

1 Określenie liczb zespolonych

Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych gdy $\Delta < 0$, bo wzory ogólne wymagają wtedy obliczenia pierwiastka z liczby ujemnej. Wśród liczb rzeczywistych taki pierwiastek nie istnieje. Gdy jednak wprowadzimy dodatkową "liczbę" $i = \sqrt{-1}$, to można rachować na liczbach postaci $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, dodając do zwykłych reguł arytmetyki równość $i^2 = -1$. Tak postępowano od XVI wieku, nazywając liczby bi liczbami urojonymi, bo trudno było uzasadnić ich byt. Liczby $a + bi$ nazywano liczbami zespolonymi. Stosowano do nich zwykłe prawa algebry. Np. $\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$.

Ścisłe określenie liczb zespolonych pochodzi od Hamiltona, który określił liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych. Przedstawimy tę konstrukcję.

Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

i mnożenia

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Parę $z = (a, b)$ będziemy nazywać *liczbą zespoloną*, a cały zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — zbiorem liczb zespolonych. Będziemy go oznaczać literą \mathbb{C} .

Zbiór \mathbb{C} z wprowadzonymi wyżej działaniami ma własności podobne do zbioru liczb rzeczywistych — chodzi tu o własności działań: łączność, przemienność, istnienie elementu neutralnego, przeciwnego i odwrotnego, oraz rozdzielność. Łatwo zauważyć, że para $(0, 0)$ jest elementem zerowym dodawania, a para $(1, 0)$ jest elementem jednostkowym mnożenia. Również łatwo jest sprawdzić łączność dodawania i mnożenia, i przemienność tych działań. Elementem przeciwnym do (a, b) jest taka para (x, y) , że $(a + x, b + y) = (0, 0)$; stąd $(x, y) = (-a, -b)$. Nieco trudniej jest wyliczyć element odwrotny. Załóżmy więc, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$ oraz że

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

Wtedy, zgodnie z definicją mnożenia, musi być:

$$ax - by = 1, \quad ay + bx = 0.$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

a więc liczba zespolona

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

jest odwrotnością liczby z .

Sprawdźmy jeszcze rozdzielność mnożenia względem dodawania. Niech $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) \cdot z_3 &= (a + c, b + d)(e, f) = \\ &= ((a + c)e - (b + d)f, (b + d)e + (a + c)f) = \\ &= (ae + ce - bf - df, be + de + af + ef) = \\ &= (ae - bf, be + af) + (ce - df, de + cf) = \\ &= z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3. \end{aligned}$$

W pewnym sensie zbiór \mathbb{C} zawiera zbiór \mathbb{R} . Formalnie \mathbb{C} jest zbiorem par, ale jeśli rozważymy zbiór par postaci $(a, 0)$, to ponieważ zachodzą równości:

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0),\end{aligned}$$

więc pary takie można utożsamić z liczbami rzeczywistymi. Inaczej mówiąc mamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie

$$(a, 0) \leftrightarrow a$$

zbioru liczb zespolonych postaci $(a, 0)$ na zbiór liczb rzeczywistych.

W tym przyporządkowaniu liczbom 1 i -1 odpowiadają pary $(1, 0)$ i $(-1, 0)$. Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$i = (0, 1),$$

to liczba zespolona (a, b) daje się przedstawić za pomocą liczby i oraz liczb rzeczywistych $(a, 0)$ i $(b, 0)$. Mamy bowiem

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

gdzie zamiast $(a, 0)$, $(b, 0)$ napisaliśmy krótko a , b .

Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

W dalszym ciągu liczby zespolone będziemy zapisywać w postaci $a+bi$. Zapis ten pozwala przy działaniach arytmetycznych operować liczbami $a+bi$ jak wielomianami, przy czym należy zastępować i^2 przez -1 . Na przykład:

$$(1 + 2i)(2 - 3i) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3i + 2i \cdot 2 - 2i \cdot 3i = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i.$$

2 Własności liczb zespolonych

W prostokątnym układzie współrzędnych liczbę zespoloną $z = a + bi$ można interpretować jako punkt o odciętej a i rzędnej b . Takie podejście prowadzi do geometryzacji wielu pojęć oraz twierdzeń i ma wielką treść intuicyjną.

Punkty rzeczywiste, tj. takie punkty $z = a + bi$, dla których $b = 0$, wypełniają oś układu zwaną *osią rzeczywistą*, zaś punkty, dla których $a = 0$ wypełniają drugą oś, zwaną *osią urojoną*.

Czasem wygodniej jest traktować liczbę $z = a + bi$ jako wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i końcu (a, b) . Można zauważyć, że dodawanie liczb zespolonych jest (geometrycznie) dodawaniem wektorów. Interpretacja mnożenia nie jest tak prosta. Ale jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot. Długość wynosi $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nazywamy ją *modułem* bądź *wartością bezwzględną* liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$. Przykładowo:

$$|1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \quad |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Zauważmy, że równość $|z| = 1$ jest spełniona przez te punkty płaszczyzny, które leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1 . Nierówność $|z| < 1$ charakteryzuje punkty wewnątrz tego okręgu.

Przykład Narysować zbiory

1) $|z - i| = 2$;

2) $2 < |z + 1 - 2i| \leq 4$;

3) $|z + 3| = |z - 2i|$.

Niech $z = a + bi$. Przyjmiemy oznaczenie

$$a - bi = \bar{z}.$$

Liczbę \bar{z} nazywamy *sprzężoną* z liczbą z . Liczby sprzężone leżą symetrycznie względem osi rzeczywistej. Łatwo jest sprawdzić wzory:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Mamy także dla $z = a + bi$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Ostatnią własność wykorzystujemy przy dzieleniu liczb zespolonych. Wykonanie dzielenia polega na przedstawieniu ilorazu w postaci $a + bi$. Osiągniemy to, mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do mianownika. Przykładowo:

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{9 + 16} = \frac{-5 + 10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Twierdzenie 1 Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Jeśli dodatkowo $z_2 \neq 0$, to

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Dowód. Pierwszy wzór wynika z równości:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

a drugi — z pierwszego, bo

$$|z_2| \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_2 \frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|. \blacksquare$$

Twierdzenie 2 Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą nierówności

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Dowód analityczny pominiemy. Zauważmy jednak, że wektor odpowiadający liczbie $z_1 + z_2$ jest bokiem trójkąta, którego pozostałymi bokami są wektory odpowiadające liczbom z_1 i z_2 . W trójkącie długość każdego boku jest nie większa niż suma długości pozostałych boków. Stąd mamy pierwszą nierówność, którą nazywamy *nierównością trójkąta*.

Niech $z = a + bi$. Wprowadzamy oznaczenia

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b.$$

Liczby $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *częścią urojoną* liczby z .

3 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z . Tę miarę nazwiemy *argumentem* liczby z . Jak wiadomo jest ona wieloznaczna i wyraża się wzorem:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad \text{gdzie:} \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy *argumentem głównym*. Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \quad \varphi = \text{Arg } z.$$

Argumentem liczby 0 nazywamy dowolną liczbę φ .

Przykładowo: $\arg i = \frac{1}{2}\pi$, $\text{Arg } i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $\arg 1 = 0$, $\text{Arg } 1 = 2k\pi$.

Odnotujmy, że liczby rzeczywiste dodatnie mają argument główny równy 0, a ujemne — równy π .

Po rozpatrzeniu odpowiedniego trójkąta prostokątnego otrzymamy:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

W takim razie

$$z = a + bi = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Stąd otrzymujemy poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3 *Każda liczba zespolona daje się przedstawić w postaci*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

zwanej postacią trygonometryczną liczby z .

Na przykład

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0), \quad i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Wiemy już, że mnożeniu (dzieleniu) liczb zespolonych odpowiada mnożenie (dzielenie) modułów tych liczb. Następujące twierdzenie wyjaśnia, co dzieje się z argumentami tych liczb.

Twierdzenie 4 *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 :*

$$\text{Arg } z_1 z_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \quad (1)$$

U w a g a. Ponieważ $\text{Arg } z$ nie jest określony jednoznacznie, więc powyższy wzór należy rozumieć następująco: do każdych dwóch wartości argumentów występujących we wzorze można dobrać trzecią wartość argumentu, tak aby zachodziła równość.

D o w ó d. Niech

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

W ó w c z a s

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \blacksquare \end{aligned}$$

Podobnie udowadnia się następane dwa twierdzenia.

Twierdzenie 5 Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 , ($z_2 \neq 0$):

$$\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \quad (2)$$

Twierdzenie 6 Dla każdej liczby zespolonej z i każdego całkowitego n :

$$\text{Arg } z^n = n \cdot \text{Arg } z. \quad (3)$$

W szczególności zachodzi tzw. wzór de Moivre'a:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (4)$$

D o w ó d. Dla n naturalnego wzór (3) otrzymamy po wielokrotnym zastosowaniu wzoru (1). Gdy $n = 0$, to prawdziwość wzoru wynika z równości $\text{Arg } 1 = 2k\pi$. Natomiast, gdy $n = -k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to

$$\text{Arg } z^n = \text{Arg } z^{-k} = \text{Arg} \frac{1}{z^k} = \text{Arg } 1 - \text{Arg } z^k = -k \text{Arg } z = n \text{Arg } z. \blacksquare$$

Przykłady

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{26} = \cos \frac{26\pi}{4} + i \sin \frac{26\pi}{4} = \\ &= \cos \left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin \left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3} &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-3} = \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) = \\ &= \cos 0 + i \sin 0 = 1. \end{aligned}$$

Jak widać potęgowanie jest łatwe, gdy znamy postać trygonometryczną liczby. Jeśli jej nie znamy, pozostaje *wzór dwumianowy Newtona*:

$$z^n = (a + bi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} i^{n-k}.$$

4 Postać wykładnicza liczby zespolonej

Określamy:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

W ten sposób został zdefiniowany pewien symbol. Uzasadnieniem celowości jego wprowadzenia są następujące własności, pokazujące, że można go traktować jako potęgę liczby e .

Własności symbolu $e^{i\varphi}$.

1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$;
2. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$;
3. $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$;
4. $(e^{i(\varphi+2k\pi)}) = e^{i\varphi}$;
5. $e^{i\varphi} \neq 0$;
6. $|e^{i\varphi}| = 1$;
7. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$;

Przykłady Obliczyć $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{2\pi i}$, e^i .

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1.$$

Symbol $e^{i\varphi}$ został zdefiniowany przy pomocy funkcji trygonometrycznych. Można wprowadzić teraz następujące tożsamości, nazywane *wzorami Eulera*:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5 Pierwiastki z liczb zespolonych

Dla liczby rzeczywistej dodatniej a liczbę rzeczywistą dodatnią b taką, że $b^n = a$ nazywamy *pierwiastkiem arytmetycznym* z liczby a i oznaczamy $\sqrt[n]{a}$. Taka liczba jest tylko jedna.

W przypadku zespolonym, *pierwiastkiem stopnia n* z liczby z nazywamy taką liczbę w , że $w^n = z$. Jak zobaczymy, takich liczb jest dokładnie n (wyjątkiem jest 0, które ma jeden pierwiastek).

Rozważymy najpierw pierwiastki kwadratowe. Zacznijmy od przykładu. Znajdziemy pierwiastki kwadratowe liczby $z = 3 - 4i$.

Szukamy takiej liczby $w = x + iy$, że $(x + iy)^2 = 3 - 4i$, tzn.

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 3 - 4i,$$

czyli

$$x^2 - y^2 = 3, \quad 2xy = 4.$$

Po podstawieniu np. z drugiego równania $y = -2/x$ do pierwszego otrzymamy (po pomnożeniu przez x^2) równanie

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$$

które ma dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Stąd $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, więc pierwiastkami z $3 - 4i$ są liczby

$$w_1 = 2 - i, \quad w_2 = -2 + i.$$

Rachunek powyższy można przeprowadzić w przypadku ogólnym, choć wymaga to rozróżnienia kilku przypadków. Wprowadzamy dla liczb rzeczywistych funkcję $\operatorname{sgn} x$ (czytaj: *signum*) wzorem:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 7 Każda liczba zespolona $z = a + bi \neq 0$ ma dwa różne pierwiastki drugiego stopnia, określone wzorami:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{dla } b = 0, a \geq 0, \\ \pm\sqrt{-ai} & \text{dla } b = 0, a < 0, \\ \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i\operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right) & \text{dla } b \neq 0. \end{cases}$$

Na przykład

$$\sqrt{3 - 4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i(-1)\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right) = \pm(2 - i).$$

Obliczanie pierwiastków stopnia wyższego niż 2 wymaga postaci trygonometrycznej liczby z .

Twierdzenie 8 Liczba $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia. Określone są one wzorem:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Szczegóły dowodu pominiemy, ograniczając się do zauważenia, że dla każdego w_k mamy na mocy wzoru Moivre'a:

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left[\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right]^n = \\ &= |z| (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = z. \end{aligned}$$

Obliczmy $\sqrt[3]{i}$ (tu uwaga: ten symbol oznacza *trzy* liczby). Mamy:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

zatem

$$\begin{aligned}w_0 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\w_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\w_2 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = i.\end{aligned}$$

6 Równania algebraiczne

Równanie algebraiczne drugiego stopnia:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

o współczynnikach zespolonych rozwiązujemy w zwykły sposób, tzn. obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ i stosujemy wzory:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku (w przeciwieństwie do przypadku liczb rzeczywistych) zawsze istnieje $\sqrt{\Delta}$ — w istocie są dwa pierwiastki różniące się znakiem. Do powyższych wzorów wystarczy podstawiać dowolny z nich (ten drugi da te same wartości $z_{1,2}$).

Przykłady

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$, $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$, $z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$.

To równanie miało współczynniki rzeczywiste i jego pierwiastki są liczbami sprzężonymi.

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1 + i)z + (2 + i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1 - 3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \quad z_2 = \frac{1 - i - 1 - 3i}{2} = i.$$

W ogólnym przypadku pierwiastki nie są sprzężone.

Tak więc równanie algebraiczne drugiego stopnia ma dokładnie dwa pierwiastki (jeśli przyjmiemy, że pierwiastek podwójny — występujący, gdy $\Delta = 0$ — liczymy dwa razy).

Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy *równaniem algebraicznym stopnia n* .

Twierdzenie 9 (zasadnicze twierdzenie algebry) *Równanie algebraiczne stopnia n o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).*

Trudny dowód tego twierdzenia pominiemy. Zauważymy dla przykładu, że rozwiązaniami równania

$$z^n - 1 = 0$$

są pierwiastki stopnia n z liczby 1. Tradycyjnie używa się oznaczenia:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy oczywisty pierwiastek 1. Jeśli n jest nieparzyste, to nie ma innych pierwiastków rzeczywistych. Gdy n jest parzyste, to drugi pierwiastek rzeczywisty -1 otrzymujemy dla $k = n/2$. Geometrycznie, pierwiastki leżą na okręgu o promieniu 1, "w równych odstępach". Łącząc je odcinkami otrzymamy n -kąć foremny wpisany w okrąg jednostkowy.

Do rozwiązywania równań wyższych rzędów można stosować znane metody. Np. rozwiązywanie równania:

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = 0$$

można rozpocząć od szukania pierwiastków całkowitych wśród dzielników 20. Znajdziemy 2 i stąd

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = (z - 2)(z^2 - 2z + 10).$$

Wystarczy teraz rozwiązać równanie $z^2 - 2z + 10 = 0$.

W przypadku równania dwukwadratowego, np.

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

podstawiamy $t = z^2$ i znajdujemy

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad t_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Dla każdej ze znalezionych wartości należy teraz obliczyć pierwiastki kwadratowe. Otrzymamy

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i), \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i), \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - i), \quad z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{3} + i).$$

Rozwiązywanie równań stopni wyższych wymaga na ogół pewnej pomysłowości. Jeśli się da, warto korzystać z postaci trygonometrycznej. Przykładowo rozważmy równanie:

$$(x + 3i)^n + i(x - 3i)^n = 0$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że $3i$ na pewno nie jest pierwiastkiem. Zatem możemy równanie podzielić przez $(x - 3i)^n$. Otrzymamy

$$\left(\frac{x + 3i}{x - 3i}\right)^n = -i.$$

Standardowo obliczamy pierwiastki stopnia n liczby $-i = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi$:

$$w_k = \cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zatem

$$\frac{x + 3i}{x - 3i} = w_k,$$

skąd wyliczamy x :

$$x = -3i \frac{1 + w_k}{1 - w_k}.$$

Podstawimy teraz wartości w_k . Przy tym będziemy korzystać ze wzorów:

$$1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$1 - \cos \varphi - i \sin \varphi = 1 + \cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi) = 2 \cos \frac{\varphi + \pi}{2} \left(\cos \frac{\varphi + \pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + \pi}{2} \right).$$

Rachunek przebiega tak (dla uproszczenia zapisu piszemy na razie φ zamiast $\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n}$):

$$x = -3i \frac{1 + w_k}{1 - w_k} = -3i \frac{2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)}{2 \cos \frac{\varphi + \pi}{2} \left(\cos \frac{\varphi + \pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + \pi}{2} \right)}.$$

Uwzględniając, że $\cos \frac{\varphi + \pi}{2} = -\sin \frac{\varphi}{2}$ i wykonując dzielenie postaci trygonometrycznych otrzymamy

$$x = 3i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 3i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot (-i) = 3 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Podstawiamy teraz $\varphi = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n}$ czyli $\frac{\varphi}{2} = \frac{3 + 4k}{4n} \pi$. Otrzymujemy:

$$x = 3 \operatorname{ctg} \frac{3 + 4k}{4n} \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$