

Zur Theorie des Spins.

Von W. Wessel in Jena.

(Eingegangen am 8. August 1938.)

Die klassische Elektronentheorie erlaubt, die Rückwirkung der Strahlung auf ein bewegtes Elektron durch eine Reaktionskraft zu beschreiben, die die Bewegungsvariablen nur in universeller Form (unabhängig von den Potentialen äußerer Kräfte) enthält. Da sie von der Änderung der Beschleunigung abhängt, bedingt diese Kraft eine Abänderung der Kinematik im Sinne des Auftretens von neuen Variablen. Es wird versucht, diese Reaktionskraft in die Quantenmechanik zu übertragen und dazu eine kanonische Zuordnung und Quantelung der neuen Variablen durchgeführt. Die gefundene quantentheoretische Kinematik ist gerade die des Diracschen Spinelektrons; man kann so ohne andere hypothetische Elemente als Vertauschungsrelationen den Elektronenspin aus der klassischen Theorie herleiten.

Die vorliegende Arbeit geht, wie schon eine frühere¹⁾, von dem Versuch aus, die aus der Elektronentheorie bekannte *Reaktionskraft der Strahlung* für die Quantenmechanik nutzbar zu machen. Man versteht darunter eine fingierte Kraft, die einem ungleichförmig bewegten Elektron zwischen zwei Zeitpunkten soviel Energie entzieht, wie es während der inzwischen ausgeführten Bewegung durch Ausstrahlung verlieren würde. Der Vorteil ihrer Einführung liegt darin, daß man aller feldmäßigen Betrachtungen enthoben wird, weil sie, ähnlich wie eine Coriolis- oder Zentrifugalkraft, in universeller Form durch die Bewegungsvariablen gegeben ist und die Potentiale äußerer Kräfte nicht enthält.

Eine Erwartung, die sich mit diesem Versuch verknüpft, ist, wie auch schon auseinandergesetzt wurde, die folgende. Die gewöhnlichen mechanischen Bewegungsgleichungen enthalten höchstens Beschleunigungen, d. h. *zweite* zeitliche Ableitungen. Bringt man sie auf die kanonische Form, was man tun muß, um konjugierte Variable und Vertauschungsrelationen einzuführen, so bekommt man pro Freiheitsgrad soviel Variable, wie die Zahl der zeitlichen Ableitungen beträgt, also *zwei*, Koordinaten und Impulse. Die Strahlungskraft enthält aber Ableitungen bis zur *dritten*. Wenn es gelingt, sie zu „kanonisieren“, muß man außer Koordinaten und Impulsen noch Variable *dritter* Art bekommen, und es wurde versucht, zwischen diesen und den in Paulis oder Diracs Theorie des Elektronenspins neu auftretenden Variablen einen Zusammenhang herzustellen.

¹⁾ W. Wessel, ZS. f. Phys. **92**, 407, 1934.

In der vorangehenden Arbeit wurden die klassischen Bewegungsgleichungen mit Reaktionskraft zerlegt in ein System von Gleichungen erster Ordnung mit Nebenbedingungen. Dabei wurde die kanonische Form noch nicht erreicht, sondern nur durch eine Ähnlichkeit zwischen den Bewegungsgleichungen plausibel gemacht, daß ein aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gebildeter Tensor einem gewissen Diracschen Tensor entspräche. Was die mögliche Existenz einer Hamiltonschen Funktion betraf, wurde nur betont, daß zwar nicht die Energie, wohl aber die Ruhmasse zeitunabhängig sei und daher stets ein zeitfreies Integral der Bewegungsgleichungen existiere. Wir können nun zeigen, daß sich im Falle der Abwesenheit äußerer Kräfte tatsächlich eine Lagrangesche und Hamiltonsche Funktion zu den transformierten Bewegungsgleichungen angeben läßt. Das Nullsetzen der äußeren Kräfte macht das Problem keineswegs absurd oder trivial. Allerdings kann die Reaktionskraft der Strahlung erst in Wirksamkeit treten, d. h. die Energie verändern, wenn der bewegten Ladung durch äußere Kräfte eine Bewegungsänderung aufgezwungen wird; aber der analytische Ausdruck für die Reaktionskraft bleibt vollständig in den Gleichungen stehen, auch wenn die Potentiale verschwinden, weil er eben *universell* von den Bewegungsvariablen abhängt. Man wird dadurch in die Lage versetzt, noch vor Inangriffnahme des schwierigen, nichtkonservativen Problems alle Folgerungen *kinematischer* Art zu ziehen, die sich aus dem Auftreten neuer Variablen ergeben, nämlich Einführung von kanonischen Impulsen und Vertauschungsrelationen.

Das ist aber gerade, was man braucht, um den Zusammenhang mit der Diracschen Theorie herzustellen. Die physikalische Bedeutung der Diracschen Variablen, soweit sie überhaupt bekannt ist, geht bei den Variablen *mechanischer* Natur — Geschwindigkeit und Spin — bereits aus der kräftefreien Hamilton-Funktion hervor. Der Tensor des magnetischen bzw. elektrischen Moments kann naturgemäß erst bei Hinzunahme äußerer Felder gedeutet werden, baut sich aber aus den mechanischen Variablen auf. Ihre *Vertauschungsrelationen* sind ganz von den Feldstärken unabhängig. Wenn wir also nachweisen können, daß unsere Hamiltonfunktion im kräftefreien Falle mit der Diracschen übereinstimmt, und daß die eingehenden neuen Variablen die richtige Bedeutung haben und die richtigen Vertauschungsrelationen erfüllen, so ist damit die Übereinstimmung in kinematischer Hinsicht vollständig dargetan.

Dieser Nachweis läßt sich wirklich führen und bildet den Inhalt der nachstehenden Ausführungen. Ein wesentlicher Zug dieser Analyse, der sie ziemlich erschwert, aber physikalisch besonders befriedigend macht,

ist der, daß der Zusammenhang zwischen Spin und Strahlungskraft nicht umkehrbar eindeutig ausfällt. Die Variablen, die man zur Beschreibung der Strahlungskraft braucht und die dann den Spin ergeben, haben einen über den Zweck ihrer Einführung hinausgehenden Grad von Selbständigkeit und unterliegen einem gewissen universellen System von Bewegungsgleichungen auch noch, wenn die Strahlungskraft verschwindet. Dies muß erwartet werden, weil der Spin eine allgemeinere Eigenschaft der Elementarteilchen ist, als das Strahlungsvermögen, das im wesentlichen von der *Ladung* abhängt. Wir erhalten auch außer der Diracschen Gleichung noch weitere Gleichungen für Partikel mit dem Spin $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ usw., die aber nur die Bedeutung von Zwischenzuständen zu haben scheinen.

1. *Einführung von Impulsen, die zu den Lagenkoordinaten konjugiert sind.* Wir gehen aus von der Form der Bewegungsgleichungen, die wir ihnen a. a. O. in (3), (12), (15) und (17) gegeben haben. Zur Vermeidung von lästigen Faktoren c wollen wir jedoch alle Geschwindigkeiten hinfort in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit rechnen, also u_i/c durch u_i ersetzen. Nach Definition der Vierergeschwindigkeit ist $u_i^2 = -1$. Die Ausgangsgleichungen lauten dann

$$\frac{dx_i}{d\tau} = u_i, \quad (1)$$

$$\frac{du_i}{d\tau} = -\frac{e}{mc} s_{ik} u_k, \quad (2)$$

$$\frac{ds_{ik}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} (s_{ik} - G_{ik}), \quad (3)$$

mit den Abkürzungen

$$\varepsilon = \frac{2e^2}{3mc^3} = 0,628 \cdot 10^{-23} \text{ sec}, \quad (4)$$

$$G_{ik} = u_i (u_j F_{kj} - u_k F_{ij}) \quad (5)$$

und den Nebenbedingungen

$$s_{ik} s_{kl} u_l - u_i (s_{kl} u_l)^2 = 0. \quad (6)$$

Die F_{ik} sind äußere elektromagnetische Feldstärken, die s_{ik} die mechanischen Variablen dritter Art; beide Tensoren sind antisymmetrisch. Bei der gewählten Normierung haben auch die s_{ik} die Dimension von Feldstärken.

Bevor wir darangehen, diese Gleichungen in die kanonische Form zu setzen, erinnern wir daran, daß sie nur ableitbar sind unter Voraussetzungen über die Änderungsgeschwindigkeit des Bewegungszustandes.

Bei kleinen Geschwindigkeiten können wir kurz sagen, daß die Beschleunigungen klein bleiben müssen gegen diejenige, die ein Elektron im Felde $m^2 c^4 / c^3$ erfährt; das ist das Feld, das bei Coulombschem Kraftgesetz „an der Oberfläche“ eines Elektrons herrschen würde. Die zugehörige Beschleunigung ist der Größenordnung nach gegeben durch

$$b_0 = \frac{c}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Man muß die Möglichkeit im Auge behalten, daß sich bei Vorhandensein äußerer Kräfte die Gleichungen nur dann kanonisieren lassen, wenn man bei sehr großen Beschleunigungen Abänderungen zuläßt, beispielsweise der Art, daß ε durch $\varepsilon \sqrt{1 + b^2/b_0^2}$ ersetzt wird ($b^2 = \dot{u}_i^2 c^2$). Wir brauchen in dieser Arbeit keine solche Annahme zu machen, aber auch nicht vorauszusetzen, daß ε konstant sei.

Der erste Schritt zu einer Kanonisierung wird darin bestehen, daß man zu den Lagenkoordinaten (Weltkoordinaten) $x_1 \dots x_4$ konjugierte Impulse $p_1 \dots p_4$ aufsucht. Die Hamiltonsche Funktion kann von den x_i nur abhängen durch die Potentiale äußerer Felder. Wir müssen also

$$\frac{d p_i}{d \tau} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

erwarten, wenn wir äußere Felder, d. h. die F_{ik} und damit die G_{ik} , gleich Null setzen. Dann ergibt sich aber aus (2), daß die u_i nicht, wie in der gewöhnlichen Theorie, Impulse sein können, weil eben \dot{u}_i nicht verschwindet.

Allerdings reduziert sich dann (3) auf $\dot{s}_{ik} = \frac{1}{\varepsilon} s_{ik}$, und man wird erwarten müssen, daß mit den F_{ik} auch die s_{ik} gegen Null gehen, womit dann aus (2) $u_i = \text{const}$ folgen würde. Das wird sich auch später als Folge der kanonischen Gleichungen ergeben. Aber zur Aufstellung eines Variationsprinzips müssen wir von den *Differentialgleichungen* oder ihren *allgemeinen* Lösungen ausgehen, nicht von einem partikulären Integral. Dieser Sachverhalt war in der Einleitung gemeint, als gesagt wurde, daß das Nullsetzen äußerer Felder den Ausdruck für die Strahlungskraft nicht beeinflusst.

Bei verschwindenden F_{ik} bzw. G_{ik} lassen sich die Bewegungsgleichungen vollständig integrieren. [Gleichung (2) wird, wenn man die s_{ik} einsetzt, ein lineares System mit einfachen Koeffizienten. Vgl. auch Abschnitt 6, a. a. O.] Wir wollen aber die Möglichkeit von Abänderungen in (3) offen lassen und uns überhaupt nicht von vornherein auf $F_{ik} = 0$ festlegen; übrigens ist auch dann die systematische Integration umständlich wegen

der Nebenbedingungen und wenig geeignet zur Auffindung von Integralen in Form eines Vierervektors. Dagegen kommt man zum Ziele, wenn man von den *Nebenbedingungen* (6) ausgeht. Diese bestimmen, vier an der Zahl, die u_i offenbar sehr weitgehend und sind selbst schon partikuläre Integrale der Bewegungsgleichungen, auch für nichtverschwindende F_{ik} .

Der Beweis hierfür liegt in ihrer Ableitung, kann aber unschwer auch direkt geführt werden. Bezeichnet man die in (6) gleich Null gesetzten Größen einmal mit c_i , so folgt bei Berücksichtigung der Antisymmetrie von s_{ik} ($u_k s_{ki} s_{im} s_{mn} u_n = 0$) nach einiger Rechnung, für $F_{ik} = 0$,

$$\dot{c}_i = \frac{2}{\varepsilon} c_i - \frac{e}{m c} s_{ik} c_k, \quad (9)$$

was mit $c_i = 0$ offenbar verträglich ist. Um dieselbe Formel für $F_{ik} \neq 0$ zu bekommen, muß man s_{ik} in der Form $b_i u_k - b_k u_i$ ansetzen, wobei b_i ein beliebiger Vektor ist. Die s_{ik} genügen dann der Beziehung

$$s_{ik} s_{ik}^* = 0 \quad (10)$$

(s_{ik}^* dualer Tensor). Diese Bedingung ist für das Spätere im Auge zu behalten.

Wir versuchen nun einmal, die Nebenbedingungen nach der Vierergeschwindigkeit aufzulösen. Es ist zweckmäßig, dazu von der Tensor- zur Vektorform überzugehen. Es sei

$$\left. \begin{aligned} (s_{22}, s_{31}, s_{12}) &= \mathfrak{M}, & (s_{41}, s_{42}, s_{43}) &= i \mathfrak{P}, \\ (u_1, u_2, u_3) &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dann läßt sich aus (6) schließen

$$\left[\mathfrak{P} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{M} \right], \mathfrak{M} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{P} \right] \right] = 0. \quad (12)$$

Um diese Gleichung zu lösen, machen wir den Ansatz

$$\frac{v}{c} = \lambda \mathfrak{P} + \mu \mathfrak{M} + \nu [\mathfrak{P} \mathfrak{M}], \quad (13)$$

wobei wir annehmen, daß die Vektoren \mathfrak{P} und \mathfrak{M} nicht parallel sind. Setzen wir (13) in (12) ein und setzen wir die Koeffizienten von \mathfrak{P} , \mathfrak{M} und $[\mathfrak{P} \mathfrak{M}]$ gleich Null, so erhalten wir eine quadratische Gleichung für ν und zwei homogene, lineare für λ und μ , deren Determinante verschwindet, wenn die Gleichung für ν erfüllt ist. Es bleibt also ein Faktor (u) unbestimmt, und zwar ergibt sich

$$\frac{v}{c} = \frac{[\mathfrak{P} \mathfrak{M}] + u (W_1 \mathfrak{P} + W_2 \mathfrak{M})}{\frac{1}{2} (P^2 + M^2) + \frac{1}{2} (W_1^2 + W_2^2)}. \quad (14)$$

Dabei bedeutet

$$W_1 = \sqrt{\pm \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} (M^2 - P^2)}, \quad W_2 = \sqrt{\pm \frac{1}{2} W^2 + \frac{1}{2} (M^2 - P^2)} \quad (15)$$

$$W^2 = \sqrt{(M^2 - P^2)^2 + 4(\mathfrak{B} \mathfrak{M})^2}. \quad (16)$$

Die Ausdrücke (15) und (16) sind Invarianten; man kann die beiden Invarianten des Tensors s_{ik} durch sie ausdrücken in der Form

$$\frac{i}{4} s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}^* = \mathfrak{B} \mathfrak{M} = W_1 W_2, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} s_{\mu\nu} s_{\mu\nu} = M^2 - P^2 = W_2^2 - W_1^2. \quad (18)$$

Hiernach erhalten wir, für $F_{ik} = 0$, sofort vier Integrale, die einen Vierervektor bilden, aus der Transformationseigenschaft der u_i . Der Vektor \mathbf{v}/c ist aus kovarianten Gleichungen hervorgegangen; die damit nach (11) zu berechnenden $u_1 \dots u_4$ müssen also diese Gleichungen auch dann erfüllen, wenn wir die $\mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ einer Lorentz-Transformation entsprechend einer Geschwindigkeit cU_i unterwerfen. Nun haben die $u_1 \dots u_4$, so, wie sie sich nach (11) und (14) durch die $\mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ ausdrücken, noch nicht die Form eines Vierervektors. Wenn man also eine Lorentz-Transformation darauf ausübt, fallen die U_i nicht heraus. Die $u_1 \dots u_4$ nehmen aber dann die Form eines Vierervektors an und drücken sich als solcher kovariant durch die U_i und s_{ik} aus. Ihre ursprünglichen Ausdrücke bezogen sich also auf ein System mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0, U_4 = i$. — Die linearen Gleichungen lassen sich nach den U_i auflösen. Damit hat man die gewünschten vier Integrale der kräftefreien Bewegungsgleichungen erhalten. Da sie gleichförmigen Translationen des Systems entsprechen, haben die durch Multiplikation der cU_i mit der Ruhmasse m gebildeten Größen

$$p_i = mcU_i \quad (19)$$

die Natur von *Impulsen*. Wir werden demgemäß das System mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ als das *Schwerpunktssystem* bezeichnen. Die Bezeichnung „Ruhsystem“ ist nicht angebracht, weil die durch (1) definierte Vierergeschwindigkeit darin nicht verschwindet.

2. *Rechenregeln und Durchführung der Auflösung.* Mit einer Lorentz-Transformation gleichbedeutend ist es, wenn wir einen kovarianten, in den U_i linearen Ausdruck aufsuchen, der für $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ in die eben berechneten u_i übergeht. Er muß jedenfalls bis auf einen Faktor Q lauten:

$$Q u_i = W_2^2 U_i + u (W_1 s_{ik} - i W_2 s_{ik}^*) U_k + s_{ik} s_{kl} U_l, \quad (20)$$

denn das Verhältnis iu_j/u_4 , $j = 1, 2, 3$, liefert für $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ gerade die Komponenten von \mathbf{v}/c in (14). Wir haben nun U_i aufzufassen als $dX_i/d\tau$, wobei dX_i eine Verrückung des Schwerpunktsystems und $d\tau$ das zugehörige Element seiner Eigenzeit bedeutet. Dies ist gegeben durch $ic d\tau = \sqrt{dX_i^2}$ und im allgemeinen von $ic d\tau = \sqrt{dx_i^2}$ verschieden. In jedem Falle gilt aber $U_i^2 = u_i^2 = -1$, und diese Bedingung legt den Faktor Q in (20) fest. Es ist bequemer, ihn erst später auszurechnen und zuvor die Auflösung von (20) nach den U_i vorzubereiten. Wir bilden dazu die Ausdrücke $s_{ik} u_k$, $s_{ik}^* u_k$ und $s_{ik} s_{kl} u_l$. Dabei entstehen Produkte mit mehr als zwei Faktoren s_{ik} . Solche Bildungen lassen sich immer auf Produkte mit einem oder zwei Faktoren und invarianten Koeffizienten zurückführen nach folgenden beiden *Identitäten für antisymmetrische Tensoren* (siehe die mathematischen Ergänzungen in Abschnitt 12):

$$s_{ki}^* s_{kj} = \frac{1}{4} \delta_{ij} (s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu}), \quad (21)$$

$$s_{ki} s_{kj} + s_{ki}^* s_{kj}^* = \frac{1}{2} \delta_{ij} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}). \quad (22)$$

Z. B. reduziert man nach (22)

$$s_{ik} s_{kl} s_{lm} = -\frac{1}{2} s_{im} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}) - s_{ik}^* s_{kl}^* s_{lm}$$

und nach (21) weiter

$$\begin{aligned} s_{ik} s_{kl} s_{lm} &= -\frac{1}{2} s_{im} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} s_{im}^* (s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu}) \\ &= (W_1^2 - W_2^2) s_{im} - i W_1 W_2 s_{im}^*, \end{aligned}$$

das Letzte nach (17) und (18).

Mit diesen Regeln und weiterer Heranziehung von (17) und (18) berechnen wir folgendes Schema:

	$W_2^2 U_i$	$W_1 s_{ik} U_k$	$-i W_2 s_{ik}^* U_k$	$s_{ik} s_{kl} U_l$	
$Q u_i$	1	u	u	1	(23)
$Q s_{ik} u_k / W_1$	u	1	1	u	
$Q s_{ik}^* u_k / i W_2$	u	1	1	u	
$Q s_{ik} s_{kl} u_l / W_1^2$	1	u	u	1	

Die erste Zeile bedeutet Gleichung (20); die übrigen sind entsprechend zu lesen. Aus der Übereinstimmung der ersten und vierten Zeile folgt

$$s_{ik} s_{kl} u_l = W_1^2 u_i \quad (24)$$

oder wegen (6)

$$(s_{kl} u_l)^2 = W_1^2. \quad (25)$$

Diese Folgerung kann auch direkt aus den Nebenbedingungen abgeleitet werden. Ebenso folgt aus der Gleichheit der zweiten und dritten Zeile:

$$W_2 s_{ik} u_k + i W_1 s_{ik}^* u_k = 0. \quad (26)$$

Dies ist, im Verein mit (25), eine andere Form der Nebenbedingungen. Der Rang des Gleichungssystems (23) ist 2; man kann etwa das zur linken, oberen, zweireihigen Determinante gehörige Gleichungssystem herausgreifen und auflösen. Es zeigt sich dann, daß auch die U_i , wenn man sie auf -1 normiert, den Gleichungen (25) und (26) genügen. Indem wir das gleich präsumieren, können wir die beiden ersten Zeilen von (23) auch so schreiben:

$$\left. \begin{aligned} Q u_i &= (W_1^2 + W_2^2) (U_i + u s_{ik} U_k / W_1), \\ Q s_{ik} u_k / W_1 &= (W_1^2 + W_2^2) (u U_i + s_{ik} U_k / W_1). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Nunmehr ist es leicht, Q so zu bestimmen, daß $U_i^2 = -1$ wird. Man findet durch Quadrieren einer der beiden Gleichungen und Anwendung von (25) auf U_i , mit Beachtung von $U_i s_{ik} U_k \equiv 0$:

$$Q = (W_1^2 + W_2^2) \sqrt{1 - u^2}. \quad (28)$$

Wir setzen noch

$$u = \text{Tang } \vartheta \quad (29)$$

und haben dann an Stelle von (27)

$$\left. \begin{aligned} u_i &= U_i \text{Cof } \vartheta + s_{ik} U_k / W_1 \cdot \text{Sin } \vartheta, \\ s_{ik} u_k / W_1 &= U_i \text{Sin } \vartheta + s_{ik} U_k / W_1 \cdot \text{Cof } \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Hieraus folgt durch Umkehrung

$$\left. \begin{aligned} U_i &= u_i \text{Cof } \vartheta - s_{ik} u_k / W_1 \cdot \text{Sin } \vartheta \\ s_{ik} U_k / W_1 &= -u_i \text{Sin } \vartheta + s_{ik} u_k / W_1 \cdot \text{Cof } \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Man sieht leicht, daß, wie vorausgenommen, die U_i allen Bedingungengleichungen der u_i genügen.

Wir haben hiermit die Vierergeschwindigkeit u_i bis auf die noch unbekannte Größe ϑ allein aus den Nebenbedingungen berechnet. Diese Größe ist nun so zu bestimmen, daß die u_i ihre Differentialgleichung (2) erfüllen. Bei verschwindenden F_{ik} muß das bei konstanten U_i der Fall sein; bei nichtverschwindenden F_{ik} sind die U_i zu variieren, d. h. ist das Schwerpunktssystem so nachzuführen, daß beständig die Gleichungen (30) bzw. (31) bestehen bleiben. Von nun an beschränken wir uns auf kräftefreie Bewegung, setzen also $F_{ik} = 0$, $G_{ik} = 0$. Nach (3) und der Bedeutung (15) von W_1 sind dann die $s_{ik} U_k / W_1$ als homogene Funktionen

nullten Grades der s_{ik} konstant (auch wenn ε nicht konstant ist!). Wir haben also einfach

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_i &= \{ U_i \text{Sin } \vartheta + s_{ik} U_k / W_1 \cdot \text{Cof } \vartheta \} \dot{\vartheta} \\ &= s_{ik} u_k / W_1 \cdot \dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit Gleichung (2), wenn wir setzen

$$\dot{\vartheta} = -\frac{e}{m c} W_1. \quad (33)$$

Hiermit ist der erste Teil unserer Aufgabe erledigt: Wir haben in $mc U_i$ einen Vierervektor gefunden, der bei verschwindenden äußeren Kräften zeitlich konstant ist und dessen Komponenten daher als kanonische Konjugierte zu den vier Weltkoordinaten $x_1 \dots x_4$ eingeführt werden können. Wie in der Diracschen Theorie haben wir zwei Geschwindigkeiten U_i und u_i ganz verschiedener Bedeutung nebeneinander.

3. *Aufstellung der Lagrangeschen Funktion.* Die Impulse sollen aus einer Lagrangeschen Funktion ableitbar sein:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}. \quad (34)$$

Führen wir $p_k = mc U_k$ und $\dot{x}_k = c u_k$ ein, so bedeutet das

$$U_k = \frac{1}{m c^2} \frac{\partial L}{\partial u_k}. \quad (35)$$

Wir machen den Ansatz

$$L = \frac{m c^2}{2} u_k^2 \text{Cof } \vartheta \quad (36)$$

und finden

$$U_i = u_i \text{Cof } \vartheta + \frac{1}{2} u_k^2 \text{Sin } \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u_i}. \quad (37)$$

Soll das mit der ersten Gleichung (31) übereinstimmen, so muß

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = -\frac{2 s_{ik} u_k}{u_i^2 W_1} \quad (38)$$

sein. Es ist nicht einfach, eine Funktion ϑ zu finden, aus der diese Gleichung hervorgeht — auch wenn man die zu erfüllende Bewegungsgleichung (33) vorläufig ganz außer acht läßt — weil s_{ik} antisymmetrisch ist und daher $s_{ik} u_i u_k$ verschwindet. Es gelingt erst, wenn man an Stelle von s_{ik} einen neuen Tensor r_{ik} einführt, durch den sich s_{ik} quadratisch ausdrückt. Um die Antisymmetrie zu wahren, machen wir den Ansatz

$$s_{ik} = p (r_{i\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau u_k - r_{k\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau u_i). \quad (39)$$

Die r_{ik} sollen, um die Variablenzahl nicht zu erhöhen, wieder antisymmetrisch sein; p ist ein Skalar, dessen Wahl wir uns noch vorbehalten. Der Klammerausdruck in (39) ist, wie nachher hervortreten wird — vgl. die mathem. Ergänzungen zu (89) — der *einzig*e seiner Art, der sich nicht auf Linearform bringen läßt und nicht auf u_i senkrecht steht [was mit (38) unvereinbar wäre].

Dieser Tensor s_{ik} kann als $b_i u_k - b_k u_i$ aufgefaßt werden und erfüllt daher auch die Gleichung (10) als eine Identität. Dem geometrischen Sinne des dualen Tensors entsprechend stehen die Vektoren b_i und u_i , die s_{ik} als Flächengröße aufspannen, auf s_{ik}^* senkrecht, also ist insbesondere $s_{ik}^* u_k = 0$. Laut (26) verschwindet damit W_2 . Soll W_1 in (15) von Null verschieden und reell sein, so muß

$$\mathfrak{P}^2 > \mathfrak{M}^2 \quad (40)$$

sein und das obere Vorzeichen gewählt werden. Das Verschwinden von $s_{ik}^* u_k$ bedeutet in Vektoren

$$\mathfrak{M} + \left[\mathfrak{P} \frac{\mathfrak{v}}{c} \right] = 0. \quad (41)$$

\mathfrak{M} steht also auf \mathfrak{P} und auf der Geschwindigkeit \mathfrak{v} senkrecht. — Der Ansatz (39) ist der wichtigste Schritt auf dem Wege zur kanonischen Form. Die Variablen r_{ik} werden nachher für den „Spin“ bestimmend sein. Wir heben im Hinblick auf das am Schluß der Einleitung Gesagte hervor, daß zwar der Tensor s_{ik} durch die r_{ik} , aber nicht umgekehrt der Tensor r_{ik} durch die s_{ik} ausdrückbar ist; denn in (39) gehen nur die vierkomponentigen $r_{i\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau$ ein.

Um zu zeigen, daß mit dem Ansatz (39) die Gleichung (38) integrierbar wird, führen wir einige Abkürzungen ein. Es sei

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} r_{\mu\nu} r_{\mu\nu} &= A, \\ \frac{i}{4} r_{\mu\nu}^* r_{\mu\nu} &= B, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} u_i^2 &= x, \\ r_{i\sigma} r_{i\tau} u_\sigma u_\tau &= y. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Wir haben dann

$$W_1 = \sqrt{|M^2 - P^2|} = \sqrt{\frac{1}{2} |s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}|} = p \sqrt{y^2 - 2Axy - B^2x^2}, \quad (44)$$

das Letzte nach Umformungen unter Anwendung der Identitäten (21) und (22) auf die r_{ik} , und Gleichung (38) wird

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = -\frac{2}{x} \frac{r_{i\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau x + u_i y}{\sqrt{y^2 - 2Axy - B^2x^2}}. \quad (45)$$

Nun kann ϑ von u_i nur abhängen durch x und y ; es gilt also

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} 2u_i - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} 2r_{i\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau. \quad (46)$$

Der Vergleich von (45) und (46) liefert

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{-y/x}{\sqrt{y^2 - 2Axy - B^2x^2}}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2Axy - B^2x^2}}. \quad (47)$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind hier tatsächlich erfüllt. Man erhält

$$\vartheta = \text{Ar Co}f \frac{\frac{y}{x} - A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \vartheta_0 \quad (48)$$

(ϑ_0 Integrationskonstante). Mit der weiteren Abkürzung

$$z = \sqrt{y^2 - 2Axy - B^2x^2} \quad (49)$$

wird schließlich nach (36)

$$L = \frac{m c^2}{2} \frac{(y - Ax) \text{Co}f \vartheta_0 + z \text{Si}n \vartheta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (50)$$

Mit der Gewinnung von (50) ist unser Programm, soweit es sich um den Zusammenhang der $p_1 \dots p_4$ und $x_1 \dots x_4$ handelt, im wesentlichen zum Abschluß gebracht. Es handelt sich jetzt noch um die Frage, ob die Lagrange-Funktion (50) auch für die r_{ik} die richtigen Bewegungsgleichungen liefert und ob damit (33) erfüllt ist. Dazu müssen wir die noch unbekanntenen Bewegungsgleichungen der r_{ik} zunächst *berechnen*, d. h. die \dot{r}_{ik} so bestimmen, daß die Bewegungsgleichungen (3) der s_{ik} erfüllt sind.

4. Die Bewegungsgleichungen der r_{ik} . Zur Auffindung der \dot{r}_{ik} machen wir, weil es ja nicht möglich ist, die Gleichung (39) nach den r_{ik} aufzulösen, einen in den r_{ik} linearen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\frac{d r_{ik}}{d \tau} = \alpha r_{ik} + \beta r_{ik}^* + \gamma (u_i r_{kl} u_l - u_k r_{il} u_l) + \delta (u_i r_{kl}^* u_l - u_k r_{il}^* u_l). \quad (51)$$

Es folgt daraus für die Invarianten (42):

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= 2\alpha A - 2i\beta B - \gamma y + i\delta B x, \\ \dot{B} &= 2\alpha B + 2i\beta A - \gamma B x + i\delta(y - 2Ax). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Für die Größen (43) gilt

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 2(\alpha y - i\beta B x - \gamma y x + i\delta B x^2) - 2\frac{e}{mc} p z^2. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Das Erste folgt allgemein aus (2), das Letzte mit Benutzung dieser Formel für u_i und Einführung von $s_{ik} u_k$ gemäß (44).

Wir verlangen zunächst die Erfüllung von (33), d. h. wegen $W_1 = pz$ — vgl. (44), zweite Formel, und (49) —:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{e}{mc} pz. \quad (54)$$

Differentiation von (48) liefert mit Benutzung von (52) und (53) nach einiger Rechnung

$$\dot{\vartheta} = \left\{ \frac{\gamma A - i\delta B}{A^2 + B^2} - 2\frac{ep}{mc} \right\} z + \dot{\vartheta}_0. \quad (55)$$

Die Glieder mit α und β *verschwinden* bei der Bildung von $\dot{\vartheta}$. Durch Vergleich von (54) und (55) finden wir, da ϑ_0 nur noch von A und B , aber nicht mehr von x und y , daher auch nicht von z abhängen kann,

$$\vartheta_0 = 0, \quad \dot{\vartheta}_0 = \text{const.} \quad (56)$$

und als *erste Bedingung für die Koeffizienten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p$:

$$p = \frac{mc}{e} \frac{\gamma A - i\delta B}{A^2 + B^2}. \quad (57)$$

Hierdurch ist, mit Rücksicht auf (32), die Bewegungsgleichung (2) der u_i befriedigt. Zweitens müssen wir das Erfülltsein der Gleichung (3) für die s_{ik} verlangen. Wir differenzieren dazu (39), substituieren (51) für \dot{r}_{ik} , (2) mit Verwendung von (44) für \dot{u}_i und setzen das Ganze gleich s_{ik}/ε . Es ergibt sich nach einer etwas längeren Rechnung, bei der wieder Mehrfachprodukte der r_{ik} nach den Formeln (21) und (22) reduziert und auf A, B umgerechnet werden müssen, als *zweite Bedingung*

$$\dot{p} - \frac{p}{\varepsilon} + (2\alpha - \gamma x)p + 2\frac{e}{mc}(Ax - y)p^2 = 0. \quad (58)$$

Die erste Bedingung entsprach der Bewegungsgleichung (2), die zweite der Gleichung (3); von den Nebenbedingungen sind wir überhaupt ausgegangen. Es ist also allen Bewegungsgleichungen Genüge getan, wenn nur zwischen den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und p die Beziehung (57) und die Riccatische Differentialgleichung (58) bestehen. β bleibt dabei überhaupt willkürlich; p kann irgendein Integral von (58) sein, da es nicht auf die Erfüllung von Anfangsbedingungen, sondern von Differentialgleichungen ankommt. Es genügte unter Umständen schon, wenn p diese Gleichung integrierte für Beschleunigungen, die klein gegen b_0 in (7) sind, weil für höhere eine Abänderung von ε in Frage käme. Wir haben nirgendwo Gebrauch davon gemacht, daß ε eine Konstante wäre. Es besteht also noch viel Freiheit, auch die Bewegungsgleichung (51) der r_{ik} an die Lagrange-Funktion (50) anzuschließen.

Dies ist nicht so zu verstehen, als ob man (51) als Euler-Lagrangese Gleichung zu (50) auffassen müßte¹⁾. Die Variationsgleichung und als ihre Folge die kanonischen Gleichungen in der Hamiltonschen Form gelten in der Quantenmechanik nur dann, wenn zwischen den konjugierten Variablen, sagen wir ξ_k, η_k , die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen bestehen:

$$\eta_i \xi_k - \xi_k \eta_i = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}. \quad (59)$$

Hiermit folgt aus der Definition (!) der zeitlichen Ableitung

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{i}{\hbar} (H \xi_k - \xi_k H), \\ \dot{\eta}_k &= \frac{i}{\hbar} (H \eta_k - \eta_k H) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

(H = Hamiltonsche Funktion) allerdings

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\partial H}{\partial \eta_k}, \\ \dot{\eta}_k &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Wir werden insbesondere für die Koordinaten x_i und Impulse p_i Vertauschungsrelationen der Form (59) ansetzen und haben deshalb auch eine

¹⁾ Der Versuch wäre nicht ganz absurd, obwohl sie erster Ordnung ist. Wegen des linearen Ansatzes (51) kann man nämlich die $\alpha \dots \delta$ so bestimmen, daß $\dot{r}_{ik} = \partial L / \partial r_{ik}$ wird. Benutzt man dies, um r_{ik} und damit L als Funktion von \dot{r}_{ik} darzustellen, so gilt wegen der Homogenität von L : $r_{ik} = -\partial L / \partial \dot{r}_{ik}$ und folglich $d(\partial L / \partial \dot{r}_{ik}) / d\tau + \partial L / \partial r_{ik} = 0$, was sich von einer Euler-Lagrangese Gleichung nur in einem Vorzeichen unterscheidet.

Lagrangesche Funktion dafür aufgesucht. Aber für die r_{ik} können Vertauschungsrelationen der Form (59) aus Tensortransaktionsgründen nicht in allen Koordinatensystemen gelten; daher werden auch die kanonischen Gleichungen nicht die Form (61) haben, und es ist ganz unangebracht, bei der Kanonisierung der r_{ik} von der Lagrange-Funktion auszugehen. Der naturgemäße Weg ist offenbar der, die Schlußweise jetzt umzukehren und zunächst die Vertauschungsrelationen der r_{ik} aufzustellen, sodann durch (60) ihre zeitlichen Ableitungen einzuführen und schließlich durch den Vergleich mit (51) die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen. Das Verfahren darf als schlüssig, d. h. die r_{ik} dürfen als kanonisch betrachtet werden, wenn damit im klassischen Grenzfall $\hbar = 0$ die beiden Bedingungsgleichungen (57) und (58) erfüllt sind.

Die Hamiltonsche Funktion muß so bestimmt werden, daß für die p_k, x_k auf Grund ihrer Vertauschungsrelationen die kanonischen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form gelten, d. h. sie ist in der gewöhnlichen Weise durch eine Legendresche Transformation zu gewinnen, bei der nur die x_k, \dot{x}_k berücksichtigt werden. Da die hier aufgestellten kanonischen Gleichungen sich auf den Bewegungsablauf in der *Eigenzeit* beziehen, stellt jedoch H eine Invariante, nicht die Energie dar, und ist unter den in (60) durch einen Punkt angedeuteten Differentiationen die Ableitung nach der *Eigenzeit* zu verstehen. Diese in die Bewegungsgleichungen eingehende *Eigenzeit* ist die der Veränderung der Lagenkoordinaten x_i nach (1) entsprechende Zeit τ , nicht die Zeit T des Schwerpunktsystems.

Die Hamiltonsche Funktion ist also gegeben durch

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k - L. \quad (62)$$

L ist zufolge (49) und (50) homogen vom ersten Grade in x und y und demnach zufolge (48) homogen vom zweiten Grade in den u_k , d. h. den \dot{x}_k . Nach dem Eulerschen Satze für homogene Funktionen ist also einfach

$$H = L. \quad (63)$$

5. *Vertauschungsrelationen.* Die Vertauschungsrelationen (VR.) sind das einzige neue Element, das wir der bisher rein klassischen Theorie hinzufügen. Für die p_k, x_k nehmen wir, wie schon begründet wurde, die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} p_i x_k - x_k p_i &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}, \\ p_i p_k - p_k p_i &= x_i x_k - x_k x_i = 0, \\ i, k &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

an, im Einklang mit der Operatorenzuordnung in allen relativistischen Theorien. Die Ausdehnung auf die vierte Koordinate führt bekanntlich zu formalen Widersprüchen, sobald die Energie diskrete Werte hat. Das ist aber in unserem Problem nicht der Fall; wir können uns daher in diesem für das Folgende unwichtigen Punkte mit dieser Formulierung begnügen.

Wesentlich neu aufzustellen sind die VR. der r_{ik} . Sie müssen jedenfalls der Forderung der Lorentz-Invarianz genügen. Für das in Abschnitt 1 eingeführte Schwerpunktsystem mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ reduziert sich diese auf Invarianz gegen reelle Drehungen. Wir wollen nun dem antisymmetrischen Tensor zwei Vektoren

$$(r_{23}, r_{31}, r_{12}) = \mathfrak{f}, \quad (r_{41}, r_{42}, r_{43}) = i\mathfrak{g} \quad (65)$$

zuordnen und verlangen, daß zwischen ihnen *im Schwerpunktsystem die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen* gelten sollen:

$$\left. \begin{aligned} f_i g_k - g_k f_i &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}, \\ f_i f_k - f_k f_i &= g_i g_k - g_k g_i = 0, \\ i, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Die Dimension von \mathfrak{f} und \mathfrak{g} ist dabei willkürlich gleich der von $\sqrt{\hbar}$ gesetzt worden. Diese Freiheit haben wir, weil für den Anschluß an die dimensionierte Größe s_{ik} in (39) noch der Parameter p zur Verfügung steht. Man könnte auch \hbar durch die Einheit ersetzen, doch sehen wir davon ab, weil zur Verifikation der klassischen Gleichungen noch ein Grenzübergang nach $\hbar = 0$ zu vollziehen ist.

Bewegt sich ein System gleichförmig mit der Geschwindigkeit \mathfrak{B} gegen das Schwerpunktsystem, so findet man durch eine Lorentztransformation für die auf dieses System bezogenen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$:

$$\left. \begin{aligned} f_1 g_1 - g_1 f_1 &= \frac{\hbar}{i} \left(1 + 2 \frac{V_2^2 + V_3^2}{c^2 - V^2} \right) \\ &\quad \text{usw.,} \\ f_1 g_2 - g_2 f_1 &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2V_1 V_2}{c^2 - V^2} = f_2 g_1 - g_1 f_2 \\ &\quad \text{usw.,} \\ f_1 f_3 - f_2 f_1 &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2cV_3}{c^2 - V^2} = g_1 g_2 - g_2 g_1 \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Die durch „usw.“ angedeuteten Formeln sind durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 zu finden. Wir können nun auch unter $-\mathfrak{B}$ die auf das

beliebig (gleichförmig) bewegte System bezogene *Schwerpunktschwindigkeit* verstehen und alle Größen rechterhand durch $U_1 \dots U_4$ ausdrücken. Die VR. enthalten dann nur noch auf dieses beliebig bewegte System bezügliche Größen und sind damit invariant. Sie lassen sich in Tensorform zusammenfassen unter:

$$r_{\mu\nu}^* r_{\rho\sigma} - r_{\rho\sigma}^* r_{\mu\nu} = \hbar \{ \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + 2 \delta_{\mu\rho} U_\nu U_\sigma + 2 \delta_{\nu\sigma} U_\mu U_\rho - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - 2 \delta_{\mu\sigma} U_\nu U_\rho - 2 \delta_{\nu\rho} U_\mu U_\sigma \}, \quad (68)$$

wo $r_{\mu\nu}^*$ wieder den zu $r_{\mu\nu}$ dualen Tensor bedeutet. Man erhält nämlich, wenn alle vier Indizes $\mu\nu\rho\sigma$ verschieden sind, rechts und links Null; dasselbe tritt ein, wenn $\mu = \nu$ oder $\rho = \sigma$ ist. Stimmen zwei Indizes sonst überein, so ergeben sich die zweiten und dritten Formeln (67) (mit $-\mathfrak{B}$ statt \mathfrak{B}), und wenn auch die beiden andern übereinstimmen, die ersten drei. Mit den x_k und p_k bzw. U_k sollen die $r_{\mu\nu}$ als unabhängige Variable dritter Art unbeschränkt vertauschbar sein. Dagegen sind sie mit den u_k nicht vertauschbar, weil diese die $r_{\mu\nu}$ enthalten. *Die Regeln (21) und (22) bleiben bei diesen VR. bestehen.*

6. Die *Hamiltonsche Funktion und Vertauschungsrelationen der Invarianten*. Um mit den so gewonnenen VR. in der am Schlusse von Abschnitt 4 ausgeführten Weise die Bewegungsgleichungen der r_{ik} zu vervollständigen, müssen wir zunächst in H die Geschwindigkeiten durch die Impulse ausdrücken. Die Durchführung dieser und der folgenden Rechnungen würde sehr umständlich werden, wollte man den Wert von ϑ_0 in (50) ganz beliebig lassen. Wir wollen uns daher beschränken, den Fall

$$\vartheta_0 = 0 \quad (69)$$

durchzurechnen. Es scheint uns übrigens, daß man in der Wahl dieser Konstanten wirklich vollkommene Freiheit hat, d. h. daß die physikalischen Ergebnisse von ihrem Werte unabhängig sind; denn es handelte sich bei der Einführung von ϑ durch (33) nur um die Erfüllung der Gleichung (2) als Differentialgleichung ohne Rücksicht auf Anfangsbedingungen. Diese sind in unserem kräftefreien Falle durch die Konstanz der U_i erfüllt, und bei Einführung äußerer Kräfte kann man die U_i variieren und ihre Anfangswerte als Integrationskonstanten einführen.

Die Lagrange-Funktion (50) wird nun einfach

$$L = \frac{m c^2}{2} \frac{y - A x}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (70)$$

mit der Bedeutung (42) und (43) der Invarianten. Nach (35) berechnet man daraus

$$U_i = - \frac{A u_i + r_{i\mu} r_{\mu\nu} u_\nu}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (71)$$

Die Umkehrung [man braucht nur mit dem Ansatz $u_i = a U_i + b r_{i\mu} r_{\mu\nu} U_\nu$ in (71) einzugehen und nach den Regeln (21), (22) zu reduzieren] liefert

$$u_i = - \frac{A U_i + r_{i\mu} r_{\mu\nu} U_\nu}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (72)$$

Setzen wir entsprechend (43)

$$\left. \begin{aligned} U_i^2 &= X, \\ r_{i\sigma} r_{i\tau} U_\sigma U_\tau &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

so gilt

$$X = x, \quad Y = y. \quad (74)$$

Daher gilt schließlich auch, mit Hinblick auf (63),

$$H = \frac{m c^2}{2} \frac{Y - A X}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (75)$$

Die Hamiltonsche Funktion lautet also in den Impulsen bzw. in den U_i genau wie die Lagrangesche Funktion in den Geschwindigkeiten; das gilt nicht, wie (63), für jedes quadratische L .

In diesem Ausdrücke sollen nun die Veränderlichen den VR. (64) und (68) unterworfen werden. Dazu ist zunächst für Symmetrisierung zu sorgen. Die in den $r_{\mu\nu}$ bilinearen Invarianten Y , A und B sind bereits durch die Tensorschreibweise symmetrisch, weil neben jeder Indexkombination auch die inverse vorkommt. [Auf die Stellung der U_i kommt es nicht an. In (72) z. B. ist aber $\frac{1}{2} (r_{i\mu} r_{\mu\nu} + r_{\nu\mu} r_{i\mu}) U_\nu$ statt $r_{i\mu} r_{\mu\nu} U_\nu$ zu lesen.] Wir untersuchen die Vertauschbarkeit dieser Größen untereinander und beginnen dazu mit den VR. der $r_{\mu\nu}$ und der Invarianten. Für ihre Definition vgl. (42) und (73). Man findet für A und Y leicht, für B unter Berücksichtigung der Identität $(r_{\rho\sigma}^* r_{\mu\nu}^* - r_{\mu\nu}^* r_{\rho\sigma}^*) r_{\rho\sigma} = (r_{\rho\sigma}^* r_{\mu\nu}^* - r_{\mu\nu}^* r_{\rho\sigma}^*) r_{\rho\sigma}^*$:

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu\nu}^* A - A r_{\mu\nu}^* &= \hbar \{ r_{\mu\nu} - 2 (U_\mu r_{\nu\sigma} U_\sigma - U_\nu r_{\mu\sigma} U_\sigma) \}, \\ r_{\mu\nu}^* B - B r_{\mu\nu}^* &= i \hbar \{ r_{\mu\nu}^* - 2 (U_\mu r_{\nu\sigma}^* U_\sigma - U_\nu r_{\mu\sigma}^* U_\sigma) \}, \\ r_{\mu\nu}^* Y - Y r_{\mu\nu}^* &= -2 \hbar (2X + 1) (U_\mu r_{\nu\sigma} U_\sigma - U_\nu r_{\mu\sigma} U_\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Die hierzu dualen Formeln findet man unter den Ergänzungen des Abschnittes 12. $X = U_i^2$ hat der Bedeutung von U_i als Vierergeschwindigkeit entsprechend den Wert -1 . In den folgenden Formeln ist dieser Wert immer gleich eingesetzt, da nicht mehr nach U_i differenziert wird.

Hiernach können wir die VR. der Invarianten untereinander bilden. Zunächst ist

$$BY - YB = \frac{i}{4} \{r_{\mu\nu}^* (r_{\mu\nu} Y - Y r_{\mu\nu}) + (r_{\mu\nu}^* Y - Y r_{\mu\nu}^*) r_{\mu\nu}\} \\ = -2i\hbar Y. \quad (77)$$

Die Übrigen nehmen eine sehr symmetrische Form an, wenn man noch

$$C = Y - AX = Y + A \quad (78)$$

einführt. Sie lauten dann

$$\left. \begin{aligned} AB - BA &= -2i\hbar C, \\ BC - CB &= 2i\hbar A, \\ CA - AC &= 2i\hbar B. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Diese Relationen werden uns in ihrem Zusammenhange mit denen der Diracschen Matrizen noch beschäftigen. Aus den beiden letzten ist, ganz ähnlich wie bei Drehimpulskomponenten, zu schließen, daß

$$C \text{ und } A^2 + B^2 \text{ vertauschbar} \quad (80)$$

sind. Die Größe C , Formel (78), ist der Zähler von H , Formel (75), immer unter der Voraussetzung, daß $U_k^2 = X = -1$ gesetzt werden kann, also H nicht gerade als Funktion der U_k betrachtet werden soll. Aus (80) folgt nicht unbedingt, daß C auch mit $(A^2 + B^2)^{1/2}$ und $(A^2 + B^2)^{-1/2}$ vertauschbar wäre (es käme z. B. auch Antikommutativität in Frage); wir kommen aber nicht auf Widersprüche, wenn wir diese Annahme machen und ohne weitere Symmetrisierung

$$H = \frac{mc^2}{2} \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (81)$$

setzen.

Der physikalischen Bedeutung nach ist unser H nicht, wie in der Theorie ohne Strahlungskraft, die Ruhenergie. (Man ergänzt dort gewöhnlich $mc^2/2$, so daß $H = 0$ wird. Die Konstanz von H bedeutet jedenfalls die Konstanz der Ruhenergie.) Wir hatten ursprünglich mit der Konstanz der Ruhenergie das Vorhandensein einer Hamiltonschen Funktion wahrscheinlich gemacht. Durch das Auftreten zweier Geschwindigkeiten ist der Sachverhalt etwas anders geworden: weder ist $H = \frac{mc^2}{2} u_i^2$, noch $\frac{mc^2}{2} U_i^2$, sondern, nach dem Eulerschen Satze für quadratische Funktionen, angewandt auf L , wegen $H = L$:

$$H = \frac{1}{2} u_i \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{mc^2}{2} u_i U_i; \quad (82)$$

das ist z. B. im Schwerpunktssystem, $U_1 \dots U_3 = 0$, $U_4 = i$, $H = \frac{mc^2}{2} i u_4$, die halbe, negative Gesamtenergie. Übrigens würde H in den beiden anderen Formen, wegen $U_i^2 = u_i^2 = -1$, garkein Eigenwertproblem definieren und die Bildung der zeitlichen Ableitung nach (60) sinnlos sein.

7. Die Bewegungsgleichungen der r_{ik} , Fortsetzung. Nach diesen Vorbereitungen können wir die Berechnung der \dot{r}_{ik} zu Ende führen. Nach dem in Abschnitt 4 Gesagten sollten sie gegeben sein durch

$$\frac{d r_{ik}}{d \tau} = \frac{i}{\hbar} (H r_{ik} - r_{ik} H). \quad (83)$$

Man benötigt zur Berechnung dieses Ausdruckes noch die VR. von $r_{\mu\nu}$ und $(A^2 + B^2)^{-1/2}$, was eigentlich eine besondere Definition erforderte, etwa die Extrapolation der VR. von $r_{\mu\nu}$ mit einer ganzen, positiven Potenz von $A^2 + B^2$ auf die Potenz $-1/2$. Aber wir brauchen hier nur die klassische Näherung zu berechnen, weil es sich ja um eine Koeffizientenbestimmung in der klassischen Gleichung (51) handeln soll, und können einfach so schließen: Im Schwerpunktssystem haben die VR. die Heisenbergsche Form, daher gilt dort

$$\left. \begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{f}}, \\ \dot{\mathfrak{f}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Hier ist eigentlich quantenmechanische Differentiation gemeint. Aber in klassischer Näherung geht diese in gewöhnliche Differentiation über, und wir haben

$$\dot{g} = \frac{mc^2}{2} \{ (A^2 + B^2)^{-1/2} \partial C / \partial \mathfrak{f} - \frac{C}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} \partial (A^2 + B^2) / \partial \mathfrak{f} \} \quad (85)$$

usw. Kehren wir nun bei der Bildung der Ableitungen zur Form der VR. zurück:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{f}} &= \frac{i}{\hbar} (C \mathfrak{g} - \mathfrak{g} C) = \frac{i}{\hbar} [C \mathfrak{g}], \\ -\frac{\partial C}{\partial \mathfrak{g}} &= \frac{i}{\hbar} (C \mathfrak{f} - \mathfrak{f} C) = \frac{i}{\hbar} [C \mathfrak{f}], \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

so können wir leicht \dot{r}_{ik} für ein beliebiges Bezugssystem angeben:

$$\dot{r}_{ik} = \frac{i}{\hbar} \frac{mc^2}{2} \left\{ (A^2 + B^2)^{-1/2} [C r_{ik}] - \frac{C}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} [A^2 + B^2, r_{ik}] \right\}, \quad (87)$$

wobei wir nach Ausführung der Klammeroperationen auf die Faktorenfolge nicht mehr zu achten brauchen. Mit den Formeln (76) bzw. ihren Ergänzungen ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ik} = & \frac{m c^2}{2} \left\{ -i (A^2 + B^2)^{-1/2} r_{ik}^* \right. \\ & + BC (A^2 + B^2)^{-3/2} (r_{ik} - 2 (U_i r_{k\sigma} U_\sigma - U_k r_{i\sigma} U_\sigma)) \\ & \left. - i AC (A^2 + B^2)^{-3/2} (r_{ik}^* - 2 (U_i r_{k\sigma}^* U_\sigma - U_k r_{i\sigma}^* U_\sigma)) \right\}. \end{aligned} \quad (88)$$

Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung in kanonischen Variablen.

Um den Vergleich mit (51) vorzunehmen, muß man noch die U_i durch die u_i ausdrücken. Beim Einsetzen von (71) behält man nach der Reduktion noch Glieder mit $r_{i\sigma} u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$ und $r_{i\sigma}^* u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$, die sich aber nach Formel (152) der „Ergänzungen“ weiter vereinfachen lassen. Nach einer längeren Rechnung wird

$$\left. \begin{aligned} U_i r_{k\sigma} U_\sigma - U_k r_{i\sigma} U_\sigma &= - \frac{(u_i r_{k\sigma} u_\sigma - u_k r_{i\sigma} u_\sigma)}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2 + B^2 - AC) r_{ik} - i BC r_{ik}^*}{A^2 + B^2}, \\ U_i r_{k\sigma}^* U_\sigma - U_k r_{i\sigma}^* U_\sigma &= - \frac{(u_i r_{k\sigma}^* u_\sigma - u_k r_{i\sigma}^* u_\sigma)}{A^2 + B^2} + \frac{i BC r_{ik} + (A^2 + B^2 + AC) r_{ik}^*}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Durch Eintragen dieser beiden Terme in (88) wird schließlich

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ik} = & \frac{m c^2}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} \left\{ -BC r_{ik} + i(C^2 - A^2 - B^2 + CY) r_{ik}^* \right. \\ & \left. + 2BC (u_i r_{k\sigma} u_\sigma - u_k r_{i\sigma} u_\sigma) - 2iAC (u_i r_{k\sigma}^* u_\sigma - u_k r_{i\sigma}^* u_\sigma) \right\}. \end{aligned} \quad (90)$$

Diese Formel bestimmt die Koeffizienten $\alpha \dots \delta$ in (51). Es genügt, festzustellen, daß

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{m c^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} BC, \\ \delta &= \frac{-i m c^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} AC, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

ist. Dies ergibt in (57)

$$p = 0, \quad (92)$$

und damit ist auch (58) erfüllt. Unsere Hamiltonsche Funktion ist danach mit allen klassischen Bewegungsgleichungen im Einklang.

Allerdings erhält man an Stelle der letzten, Gleichung (3), zufolge von (89) mit $p = 0$ lediglich ihre triviale Lösung: $s_{ik} = 0$. Aber gerade das ist sehr befriedigend; denn aus (2) folgt nun

$$\frac{d u_i}{d \tau} = 0 \quad (93)$$

und damit beschleunigungsfreie Bewegung, wie man es in der Abwesenheit äußerer Kräfte erwarten muß. Die schwer zu deutenden, übrigens bei konstantem ε unendlich werdenden, nichttrivialen Lösungen, die (3) in diesem Falle außerdem noch hat, werden hiermit in der klassischen Näherung erwünschterweise von selber ausgeschlossen, und zwar ohne daß den r_{ik} irgendwelche trivialen oder überhaupt partikulären Werte auferlegt werden. Die Variablen dritter Art behalten vielmehr ihre selbständigen, nur von den universellen Konstanten abhängigen Bewegungsgleichungen, in klassischer Näherung eben die Gleichungen (88). Dieser Sachverhalt erscheint uns, wie schon am Schlusse der Einleitung angedeutet wurde, besonders wichtig im Hinblick auf den Spin, dessen Auftreten wir nun erörtern wollen. Das Zustandekommen der richtigen Spinmechanik möge die vorläufig etwas kühne Hoffnung rechtfertigen, daß die r_{ik} die richtigen Variablen sind, um bei nichtverschwindenden F_{ik} auch die Gleichung (3) selbst zu gewinnen.

8. Zusammenhang mit den Diracschen Variablen. Die Diracsche Gleichung schreibt sich bekanntlich für freie Elektronen

$$\alpha \mathbf{p} + \alpha_4 p_4 + \varrho_3 m c = 0 \quad (94)$$

oder mit (19), wenn man $(U_1, U_2, U_3) = \mathfrak{U}$ setzt

$$\alpha \mathfrak{U} + \alpha_4 U_4 + \varrho_3 = 0. \quad (95)$$

Dabei ist α die auf c bezogene, gewöhnliche Geschwindigkeit:

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (96)$$

und

$$\alpha_4 = i. \quad (97)$$

Die VR. der α untereinander und mit ϱ_3 werden gewöhnlich

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2 \delta_{ik}, \\ \alpha_i \varrho_3 + \varrho_3 \alpha_i &= 0, \quad \varrho_3^2 = 1, \\ i, k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

geschrieben. Man kann aber auch die α , wie schon Dirac es ursprünglich getan hat¹⁾, in der Form

$$\alpha = \varrho_1 \sigma \quad (99)$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik, § 74; Leipzig 1930.

eingeführen. Die $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und ϱ_1, ϱ_3 zusammen mit einem sechsten Operator ϱ_2 bilden dann eine Darstellung vierten Grades der Lorentz-Transformation. Die VR. für eine beliebige Darstellung lauten¹⁾

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2 i \sigma_3, \quad \text{usw.} \quad (100)$$

$$\varrho_1 \varrho_2 - \varrho_2 \varrho_1 = 2 i \varrho_3, \quad \text{usw.} \quad (101)$$

Jedes σ ist mit jedem ϱ vertauschbar. Man findet die hieraus folgenden Matrizen allgemein ausgerechnet bei van der Waerden. Unter ihnen sind die vierzeiligen dadurch ausgezeichnet, daß die σ unter sich und die ϱ unter sich antikommutativ und die Quadrate aller sechs Größen gleich der Einheitsmatrix sind. Dies führt dazu, daß sie in der Verbindung (99) die Diracschen VR. erfüllen, und zwar kann man zeigen²⁾, daß sie bis auf Ähnlichkeitstransformationen ($\varrho' = S^{-1} \varrho S$, mit unitärem S) und triviale Erweiterungen die einzigen dieser Eigenschaft sind. Es lassen sich aus ihnen zwei Invarianten, zwei Vierervektoren und ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe bilden, nämlich³⁾ die Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 (d. h. $\psi^* \varrho_2 \psi$ ist invariant; Entsprechendes gilt für das Übrige), die Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, i \cdot 1$ und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, i \varrho_1$ und der antisymmetrische Tensor $\alpha_i \varrho_k \alpha_l$ mit $i, k = 1, 2, 3$.

Wir wollen nun in zunächst mehr orientierender Weise die Verhältnisse im Schwerpunktsystem betrachten und zeigen, daß ein Teil unserer Variablen dritter Art bzw. der daraus zusammengesetzten Größen ohne weiteres den Diracschen Variablen zugeordnet werden kann, und daß dabei physikalische Größen gleicher Bedeutung einander zugeordnet werden. Um auf geläufige Beziehungen zu kommen, gehen wir nach (65) zu Raumvektoren über. Es ist dann allgemein

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (f^2 - g^2), \\ B &= \frac{1}{2} (g\mathfrak{f} + \mathfrak{f}g). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Im Schwerpunktsystem wird ferner [vgl. (73)]

$$Y = g^2, \quad (103)$$

daher [nach (78)]

$$C = Y + A = \frac{1}{2} (f^2 + g^2) \quad (104)$$

¹⁾ B. L. van der Waerden. Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, § 20, Berlin 1932. Man setze dort $A_p + A_q = \sigma_1, A_p - A_q = i \sigma_2, 2 A_z = \sigma_3$ und $B_p + B_q = \varrho_1$ usw. — ²⁾ W. Pauli, Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. XXIV/1, Kap. 2/B, Ziff. 2. Berlin 1933. — ³⁾ J. v. Neumann, ZS. f. Phys. 48. 868, 1928. Vgl. auch die Arbeit des Verfassers ebenda 96. 520, 1935.

und, wenn wir kurz $(u_1, u_2, u_3) = u$ setzen, nach (72):

$$u = - \frac{[\mathfrak{g}\mathfrak{f}]}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad u_4 = - i \frac{\frac{1}{2} (f^2 + g^2)}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (105)$$

Wir betrachten nun die Größen

$$\left. \begin{aligned} s &= [\mathfrak{g}\mathfrak{f}] \\ s_4 &= \frac{i}{2} (f^2 + g^2). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Die $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ verhalten sich im Schwerpunktsystem gemäß (66) wie Impuls- und Ortsvektor, also s wie ein Drehimpuls; es gilt also

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = i \hbar s_3, \quad \text{usw.} \quad (107)$$

und ebenso, wie der Drehimpuls mit dreihinvarianten Größen vertauschbar ist, ist s vertauschbar mit A, B, C und s_4 . Wir wollen auch — nicht ganz ohne Willkür, wie bei (81) — Vertauschbarkeit mit $\sqrt{A^2 + B^2}$ annehmen. Die Gleichungen (107) entsprechen, da es sich um Vektorkomponenten handelt, den Gleichungen (100), und zwar gehen sie in diese über, wenn man

$$s = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad (108)$$

setzt. Nun bilden, wie bemerkt, σ und $i \varrho_1$ einen Vierervektor; das gleiche tun s und s_4 , da sie im Schwerpunktsystem aus $-\sqrt{A^2 + B^2} u_i$ hervorgehen; und da $f^2 + g^2$ mit $[\mathfrak{g}\mathfrak{f}]$ ebenso kommutiert, wie ϱ_1 mit σ , kann man s, s_4 vollständig durch Diracsche Operatoren darstellen in der Form

$$s = \frac{\hbar}{2} \sigma, \quad s_4 = \frac{\hbar}{2} i \varrho_1. \quad (109)$$

Aus dieser Gleichsetzung folgt die Übereinstimmung unserer Theorie mit der Diracschen in einer wichtigen Gleichung. Es ergibt sich nämlich, indem die mit allen übrigen — auch mit s_4 , wegen $s_4 = i C$ — vertauschbaren $\sqrt{A^2 + B^2}$ sich heben,

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{i u}{u_4} = \frac{i s}{s_4} = \frac{\sigma}{\varrho_1}. \quad (110)$$

In Diracs Theorie war laut (96) und (99)

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \mathbf{a} = \varrho_1 \sigma, \quad (111)$$

und das ist genau dasselbe, denn ϱ_1 hat, wie alle Diracschen Matrizen, das Quadrat 1, folglich ist $\varrho_1 = \varrho_1^{-1}$, und die reziproke Schreibweise ist offenbar die sinnvolle. Während in (109) nur zwei Darstellungen auf-

einander bezogen wurden, wobei ihre Elemente noch ganz verschiedene Bedeutung haben konnten, hat man es hier wirklich mit der gleichen physikalischen Größe zu tun.

Diese Zuordnung ist trotzdem nur orientierend insofern, als sie sich bei den \mathfrak{s} nur auf die allgemeinen, den VR. (100) entsprechenden Relationen (107) stützt, während die σ den schärferen VR. Diracs unterliegen. Wir werden die Verhältnisse sogleich genauer untersuchen und finden, daß in der Tat die halbzahlige Quantelung allgemein und ihre den schärferen Relationen genügende, niedrigste Stufe im besonderen durch einfache Nebenbedingungen ausgezeichnet sind. Wenn einer dieser Fälle vorliegt, hat wie bei den gewöhnlichen Drehimpulsen nur das Produkt $[\mathfrak{g}\mathfrak{f}]$ quantentheoretische Bedeutung, während es für seine Faktoren keine Darstellung gibt.

9. Darstellungen für A, B und C durch endliche Matrizen. Unsere Theorie enthält noch die Invarianten A und B . Es liegt nahe, zu erwarten, daß sie sich durch die Diracschen Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 darstellen lassen; denn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ bilden ja zufolge (101) einen sehr ähnlichen Zykel wie A, B, C in (79), und C ist im Schwerpunktssystem gleich $\frac{\hbar}{2} \varrho_1$. Ein solcher

Zusammenhang besteht auch; er ist aber nicht so einfach, wie es den Anschein hat, und wir wollen zunächst die VR. (79) systematisch und ohne Hinblick darauf untersuchen. Man findet leicht, daß

$$D^2 = C^2 - (A^2 + B^2) \tag{112}$$

mit A, B und C vertauschbar ist. Zwischen A, B, C und \mathfrak{s}^2 besteht nun eine Identitätsbeziehung. Bei kommutativen Variablen wäre

$$C^2 - (A^2 + B^2) = \frac{1}{4} (f^2 + g^2)^2 - \frac{1}{4} (f^2 - g^2)^2 - (\mathfrak{g}\mathfrak{f})^2 \equiv [\mathfrak{g}\mathfrak{f}]^2 = \mathfrak{s}^2, \tag{113}$$

was darauf hinausläuft, daß im Schwerpunktssystem $H = \frac{mc^2}{2} iu_4$ ist.

Wegen der Nichtkommutativität bleiben bei der Differenzbildung noch Glieder mit \hbar^2 stehen, und zwar ergibt sich

$$D^2 = C^2 - (A^2 + B^2) = \mathfrak{s}^2 - \frac{3}{4} \hbar^2. \tag{114}$$

Die Eigenwerte von \mathfrak{s} sind bekanntlich durch (107) vollständig bestimmt, wenn man noch hinzunimmt, daß \mathfrak{s} reell ist. Diese Voraussetzung wollen wir machen; danach ist

$$\mathfrak{s}^2 = S(S + 1) \hbar^2, \tag{115}$$

wobei S ganzzahlig oder halbzahlig sein kann. Der kleinste Wert ist $S = \frac{1}{2}$; also ist jedenfalls

$$D^2 \geq 0. \tag{116}$$

Wählt man C diagonal, so ergibt sich aus (79) nach der gewöhnlichen Schlußweise durch Einführung von $A + iB$ und $A - iB$, daß die Eigenwerte von C die Abstände $2\hbar$ haben. Der mangelnden Definitheit in (112) halber braucht es aber bei gegebenem D keinen größten und kleinsten zu geben. Betrachten wir dennoch, um zu einer Übersicht zu kommen, einmal die Darstellungen von A, B und C durch endliche Matrizen. Man schließt dann wie üblich aus der Betrachtung von $(A + iB)(A - iB)$ bzw. $(A - iB)(A + iB)$ in C -Darstellung, daß, wenn man

$$D^2 = I(I + 2) \hbar^2 \tag{117}$$

setzt, der niedrigste Eigenwert von C unter $(I + 2)\hbar$ und $-I\hbar$, der höchste unter $I\hbar$ und $-(I + 2)\hbar$ zu suchen ist. Für I folgt aus (114), (115) und (117) die Gleichung

$$I(I + 2) = (S - \frac{1}{2})(S + \frac{3}{2}) \tag{118}$$

mit den Wurzeln $I = S - \frac{1}{2}$ und $I = -S - \frac{3}{2}$. Also sind

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (S - \frac{1}{2}) \hbar, \\ (-S + \frac{1}{2}) \hbar \end{array} \right\} \tag{119}$$

der höchste und niedrigste Eigenwert. Ein Abstand gleich einem ganzen Vielfachen von $2\hbar$ ergibt sich hieraus nur, wenn S halbzahlig ist. Wir haben also die Eigenwerte

s	$C/2\hbar$	s	$C/2\hbar$	s	$C/2\hbar$	(120)
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1 0 -1	
usw.						

Bei endlichen C -Matrizen sind also nur halbzahlige S zugelassen. $A/2i, B/2i, C/2$ und s_1, s_2, s_3 können nach den Formeln (20, 13) bei van der Waerden (mit $J = S, J' = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}, s_1 = \hbar/2 \cdot \sigma_1 = \hbar/2 \cdot (A_p + A_q)$ usw., $A/2i = \hbar/2 \cdot (B_p + B_q)$ usw.) als hermitesche Matrizen dargestellt werden. Nachdem das für \mathfrak{s} vorausgesetzt wurde, werden also A und B schieferhermitesch oder reinimaginär. Die Hamiltonsche Funktion (81) wird damit auch reinimaginär. Man hat das wohl so aufzufassen, daß Partikel mit $S = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ usw. instabil sind mit Lebensdauern der Größenordnung $\hbar/mc^2 \approx \frac{3}{2} 137 \varepsilon \sim 10^{-20}$ sec. Eine Ausnahme bildet der Fall

$$S = \frac{1}{2} \quad C^2 = A^2 + B^2, \tag{121}$$

vgl. (114). Hierzu gehört nach der Aufstellung (120) $C = 0$; die Hamiltonsche Funktion erscheint hier unter der Form $0/0$. Die Bedingung (121)

ist aber nach einer Operatortransformation auch noch mit endlichem C zu erfüllen und wird uns gerade das Diracsche Elektron liefern. Mit den hypothetischen, kurzlebigen Gebilden wollen wir uns in dieser Arbeit nicht weiter befassen.

Außerdem kann es immer ganzzahlige S mit unendlichen C -Matrizen geben. Für die aus den $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$, die den VR. (66) genügen, zusammengesetzten Größen sind ja alle übrigen VR., sowie die Bedingungsgleichung (114) soviel wie *Identitäten*, insofern als sie auf Grund von (66) aufgestellt wurden. Daß die als Vektorprodukte konjugierter $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$, die den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen genügen, darstellbaren \mathfrak{s} immer ganzzahlige Vielfache von \hbar zu Eigenwerten haben, ist ein wohlbekannter Satz der Quantenmechanik¹⁾. Für die mit dieser Arbeit verfolgten *elektrodynamischen* Ziele wird man wohl die $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ selber brauchen und demgemäß ganzzahlige Werte von S zulassen müssen, doch läßt sich darüber beim gegenwärtigen Stande der Betrachtung nichts Genaueres sagen. Die *Existenz* weiterer Zustände, sei es mit ganzen, sei es mit halbganzen S ist jedenfalls aus den am Schlusse von Abschnitt 6 erwähnten Gründen für die Theorie notwendig, weil sie erst das Eigenwertspektrum von H bestimmen.

10. *Beliebiges, gleichförmig bewegtes System.* Um zu einer Einsicht in die mathematisch etwas verwickelteren Verhältnisse des Falles (121) zu gelangen, müssen wir den Übergang zu einem gegen das Schwerpunktsystem bewegten Systeme genauer erörtern. Für die Hamiltonsche Funktion galt nach (81) und (82)

$$u_i U_i = \frac{2H}{m c^2} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (122)$$

Im Schwerpunktsystem genügen die $\sqrt{A^2 + B^2} u_i$ den besonders einfachen VR. des Drehimpulses. Wir wollen daher auch hier

$$- \sqrt{A^2 + B^2} u_i = s_i \quad (123)$$

eingeführen und an Stelle von (122) die Gleichung

$$s_i U_i + C = 0 \quad (124)$$

betrachten. Die s_i gehen aus den im Schwerpunktsystem benutzten durch eine Lorentz-Transformation hervor. In Gleichung (20) wurden sie bzw. die u_i ja auf diese Weise erzeugt. Wir können aber auch die VR. der s_i aus (68) berechnen und mit ihrer Hilfe die s_i bestimmen. Der größeren

¹⁾ M. Born u. P. Jordan, Elementare Quantenmechanik, § 32. Berlin 1930.

Deutlichkeit halber und weil die allgemeinen VR. der s_i an und für sich Interesse haben, sei auch dieser Weg angedeutet: man findet

$$\left. \begin{aligned} s_1 s_2 - s_2 s_1 &= \hbar (s_3 U_4 - s_4 U_3), \\ s_1 s_4 - s_4 s_1 &= \hbar (s_2 U_3 - s_3 U_2) \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

usw.

Die Größe

$$\eta = \mathfrak{s} \mathbf{U} + s_4 \mathbf{U}_4 \quad (126)$$

ist mit allen s_i vertauschbar. Mit ihrer Hilfe kann man s_4 aus der ersten Hälfte der VR. vertreiben; danach gelingt es durch eine Lineartransformation der \mathfrak{s} unschwer, die Gleichungen auf die Form (100) zu bringen und damit \mathfrak{s} auf σ zurückzuführen. Es ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{s} &= \frac{\hbar}{2} \left\{ \sigma - \frac{\mathbf{U}(\mathbf{U} \sigma)}{|\mathbf{U}|^2} (1 - \sqrt{1 + \mathbf{U}^2}) \right\} - \eta \mathbf{U}, \\ s_4 &= i \frac{\hbar}{2} (\mathbf{U} \sigma) - i \eta \sqrt{1 + \mathbf{U}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

und das bedeutet in der Tat eine Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $c\mathbf{U}/\sqrt{1 + \mathbf{U}^2}$, wenn man

$$\eta = \frac{\hbar}{2} i \sigma_4 \quad (128)$$

setzt.

Wie man sieht, kann die Größe η auf zweierlei Weise aufgefaßt werden: nach (128) ist sie die vierte Komponente eines Vierervektors, nach (126) eine Invariante und gemäß (124) gleich $-C$ zu setzen. Diese Eigenschaft hat die vierte Komponente einer Lorentz-Transformation $x'_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$ immer, weil die $i\alpha_{4j}$ gerade die Komponenten der als Vierervektor U_j aufgefaßten Transformationsgeschwindigkeit, bezogen auf das System mit x_j , bilden¹⁾; es ist also $i x'_4 = \sum_j U_j x_j$, wie eben in (128) und (126) zum Ausdruck kommt. Die vierte Komponente eines Vierervektors in einem bestimmten System drückt sich also durch seine Komponenten in bezug auf andere Systeme und die Relativgeschwindigkeit des hervorgehobenen gegen diese nicht nur stets in gleicher Weise aus, sondern noch in der Form einer Invarianten. Dieser für gewöhnlich nicht besonders bemerkenswerte Sachverhalt spielt nachher eine Rolle, wenn wir *Lar-*

¹⁾ Man betrachte ein vollständiges Schema der Lorentz-Transformation, etwa bei E. Madlung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin 1936.

stellungen der betreffenden Größe aufsuchen; wir erhalten dann mehrere Darstellungen mit verschiedenem Transformationscharakter.

Wir wenden uns nun wieder Gleichung (124) zu. Sie soll natürlich als *Invariante* aufgefaßt werden, d. h. als eine in jedem System gültige Beziehung zwischen den dynamischen Variablen mit ihren Vertauschungsrelationen. Es kommt uns darauf an, zu zeigen, daß sie die Diracsche Gleichung ist, und wir haben dazu bereits die s_i durch die σ_i ausgedrückt. Würden wir die s_i aber in der Form (127) substituieren, so kämen wir nur auf das Schwerpunktssystem ($C = -\eta = -\frac{\hbar}{2} i \sigma_4$) zurück, gemäß (128).

Eine invariante Darstellung im eigentlichen Sinne erhalten wir aber, wenn es gelingt, die Transformation (127) in die Form

$$s_i = \frac{\hbar}{2} \bar{\gamma} \sigma_i \gamma \quad (129)$$

zu setzen (die Bedeutung von $\bar{\gamma}$ s. w. u.) und durch die gleiche Transformation C in sich selbst überzuführen:

$$C = \bar{\gamma} C \gamma. \quad (130)$$

Die vorgelegte Gleichung verändert dadurch zunächst nicht ihren Sinn. Wir führen aber jetzt die Impulse nach (19) ein und wenden die Gleichung auf eine ψ -Funktion (ψ_0) an:

$$\frac{\hbar}{2} \bar{\gamma} \sigma_i p_i \gamma \psi_0 + m c \bar{\gamma} C \gamma \psi_0 = 0. \quad (131)$$

Danach können wir, statt wie bisher die auf das beliebig bewegte System bezüglichen s_i durch die auf das Schwerpunktssystem bezüglichen auszudrücken, umgekehrt die Funktion ψ_0 des Schwerpunktssystems durch die des beliebig bewegten (ψ) ersetzen vermöge

$$\gamma \psi_0 = \psi. \quad (132)$$

Die Gleichung lautet dann, wenn wir noch von links mit $\left(\frac{\hbar}{2} \bar{\gamma}\right)^{-1}$ multiplizieren:

$$\sigma_i p_i \psi + \frac{2 m c}{\hbar} \cdot C \psi = 0. \quad (133)$$

In dieser Form läßt sie sich nun in *jedem* System reproduzieren, denn die σ_i und C sind reine Zahlenmatrizen und enthalten, obwohl sie im Schwerpunktssystem aufgestellt wurden, keine darauf bezüglichen Parameter. — Die Bezugnahme auf die ψ -Funktion geschah hier nur, um den Sinn der Sache besser hervortreten zu lassen, und wir könnten auch das ψ -Symbol

in (133) wieder streichen. Dann kann $\bar{\gamma}$ irgendeine Matrix sein. Einschränkung kann man verlangen, daß eine zu (133) konjugierte Gleichung für eine Funktion ψ^* besteht. Dann ist $\bar{\gamma}$ die γ adjungierte Matrix.

Im allgemeinen und besonders wenn man derartige Zusatzforderungen erhebt, bedarf die Existenz solcher Matrizen eines besonderen Beweises. Wir wollen uns in dieser Arbeit, wie gesagt, auf den Fall $S = \frac{1}{2}$ beschränken und haben dann wohlbekannte Verhältnisse. Die σ -Matrizen sind in diesem Falle die „Paulischen“:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Sie bilden mit

$$\sigma_4 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (135)$$

eine bei eigentlichen Lorentz-Transformationen invariante Wellengleichung. Um auch Spiegelungen des Koordinatensystems zu umfassen¹⁾, müssen sie auf

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = i \varrho_1, \quad \varrho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (136)$$

erweitert werden, wo die Teilmatrizen σ und 1 die zweizeiligen Paulischen Matrizen bzw. die Einheitsmatrix bedeuten. Dies sind die Diracschen σ -Matrizen; sie transformieren sich mit dem von Dirac angegebenen γ , das in diesem Falle hermitesch ist. Setzen wir sie in (133) ein, so können wir nach dem bisher Entwickelten nur $C = 0$ setzen; wir haben dann eine Diracsche Gleichung für eine Partikel mit verschwindender Ruhmasse. Es läßt sich aber zeigen, daß es zu $S = \frac{1}{2}$ auch ein $C \neq 0$ gibt. Dies dürfte die sinnvolle Hebung der auftretenden Unbestimmtheit $H = 0/0$ sein.

II. *Diracsche Gleichung mit endlicher Ruhmasse.* Der Zustand $S = \frac{1}{2}$ war nach der allgemeinen Bedingungsgleichung (114) gekennzeichnet durch $C^2 = A^2 + B^2$. Die A, B, C unterliegen den VR. (79). Beim Anblick der Bedingungsgleichung ist es naheliegend, eine Hilfsvariable φ einzuführen, derart, daß

$$\left. \begin{aligned} A &= C \cos \varphi, \\ B &= C \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

wird. Schreiben wir nun für C und φ die VR.

$$C e^{i\varphi} = e^{i\varphi} (C + 2\hbar), \quad C e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi} (C - 2\hbar) \quad (138)$$

¹⁾ W. Pauli, a. a. O.; B. L. van der Waerden, a. a. O.

vor, so sind gerade die sämtlichen VR. (79) erfüllt. Wir haben nämlich

$$\left. \begin{aligned} C \cos \varphi - \cos \varphi C &= -\frac{2\hbar}{i} \sin \varphi, \\ C \sin \varphi - \sin \varphi C &= \frac{2\hbar}{i} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

also z. B.

$$\begin{aligned} AB - BA &= C \left(C \cos \varphi + \frac{2\hbar}{i} \sin \varphi \right) \sin \varphi - C \left(C \sin \varphi - \frac{2\hbar}{i} \cos \varphi \right) \cos \varphi \\ &= -2i\hbar C, \end{aligned} \quad (140)$$

und sehr ähnlich erfüllen sich die übrigen Gleichungen (79) sowie auch die Bedingung $C^2 = A^2 + B^2$ selbst. Man kann auch zur Matrizenschreibweise übergehen, denn φ wirkt wie $-2\hbar/i \cdot \partial/\partial C$; daher ist $e^{i\varphi}$, auf eine Funktion von C angewandt,

$$e^{i\varphi} \psi(C) = \psi(C - 2\hbar), \quad (141)$$

und die A, B transformieren die $\psi(C), \psi(C \pm 2\hbar), \dots$ linear untereinander. Die Matrix für C ist diagonal und hat die unendlich vielen Elemente $\dots C' - 4\hbar, C' - 2\hbar, C', C' + 2\hbar, \dots$, wo C' eine c -Zahl ist. Die Eigenwerte des Operators C sind also nur bis auf eine additive Konstante festgelegt.

Wir kommen nun auf unsere Frage von Abschnitt 9 zurück, ob sich nicht die Invarianten A und B durch die Diracschen Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 darstellen lassen. Wäre $C = \hbar\varrho_1$ zu setzen, so wären die VR. (79) erfüllt durch $A = i\hbar\varrho_2, B = i\hbar\varrho_3$. Aber dies ergäbe $C^2 = (A^2 + B^2) = 3\hbar^2$ und entspräche $S = \frac{3}{2}$, nicht $S = \frac{1}{2}$; außerdem ist im Schwerpunktssystem $C = s_4/i = \frac{1}{2}\hbar\varrho_1$, nicht $\hbar\varrho_1$. Man kann also nicht die A und B direkt ϱ_2 und ϱ_3 proportional setzen; dagegen ist es auf einfache Weise möglich, sie als *Funktionen* davon aufzufassen, und zwar durch Vermittlung der Hilfsvariablen φ in „Parameterdarstellung“ ohne Einführung von Irrationalitäten. Den Weg dazu weist die Bemerkung, daß

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{2}{\hbar} C, \\ \varrho_2 &= \frac{2i}{\hbar} C \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \varrho_3 &= \frac{2i}{\hbar} C \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

die VR. (101) erfüllen, wenn man (138) auffaßt als Folge von

$$C e^{i\frac{\varphi}{2}} = e^{i\frac{\varphi}{2}}(C + \hbar), \quad C e^{-i\frac{\varphi}{2}} = e^{-i\frac{\varphi}{2}}(C - \hbar). \quad (143)$$

Man erkennt daraus bereits den *Sinn* dieser Zuordnung: Es gibt zwei Darstellungen für C , eine durch ϱ_1 , das sich wie eine Viervektorkomponente transformiert, und eine durch ϱ_2 und ϱ_3 , die sich wie Invarianten verhalten. Dies entspricht genau der Doppelbedeutung, die $\eta (= -C)$ in (126) und (128) hat.

Aber wir haben jetzt eine andere Nebenbedingung. Während zu (79) verlangt war $C^2 = A^2 + B^2$, was für C Null oder eine unendliche Matrix ergab, wird jetzt nicht, wie entsprechend aus (142) folgen würde, $\varrho_1^2 = -(\varrho_2^2 + \varrho_3^2)$ verlangt, sondern gemäß (136) soll $\varrho_1^2 = 1$ sein und folglich C die Eigenwerte $\pm \hbar/2$ haben. Unter dieser Bedingung erhält man aus den VR. (101) nach einer kleinen Rechnung, die wir unter die „Ergänzungen“ im Schlußabschnitt verweisen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{2}{\hbar} C, \\ \varrho_2 &= \frac{2i}{\hbar} C \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \delta \right) - \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \delta \right), \\ \varrho_3 &= \frac{2i}{\hbar} C \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \delta \right) + \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \delta \right). \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Wir haben also nicht nur verschiedene Darstellungen von C je nach dem Transformationscharakter, sondern auch verschiedene Eigenwerte je nach den Nebenbedingungen. Durch die „Parameterdarstellungen“ (137) und (144) wird eben nur eine funktionale Abhängigkeit der *Operatoren* gestiftet, nicht eine Gemeinschaft der *Eigenwerte*. Die so berechneten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ haben *alle* Eigenschaften der betreffenden Diracschen Operatoren; insbesondere ist auch $\varrho_2^2 = \varrho_3^2 = 1, \varrho_1\varrho_2 = i\varrho_3$ usw.

Hiermit ist also ein einfacher Zusammenhang zwischen den Diracschen ϱ und unseren als konjugiert zu betrachtenden Variablen C und $\varphi/2$ gefunden. Zur Deutung der Gleichungen (144) erinnern wir an die folgenden bekannten Verhältnisse. Wir haben bisher, wenn wir eine Gleichung als Operatorengleichung auffaßten, die σ, ϱ als Zahlenmatrizen und die ψ -Funktion als von den Weltkoordinaten, insbesondere auch von der *Zeit* (t) abhängig gedacht. Man kann aber auch, wie Schrödinger gerade am Beispiel der Diracschen Operatoren besonders klar auseinandergesetzt hat¹⁾, die ψ -Funktion mit einem Anfangswerte der Zeit festhalten und den *Operator* variieren lassen. Seine Abhängigkeit von der Zeit folgt

¹⁾ E. Schrödinger, Berl. Akad. Ber. (Phys.-math. Kl.) 1930, Nr. 24, S. 418. Vgl. auch H. A. Kramers, Hand- und Jahrb. der chem. Phys., Bd. 1, § 43; Leipzig 1938 und andere moderne Darstellungen der Quantenmechanik.

dann allgemein einer Differentialgleichung der Form (60) mit der Energie als Hamilton-Funktion. In diesem Sinne hat für die kräftefreie Bewegung des Diracschen Elektrons Fock¹⁾ die „Bewegungsgleichungen“ der ϱ und σ aufgestellt und integriert. In dem von uns so genannten *Schwerpunktssystem* [$\varepsilon = 0$ bei Fock; die $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind dann die $\varrho_a^*, \varrho_b^*, \varrho_c^*$, Gleichung (29) a. a. O.] lauten die Lösungen, wenn man noch wie in Abschnitt 2 die auf das Schwerpunktssystem bezügliche Zeit mit \top bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_1^0 \cos 2\omega_0 \top - \varrho_2^0 \sin 2\omega_0 \top, \\ \varrho_2 &= \varrho_1^0 \sin 2\omega_0 \top + \varrho_2^0 \cos 2\omega_0 \top, \\ \varrho_3 &= \varrho_3^0 \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

mit

$$\omega_0 = \frac{m c^2}{\hbar}. \quad (146)$$

Die ϱ^0 sind hier zeitunabhängige Matrizen mit der Bedeutung von Anfangswerten, eben die Zahlenmatrizen Diracs. Diese Gleichungen gehen in unsere Formeln (144) über, wenn man

$$\frac{\varphi}{2} = 2\omega_0 \top + \text{const.} \quad (147)$$

setzt und die $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ zyklisch permutiert. Eine solche Umstellung kann durch eine unitäre Transformation aufgehoben werden und ist daher unwesentlich. Wir werden so dazu geführt, $\varphi/4\omega_0$ als die *Eigenzeit des Schwerpunktssystems* zu betrachten und die $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ in (144) als die zeitveränderliche Form dieser Operatoren aufzufassen. In (133) ist, wie gesagt, mit ψ die zeitabhängige *Eigenfunktion* gemeint; dementsprechend drückt sich C durch die *Anfangswerte* ϱ^0 der ϱ aus.

Die Gleichungen (144) sind zunächst q -Zahlrelationen. In Matrixform müssen sie offenbar lauten²⁾

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{2}{\hbar} C_v, \\ \varrho_2 &= \frac{2i}{\hbar} C_i \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) - \varrho_3^0 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right), \\ \varrho_3 &= \frac{2i}{\hbar} C_i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) + \varrho_3^0 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) \end{aligned} \right\} \quad (144')$$

mit φ und δ als c -Zahlen. Wir haben hier unterschieden zwischen C_i , das ist C in seiner Bedeutung als Invariante, und C_v , das ist C als Vierervektor-

¹⁾ V. Fock, ZS. f. Phys. **68**, 522, 1931. — ²⁾ Dieser Übergang bedarf noch der systematischen Begründung.

komponente in der Doppelbedeutung, die $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ in (104) und (106) hat. Ihre Matrixdarstellungen sind also, wenn man etwa $\delta = 0$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{\hbar}{2} \varrho_1^0, \\ C_i &= \frac{\hbar}{2i} \varrho_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Die Matrix ϱ_3^0 ist durch die Vertauschungsrelationen bestimmt. In (133) ist C als Invariante gemeint; wir haben demnach in (148) den Ausdruck mit ϱ_2^0 zu wählen, das ist die Diracsche Zahlenmatrix ϱ_2 . Daß hierfür (130) gilt, liegt in der Natur von ϱ_2 als Invarianten. Die Gleichung (133) nimmt damit die Form

$$\sigma_i p_i \psi - i m c \varrho_2 \psi = 0 \quad (149)$$

an, und daraus entspringt durch Linksmultiplikation mit ϱ_1 , wegen $\varrho_1 \sigma_i = \alpha_i$ [vgl. (99); die Formel gilt auch für $i = 4$], $\varrho_1 \varrho_2 = i \varrho_3$:

$$(\alpha_i p_i + m c \varrho_3) \psi = 0 \quad (150)$$

in genauer Übereinstimmung mit (94). Wir haben damit auch die Diracsche Gleichung mit endlicher Ruhmasse gewonnen. Die Bedeutung von $\frac{\hbar}{2}\sigma$ als zusätzlicher Drehimpuls ergibt sich schließlich daraus, daß — auch ohne äußere Kräfte, mit Bezug auf ein beliebiges Zentrum — nicht $[\mathbf{r}\mathbf{p}]$, sondern $[\mathbf{r}\mathbf{p}] + \frac{\hbar}{2}\sigma$ zeitlich konstant ist.

Hiermit dürfte bewiesen sein, daß der „Spin“ ebensogut wie die „Bahnbewegung“ in der klassischen Theorie enthalten ist, ohne daß diese eine Ergänzung durch irgendein Elektronenmodell erfährt, und daß elektromagnetische Wechselwirkungen aufs engste damit verbunden sind. Man darf sich danach nicht wundern, wenn man auf Widersprüche stößt bei dem Versuch, elektromagnetische Wellenfelder an eine Hamiltonsche Funktion anzuschließen, die den Elektronenspin schon enthält. Die Einführung der Strahlungsreaktion auf der hier versuchten Grundlage scheint freilich noch ein schwieriges Problem zu sein, nicht nur wegen der mathematischen Schwierigkeiten in der Ausdehnung dieser Behandlungsweise auf den Fall nicht verschwindender Felder, sondern vor allem, weil noch gar nicht feststeht, welche physikalischen Fragestellungen sich damit beantworten lassen. Das rein *mechanische* Problem dürfte ziemlich klar sein: Es handelt sich um die Auffindung einer Größe, die „diagonal“ bleibt oder wird, wenn man die Strahlungsreaktion eingeschaltet denkt, und die als Hamiltonsche

Funktion die *Veränderlichkeit der Energie* zu berechnen gestattet. In einer solchen Darstellung dürften auch die am Ende von Abschnitt 9 erwähnten ganzzahligen S eine Rolle spielen.

12. *Mathematische Ergänzungen.* Zu Formeln (21) und (22): Man beweist diese Formeln unschwer durch direktes Ausrechnen, wenn man s_{ik} und s_{ik}^* mit Minkowski¹⁾ als Matrizen s, s^* schreibt und die Bildung z. B. von $s_{ki}^* s_{kj} = - \sum_k s_{ik}^* s_{kj}$ als Matrizenmultiplikation auffaßt. Formel (21) entspricht dann der von Minkowski bemerkten Tatsache, daß $s^* s$ Diagonalmatrix ist und in der Diagonalen lauter gleiche Elemente, nämlich $\frac{1}{2} s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu}$ hat. $s_{ik}^* s_{ki}$ bedeutet nach der Summationsvorschrift Spurbildung und liefert viermal das Diagonalelement. Ganz ähnlich ist $s^2 + s^{*2}$ Diagonalmatrix mit invarianter Spur. — Bei Nichtkommutativität der Matrixelemente ist $s^* s + s s^*$ noch allgemein diagonal; mit den Vertauschungsrelationen (68) auch $s^2 + s^{*2}$.

Zu (76): Die dualen Formeln erhält man entweder, indem man A und Y mit Hilfe von (22) geeignet verwandelt, oder mit Hilfe der Identität

$$(U_\mu r_{\nu\sigma} U_\sigma - U_\nu r_{\mu\sigma} U_\sigma)^* \equiv - (U_\mu r_{\nu\sigma}^* U_\sigma - U_\nu r_{\mu\sigma}^* U_\sigma) - U_\lambda^2 r_{\mu\nu}^*. \quad (151)$$

Zu (89): Es handelt sich bei dieser Umformung um die Vereinfachung des Tensors $r_{i\sigma} u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu - r_{k\sigma} u_\sigma r_{i\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$ und der entsprechenden Bildung mit $r_{i\sigma}^*, r_{k\sigma}^*$ im ersten Faktor. Man mache zunächst die *Annahme*, daß sich diese Tensoren linear durch dieselben vier Tensoren ausdrücken lassen, wie r_{ik} in (51). Verjüngt man dann nacheinander mit allen diesen, so erhält man vier Gleichungen für die vier Koeffizienten, und z. B.

$$r_{i\sigma}^* u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu - r_{k\sigma}^* u_\sigma r_{i\mu} r_{\mu\nu} u_\nu = i B x r_{ik} + (2 A x - y) r_{ik}^* + i B (u_i r_{k\nu} u_\nu - u_k r_{i\nu} u_\nu) + 2 A (u_i r_{k\nu}^* u_\nu - u_k r_{i\nu}^* u_\nu). \quad (152)$$

Die andere Gleichung ergibt sich hieraus, wenn man alle r_{ik} durch r_{ik}^* ersetzt und $r_{k\mu}^* r_{\mu\nu}^* u_\nu$ usw. nach (22) verwandelt (A geht in A , B in B und y in $2 A x - y$ über). Die Richtigkeit dieser Formeln und damit der gemachten Annahme kann man schließlich bestätigen — ein kürzerer Beweis gelang mir leider nicht — indem man sie in Raumvektoren schreibt. — Es sind hiernach, wie man leicht überlegt, alle mit $r_{\mu\nu}$ und u_λ zu bildenden, antisymmetrischen Tensoren auf die Form (51) zu bringen, mit Ausnahme des quadratischen $r_{i\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau u_k - r_{k\sigma} r_{\sigma\tau} u_\tau u_i$ und des dazu dualen $r_{i\sigma} u_\sigma r_{k\tau}^* u_\tau - r_{k\sigma} u_\sigma r_{i\tau}^* u_\tau$.

Zu (144): Man fasse ϱ_2 und ϱ_3 neben $\varrho_1 = \frac{2}{\hbar} C$ als Operatoren auf, die im Sinne von (141) eine Funktion $\psi(C)$ transformieren. Macht man den allgemeinen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 &= u_2 e^{i\frac{\varrho}{2}} + v_2 e^{-i\frac{\varrho}{2}}, \\ \varrho_3 &= u_3 e^{i\frac{\varrho}{2}} + v_3 e^{-i\frac{\varrho}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

so erhält man aus den VR. (101), die links ϱ_1 enthalten, nach (143) leicht

$$u_3 = -i u_2, \quad v_3 = i v_2. \quad (154)$$

Nun ist z. B. $\varrho_2 \psi(C) = u_2(C) \psi(C - \hbar) + v_2(C) \psi(C + \hbar)$. Soll C nur die Eigenwerte $\pm \hbar/2$ haben, so müssen ϱ_2 und ϱ_3 die Eigenfunktionen $\psi(\hbar/2)$ und $\psi(-\hbar/2)$ unter sich transformieren. Das ist nur der Fall, wenn $u_2(-\hbar/2) = 0$ und $v_2(+\hbar/2) = 0$ ist. Da $C^3 = \hbar^2/4 \cdot C$ ist, kommen nur lineare u_2, v_2 in Frage. Also ist bis auf Faktoren (λ', λ''):

$$u_2 = \lambda' \left(C + \frac{\hbar}{2} \right), \quad v_2 = \lambda'' \left(C - \frac{\hbar}{2} \right). \quad (155)$$

Die dritte VR. verlangt dann $\lambda' \lambda'' = -1/\hbar^2$, was durch

$$\lambda' = \frac{i}{\hbar} e^{i\delta}, \quad \lambda'' = \frac{i}{\hbar} e^{-i\delta} \quad (156)$$

erfüllt werden kann. Die Phase δ bleibt unbestimmt. Die Gleichungen (153) mit (154), (155) und (156) ergeben die Gleichungen (144) des Textes.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Seminar der Universität.

¹⁾ H. Minkowski, Mathem. Annalen 68, 472, 1910.