Über ein klassisches Analogon des Elektronenspins.

Von **W. Wessel** in Jena.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 26. Oktober 1934.)

Die Bewegungsgleichungen der klassischen Elektronentheorie mit Einschluß der Strahlungsreaktion werden auf eine Form gebracht, in der sie sich mit denen der Diracschen Theorie des Elektrons vergleichen lassen. Man findet dabei auch für die Variablen des Spins ein klassisches Analogon.

§ 1. Einleitung und Inhaltsübersicht. Bei seiner Entdeckung durch Goudsmit und Uhlenbeck erschien der Elektronenspin als eine ganz neue, der klassischen Elektronentheorie fremde Erscheinung. Man konnte sich ihn wohl durch eine rotierende Ladung veranschaulichen, doch gab es in der klassischen Theorie nichts, was dazu Anlaß gegeben hätte, dem Elektron eine solche Rotation beizulegen. Daran änderte sich auch nichts durch die Arbeiten von Pauli und Dirac, die den Spin als neue dynamische Variable einzuführen lehrten. Man findet es zwar zuweilen so hingestellt, als wenn der Spin durch die Diracsche Theorie zu einer Art Scheingröße und bloßen Folge der relativistischen Kinematik geworden wäre, doch trifft das nicht den Sinn der Sache; denn der Spin ist auch bei Dirac durch vollkommen selbständige Variable mit eigenen Bewegungsgleichungen beschrieben, die nur bei bestimmten Darstellungen (zu denen auch die Spinorentheorie gehört) nicht in Erscheinung treten.

Ich möchte nun zeigen, daß es zu den Diracschen Variablen in der klassischen Theorie ein Analogon gibt und daß es wahrscheinlich möglich ist, den Spin als neuen Freiheitsgrad aus der klassischen Theorie abzuleiten. Die physikalische Größe, aus der er hervorgeht, ist die sogenannte Reaktionskraft der Strahlung; daß ihr Einfluß der Größenordnung nach meist wesentlich kleiner ist, als der der Spinkräfte, hat lediglich quantentheoretische Ursachen. — Mit einem „spin“ im englischen Wortsinne hat die Erscheinung ebensowenig zu tun wie in der Diracschen Theorie.

Der Zusammenhang kann unabhängig von den Betrachtungen, die den Anlaß zu dieser Vermutung gegeben haben[1]), sehr einfach folgendermaßen ausgesprochen werden. Die Beeinflussung, die ein Elektron durch die bei seiner Bewegung ausgesandte Strahlung erfährt, läßt sich bekanntlich durch eine Kraft beschreiben, die zwischen zwei Zeitpunkten gerade so viel Energie verzehrt, wie das Elektron währenddessen bei seiner Bewegung durch Strahlung verlieren würde. Diese Kraft hängt von den Ableitungen

[1]) W. Wessel, ZS. f. Phys. **82**, 415, 1933. Vgl. den „Nachtrag“.

der Koordinaten bis zur dritten ab; die Bewegungsgleichung eines Elektrons unter ihrem Einfluß ist also eine Differentialgleichung dritter Ordnung, und wenn man sie in ein System von Gleichungen erster Ordnung zerlegt, erhält man *drei* Reihen von unabhängigen Veränderlichen. Ihnen stehen in der Diracschen Theorie ebenfalls drei Veränderliche: die Koordinaten, die Geschwindigkeiten bzw. Impulse und die Spinvariablen gegenüber. Man kann nun die Veränderlichen in der klassischen Theorie so wählen, daß die Koordinaten den Koordinaten, die Geschwindigkeiten den Geschwindigkeiten und die Variablen der dritten Art (im wesentlichen) dem ungeraden Anteil des Operators der elektromagnetischen Polarisation des Diracschen Elektrons in ihren Bewegungsgleichungen entsprechen. Die Tatsache, daß das klassische System nicht konservativ und nicht kanonisch ist, während sich das Diracsche durch quantenmechanische Differentiation aus einer Hamilton-Funktion herleiten läßt, spricht sich dabei lediglich darin aus, daß eine in der klassischen Theorie reelle Konstante in der Diracschen Theorie rein imaginär wird. Ihr Wert ist ferner in den beiden Fällen um einen Zahlfaktor verschieden (die Feinstrukturkonstante), der durch den Übergang von e zu h hereinkommt und den schon erwähnten Unterschied in der Größenordnung zur Folge hat.

Da die Diracsche Gleichung gewisse mit der Strahlungsreaktion zusammenhängende Erscheinungen sicher nicht wiedergibt, kann die Korrespondenz auch rein formal unmöglich *vollständig* sein. In der Tat besteht in den Gleichungen für die *Geschwindigkeit* ein Unterschied in dem Sinne, daß hier die klassischen Gleichungen *mehr* Glieder enthalten, als die Diracsche Theorie ergibt. Der Spin ist also nur einem *Teil* der Strahlungskraft äquivalent. — Um keine Verwechslung mit der „Korrespondenz" ($h = 0$) aufkommen zu lassen, wollen wir immer von „Analogie" sprechen.

So einfach der formale Zusammenhang ist, so schwierig ist allerdings seine genaue, physikalische Interpretation. Wir begnügen uns vorläufig damit, die Analogie möglichst herauszuarbeiten. Das Erscheinen der Feinstrukturkonstanten in diesem Zusammenhange scheint neuerdings einer Erklärung nahe zu sein[1]). Durch das Auftreten der imaginären Einheit wird eine (Schrödingers „Zitterbewegung" nahestehende) periodische Bewegung der Quantenmechanik auf einen aperiodischen Vorgang der klassischen Theorie abgebildet. Dieser ist in erster Näherung *nicht* die

[1]) W. H. Furry u. J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **45**, 245, 1934; P. A. M. Dirac, Solvaykongreß 1933 (mir nicht zugänglich).

Abklingung infolge der Strahlungsdämpfung, sondern ein ganz anderer Bewegungstyp, der sich etwa als klassisches Analogon der Übergänge nach negativer Energie auffassen läßt. Die wirkliche Aufklärung des Zusammenhanges sollte einiges Licht und, wie wir besonders hoffen, eine erhebliche Vereinfachung in die noch recht dunkle und umständliche Quantenelektrodynamik bringen.

§ 2. *Die klassischen Bewegungsgleichungen.* Wir benutzen die Metrik mit imaginärer vierter Koordinate, schreiben also das Quadrat des Linienelements

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2 - c^2 d t^2. \tag{1}$$

Kovariante und kontravariante Vektoren brauchen nicht unterschieden zu werden; wir schreiben auch einfach $u_i u^i = u_i^2$. Statt mit der Bogenlänge s der Weltlinie werden wir lieber mit der Eigenzeit τ operieren, die durch

$$s = i c \tau \tag{2}$$

damit zusammenhängt. Die Vierergeschwindigkeit ist

$$\frac{d x_i}{d \tau} = u_i; \tag{3}$$

es gilt dafür nach (1)

$$u_i^2 = -c^2. \tag{4}$$

Die Reaktionskraft der Strahlung ist nach Abraham[1]) und v. Laue[2]) gegeben durch den Vierervektor

$$K_i^s = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{d^2 u_i}{d \tau^2} - \frac{u_i}{c^2} \left(\frac{d u_k}{d \tau} \right)^2 \right). \tag{5}$$

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons unter ihrem Einfluß und unter der Einwirkung von Feldstärken F_{ik} ist

$$m \frac{d u_i}{d \tau} = - \frac{e}{c} F_{ik} u_k + K_i^s \tag{6}$$

(m = Ruhmasse, e = Ladung). Die Kraft (5) beschreibt den Energieverlust bei Beschleunigung richtig unter der Voraussetzung, daß am Anfang und Ende des betrachteten Zeitintervalls die Beschleunigung Null ist und daß sie in der Zwischenzeit einen gewissen sehr großen, durch die räumliche Ausdehnung des Elektrons bestimmten Betrag nicht überschreitet; im wesentlichen folgt sie aber ganz unabhängig von bestimmten Modellvorstellungen direkt aus den Maxwellschen Gleichungen.

[1]) M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 15. Leipzig 1914. — [2]) M. v. Laue, Verh. d. D. Phys. Ges. **6**, 838, 1908; Ann. d. Phys. (4) **28**, 436, 1909.

Gleichung (6) ist wegen (5) und (3) eine Differentialgleichung dritter Ordnung für die Koordinaten. Die dritte Ableitung ist freilich mit einem sehr kleinen Koeffizienten multipliziert und im allgemeinen nur eine „Störung", die man zunächst weglassen und nachher durch bekannte Größen ausdrücken kann. Wir wollen aber einmal den dritten Differentialquotienten wesentlich berücksichtigen und die Gleichung danach auflösen. Setzt man die Viererbeschleunigung gleich b_i:

$$\frac{d u_i}{d \tau} = b_i \tag{7}$$

und zur Abkürzung

$$\frac{e^2}{m c^2} = a \tag{8}$$

(„Elektronenradius"), so schreibt sich (6)

$$\frac{d b_i}{d \tau} = \frac{3 c}{2 a}\left(b_i + \frac{e}{m c} F_{ik} u_k\right) + \frac{u_i}{c^2} b_k^2. \tag{9}$$

Die Gleichungen (3), (7) und (9) zusammen mit der Bedingung (4) und der daraus folgenden, häufig zu benutzenden Gleichung

$$u_i b_i = 0 \tag{10}$$

bilden ein der Gleichung (6) äquivalentes System von Bewegungsgleichungen erster Ordnung für die Unbekannten x_i, u_i und b_i, von dem wir ausgehen wollen.

§ 3. Umformung der klassischen Bewegungsgleichungen. Die Einfachheit, mit der der Strahlungseinfluß in diese Gleichungen eingeht, verglichen mit der außerordentlichen Verwicklung, die er in der Quantenelektrodynamik macht, haben wohl schon jeden mit diesen Dingen Befaßten zu Überlegungen veranlaßt, ob nicht irgendeine direkte Übersetzung dieser Gleichungen in die Quantentheorie möglich wäre. Die schon hervorgehobene Unabhängigkeit von einem bestimmten Elektronenmodell scheint das geradezu zu *fordern*. Man glaubt gewöhnlich, daß es wegen der nichtkonservativen Natur der Strahlungskräfte ganz ausgeschlossen sei, da ja der Energiesatz durchweg der Quantenmechanik zugrunde liegt. Dieses Hindernis besteht aber bei der vierdimensionalen Formulierung durchaus nicht unmittelbar. Die Strahlungskraft (5) steht nämlich, wie nach (10) notwendig *jede* Beschleunigung, auf der Vierergeschwindigkeit senkrecht[1]). Die Gleichung (4) ist ja immer ein zeitfreies Integral der Bewegungsgleichungen — sie entspricht einfach der konstanten *Ruh*energie — und die Frage ist nur *die*, ob sich die Variablen so wählen lassen, daß es die Hamiltonsche Funktion wird.

[1]) Man kann diese Eigenschaft direkt zu ihrer Herleitung benutzen, vgl. W. Pauli jr., Enzykl. d. math. Wiss. V, 19, § 32 ζ.

Bei Weglassung der Strahlungskraft ist das in der Tat so, und Beck[1]) hat bereits in der Arbeit, die den Anlaß zu diesen Betrachtungen gab, den Versuch gemacht, die Gleichung bei Berücksichtigung der Strahlung in einem ganz ähnlichen Sinne auszuwerten. Nun steht der Einführung kanonischer Variablen in die Gleichungen (3), (7) und (9) ein sehr elementares Hindernis im Wege: kanonische Variable müssen stets konjugiert, also *paarig* vorhanden sein (die höchsten Ableitungen in den Eulerschen Gleichungen eines Variationsproblems sind dementsprechend immer von gerader Ordnung); die Variablen x_i, u_i und b_i sind aber ausgesprochen *un*paarig. Man muß also jedenfalls, unter Heranziehung weiterer Nebenbedingungen, die *Variablenzahl vergrößern.*

Wir haben hier einen *antisymmetrischen Tensor* zu bilden versucht, ursprünglich unter dem Gesichtspunkte, die Komponenten des zugehörigen „selbstdualen" Tensors[2]) zusammen mit denen seines komplex konjugierten zu kanonisch konjugierten Variablen zu machen, und zwar bot sich als eine der einfachsten Möglichkeiten der Tensor

$$s_{ik} = \frac{m}{e c}(b_i u_k - b_k u_i). \tag{11}$$

Der Faktor m/ec ist zur Vereinfachung der folgenden Gleichungen hinzugefügt und gibt s_{ik} die Dimension einer *Feldstärke*. Die Bewegungsgleichung von s_{ik} wird überraschend einfach. Man findet mit Berücksichtigung von (7) und (9)

$$\frac{d s_{ik}}{d \tau} = \frac{3 c}{2 a}(s_{ik} - G_{ik}), \tag{12}$$

wobei zur Abkürzung

$$G_{ik} = \frac{1}{c^2} u_l (u_i F_{kl} - u_k F_{il}) \tag{13}$$

gesetzt wurde. Bei Abwesenheit äußerer Kräfte gilt also einfach

$$\frac{d s_{ik}}{d \tau} = \frac{3 c}{2 a} s_{ik}. \tag{12'}$$

Wir kommen auf diesen Fall ausführlich zurück. Man beachte, daß wegen der Antisymmetrie von F_{ik} und wegen (4)

$$G_{ik} u_k = F_{ik} u_k \tag{14}$$

gilt. Ferner wird nach (7), (4), (10) und (11)

$$\frac{d u_i}{d \tau} = -\frac{e}{m c} s_{ik} u_k. \tag{15}$$

[1]) G. Beck, ZS. f. Phys. **75**, 476, 1932. — [2]) Diese Gebilde spielen in der Spinoranalyse eine Rolle, vgl. O. Laporte u. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **37**, 1380, 1931.

Die Gleichungen (3), (12) und (15) bilden das neue Tripel der Bewegungsgleichungen für x_i, u_i und s_{ik}. Da s_{ik} sechs Komponenten hat — die Beziehung

$$s_{ki} = -s_{ik} \tag{16}$$

können wir einfach zur *Definition* der neuen Variablen rechnen —, haben wir zwei Veränderliche mehr als früher und infolgedessen weitere Nebenbedingungen. Man findet, indem man $b_i = -\frac{e}{mc} s_{ik} u_k$ nach (12) und (15) differentiiert und das Ergebnis mit (9) vergleicht, unter Beachtung von (14)

$$s_{ik} s_{kl} u_l = \frac{u_i}{c^2} (s_{kl} u_l)^2, \tag{17}$$

unabhängig von den Feldstärken, oder auch mit Benutzung von (4), symmetrischer geschrieben,

$$(u_j s_{ki} - u_i s_{kj}) u_j u_l s_{kl} = 0. \tag{17'}$$

Da diese Bedingungen mit dem Ansatz (11) immer erfüllt werden können (eine noch allgemeinere Möglichkeit siehe weiter unten), sind sie nicht, wie die meisten „holonomen", Einschränkungen, die die Gültigkeit der freien Bewegungsgleichungen aufheben und „Zwangskräfte" erzeugen, sondern einfach partikuläre Integrale und nur Einschränkungen der *Anfangs*bedingungen.

Zählen wir die Variablen und die Nebenbedingungen ab, so finden wir mit den Gleichungen (3), (7) und (9) drei Vektoren, also 12 Variable, und mit (4) und (10) zwei Nebenbedingungen, also 10 freie Anfangsbedingungen. Mit den Gleichungen (3), (12), (15) und (17) haben wir — mit Beachtung von (16) — zwei Vektoren und einen Flächentensor, also 14 Variable, und vier Nebenbedingungen, also wieder 10 unabhängige Koordinaten.

Man kann aus den letztgenannten Gleichungen auch die Ausgangsgleichung (6) leicht zurückgewinnen. Die Beziehung $u_i^2 = -c^2$, die der dabei zu benutzenden Gleichung (14) zugrunde liegt, folgt aus (17) durch Verjüngen mit u_i unter Beachtung von (16). Besonders einfach wird der Nachweis für den Fall, daß man die Strahlungskraft wieder *streicht*. Sie ist charakterisiert durch die Konstante a. Setzt man $a = 0$ in (12), so erhält man unter der Voraussetzung, daß $\mathrm{d}s_{ik}/\mathrm{d}\tau$ endlich bleibt (einer Voraussetzung, die man im Falle der Gleichung (6) natürlich entsprechend für $\mathrm{d}^2 u_i/\mathrm{d}\tau^2$ machen müßte):

$$s_{ik} = G_{ik}, \tag{18}$$

und aus (15) mit Rücksicht auf (14) unmittelbar

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{e}{mc} F_{ik} u_k.$$

Man muß dann noch nachrechnen, daß auch die Nebenbedingungen (17) durch (18) erfüllt werden; in der Tat genügt ihnen jeder Tensor der Form (13) mit antisymmetrischem F_{ik}.

Es ist also gelungen, die Bewegungsgleichungen des Elektrons unter Strahlungseinfluß in sehr einfacher Weise mit Hilfe eines *Tensors* zu formulieren. Dieser ist dabei die dynamische *Haupt*variable, insofern, als nur in *seine* Bewegungsgleichung die äußeren Kräfte (G_{ik}) eingehen; er selber tritt dann in der gewöhnlichen Bewegungsgleichung einfach an deren Stelle [vgl. (15)]. Da die kleine Größe a im Nenner auftritt, vermag seine Änderungsgeschwindigkeit sehr groß zu werden. Nun ist aber ein Tensor viel weniger eine Variable der Punkt- als der Festkörpermechanik. Man erkennt also bereits, daß die klassische Elektronentheorie, deren Boden wir bisher nirgends verlassen haben, formale Elemente einer Kreiseltheorie des Elektrons enthält, ohne daß dabei irgendwie von einer wirklichen Rotation die Rede wäre.

Die oben in Aussicht genommene Zerlegung von s_{ik} liefert nun allerdings keine kanonisch konjugierten Variablen. Man kann aber bereits die Gleichungen so, wie sie dastehen, in Analogie setzen zu den Bewegungsgleichungen von drei ebenfalls nicht kanonischen Variablen der Diracschen Theorie. Da man quantenmechanisch nicht nach der Eigenzeit differentiieren kann [es gibt keine Weltlinie![1]], rechnen wir zunächst durch Multiplikation aller Differentialgleichungen mit $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t = ic/u_4$ auf Differentiation nach der Zeit t um. Dabei wird

$$u_i \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = v_i$$

für $i = 1, 2, 3$ gleich der gewöhnlichen Geschwindigkeit und für $i = 4$ gleich ic. Es gilt also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s_{ik}}{\mathrm{d}t} &= \frac{3ic^2}{2a} u_4^{-1} (s_{ik} - G_{ik}), \\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= v_i, \quad \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{mc} s_{ik} v_k. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

§ 4. Vergleich mit der Diracschen Theorie. Wir möchten uns für diesen Vergleich auf die kräftefreie Diracsche Gleichung beschränken. Der allgemeine Fall wird zwar durch den üblichen Übergang von p_i zu $p_i + \frac{e}{c} A_i$

[1]) V. Fock, ZS. f. Phys. 55, 127, 1929.

im großen und ganzen erhalten, doch sind die Verhältnisse nicht einfach zu übersehen. Wir kommen kurz darauf zurück. Glücklicherweise ist die Diracsche Kinematik auch schon bei Abwesenheit äußerer Kräfte genügend entfaltet, um die nötigen Vergleichsmöglichkeiten zu bieten[1]). Die Hamilton-Funktion lautet hier bekanntlich

$$H = c \sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k + \varrho_3 m c^2. \tag{20}$$

Man erhält mit ihrer Hilfe die „Bewegungsgleichungen" für die Matrixelemente der verschiedenen Operatoren oder auch, in einem von Schrödinger[2]) angegebenen Sinne, der Operatoren selber, in der Form z. B.

$$\frac{\mathrm{d} x_i}{\mathrm{d} t} = \frac{i}{\hbar}(H x_i - x_i H) = c \alpha_i$$

$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$. Diese Gleichung entspricht der zweiten Gleichung (19) und macht die $\alpha_1 c$, $\alpha_2 c$, $\alpha_3 c$ in wohlbekannter Weise zu den Operatoren der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Zwischen der Vierergeschwindigkeit u_i und dem Impulse p_i besteht in der klassischen Theorie die Beziehung

$$m u_i = p_i + \frac{e}{c} A_i \tag{21}$$

(A_i = Vektorpotential). Sie liefert, wie Fock[3]) gezeigt hat, auch in der Diracschen Theorie eine sinnvolle Definition der u_i und soll auch hier in der Form $u_i = p_i/m$ als solche angenommen werden. Dabei ist, ebenfalls nach Fock

$$p_4 = i \frac{H}{c} = i\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k + \varrho_3 m c\right). \tag{22}$$

Zu beachten ist, daß auch die α_k den Operator eines Vierervektors, der Strom-Ladungsdichte $\psi^* \alpha_1 \psi$, $\psi^* \alpha_2 \psi$, $\psi^* \alpha_3 \psi$, $i \psi^* \psi$ darstellen, aber *nicht* mit den u_i zu identifizieren sind.

Die Hauptaufgabe ist nun die Auffindung des Operators für s_{ik}. Wir werden ihn natürlich der Gleichung (11) nachzubilden versuchen und benötigen dazu das Diracsche Analogon zu b_i. Um die Differentiation nach der Eigenzeit zu umgehen, wollen wir b_i einfach durch die algebraische Eigenschaft des Senkrechtstehens auf u_i charakterisieren. Wir können nun die Diracsche Gleichung (20) gemäß (22) auch als

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k + \alpha_4 p_4 + \varrho_4 m c = 0$$

[1]) Die vollständige Integration der Bewegungsgleichungen der α und ϱ findet man bei V. Fock, ZS. f. Phys. **68**, 522, 1931. — [2]) E. Schrödinger, Berl. Akad. Ber. (Phys.-math. Kl.) 1930, S. 418, Nr. 14. — [3]) V. Fock, ZS. f. Phys. **55**, 127, 1929.

lesen ($\alpha_4 = i$), und dies läßt sich wiederum als

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\alpha_i - \frac{\varrho_3 p_i}{m c}\right)\frac{p_i}{m} = 0 \tag{23}$$

auffassen; denn es ist nach bekannten Regeln $p_4^2 = -(p^2 + m^2 c^2)$, wodurch in Verbindung mit der vorangehenden Gleichung (23) bewiesen wird. Der Operator ist $\alpha_i - \varrho_3 p_i/mc$ ist also zu p_i/m und damit in unserem Falle zu u_i „orthogonal", und wir können versuchen, ihn nach Multiplikation mit einer noch zu bestimmenden Konstanten λ mit b_i zu identifizieren:

$$b_i = \lambda\left(\alpha_i - \varrho_3 \frac{p_i}{m c}\right). \tag{24}$$

Bilden wir hiermit die dem Tensor (11) entsprechende Größe

$$s_{ik} = \frac{m}{e c}\lambda\left\{\left(\alpha_i - \varrho_3 \frac{p_i}{m c}\right)\frac{p_k}{m} - \left(\alpha_k - \varrho_3 \frac{p_k}{m c}\right)\frac{p_i}{m}\right\},$$

so erhalten wir wegen der Vertauschbarkeit aller p_i

$$s_{ik} = \frac{\lambda}{e c}(\alpha_i p_k - \alpha_k p_i). \tag{25}$$

Da sich die p_k in ihrer Einwirkung auf eine ψ-Funktion wie die kovarianten Operatoren $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ transformieren, bilden die $\psi^* s_{ik} \psi$ die Komponenten eines Tensors. Wir bilden nun die Bewegungsgleichung für s_{ik}, zunächst etwa für s_{23}:

$$\dot{s}_{23} = \frac{i}{\hbar}(H s_{23} - s_{23} H).$$

Man findet mit (20), indem man erst den „Antikommutator" ausrechnet, wegen $\alpha_k \varrho_3 + \varrho_3 \alpha_k = 0$ (für $k = 1, 2, 3$)

$$H s_{23} + s_{23} H = \frac{\lambda}{e}\left\{\sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k \cdot (\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2) + (\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2)\cdot \sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k\right\},$$

ferner mit $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 = 0$ usw., $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1$:

$$H s_{23} + s_{23} H = 0\,^{1}),$$

also

$$H s_{23} - s_{23} H = -2 H s_{23}$$

oder endlich

$$\frac{\mathrm{d} s_{23}}{\mathrm{d} t} = -\frac{2 i}{\hbar} H s_{23}. \tag{26}$$

[1]) Diese Gleichung und entsprechend Gleichung (26) usw. ist an sich für s_{ik} nicht kennzeichnend. Ihr genügt vielmehr, wie aus dem weiter unten Folgenden hervorgeht, der „ungerade" Anteil jedes beliebigen Operators, sofern dieser mit den p_k vertauschbar ist, also nur von den Koordinaten nicht abhängt. Man kann aber nicht etwa beliebige *Tensor*operatoren erzeugen, die der Gleichung (26) genügen, denn die Bildung des ungeraden Anteils *zerstört* den Tensorcharakter. Das später Folgende ist gerade ein Beispiel dafür.

Ganz dieselbe Gleichung erhält man auch nach einer etwas längeren, aber ganz ähnlichen Rechnung für s_{14}, sie gilt also für alle Tensorkomponenten. Wie man sieht, besteht tatsächlich eine erstaunliche Ähnlichkeit dieser Gleichung mit der klassischen Gleichung (19) für den kräftefreien Fall ($G_{ik} = 0$). Um den Vergleich genauer zu ziehen, müssen wir noch mit u_4 erweitern. Nun ist

$$u_4 = \frac{p_4}{m} = i\,\frac{H}{m\,c},$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,s_{ik}}{\mathrm{d}\,t} &= -\frac{2\,i}{\hbar}\,u_4^{-1}\,u_4\,H\,s_{ik}\\ &= \frac{2}{m\,\hbar\,c}\,u_4^{-1}\,H^2\,s_{ik}\\ &= \frac{2\,m\,c^3}{\hbar}\,u_4^{-1}\left[1+\left(\frac{p}{m\,c}\right)^2\right]s_{ik}.\end{aligned} \tag{27}$$

Vergleicht man dies Resultat mit der klassischen Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,s_{ik}}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{3\,i\,c^2}{2\,a}\,u_4^{-1}\,s_{ik}\\ &= \frac{3\,i\,m\,c^4}{2\,e^2}\,u_4^{-1}\,s_{ik},\end{aligned} \tag{27'}$$

so findet man Übereinstimmung mit folgenden Einschränkungen:

1. Die Konstanten unterscheiden sich im Betrage um einen Faktor

$$\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{\hbar\,c} \simeq \frac{1}{100};$$

die klassische ist die größere; das Verhältnis ist bis auf $\frac{4}{3}$ die Feinstrukturkonstante.

2. Da u_4 rein imaginär ist, ist die klassische Konstante reell, die quantentheoretische rein imaginär.

3. Die Analogie besteht im übrigen bis auf Glieder mit v^2/c^2. Bevor wir zur Betrachtung der letzten Gleichung (19) übergehen, wollen wir die quantentheoretischen s_{ik} noch genauer untersuchen.

§ 5. Bedeutung und Erwartungswerte der s_{ik}. Man kann die durch (25) gegebenen s_{ik} auch folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned}s_{14} &= \lambda\,\frac{m}{e}\left(i\,\alpha_1\,\varrho_3 + \frac{1}{m\,c}\,(\sigma_2\,p_3 - \sigma_3\,p_2)\right),\\ s_{23} &= \lambda\,\frac{m}{e}\left(-\,i\,\sigma_1\,\varrho_3 + \frac{1}{m\,c}\,(\sigma_1\,p_4 - \sigma_4\,p_1)\right).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Diracschen Operatoren des Spins, unter σ_4 der Operator $i\,\varrho_1$ zu verstehen. Die Übereinstimmung von (28) und (25) ist mit Benutzung von (22) und bekannten Beziehungen zwischen den Diracschen Operatoren ($\alpha_1 = \varrho_1\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ usw.) unschwer nachzurechnen. Die Größen $\psi^*\sigma_1\,\psi$, $\psi^*\sigma_2\,\psi$, $\psi^*\sigma_3\,\psi$, $i\,\psi^*\,\varrho_1\,\psi$ transformieren sich wieder als Vierervektor; die beiden Terme, in die die s_{ik} zerfallen, bilden also jeder für sich Tensoroperatoren. Die ersten Glieder haben eine einfache Bedeutung. Sie sind nämlich, unter Vorbehalt einer geeigneten Bestimmung von λ, die *Operatoren der elektrischen und magnetischen Polarisation* des Diracschen Elektrons[1]). Um auch über die Bedeutung der anderen Glieder eine Vorstellung zu bekommen, berechnen wir einmal die Erwartungswerte der s_{ik} (das sind die Diagonalelemente der Matrizen $\int \psi^*\,s_{ik}\,\psi\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$) bzw. zunächst die Dichtefunktion $\psi^*\,s_{ik}\,\psi$. Man könnte zwar das wesentliche Resultat dieser Rechnung, wie bereits angemerkt, unter Berufung auf bekannte Überlegungen schon aus (26) schließen, doch möchten wir der Deutlichkeit halber die Matrix der s_{ik} einmal vollständig angeben. Die ψ-Funktionen des freien Elektrons haben bekanntlich die Form

$$\psi = u\,(\mathfrak{p})\,e^{\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} - E\,t)}. \tag{29}$$

Die u ($\mathfrak{p}$) haben erstens vier Komponenten u_μ ($\mathfrak{p}$), mit denen sie in der Form

$$u^*s_{ik}\,u = \sum_{\mu\,\nu} u_\mu^*\,(s_{ik})_{\mu\,\nu}\,u_\nu$$

verknüpft werden, und solcher Quadrupel gibt es nochmals vier, nämlich je zwei für positive und negative Energie mit jeweils paralleler und antiparalleler Stellung des Spins zu einer ausgezeichneten Raumrichtung. Die u bilden also eine quadratische Matrix $u_{\mu m}$ mit $m = 1, 2$ für $E > 0$ und $m = 3, 4$ für $E < 0$. Man kann sie durch die ebenfalls vierzeiligen α- und ϱ-Matrizen ausdrücken[2]). Wählt man diese so, daß ϱ_3 die übliche Form (wie in Diracs Buch) hat, also insbesondere diagonal wird, so wird

$$u_{\mu\,m} = \Gamma\left\{\left(\frac{E}{c} + m\,c\right)\varrho_3 + \sum_{k=1}^{3}\alpha_k\,p_k\right\}_{\mu\,m} \tag{30}$$

(Γ = Normierungsfaktor). Die Diracsche Gleichung schreibt sich jetzt

$$H\,u = E\,u\,\varrho_3. \tag{31}$$

[1]) W. Gordon, ZS. f. Phys. **50**, 630, 1928. Zu beachten ist, daß, wenn s_{ik} einer Feldstärke entspricht, $\psi^*s_{ik}\,\psi$ die Dimension einer Feld*dichte* bekommt, also von der Gordonschen Polarisation um einen Faktor von der Dimension cm^3 verschieden ist. Die hiermit zusammenhängenden Fragen treten aber erst bei Einbeziehung äußerer Kräfte auf. — [2]) W. Wessel, ZS. f. Phys. **72**, 68, 1931. Hier gegen l. c. noch etwas vereinfacht.

Die $u^*_{\mu m}(s_{ik})_{\mu\nu} u_{\nu n}$ kann man nun $u^\dagger_{m\mu}(s_{ik})_{\mu\nu} u_{\nu n}$ schreiben, wobei $u^\dagger$ die konjugierte und transponierte Matrix ist. Die Erwartungswerte von s_{ik} sind dann einfach die Diagonalelemente $m = n$ von

$$\int \sum_{\mu\nu} \psi^\dagger_{m\mu} (s_{ik})_{\mu\nu}\, \psi_{\nu n}\, dx\, dy\, dz.$$

Wegen der Hermitezität von α und ϱ_3 ist $u^\dagger = u$. Die Normierung (auf die Volumeneinheit bezogen) verlangt $u^\dagger u = 1$; das gibt

$$\Gamma = \left[2\frac{E}{c}\left(\frac{E}{c} + mc\right)\right]^{-1/2}. \tag{32}$$

Hiermit findet man, am kürzesten unter Benutzung von (25), (22) und (31)

$$\begin{aligned} u^\dagger(\mathfrak{p})\, s_{14}\, u(\mathfrak{p}) &= u^\dagger \frac{\lambda}{ec}(\alpha_1 p_4 - \alpha_4 p_1)\, u \\ &= i\,\frac{\lambda}{ec} u^\dagger \left(\alpha_1 \frac{E}{c} u \varrho_3 - p_1 u\right) \\ &= i\,\frac{\lambda}{ec}\left(\frac{E}{c} u^\dagger(-u\alpha_1 + 2\Gamma p_1)\varrho_3 - p_1\right) \\ &= i\,\frac{\lambda}{ec}\left(-\frac{E}{c}\alpha_1 + p_1 \sum_{k=1}^{3}\alpha_k p_k \Big/ \left(\frac{E}{c} + mc\right)\right)\varrho_3. \end{aligned} \tag{33}$$

Nun sind in der vorausgesetzten Darstellung, in der ϱ_3 diagonal ist, alle α von der Form

$$\alpha = \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{vmatrix}, \tag{34}$$

wobei die σ zweizeilige (Paulische) Untermatrizen sind. Es verschwinden also, da in (33) nur die α, mit der Diagonalmatrix ϱ_3 multipliziert, auftreten, von $\sum_{\mu\nu} u^\dagger_{m\mu}(s_{14})_{\mu\nu} u_{\nu n}$ sämtliche Diagonalelemente, d. h. es verschwinden die Erwartungswerte von s_{14} für positive und negative Energie, mit Einschluß der Elemente, die Übergängen zwischen Zuständen mit gleicher Energie, aber entgegengesetzter Richtung des Spins entsprechen (z. B. $m = 1$, $n = 2$). Dieselbe Rechnung, für s_{23} ausgeführt, ergibt

$$\begin{aligned} u^\dagger(\mathfrak{p})\, s_{23}\, u(\mathfrak{p}) &= u^\dagger \frac{\lambda}{ec}(\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2)\, u \\ &= -\frac{\lambda}{ec}(\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2), \end{aligned} \tag{33'}$$

also hinsichtlich der Erwartungswerte ganz dasselbe Resultat wie für s_{14}. *Für ein gleichförmig mit dem Impulse* $\mathfrak{p}$ *bewegtes Elektron verschwinden also überhaupt alle Erwartungswerte von* s_{ik}.

Da auch alle Übergänge von positiver zu positiver und von negativer zu negativer Energie verschwinden — vgl. (40) weiter unten — ist s_{ik}

ein *rein ungerader* Operator im Schrödingerschen Sinne. Es ist naheliegend und führt bis zu einem gewissen Grade zu seiner Kennzeichnung, ihn einmal mit dem ungeraden Anteil des Polarisationsoperators zu vergleichen, der nach (28) seinen ersten Teil ausmacht. Man berechnet nach Pauli[1]) diesen Anteil $U(D)$ für einen beliebigen Operator D so:

$$U(D) = \tfrac{1}{2}(D - \Lambda D \Lambda),$$

wobei

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=1}^{3}\alpha_k p_k + \varrho_3 mc}{\sqrt{m^2c^2 + \mathfrak{p}^2}} \tag{35}$$

ist. Wir führen diese Rechnung für die ersten Glieder in (28) aus. Es ergibt sich zunächst

$$\left.\begin{aligned} \Lambda i\alpha_1\varrho_3 + i\alpha_1\varrho_3\Lambda &= \frac{2}{\sqrt{\ }}(p_2\sigma_3 - p_3\sigma_2)\varrho_3, \\ \Lambda i\sigma_1\varrho_3 + i\sigma_1\varrho_3\Lambda &= \frac{2}{\sqrt{\ }}\left((p_2\alpha_3 - p_3\alpha_2)\varrho_3 + imc\sigma_1\right) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und damit wegen $\Lambda^2 = 1$:

$$U(i\alpha_1\varrho_3) = i\alpha_1\varrho_3 - \frac{1}{\sqrt{\ }}(p_2\sigma_3 - p_3\sigma_2)\varrho_3\Lambda. \tag{37}$$

Beachtet man, daß

$$\begin{aligned} \Lambda &= \varrho_3 + \text{Glieder mit } p/mc, \\ \sqrt{\ } &= mc + \text{Glieder mit } p^2/mc \end{aligned} \tag{38}$$

und $(\varrho_3)^2 = 1$ ist, so erkennt man, daß (37) mit der Klammer in (28) *bis auf Glieder mit* p^2 *übereinstimmt*. Der Operator s_{ik} stellt also in seinen $(i4)$-Komponenten $(i = 1, 2, 3)$ wenigstens *für kleine Geschwindigkeiten* einfach *den ungeraden Anteil der Polarisation* des Diracschen Elektrons dar.

Diese Übereinstimmung beschränkt sich allerdings auf die genannten Komponenten; für die anderen erhält man z. B. nach (36)

$$U(-i\sigma_1\varrho_3) = \frac{1}{mc}\sigma_4 p_1 + \cdots \tag{38'}$$

Wir hielten diese kleine Rechnung dennoch für mitteilenswert, weil es recht befriedigend schien, daß man den wichtigen Tensor wenigstens teilweise so einfach charakterisieren kann. Eine *vollständige* Übereinstimmung konnte nicht erwartet werden, da ja, wie auch schon angemerkt, die Bildung des ungeraden Anteils den Tensorcharakter nicht erhält.

[1]) W. Pauli jr., Handb. d. Phys. XXIV/1, 2. Aufl., Kap. 2 B, Ziff. 2. Berlin 1933.

Die Tatsache, daß die Erwartungswerte der s_{ik} für gleichförmige Bewegung verschwinden, entspricht nun gerade dem Umstande, daß bei konstanter Energie $s_{ik} = 0$ die einzige Lösung der kräftefreien klassischen Gleichungen (19) ist. In diesem Falle ($F_{ik} = 0$, $s_{ik} = 0$) stimmen auch die noch fehlenden letzten Gleichungen (19)

$$\frac{d u_i}{d t} = -\frac{e}{m c} s_{ik} v_k \tag{39'}$$

mit den quantentheoretischen[1])

$$\frac{d u_i}{d t} = -\frac{e}{m c} F_{ik} c \alpha_k \tag{39}$$

trivialerweise überein.

In dieser Vollkommenheit besteht die Analogie allerdings nur im Falle der gleichförmigen Bewegung. Beim Hinzutreten äußerer Kräfte werden natürlich die klassischen s_{ik} außer den Feldstärken noch Zusatzglieder annehmen, für die das quantentheoretische Gegenstück in (39) fehlt. Wir betonten schon in der Einleitung, daß das erwartet werden muß, weil der Spin der Reaktionskraft sicher nicht *vollständig* äquivalent ist. So liefert die Diracsche Gleichung ein diskontinuierliches Termspektrum, während es aus Gründen der natürlichen Linienbreite kontinuierlich sein müßte usw. Diese und die verwandten Erscheinungen werden ja erst durch die Quantenelektrodynamik beschrieben. Ich halte die Möglichkeit nicht für ausgeschlossen, durch eine entsprechende Erweiterung der Diracschen Theorie den Strahlungseinfluß *vollständig* mitzuumfassen und wenigstens das Einelektronenproblem in demselben Umfange wie in der klassischen Theorie ohne Heranziehung der Theorie der Felder zu behandeln; doch habe ich diesen Gedanken noch nicht weiter verfolgt.

Auf der anderen Seite haben die quantentheoretischen s_{ik} schon im kräftefreien Falle nicht bloß Erwartungswerte, sondern auch *Übergangselemente*, die scheinbar kein Gegenstück in der *klassischen* Theorie haben. Man erhält für die vollständige Matrix s_{ik}:

$$\begin{aligned}(s_{ik})_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} &= \int \psi^*_{\mathfrak{p}}\, s_{ik}\, \psi_{\mathfrak{p}'}\, d x\, d y\, d z,\\ &= \int u^\dagger(\mathfrak{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(E t - \mathfrak{p}\mathfrak{r})}\, s_{ik}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E' t - \mathfrak{p}'\mathfrak{r})}\, u(\mathfrak{p}')\, d x\, d y\, d z,\\ &= h^3\, \delta(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')\, u^\dagger(\mathfrak{p})\, s_{ik}\, u(\mathfrak{p}')\, e^{\frac{i}{\hbar}(E - E')t},\end{aligned} \tag{40}$$

d. h. es verschwinden zwar alle Elemente mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $|E| \neq |E'|$, entsprechend dem Verschwinden aller Fourier-Komponenten der klassischen

[1]) V. Fock, a. a. O.

Bewegung mit konstanter Energie, doch bleiben noch die Übergänge nach negativer Energie, die nach (33) und (33') nichtverschwindende Elemente haben.

Es scheint uns nun recht interessant, daß auch die klassischen Gleichungen bei Abwesenheit äußerer Kräfte eine nichtverschwindende Lösung s_{ik} haben, die sich mit den Übergängen nach negativer Energie in Verbindung bringen läßt. Bevor wir sie ausrechnen, seien noch zwei Bemerkungen zu dem Vorangehenden angefügt.

Zunächst kann man versuchen, die *quantentheoretischen* s_{ik} für äußere Kräfte nach dem Muster von (25) zu bilden. Wenn man für diesen Fall statt (24) ansetzt

$$b_i = \lambda \left(\alpha_i - \varrho_3 \frac{p_i + \frac{e}{c} A_i}{m c} \right), \tag{24*}$$

so erhält man statt (25)

$$s_{ik} = \frac{\lambda}{e c} \left\{ \alpha_i \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \right) - \alpha_k \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \right\} + \lambda \frac{i \hbar}{m c^3} \varrho_3 F_{ik}. \tag{25*}$$

Die *Feldstärken* F_{ik} treten also in der zu erwartenden Weise auf, und zwar als eine Folge der Vertauschungsrelationen. Für die übrigen Glieder besteht aber hier entsprechend dem oben fehlenden quantentheoretischen kein klassisches Analogon. Übrigens ist die Beschleunigung (24*) nicht *exakt* orthogonal zu der Geschwindigkeit (21). — Ferner haben wir uns mit den *Nebenbedingungen* (17) noch gar nicht befaßt. Da sie die Natur von Anfangsbedingungen haben, ist sehr schwer zu sagen, ob und wie sie etwa in der Quantenmechanik auftreten mögen. Es sei hier nur daran erinnert, daß auch die vier Diracschen Grundoperatoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varrho_3$ (man kann aus ihnen alle übrigen bilden) Nebenbedingungen, nämlich $(\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = (\varrho_3)^2 = 1$ genügen, die auch die Natur von partikulären Integralen haben[1]).

§ 6. Lösungen der klassischen Gleichungen mit $s_{ik} \neq 0$ im kräftefreien Falle. Zur Integration gehen wir der zu berücksichtigenden Nebenbedingungen halber am besten von den ursprünglich vorgelegten Gleichungen (6) und (5) aus. Dem Falle $s_{ik} \neq 0$ entspricht dann $d u_i / d\tau \neq 0$. Wir setzen $F_{ik} = 0$ und haben dann

$$\frac{d u_i}{d \tau} = \varepsilon \left(\frac{d^2 u_i}{d \tau^2} - \frac{u_i}{c^2} \left(\frac{d u_k}{d \tau} \right)^2 \right). \tag{41}$$

[1]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 351, 1928.

Dabei wurde die kleine Konstante $2e^2/3mc^3$ mit ε bezeichnet. Es ist

$$\varepsilon = 0{,}628 \cdot 10^{-23}\ \text{sec}. \tag{42}$$

Wir multiplizieren (41) mit $\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}\tau$ und verjüngen. Es ergibt sich wegen $u_i\,\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}\tau = 0$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{d}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2,$$

und das erste Integral lautet:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = b^2 e^{\frac{2}{\varepsilon}\tau}. \tag{43}$$

Die Konstante b^2 ist wesentlich positiv, da die Beschleunigung ein raumartiger Vektor ist. Durch Einsetzen von (43) in (41) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} - \frac{b^2}{c^2}\,e^{\frac{2\tau}{\varepsilon}}\,u_i = 0.$$

Wir führen als neue Variable

$$\varrho = e^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \tag{44}$$

ein und haben dann einfach

$$\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}\varrho^2} = \left(\frac{\varepsilon b}{c}\right)^2 u_i$$

mit der Lösung

$$u_i = A_i\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varepsilon b}{c}\,\varrho + B_i\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varepsilon b}{c}\,\varrho. \tag{45}$$

Die Bedingung (4) verlangt

$$A_i^2 = -c^2 \qquad B_i^2 = c^2 \qquad A_iB_i = 0. \tag{46}$$

Wir wollen etwa die Bewegung in der x-Richtung betrachten, setzen also $A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0$ und erfüllen die Bedingungen (46), indem wir

$$\begin{aligned} A_1 &= c\,\mathfrak{Sin}\,\varphi & B_1 &= c\,\mathfrak{Cof}\,\varphi \\ A_4 &= ic\,\mathfrak{Cof}\,\varphi & B_4 &= ic\,\mathfrak{Sin}\,\varphi \end{aligned} \tag{47}$$

setzen ($\varphi = \text{const}$). Hiermit wird

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = c\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{\varepsilon b}{c}\,\varrho + \varphi\right) \\ u_4 &= ic\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = ic\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{\varepsilon b}{c}\,\varrho + \varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\varepsilon b}{c}\,\varrho + \varphi\right). \tag{48}$$

Läuft τ von $-\infty$ bis $+\infty$, so läuft ϱ nach (44) von Null bis Unendlich. Wir haben für große *negative* τ

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c\,\mathfrak{Tang}\,\varphi. \tag{49}$$

d. h. gleichförmige Bewegung mit einer durch φ bestimmten Geschwindigkeit, für große *positive* τ dagegen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c, \tag{49'}$$

d. h. gleichförmige Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit. Für die *ganze* Bewegung findet man durch Elimination von τ nach einer leichten Rechnung (mit $\varphi = 0$)

$$t = \frac{\varepsilon}{2}\left\{Ei\left(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{v}{c}\right) + Ei\left(-\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{v}{c}\right)\right\} + \text{const}. \tag{50}$$

E_i bedeutet den Integrallogarithmus, v die Geschwindigkeit $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Die Integrationskonstante b ist bei der Elimination von τ mit herausgefallen. Die nebenstehende Figur stellt v/c als Funktion der Zeit in Einheiten ε dar. Wie man sieht, findet der Übergang von Ruhe auf Lichtgeschwindigkeit so gut wie ganz in einem Zeitraum von etwa $8\varepsilon \simeq \frac{1}{2}\cdot 10^{-22}$ sec statt. Das Elektron „springt" gleichsam auf Lichtgeschwindigkeit.

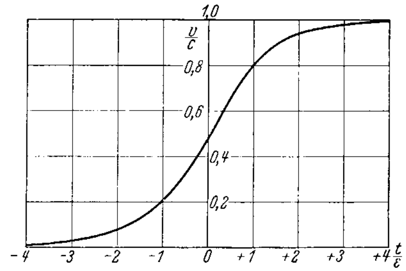

Fig. 1.

Diese Lösung ist formal streng. Sie ist auch mit der ersten der beiden Voraussetzungen, unter denen die Formel (5) gilt (vgl. § 2), praktisch im Einklang, da die Beschleunigung vor und hinter der Übergangsstelle sehr schnell gegen Null geht. Allerdings wird an dieser Stelle selbst die zweite Bedingung [vgl. Formel (63 b) bei Abraham, l. c.] verletzt, wenigstens wenn man den üblichen Wert (8) für die Ausdehnung des Elektrons annimmt. Außerdem wird natürlich mit der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit die kinetische Energie unendlich; zugleich wächst auch die Polarisation — wenn wir den Tensor s_{ik} auch hier einmal so nennen dürfen — langsam über alle Grenzen. Man findet nach (11) und (48) als einzige nichtverschwindende Komponente [vgl. auch (12')]

$$s_{14} = i\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2c^4}{e^3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{v}{c}\cdot \tag{51}$$

Die Bewegung ist also nur etwa bis zu der kritischen Stelle physikalisch denkbar.

Bis vor kurzem hätte man diesem Bewegungstyp sicherlich überhaupt keine physikalische Bedeutung beigelegt, und er scheint daher auch unbeachtet geblieben zu sein. Die jüngsten Erfahrungen über das Verschwinden der positiven Elektronen haben es aber sehr wahrscheinlich gemacht, daß es ähnliche Vorgänge in der Natur wirklich gibt. Man soll sich dieses Verschwinden bekanntlich so vorstellen, daß dabei ein gewöhnliches Elektron in einen Zustand negativer Energie übergeht. Die Quantenelektrodynamik erfordert dabei[1]) aus Gründen der Impulserhaltung, daß es sich zunächst unter Emission eines Lichtquants — also ebenfalls unter formaler Verletzung des Energiesatzes! — spontan in Bewegung setzt, um erst in einer zweiten Phase mit Emission eines weiteren Quants wieder in Ruhe zu kommen. Die Ähnlichkeit dieser Vorgänge mit (50) in kinematischer Hinsicht ist augenscheinlich, und wenn man bedenkt, daß dieser Bewegungsvorgang als zeitveränderliche Lösung von (19) den *Übergangs*elementen von (40) entspricht, so erscheint der Gedanke kaum abweisbar, daß hier wirklich ein klassisches Gegenstück auch zu den Übergängen nach negativer Energie vorliegt.

Wir sind uns, von den formalen abgesehen, gewisser grundsätzlicher Bedenken, die man dieser Auffassung entgegenhalten kann, wohl bewußt. Man legt damit den quantentheoretischen Übergangsphasen vielleicht mehr Realität bei, als ihnen physikalisch zukommt. Der vorstehende Deutungsversuch möge hier nur Platz finden als naheliegender Kommentar zu einem Bewegungstyp, der wohl in jedem Falle Erwähnung verdiente. Die Übergänge nach negativer Energie sind ja vom Spin unabhängig und der eben behandelte Prozeß entspräche in jedem Falle einem rein quantenelektrodynamischen Vorgang.

---

[1]) Siehe z. B. J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35**, 939, 1930.