entspricht der Energieinhalt des Nahfeldes bei $(\dot{r} \ddot{r}) \neq 0$ nicht einfach der kinetischen Energie, wie zu erwarten wäre, wenn das Feld der Bewegung des Elektrons gleichsam wie ein starrer Körper, d. h. ohne innere Freiheitsgrade, folgen würde. Wenn $(\dot{r} \ddot{r}) > 0$ ist, wird das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Elektrons wegen seiner endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit vielmehr von Bahnelementen erzeugt, in denen das Elektron eine geringere Geschwindigkeit hatte. Infolgedessen ist auch die Energie des Nahfeldes kleiner als $\frac{1}{2} \delta m \dot{r}^2$. Diese Energiedifferenz $\frac{2}{3} e^2 (\ddot{r} \dot{r})$, oder vielmehr ihre zeitliche Zunahme, steht natürlich für weitere Beschleunigung und Ausstrahlung zur Verfügung. Absurderweise nimmt sie mit wachsendem \ddot{r} und \dot{r} unbegrenzt zu, so daß umgekehrt \ddot{r} und \dot{r} über alle Grenzen wachsen können und es im Falle der Selbstbeschleunigung auch tun. Daß diese Energiedifferenz (auch „Beschleunigungsenergie“ genannt) unbegrenzt ist, ist natürlich eine unmittelbare Folge der unendlich großen Selbstenergie δm , da die gesamte Energie des elektromagnetischen Feldes trotz Massenrenormalisierung unendlich ist¹⁾ und infolgedessen auch eine unendlich große Energie zur Verfügung steht. Eine formale Massenrenormalisierung ist also nicht ausreichend, um die Theorie in ihrer jetzigen Form zu retten. Man kann sogar umgekehrt sagen, daß gerade die Massenrenormalisierung in das Dilemma der Selbstbeschleunigung führt: Da $M = m + \delta m$ endlich und δm positiv unendlich ist, muß m negativ unendlich sein. Infolgedessen ist der gesamte Energieinhalt einer das Elektron umschließenden endlichen Kugel nicht mehr positiv definit, woraus die prinzipielle Möglichkeit der Selbstbeschleunigung folgt.

Die „Brutto“-Energiebilanz folgt natürlich direkt aus der Bewegungsgleichung (7) durch Multiplikation mit \dot{r} . Setzen wir $\mathfrak{R}_a = -\text{grad } V$, so ergibt sich

$$(17) \quad M (\dot{r} \ddot{r}) + (\dot{r} \text{grad } V) - \frac{2e^2}{3} (\ddot{r} \dot{r}) = 0$$

sowie nach zeitlicher Integration

$$(18) \quad \frac{M}{2} \dot{r}^2 + V(r) - \frac{2}{3} e^2 (\dot{r} \ddot{r}) + \int_{-\infty}^t \frac{2}{3} e^2 \dot{r}^2 dt = \text{const.}$$

Aus (18) folgt übrigens unmittelbar die Aufklärung einer bekannten Paradoxie der Strahlungsdämpfung [BECKER, DRUKEY (1949)]. Im Falle eines homogenen Kraftfeldes

($V = (a r)$ mit $a = \text{const}$) ist $\ddot{r}(t) = \frac{a}{M}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Die sekundlich abgestrahlte Energie ist $\frac{2e^2}{3} \dot{r}^2$; da jedoch $\ddot{r}(t) \equiv 0$ ist, scheint der Energiesatz (17)

¹⁾ Durch die Massenrenormalisierung wird natürlich die Feldenergie nicht geändert, sondern nur kompensiert.

verletzt. In Wirklichkeit wird aber die Ausstrahlung gerade durch die Beschleunigungsenergie $\frac{2}{3} e^2 (\dot{r} \ddot{r})$ gedeckt, da im vorliegenden Falle $\frac{d}{dt} (\dot{r} \ddot{r}) = \dot{r}^2$ ist.

Bemerkenswert ist aber vor allem, daß die allgemeinen Lösungen, als Funktionen von e^2 aufgefaßt, im Punkte $e^2 = 0$ wesentlich singular sind, sich also nicht nach steigenden Potenzen von e^2 entwickeln lassen [BHABHA (1946)]. Da das übliche Näherungsverfahren (auch in der Quantentheorie!) auf einer Entwicklung nach steigenden Potenzen von e^2 beruht, ist es allenfalls für solche Anfangsbedingungen zulässig, die nicht zur Selbstbeschleunigung führen. In allen anderen Fällen ist das Ergebnis zwar oft physikalisch akzeptierbar, aber streng genommen falsch. Nur in speziellen Fällen, wo die Lösung eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von e^2 gestattet (z. B. für ein freies Elektron), kann man die allgemeine Lösung durch ein iteratives Näherungsverfahren erhalten. Für das freie Elektron müßte man so z. B. in Gleichung (7) mit $\mathfrak{R}_a \equiv 0$ den Term $M \ddot{r}$ als „Störung“ betrachten, man erhält dann die vollständige Lösung (13) als Potenzreihe in $1/e^2$; dieses Verfahren entspricht in gewisser Hinsicht der „strong coupling theory“ der Mesonentheorie [G. WENTZEL (1943)]. Daneben gibt es auch Fälle, in denen sich selbst die „vernünftigen“ Lösungen (auch „physikalische“ Lösungen genannt) nicht nach steigenden Potenzen von e^2 entwickeln lassen, so z. B. für den Fall [vgl. (7)] $\mathfrak{R}_a = -\text{grad } V$ mit $V = -(\alpha r)$ für $(\alpha r) < 0$, $V = 0$ für $(\alpha r) > 0$. In diesem Fall hat nämlich die „physikalische Lösung“ die Form:

$$r = -\left(\frac{2e^2}{3M}\right)^2 \frac{\alpha}{M} \left(1 - e^{\frac{3M}{2e^2} t}\right) - \frac{\alpha}{2M} t^2 + b t \quad \text{für } (\alpha r) < 0, t < 0;$$

$$b = \text{const (Integrationskonstante)}$$

$$r = b t + \frac{2e^2}{3M} \frac{\alpha}{M} t \quad \text{für } (\alpha r) > 0; t > 0. \quad [\text{Es ist } r(0) = 0 \text{ gesetzt.}]$$

§ 4. Hamiltonfunktion des Systems Elektron + Feld

Weitere Informationen über den Mechanismus der Selbstbeschleunigung gewinnt man aus einer Untersuchung der Hamiltonfunktion des Systems Elektron + Feld²⁾. Nach Abseparation des longitudinalen Feldes lautet sie:

¹⁾ In diesem Falle ergibt sich in nullter Näherung $\ddot{r}_{(0)} = 0$; $\ddot{r}_{(0)} = a$ ($= \text{const}$); in 1. Näherung $\ddot{r}_{(1)} = \frac{3M}{2e^2} a$, $\ddot{r}_{(1)} = \frac{3M}{2e^2} a t$; in 2. Näherung $\ddot{r}_{(2)} = \left(\frac{3M}{2e^2}\right)^2 a t^2$, $\ddot{r}_{(2)} = \left(\frac{3M}{2e^2}\right)^2 a \frac{t^2}{2}$ usw., also

$$\ddot{r} = \ddot{r}_{(0)} + \ddot{r}_{(1)} + \ddot{r}_{(2)} + \dots = a \left\{ 1 + \frac{3M}{2e^2} t + \left(\frac{3M}{2e^2}\right)^2 \frac{t^2}{2} + \dots \right\}$$

mithin $\ddot{r} = a \exp \left\{ \frac{3M}{2e^2} t \right\}$, also gerade die Lösung (13).

²⁾ Die im folgenden dargestellte Theorie der Dipol-Hamiltonfunktion, insbesondere die entscheidenden kanonischen Transformationen (23) und (26), sind im wesentlichen der interessanten Arbeit von G. VAN KAMPEN (1951) entnommen, in der auch das Problem der Selbstbeschleunigung kurz gestreift wird.

$$(19) \quad H = \frac{1}{2m} (\mathfrak{P} - e\mathfrak{A}(\mathbf{r}))^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{E}^2 + (\text{rot } \mathfrak{A})^2) d\tau$$

wobei $-\frac{1}{4\pi} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ das zu \mathfrak{A} kanonisch konjugierte Feld ist. Denken

wir uns das Feld in eine große Kugel mit dem Radius L eingeschlossen und beschränken wir uns auf Dipolstrahlung, so können wir \mathfrak{A} wie folgt entwickeln¹⁾:

$$\mathfrak{A} = \mathbf{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{L}} q_n \frac{\sin k_n r}{r}, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

und entsprechend

$$-\mathfrak{E} = \mathbf{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{L}} p_n \frac{\sin k_n r}{r}$$

so wird aus (19) nach Ausmultiplikation der ersten Klammer:

$$(20) \quad H = \frac{1}{2m} \mathfrak{P}^2 + V(\mathbf{r}) - \frac{1}{m} (\mathfrak{P}, \sum \varepsilon_n q_n) + \frac{1}{2m} (\sum \varepsilon_n q_n)^2 + \frac{1}{2} \sum (p_n^2 + k_n^2 q_n^2)$$

$$\text{mit } \varepsilon_n = \frac{2}{3} e k_n \sqrt{\frac{3}{L}}.$$

Es ist jedoch genau genommen sinnlos, mittels dieser Hamiltonfunktion etwa nach der üblichen Störungsrechnung, bei der der dritte und vierte Term als Störenergie aufgefaßt werden, Strahlungsprobleme rechnen zu wollen. Das longitudinale Feld und damit die unendliche Ruhenergie sind zwar aus der Hamiltonfunktion (20) bereits eliminiert. Sie enthält aber immer noch die ebenfalls unendliche kinetische Energie $\frac{1}{2} \delta m \dot{\mathbf{r}}^2$, die natürlich im transversalen Feld steckt. Bei jeder Änderung der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ würde sich daher die Feldenergie um unendlich große Beträge ändern, und es ist nur unter besonderen Vorsichtsmaßnahmen möglich, diese Änderungen mit der Störungsrechnung zu erfassen.

Man verifiziert übrigens leicht, daß die Bewegungsgleichung (5) bzw. (7) auch aus den zu (20) gehörigen kanonischen Gleichungen

$$(21) \quad \mathfrak{P} = -\text{grad } V, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} (\mathfrak{P} - \sum \varepsilon_n q_n) \\ \dot{p}_n = \frac{\varepsilon_n}{m} (\mathfrak{P} - \sum \varepsilon_n q_n) - k_n^2 q_n, \quad \dot{q}_n = p_n$$

folgt.

Ersetzen wir die Summationen über n durch Integrationen über k , so erhalten wir wegen $dn = \frac{L}{\pi} dk$ aus (21) unmittelbar

¹⁾ $T q_n$ bedeutet Transversalteil von q_n , vgl. VAN KAMPEN (1951).

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left(-\text{grad } V - \frac{L}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon(k) \dot{q}(k, t) dk \right)$$

$$(22) \quad \ddot{q}(k, t) + k^2 q(k, t) = \varepsilon(k) \dot{\mathbf{r}}$$

(22) hat die „retardierte“ Lösung:

$$\dot{q} = \frac{\varepsilon(k)}{k} \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau = \frac{\varepsilon(k)}{k^2} \left\{ \dot{\mathbf{r}}(t) - \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau \right\}$$

Damit wird wegen $\int_0^{\infty} \cos k(t-\tau) dk = \pi \delta(t-\tau)$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(k) \dot{q}(k) dk = \ddot{\mathbf{r}} \delta m \frac{\pi}{L} - \frac{4e^2}{3L} \pi \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ = \ddot{\mathbf{r}} \delta m \frac{\pi}{L} - \frac{2e^2}{3} \frac{\pi}{L} \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad \text{mit } \delta m = \frac{4e^2}{3\pi} \int_0^{\infty} dk$$

und infolgedessen

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V - \delta m \ddot{\mathbf{r}} + \frac{2e^2}{3} \ddot{\mathbf{r}}$$

Nach dem oben Gesagten müssen wir in der Hamiltonfunktion (20) also zunächst eine Massenrenormalisierung vornehmen. Dies gelingt mit folgender kanonischen Transformation¹⁾:

$$(23) \quad q_n = q'_n + \frac{\varepsilon_n}{M k_n^2} \mathfrak{P}'_n; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \sum \frac{\varepsilon_n}{M k_n^2} p'_n; \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'; \quad p_n = p'_n \\ \text{mit } M = m + \delta m.$$

Daraus folgt

$$(24) \quad H = \frac{1}{2M} \mathfrak{P}'^2 + V(\mathbf{r}' + \sum \frac{\varepsilon_n}{M k_n^2} p'_n) + \\ + \frac{1}{2m} (\sum \varepsilon_n q'_n)^2 + \frac{1}{2} \sum (p_n'^2 + k_n^2 q_n'^2).$$

¹⁾ Physikalisch bedeutet diese Transformation die Abseparation des „Eigenfeldes“

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbf{T} \frac{\mathfrak{P}'}{M} \frac{e}{r} = \mathbf{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{L}} \frac{\varepsilon_n}{M k_n^2} \mathfrak{P}' \frac{\sin k_n r}{r}. \quad \text{Es ist jetzt } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}'$$

$$\text{mit } \mathfrak{A}' = \mathbf{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{L}} q'_n \frac{\sin k_n r}{r}.$$

²⁾ Zeitschrift „Fortschritte der Physik“

Die kanonischen Gleichungen lauten nunmehr

$$\mathfrak{P}' = -\text{grad } V; \quad \mathfrak{r}' = \frac{\mathfrak{P}'}{M}$$

$$\mathfrak{p}'_n = -k_n^2 \mathfrak{q}'_n - \frac{\varepsilon_n}{m} \sum \varepsilon_n \mathfrak{q}'_n; \quad \mathfrak{q}'_n = \frac{\varepsilon_n}{M k_n^2} \text{grad } V + \mathfrak{p}'_n.$$

Ersetzen wir wieder die Summationen durch Integrationen, und drücken wir \mathfrak{r}' nach (23) durch \mathfrak{r} aus, so ergeben sich nach kurzer Rechnung die Gleichungen

$$M \ddot{\mathfrak{r}} = -\text{grad } V - \frac{M}{m} \frac{L}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon(k) \dot{\mathfrak{q}}'(k, t) dk$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k^2 \right) \left(\dot{\mathfrak{q}}'(k, t) + \frac{\varepsilon(k)}{m k^2} \frac{L}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon(k') \dot{\mathfrak{q}}'(k', t) dk' \right) = -\frac{\varepsilon(k)}{k^2} \ddot{\mathfrak{r}}$$

mit der Lösung

$$\left(\dot{\mathfrak{q}}' + \frac{\varepsilon}{m k^2} \frac{L}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon \dot{\mathfrak{q}}' dk' \right) = -\frac{\varepsilon}{k^2} \int_{-\infty}^t \ddot{\mathfrak{r}}(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau.$$

Nach Multiplikation mit $\varepsilon(k)$ und Integration über k ergibt sich wie oben unter Berücksichtigung von $m + \delta m = M$

$$\frac{M}{m} \frac{L}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon(k) \dot{\mathfrak{q}}'(k, t) dk = -\frac{4}{3} e^2 \int_{-\infty}^t \ddot{\mathfrak{r}}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = -\frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathfrak{r}}(t)$$

und somit

$$(25) \quad M \ddot{\mathfrak{r}} = -\text{grad } V + \frac{2e^2}{3} \ddot{\mathfrak{r}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die kanonische Transformation (23) tatsächlich eine Massenrenormalisierung bewirkt. Diese ist allerdings noch nicht vollständig, da die „mechanische“ Masse m noch im dritten Term der Hamiltonfunktion auftritt. Dieser Schönheitsfehler läßt sich durch eine orthogonale Transformation der \mathfrak{q}_n beseitigen.

Wir setzen¹⁾

$$(26) \quad \mathfrak{q}'_n = \sum_m A_{nm} \mathfrak{q}''_m, \quad \mathfrak{p}'_n = \sum_m A_{nm} \mathfrak{p}''_m.$$

¹⁾ Diese Transformation bedeutet die Wahl eines anderen Orthogonalsystems für die Entwicklung des „äußeren“ Feldes \mathfrak{U}' .

$$\text{Es gilt nunmehr } \mathfrak{U}' = \text{T} \sum_{m=0}^\infty \sqrt{\frac{3}{L_m}} \mathfrak{q}''_m \frac{\sin(\varkappa_m r - \eta_m)}{r},$$

vgl. VAN KAMPEN (1951), Appendix A 4.

Für die A_{nm} wählen wir

$$(27) \quad A_{nm} = \frac{2}{\gamma \sqrt{L L_m}} \frac{k_n \varkappa_m \cos \eta_m}{\varkappa_m^2 - k_n^2}$$

$$\text{mit } \frac{1}{\gamma} = \frac{2e^2}{3M} \quad \text{und} \quad L_m = L - \frac{\cos^2 \eta_m}{\gamma}.$$

Die neuen Eigenwerte \varkappa_m und die Phasen η_m sind für großes L dabei durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(28) \quad \text{tg } \eta_m = \text{tg } L \varkappa_m = \frac{\varkappa_m}{\gamma}; \quad 0 \leq \eta_m \leq \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$(29) \quad H = \frac{\mathfrak{P}'^2}{2M} + V \left(\mathfrak{r}' + \frac{e}{M} \sum_m \sqrt{\frac{4}{3 L_m}} \frac{\cos \eta_m}{\varkappa_m} \mathfrak{p}''_m \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_m (\mathfrak{p}''_m{}^2 + \varkappa_m^2 \mathfrak{q}''_m{}^2) \right).$$

Die Transformation (26), (27) ist also eine Hauptachsentransformation des dritten und vierten Terms in (24). Für endliche Gesamtmasse M hat die Bestimmungsgleichung (28) für die Eigenwerte jedoch einen rein imaginären Eigenwert $\varkappa_0 = i\gamma$. Dieser war indessen auch zu erwarten, da für endliches M die „mechanische“ Masse m gegen minus unendlich geht und infolgedessen die Summe des dritten und vierten Terms in (24) nicht mehr positiv definit ist; der imaginäre Eigenwert $\varkappa_0 = i\gamma$ sorgt also dafür, daß der dritte Term in (29) es ebenfalls nicht ist. In dieser Summe ist also der Summand $\mathfrak{p}''_0{}^2 - \gamma^2 \mathfrak{q}''_0{}^2$ für die Selbstbeschleunigung verantwortlich. Für das weitere sei vermerkt, daß

$$\cos \eta_0 \approx \frac{1}{2} e^{\gamma L} \quad \text{und} \quad L_0 \approx -\frac{e^2 \gamma L}{4 \gamma}$$

ist. (29) liefert die kanonischen Gleichungen (den Term $m=0$ führen wir im folgenden immer gesondert auf, so daß sich die Summationen über m nur von $m=1$ bis $m=\infty$ erstrecken!):

$$(30) \quad \dot{\mathfrak{r}}' = \frac{\mathfrak{P}'}{M}; \quad \mathfrak{P}' = -\text{grad } V$$

$$\dot{\mathfrak{q}}''_m = \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3 L_m}} \frac{\cos \eta_m}{\varkappa_m} \text{grad } V + \mathfrak{p}''_m$$

$$\dot{\mathfrak{q}}''_0 = \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3 \gamma}} \text{grad } V + \mathfrak{p}''_0$$

$$\mathfrak{p}''_m = -\varkappa_m^2 \mathfrak{q}''_m; \quad \mathfrak{p}''_0 = \gamma^2 \mathfrak{q}''_0$$

und es ist

$$(31) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \frac{e}{M} \sum \sqrt{\frac{4}{3 L_m}} \frac{\cos \eta_m}{\varkappa_m} \mathfrak{p}''_m + \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3 \gamma}} \mathfrak{p}''_0.$$

Man verifiziert natürlich leicht, daß sich aus (30) wieder die Bewegungsgleichung (7) ergibt. Zunächst wird

$$(32) \quad M\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V - \frac{e}{M} \frac{\sqrt{L}}{\pi} \sqrt{\frac{4}{3}} \int_0^\infty \kappa \cos \eta(\kappa) \dot{q}''(\kappa, t) d\kappa + \\ + \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3}} \gamma^2 q_0''$$

$$(32a) \quad \ddot{q}''(\kappa, t) + \kappa^2 q''(\kappa, t) = -e \sqrt{\frac{4}{3L}} \frac{\cos \eta(\kappa)}{\kappa} \ddot{\mathbf{r}}' \\ \ddot{q}_0'' - \gamma^2 q_0'' = -e \sqrt{\frac{4}{3}} \ddot{\mathbf{r}}'$$

(32) hat die Lösungen

$$(33) \quad \dot{q}''(\kappa, t) = -e \sqrt{\frac{4}{3L}} \frac{\cos \eta(\kappa)}{\kappa} \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}'(\tau) \cos \kappa(t-\tau) d\tau$$

$$(34) \quad \dot{q}_0'' = -e \sqrt{\frac{4}{3}} \gamma \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}'(\tau) \mathcal{C}(\gamma(t-\tau)) d\tau.$$

Nach Integration über κ ergibt sich aus (32) unter Berücksichtigung von

$$(35) \quad \cos \eta(\kappa) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \kappa^2}} \\ \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' - \gamma \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}'(\tau) e^{\gamma(t-\tau)} d\tau$$

Daraus folgt durch Differentiation nach t

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' - \ddot{\mathbf{r}}' - \gamma \int_{-\infty}^t \ddot{\mathbf{r}}'(\tau) e^{\gamma(t-\tau)} d\tau$$

und daraus schließlich, wie es sein muß:

$$M\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V + \frac{2e^2}{3} \ddot{\mathbf{r}}.$$

Damit keine Selbstbeschleunigung auftritt, muß also nach dem obigen $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_0''(t) = 0$ sein, entsprechend wären die Anfangsbedingungen zu wählen.

Für ein freies Elektron ($V \equiv 0$) bedeutet das $\dot{q}_0''(t) = 0$ für alle t . Damit hat sich also das bereits oben erwähnte „labile Gleichgewicht“ im Falle einer „physikalischen Lösung“ handgreiflich manifestiert; jede noch so kleine

Störung führt unweigerlich zur Katastrophe, auch wenn sie „langsam“ eingeschaltet wird¹⁾.

Eine spezielle Lösung mit Selbstbeschleunigung im Falle des freien Elektrons ist gegeben durch

$$\mathfrak{P}' = 0, \quad \mathbf{r}' = 0, \quad q_0'' = \alpha e^{\gamma t}, \quad p_0'' = \alpha \gamma e^{\gamma t}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{r}(t) = \alpha \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3}} \gamma e^{\gamma t} = \mathbf{r}(0) e^{\gamma t}.$$

Allgemein ist

$$\mathfrak{A} = T \sum \sqrt{\frac{3}{L_m}} \frac{\sin(\kappa_m r - \eta_m)}{r} q_m''.$$

Daraus folgt für das obige Beispiel

$$\mathfrak{A} = T \sqrt{3} \gamma \frac{e^{-\gamma r}}{r} q_0'' \\ = T \sqrt{3} \gamma \frac{e^{\gamma(t-r)}}{r} \alpha = T \frac{3M}{2e} \frac{e^{\gamma(t-r)}}{r} \mathbf{r}(0)$$

und daraus die Feldstärken

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -e \gamma^2 \frac{e^{\gamma(t-r)}}{r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{r}(0) \right) \right] \\ \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} = e \gamma^2 \frac{e^{\gamma(t-r)}}{r} \left(1 + \frac{1}{\gamma r} \right) \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{r}(0) \right].$$

Obwohl die Felder mit r exponentiell abfallen, liefern sie dennoch für hinreichend großes t eine beliebig große Ausstrahlung, da sie andererseits mit t exponentiell anwachsen²⁾.

Es ist zunächst erstaunlich, daß sich trotz der Beschränkung auf Dipolstrahlung aus der Hamiltonfunktion (20) [bzw. (24), (29)] die vollständige Bewegungsgleichung (7) ergibt. Betrachten wir jedoch die Bewegungsgleichungen der Feldoszillatoren, wie sie aus (19) ohne Beschränkung auf Dipolstrahlung bei Entwicklung der Feldstärken nach ebenen Wellen folgen, so gilt [HEITLER, S. 49]

$$(36) \quad \ddot{q}_\lambda + k_\lambda^2 q_\lambda \sim e(\dot{\mathbf{r}} \mathbf{e}) e^{i k_\lambda r} \quad [e = \text{Polarisations-Einheitsvektor}].$$

Entwickeln wir hier

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0) t + \dots \\ e^{i k_\lambda r} = 1 + i \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} + \dots$$

und setzen $\mathbf{r}(0) = 0$, so wird aus der rechten Seite von (36)

$$e(\dot{\mathbf{r}} \mathbf{e}) (1 + i \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}(0) t + \dots)$$

¹⁾ Die Vermutung, durch adiabatisches Einschalten des äußeren Feldes die Selbstbeschleunigung vermeiden zu können, ist also nicht zutreffend; vgl. auch E. GORA (1952).

²⁾ Es ist also nicht zutreffend [vgl. VAN KAMPEN (1951)], daß die Terme mit dem Index 0 keinen Beitrag zur Ausstrahlung liefern.

Bis auf das erste sind also alle übrigen Glieder quadratisch bzw. höherer Ordnung in \dot{r} , \ddot{r} usw. und bleiben daher im Rahmen der nichtrelativistischen Näherung unberücksichtigt. Die einzige Winkelabhängigkeit steckt also in dem Skalarprodukt $(\dot{r} \cdot e)$ und führt zu Dipolwellen [VAN KAMPEN (1951)]. In diesem Zusammenhang sei noch kurz auf eine schon oben erwähnte Schwierigkeit hingewiesen, die sich einstellt, wenn man von der Hamiltonfunktion (20) ausgeht, in der noch keine Massenrenormalisierung durchgeführt wurde. Wir betrachten das Problem des harmonischen Oszillators, $V = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$, und fassen den dritten und vierten Term in der Hamiltonfunktion als Störglieder auf. In nullter Näherung ergibt sich natürlich, wenn zunächst das (transversale) Feld überall verschwindet,

$$r = a \sin \omega t, \quad q(k, t) = 0.$$

Für die erste Näherung haben wir die Bewegungsgleichung (22) für q zu lösen:

$$\ddot{q}(k, t) + k^2 q(k, t) = \varepsilon(k) r_0 \cos \omega t \quad \text{mit } v_0 = a \omega.$$

Als Anfangsbedingung wählen wir $q(k, 0) = 0$ und erhalten

$$q(k, t) = \frac{\varepsilon(k) v_0}{k^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos k t)$$

$$p = \dot{q} = -\frac{\varepsilon(k) v_0}{k^2 - \omega^2} (\omega \sin \omega t - k \sin k t).$$

Die pro Zeiteinheit an einen Feldoszillator abgegebene Energie ist dann

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (p^2 + k^2 q^2) = \dot{q} (\ddot{q} + k^2 q) = -\frac{\varepsilon^2 v_0^2}{k^2 - \omega^2} (\omega \sin \omega t - k \sin k t) \cos \omega t.$$

Daraus ergibt sich die gesamte pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie zu

$$(37) \quad S = -\frac{4e^2}{3\pi} v_0^2 \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} (\omega \sin \omega t - k \sin k t) \cos \omega t dk.$$

Üblicherweise wird hier nur über die Umgebung der Stelle $k = \omega$ integriert, mit dem bekannten Resultat [HEITLER, S. 55]

$$S = \frac{e^2}{3} \omega^2 v_0^2 = \frac{2}{3} e^2 \ddot{r}^2.$$

In Wirklichkeit divergiert das Integral (27) jedoch, wie auch zu erwarten ist, da ja in der gesamten Ausstrahlung derjenige Anteil enthalten sein muß, der der Änderung der kinetischen Energie der elektromagnetischen Masse δm entspricht. Die Abseparation dieses Anteils wird hier durch den „Resonanznenner“ $k^2 - \omega^2$ sehr einfach, kann in anderen Beispielen jedoch schwierig

sein — es sei denn, man zieht ihn von vornherein unter dem Integral (37) ab. Die Anfangsbedingungen muß man dann jedoch zweckmäßigerweise so wählen, daß neben $q(k, 0) = 0$ auch $\dot{r}(0) = 0$ ist¹⁾.

§ 5. Möglichkeiten zur Elimination der Selbstbeschleunigung

Wie wir gesehen haben, ist die jetzige Theorie des punktförmigen Elektrons wegen der auftretenden Selbstbeschleunigung im Prinzip unbrauchbar, und es erhebt sich die Frage, wie diese Schwierigkeiten zu beheben sind. DIRAC (1938) hatte dazu vorgeschlagen, nur die „physikalischen Lösungen“ zuzulassen. Abgesehen davon, daß nicht einzusehen ist, weshalb in der Natur nur bestimmte Anfangsbedingungen realisiert sein sollen, ist es jedoch nicht möglich, für jedes beliebige äußere Kraftfeld von vornherein die richtigen Anfangsbedingungen anzugeben, ohne die (exakte) Lösung schon zu kennen. Eine andere Möglichkeit wäre, nur nach der Störungstheorie (Entwicklung nach steigenden Potenzen von e^2) zu rechnen, bei der ja, wie oben betont, keine Selbstbeschleunigung auftreten kann. Aber auch dieser Weg ist aus prinzipiellen Gründen abzulehnen, da es absurd erscheint, einen ganz speziellen Lösungsweg für die Bewegungsgleichungen vorzuschreiben, der genau genommen falsch ist. Es ist also notwendig, die Bewegungsgleichungen, d. h. also die Maxwellgleichungen, zu modifizieren. Die in Frage kommenden Modifikationen sind, wenn man auch weiterhin an der Linearität der Feldgleichungen festhält, bereits von verschiedenen Autoren untersucht worden [BOPP (1943, 1946); FEYNMAN (1948); MC MANUS (1948)²⁾; LEHMANN (1950); HÖHLER (1951); STEINWEDEL (1951, 1952)].

Die Bewegungsgleichung eines freien punktförmigen Teilchens in Wechselwirkung mit seinem Eigenfeld lautet dann [LEHMANN und STEINWEDEL (1952)]³⁾

$$(38) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t^2)}{dt} \left[\dot{r}(t) - \frac{r(t) - r(0)}{t} \right] dt + \frac{2}{3} \ddot{r}(0) = 0$$

wobei $\int_0^\infty f(z) dz = 1$, $\int_0^\infty f(t^2) dt$ endlich, im übrigen $f(z)$ jedoch zunächst beliebig ist. Durch Entwicklung nach der Retardierung ergibt sich aus (38)

$$(39) \quad \frac{2}{3} \ddot{r}(0) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+1)^2}{(2\nu+2)!} r^{(2\nu+2)}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2) t^{2\nu} dt = 0$$

¹⁾ Andernfalls würde sofort die kinetische Energie $\frac{1}{2} \delta m \dot{r}^2$ abgestrahlt werden, die ja zunächst wegen $q(0) = 0$ nicht im Feld enthalten ist.

²⁾ Die Theorie von MC MANUS ist nach den Untersuchungen von LEHMANN den anderen Formulierungen äquivalent.

³⁾ Sofern man sich auf zeitsymmetrische Feldgleichungen beschränkt, für die es nach den Untersuchungen von LEHMANN (1950) und HÖHLER (1951) keine streng retardierten Lösungen gibt.

das heißt, wie schon angedeutet, im allgemeinen eine Differentialgleichung unendlicher Ordnung. Man könnte zunächst versuchen, $f(z)$ so zu bestimmen, daß

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2) t^{2\nu} dt = 0 \quad \text{für } \nu \geq n.$$

Machen wir für die lineare Differentialgleichung (39) den Ansatz $r \sim e^{at}$, so ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$(40) \quad \frac{2}{3} a^3 - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \frac{(2\nu+1)^2}{(2\nu+2)!} a^{(2\nu+2)}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $n=2$. Dann hat (40) die vier Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = 0; \quad \alpha_{3,4} = \frac{8}{a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{a_1}\right)^2 - \frac{4}{3} \frac{a_0}{a_1}}.$$

Da $a_0 > 0$ sein muß, ist es also nicht möglich, a_1 so zu wählen, daß sämtliche Wurzeln α_i allenfalls einen negativen Realteil haben. Im Fall $n > 2$ ist auch den VIETASchen Wurzelsätzen

$$\sum \alpha_i = 0,$$

da in der charakteristischen Gleichung (40) bis auf a^3 keine weiteren ungeraden Potenzen von a auftreten, insbesondere also $a^{2\nu-1}$ nicht vorkommt. Die α_i können also allenfalls rein imaginär sein, wenn keines einen positiven Realteil haben soll. Das ist aber auch nicht möglich, da die a_ν sowie der Koeffizient von a^3 reell sind. Jedoch auch für den Fall, daß die Reihe (40) unendlich ist, d. h. daß man direkt die Integralgleichung (38) untersuchen muß, scheint es, daß sich die Selbstbeschleunigungen nicht vermeiden lassen [IRVING (1950); STEINWEDEL (1952)]. Ohne auf nähere Einzelheiten einzugehen, kann man folgendes Argument dafür angeben: Die 4,4-Komponente des Energie-Impuls-Tensors läßt sich für die hier besprochenen Verallgemeinerungen der Elektrodynamik in folgender Form schreiben¹⁾:

$$T_{44}(\tau) = \int_0^\infty \tau_{44}(\tau, \eta) \varrho(\eta) d\eta$$

wobei stets $\tau_{44}(\tau, \eta) \geq 0$ ist. Damit die Selbstenergie einer Punktladung endlich bleibt, muß jedoch $\int_0^\infty \varrho(\eta) d\eta = 0$ sein. Man kann daher nicht garantieren, daß $T_{44}(\tau)$ immer > 0 ist; aus diesem Grunde kann man nach dem obigen auch nicht garantieren, daß keine Selbstbeschleunigung auftritt. Einen in seiner Einfachheit bestrickenden Weg hat indessen VAN KAMPEN (1951) eingeschlagen. Um die Hamiltonfunktion mit Sicherheit positiv definit

¹⁾ H. LEHMANN (1950) gibt zwar noch einen anderen Energie-Impuls-Tensor an, der sich jedoch, da er die gleichen Kräfte liefert, von dem hier angegebenen nur durch einen Tensor mit verschwindender Divergenz unterscheiden kann. Insbesondere liefert er ebenfalls keine unter allen Umständen positiv definite Energiedichte.

zu machen, braucht man nur in der Hamiltonfunktion (29) alle Terme mit q'' und p_0' zu streichen; wie VAN KAMPEN zeigen konnte, ergeben sich dann Resultate, die in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung stehen. Mathematisch bedeutet das, daß die (Dipol-) Eigenschwingungen eines Strahlungshohlraums (auch in bezug auf die Radialabhängigkeit) kein vollständiges System von orthogonalen Funktionen mehr bilden. Es ist interessant, für diesen Fall die Bewegungsgleichungen zu untersuchen. Sie lauten:

$$\dot{r}' = \frac{\mathfrak{P}'}{M}, \quad \mathfrak{P}' = -\text{grad } V$$

$$\ddot{q}_m'' = \frac{e}{M} \sqrt{\frac{4}{3L_m}} \frac{\cos \eta_m}{\kappa_m} \text{grad } V + p_m''; \quad \dot{p}_m'' = -\kappa_m^2 q_m''$$

und es ist

$$r = r' + \frac{e}{M} \sum \sqrt{\frac{4}{3L_m}} \frac{\cos \eta_m}{\kappa_m} p_m''.$$

Aus (33), (34) und (35) liest man sofort ab

$$(41) \quad \ddot{r} = \ddot{r}' + \int_{-\infty}^t \ddot{r}'(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau.$$

Aus (41) folgt durch Differentiation

$$(42) \quad \ddot{r} = 2\ddot{r}' - \gamma \int_{-\infty}^t \ddot{r}'(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$$

und aus (41) und (42)

$$(43) \quad \ddot{r} + \frac{1}{\gamma} \ddot{r} = \ddot{r}' + \frac{2}{\gamma} \ddot{r}'$$

also

$$M\ddot{r} = -\text{grad } V + \frac{1}{\gamma} (2\ddot{r}' - \ddot{r}).$$

Ferner ergibt sich aus (42)

$$\ddot{r}' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \left\{ \ddot{r}(\tau) + \gamma \ddot{r}(\tau) \right\} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)} d\tau$$

und infolgedessen als Bewegungsgleichung des Elektrons die Integrodifferentialgleichung:

$$(44) \quad M\ddot{r} = -\text{grad } V + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t \left\{ \ddot{r}(\tau) + \gamma \ddot{r}(\tau) \right\} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)} d\tau - \frac{1}{\gamma} \ddot{r}.$$

Entwickelt man hier wieder nach der Retardierung, so ergibt sich eine Reihe ähnlich wie (39), nur mit dem wesentlichen Unterschied, daß jetzt auch sämtliche ungeraden Zeitableitungen auftreten. Aus der Energiebilanz, die man aus (44) durch Multiplikation mit \dot{r} erhält, folgt dann jedoch, daß die pro Zeiteinheit ins Unendliche ausgestrahlte Energie nicht mehr allein durch (2)

gegeben ist [LEHMANN und STEINWEDEL (1952)]. Wenn man also mit VAN KAMPEN die die Selbstbeschleunigung verursachenden Terme mit q_0'' , p_0'' in der Hamiltonfunktion (29) streicht, wird dadurch das elektromagnetische Feld selbst in großer Entfernung vom Elektron geändert, und es ergibt sich als Bewegungsgleichung eine spezielle Form der LORENTZ-Reihe (7a).

Die Änderung der Feldstärken würde sich natürlich nur bei sehr hohen Beschleunigungen bemerkbar machen, so daß die geänderte Ausstrahlung sicher akzeptierbar ist. Ein schwerwiegender Einwand gegen das geschilderte Verfahren ist jedoch, daß es nicht möglich ist, die dadurch bewirkte Modifikation der Maxwellgleichungen explizit anzugeben, so daß man die allgemeine Form der Feld- und Bewegungsgleichungen (ohne Bezugnahme auf die spezielle Hamiltonfunktion (29), die auf der Dipolnäherung basiert) nicht angeben kann. Es scheint daher, daß eine befriedigende Lösung der Divergenzschwierigkeiten zur Zeit nur im Rahmen nichtlinearer Theorien [vgl. z. B. BORN-INFELD (1934)] möglich ist, in denen die Selbstenergie trotz positiver definiter Energiedichte von vornherein endlich ist.

§ 6. Quantentheorie

Das bisher Gesagte bezog sich zunächst nur auf die klassische Theorie. Es ist aber nicht schwer, an Hand der klassischen Behandlung zu übersehen, wie sich die Selbstbeschleunigung in der Quantentheorie auswirkt. Zunächst wird man vielleicht vermuten, daß sie dort gar nicht auftritt, da man bisher trotz der vielen durchgerechneten Beispiele noch nichts davon gemerkt hat [vgl. dazu auch ELIEZER (1947)]. Das liegt aber offensichtlich daran, daß die Rechnungen fast immer mit der üblichen Störungsrechnung durchgeführt wurden, d. h. das Ergebnis erscheint in Form einer Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von e^2 . Nach den Erfahrungen in der klassischen Theorie darf man sich also nicht wundern, daß dann auch in der Quantentheorie keine absurden Lösungen auftreten. Demgegenüber hat MORPURGO (1952) gezeigt, daß für die Erwartungswerte von r sowie seinen zeitlichen Ableitungen im Falle des freien sowie harmonisch gebundenen Elektrons die Gleichung (7) gilt. Es kann somit keinem Zweifel unterliegen, daß die Selbstbeschleunigung auch in der Quantentheorie eine Rolle spielt. Eine genauere Untersuchung müßte natürlich im Rahmen der Hamiltonfunktion (20) bzw. (29) erfolgen. VAN KAMPEN erhebt gegenüber der Hamiltonfunktion (29) den Einwand, daß man einen Oszillator mit imaginärer Frequenz nicht vernünftig quantisieren könne. Dieser Einwand erscheint aber nicht stichhaltig, die zugehörige Schrödingergleichung lautet nämlich (für eine Dimension):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (x^2 + \lambda) \psi = 0 \quad \text{mit } x = \sqrt{\frac{\kappa_0}{t_1}} q''; \quad \lambda = \frac{2E}{t_1 \kappa_0},$$

mit den Lösungen¹⁾

$$(45) \quad \psi_{1,2}(x) = D \frac{1}{2} \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} [\pm (1+i)x],$$

¹⁾ Vgl. MAGNUS-OBERHETTINGER, S. 123. Zu jedem Eigenwert λ gehören jeweils 2 linear unabhängige Eigenfunktionen.

wobei D die „Funktion des parabolischen Zylinders“ ist. Es ergibt sich also ein kontinuierliches Eigenwertspektrum, und es dürfte keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereiten, den Entwicklungssatz für die Eigenfunktionen (45) bzw. geeignete Linearkombinationen davon zu formulieren.

In der klassischen Theorie waren ja die vernünftigen Lösungen dadurch ausgezeichnet, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} q_0''(t) = 0$ sein mußte. In der Quantentheorie könnte

man natürlich eine ähnliche Bedingung für den Erwartungswert von $q_0''(t)$ stellen. Damit ist das eigentliche Problem jedoch nicht erledigt. Bildet man nämlich aus den Eigenfunktionen (45) ein Wellenpaket, so wird dieses in jedem Falle für $t \rightarrow \infty$ schließlich völlig auseinanderlaufen, im Gegensatz zum „normalen“ Oszillator, wo es stets zusammenhält. Während also $\overline{q_m''^2}$ für $m \neq 0$ immer beschränkt bleibt, wird $\overline{q_0''^2}$ schließlich beliebig groß werden. Das bedeutet also, daß in gewisser Hinsicht jede Lösung der Quantentheorie die Eigenschaft der Selbstbeschleunigung zeigt und damit kaum vernünftig interpretierbar ist. Ein möglicher Ausweg wäre auch hier durch Streichung der Terme mit q_0'' und p_0'' gegeben, die Resultate sind wieder in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung [VAN KAMPEN (1951)]. Die prinzipiellen Einwände gegen dieses Verfahren bleiben jedoch auch in der Quantentheorie bestehen.

Es ist z. Z. natürlich schwer abzusehen, wie man überhaupt zu einer konsistenten und in Übereinstimmung mit der Erfahrung befindlichen (klassischen sowohl als Quanten-) Elektrodynamik gelangen kann, ohne Annahmen über die „Struktur“ des Elektrons zu machen. Jedenfalls reicht die übliche Massenrenormalisierung offensichtlich nicht aus, um die bisherige Theorie auch nur formal zu retten, da sie automatisch zur Selbstbeschleunigung führt, die bisher durch die übliche Reihenentwicklung der Lösung nach steigenden Potenzen von e^2 verschleiert wurde.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität.

Literatur

- BECKER, R., Theorie der Elektrizität Band II, 7. Aufl.
 HEITLER, W., Quantum Theory of Radiation, 2. Aufl.
 LORENTZ, H. A., Theory of Elektrons.
 MAGNUS, W., u. OBERHETTINGER, F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl.
 BHABHA, H. J., Phys. Rev. **70**, 759, 1946.
 BOPP, F., Ann. Phys. **42**, 573, 1943. Z. Naturforschg. **1**, 53, 1946.
 BORN, M., u. INFELD, L., Proc. Roy. Soc. A **144**, 425, 1934.
 BORN, M., Annales de l'Institut Henri Poincaré **7**, 155, 1937.
 DIRAC, P. A. M., Proc. Roy. Soc. A **167**, 148, 1938.
 DRUKEY, R. L., Phys. Rev. **76**, 543, 1949.
 ELIEZER, C. J., Rev. Mod. Phys. **19**, 147, 1947.
 FEYNMAN, R. P., Phys. Rev. **74**, 939, 1948.
 GORA, E., Phys. Rev. **84**, 1119, 1952.
 HÖHLER, G., Ann. Phys. **9**, 77, 1951.
 IRVING, J., Proc. Phys. Soc. A **63**, 1125, 1950.

- VAN KAMPEN, G., Det Kgl. Danske Vid. Selsk., Math.-Fys. Medd. **26**, No. 15, 1951.
LEHMANN, H., Ann. Phys. **8**, 109, 1950.
LEHMANN, H., u. STEINWEDEL, H., Z. Naturforschg. **7 a**, 204, 1952.
MCMANUS, H., Proc. Roy. Soc. **A 195**, 323, 1948.
MORPURGO, G., Nuovo Cim. **9**, 808, 1952.
SCHOCH, A., u. STEINWEDEL, H., Z. Naturforschg. **7 a**, 66, 1951.
STEINWEDEL, H., Z. Naturforschg. **6 a**, 123, 1951; **7 a**, 205, 1952.
WENTZEL, G., Helv. Phys. Acta **16**, 551, 1943.
WHEELER, J. A., u. FEYNMAN, R. P., Rev. Mod. Phys. **17**, 157, 1945; **21**, 425, 1949.

Mit verwandten Problemen beschäftigen sich u. a. die folgenden Arbeiten:

- ASHANER, S., Proc. Cambr. Phil. Soc. **43**, 506, 1947; **45**, 463, 1949.
BOHM, D., u. WEINSTEIN, M., Phys. Rev. **74**, 1789, 1948.
BEAUREGARD, COSTA DE, Revue Scientifique **88**, 34, 1950.
ELIEZER, C. J., Proc. Roy. Soc. **194**, 543, 1948; Proc. Cambr. Phil. Soc. **46**, 199, 1949.
GARDNER, J. W., Proc. Phys. Soc. **A 64**, 427, 1950.
GUPTA, S. N., Proc. Phys. Soc. **A 64**, 50, 1950.
HAVAS, P., Phys. Rev. **74**, 456, 1948.
HILL, E. L., Phys. Rev. **72**, 143, 1947.
HÖNL, H., Z. Naturf. **2 a**, 537, 1947; *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* **XXVI**, 291, 1952.
INFELD, L., u. WALLACE, P. R., Phys. Rev. **57**, 797, 1940.
WESSEL, W., Z. Physik **110**, 625, 1938; Ann. Phys. **43**, 565, 1943.