

Almeida, C. e M. M. Oliveira (1990)

Caracterização hidráulica de aquíferos fracturados

Livro de Homenagem a Carlos Romariz, p. 30-64, Lisboa.

CARACTERIZAÇÃO HIDRÁULICA DE AQUIFEROS FRACTURADOS

Almeida, C.* e M. M. Oliveira**

*Departamento de Geologia da FCUL

Centro de Geologia da Universidade de Lisboa (INIC)

**Bolsheiro do INIC

RESUMO

Nas últimas três décadas assistiu-se ao desenvolvimento de modelos descrevendo o escoamento em aquíferos fracturados. Um conceito subjacente à maior parte destes modelos é o de meio com porosidade dupla, estabelecido em 1960 por Barenblatt, Zheltov e Kochina. Este conceito pressupõe a existência de dois sistemas justapostos: um de blocos porosos e outro de fracturas que separam os blocos.

A maior parte dos modelos até agora desenvolvidos enquadram-se em dois grupos: aqueles que consideram regime de escoamento pseudo-estacionário entre blocos e fracturas e os que consideram que esse escoamento se dá em regime transitório. A diferença principal entre estes dois grupos reside no facto de, no primeiro, se desprezar a divergência de fluxo dentro dos blocos ao contrário do segundo em que é considerada.

Neste trabalho passam-se em revista os principais modelos de escoamento em meios fracturados e analisam-se as respectivas curvas rebaixamento/tempo, dando-se exemplos da sua aplicação à interpretação de ensaios de bombeamento em aquíferos fracturados calcários do Algarve.

ABSTRACT

In the last three decades several models describing flow in fractured aquifers were developed. Most of them are based on the double porosity medium concept introduced in the early sixties by Barenblatt, Zheltov and Kochina. This concept considers two overlapping media: porous blocks and fractures that separate the blocks.

There are basically two types of models: those, which consider pseudo-steady state flow between blocks and fractures and those, which consider transient flow between these two systems. The main difference between both types of models is that in the former, the divergence of flow in the blocks is neglected, whereas in the other it is considered. In the models that consider transient block to

fracture flow, the geometry of blocks must be established. Usually blocks are assumed to be slab shaped or spherical.

This paper provides a review of the main models describing flow in fractured aquifers. These are applied to analyse pumping tests carried out in fractured limestone aquifer in Algarve (Portugal).

INTRODUÇÃO

As rochas fracturadas ocupam extensa área do globo emerso constituindo, nalguns locais, importantes reservatórios de águas subterrâneas. Ainda recentemente, os recursos hídricos subterrâneos naquele tipo de rochas foram revalorizados devido ao falhanço de alguns projectos de aproveitamento hídrico de superfície em regiões áridas. As rochas fracturadas podem constituir, também, importantes reservatórios de hidrocarbonetos e recursos geotérmicos. São ainda apontadas como possíveis depósitos de resíduos tóxicos e/ou radioactivos.

Estes aspectos estão na base de numerosos estudos no domínio da dinâmica dos escoamentos em meios fracturados que foram iniciados na década de 60 por hidrogeólogos e engenheiros e geólogos do petróleo.

Barenblatt *et al.* (1960) estabeleceram pela primeira vez a equação da difusividade hidráulica em rochas fracturadas, apresentando ao mesmo tempo soluções para casos particulares. Durante as duas décadas seguintes, verificaram-se progressos significativos com os trabalhos de Warren & Root (1963), Kazemi *et al.* (1969), Streltsova (1976) e Boulton & Streltsova (1977), entre outros.

Estes autores, tal como Barenblatt *et al.* (1960), consideraram o meio fracturado constituído por blocos porosos separados por fracturas de extensão infinita, e estabeleceram soluções para regime transitório, incluindo o efeito da compressibilidade elástica das fracturas e dos blocos porosos.

Um outro tipo de abordagem, que não será tratada no presente trabalho, considera fracturas de extensão finita. Dentre os autores que apresentaram soluções analíticas tendo por base este modelo contam-se Gringarten & Witherspoon (1972), Gringarten & Ramey (1974), Prentice & Jenkins (1982), Pinto (1987).

De uma maneira geral, os principais aspectos que têm sido objecto de investigação, são a procura de modelos estatísticos que descrevam a fracturação dos reservatórios, o desenvolvimento de técnicas experimentais e de modelos teóricos para caracterizar o meio fracturado em termos de parâmetros hidráulicos e o estabelecimento de correlações entre esses parâmetros e a fracturação.

Em geral, os investigadores reconhecem que os modelos estatísticos normalmente utilizados nem sempre descrevem de forma satisfatória os diversos parâmetros da fracturação (densidade, orientação, abertura, etc.). Tal caracterização é de importância decisiva quando se pretende fazer a modelação estocástica daqueles parâmetros.

A utilização da geoestatística, embora ainda não tenha sido feita extensivamente, parece oferecer perspectivas prometedoras. Os variogramas dos diversos parâmetros (densidade, comprimento, etc.) mostram uma estrutura "em patamares" (Marsily, G., 1985) que indica uma estrutura autossemelhante para esses objectos.

Para uma melhor descrição do comportamento dos reservatórios fracturados, em relação ao escoamento subterrâneo, tem-se procurado, por um lado, estabelecer relações entre as características das fracturas, nomeadamente abertura, densidade, rugosidade, etc., e a condutividade hidráulica, o que permitirá melhorar a capacidade de previsão desta a partir da observação dessas características, e por outro, elaborar modelos que descrevam o melhor possível o escoamento em meios fracturados.

A aplicação destes modelos obriga à recolha de novos parâmetros hidráulicos como sejam: relação entre os volumes ocupados pelas fracturas e pelos restantes vazios, relação entre a permeabilidade das fracturas e a dos blocos e, ainda, parâmetros geométricos que caracterizem a intensidade das trocas de fluido entre os dois meios.

CONCEITOS BÁSICOS

Num reservatório fracturado podem-se distinguir diferentes porosidades que Pirson (1953) classificou em três tipos: intergranular, vesicular (resultante da alteração da rocha) e de fracturas, sendo as duas últimas porosidades secundárias.

Como alternativa a esta classificação de ordem genética, podemos considerar dois tipos de porosidade: porosidade de poros intergranulares e de microfracturas (porosidade de matriz) e porosidade de fracturas.

A importância relativa dos diferentes tipos de porosidade depende da litologia dominante. Por exemplo, num maciço granítico não alterado, a porosidade intergranular é extremamente pequena, predominando a porosidade de fracturas, enquanto que nalguns reservatórios dolomíticos se pode observar uma proporção sensivelmente equivalente para os dois tipos de porosidade.

Com base na importância relativa dos diferentes tipos de porosidade Streltsova (1976) considera quatro tipos de meios fracturados:

- a) formações fracturadas, quando as propriedades hidráulicas dos blocos e fracturas diferem de várias ordens de magnitude;
- b) formações puramente fracturadas, onde a porosidade é apenas de fractura;

c) formações com porosidade dupla, quando as propriedades hidráulicas dos blocos e das fracturas são da mesma ordem de magnitude, sendo a permeabilidade total devida principalmente à presença de fracturas;

d) formações heterogêneas, quando as fracturas estão preenchidas por materiais com permeabilidade menor que a dos blocos.

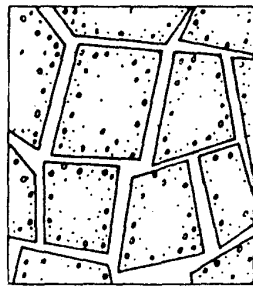


Fig. 1 - Representação esquemática de um meio com porosidade dupla, segundo Boulton & Streltsova (1978).

No, entanto, a tendência geral é considerar o conceito estabelecido por Barenblatt *et al.* (1960), que definem como meio de porosidade dupla aquele em que existem dois sistemas entrosados, um de blocos porosos, com permeabilidade baixa mas com elevada capacidade de armazenamento e outro, de fracturas, com permeabilidade mais elevada mas com escassa capacidade de armazenamento. Deste modo a condução da água está relacionada fundamentalmente com as fracturas enquanto que o armazenamento se relaciona sobretudo com os blocos. A figura 1 é uma representação esquemática dum meio com porosidade dupla.

Este modelo implica a existência de dois potenciais hidráulicos, um no sistema de fracturas e outro nos blocos. Assim, quando se induz uma perturbação no meio esta propaga-se mais rapidamente no sistema de fracturas, por este ser mais difusivo, gerando-se uma diferença de potencial hidráulico entre blocos e fracturas e conseqüente troca de fluido.

MODELOS DE ESCOAMENTO

Os reservatórios fracturados são sistemas complexos, tipicamente heterogêneos e anisótropos. Para descrever matematicamente o escoamento de um fluido num reservatório fracturado é necessário admitir algumas simplificações que dizem respeito, essencialmente, a dois aspectos: geometria do meio e relações hidráulicas entre blocos e fracturas.

Os primeiros modelos que se desenvolveram pressupõem regime de pseudo-equilíbrio dos blocos para as fracturas, i. é, que o caudal escoado entre aqueles dois meios é proporcional à permeabilidade dos blocos e à diferença entre as suas alturas piezométricas médias. Autores que adoptaram este modelo foram, entre outros, Barenblatt *et al.* (1960), Warren & Root (1963), Kazemi *et al.* (1969), Streltsova (1976). Embora matematicamente simples, torna-se difícil conceber um sistema real que obedeça a este regime (Barker, 1985). No entanto, Moench (1984) refere a existência de dados de campo que apoiam este modelo.

Modelos mais complexos são aqueles que consideram o fluxo transitório dos blocos para as fracturas. Neste caso o fluxo através dos blocos é difusivo, i. é, descrito pela lei de Darcy e pela equação da continuidade, sendo dado pelo produto da condutividade hidráulica da matriz (bloco) pelo gradiente hidráulico na superfície dos blocos (Barker, 1985).

No caso de fluxo transitório dos blocos para as fracturas, é necessário especificar a geometria dos blocos. Normalmente são consideradas duas geometrias: uma em que blocos tabulares horizontais de extensão infinita alternam com fracturas - geometria tabular (fig. 2a), e outra em que existem três direcções de fracturas que individualizam blocos cúbicos, idealizados como esferas - geometria esférica (fig. 2b).

Entre outros autores que apresentaram modelos para a geometria tabular, contam-se Boulton & Streltsova (1977a, 1977b), Najurieta (1980) e Moench (1984). Entre os autores que apresentaram modelos com geometria esférica citam-se Najurieta (1980), Moench (1984).

Barker (1985) considera, ainda, uma terceira geometria, em que pressupõe a existência de duas direcções principais de fracturação de que resultam paralelepípedos de extensão infinita, idealizados como cilindros - modelo cilíndrico.

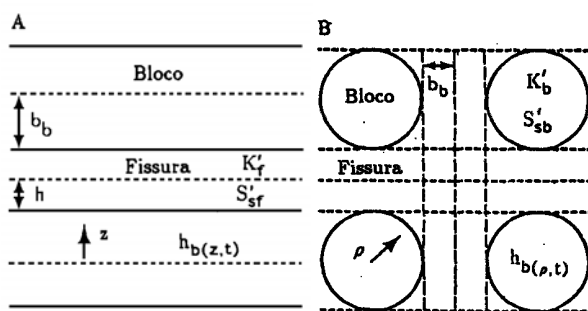


Fig. 2 - Representação esquemática dos modelos (a) tabular e (b) esférico, segundo Moench (1984).

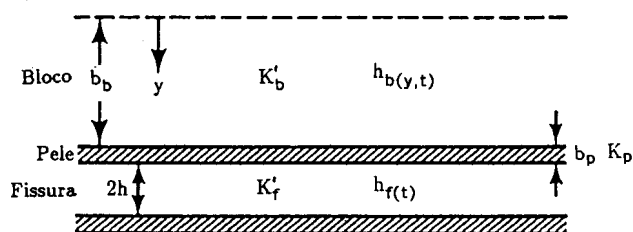


Fig. 3 - Representação esquemática de um bloco e uma fissura com pele de fractura, segundo Moench (1984).

Moench (1984) introduziu o conceito de pele de fractura, o que permitiu estabelecer uma ligação entre o regime de pseudo-equilíbrio, e o regime transitório dos blocos para as fracturas. A pele de fractura consiste numa película fina de material de permeabilidade inferior à dos blocos que reveste a superfície destes e que resulta da alteração da rocha ou da precipitação de minerais (fig. 3). Segundo o

mesmo autor esta pele impede o fluxo livre entre os blocos e as fracturas, retardando as contribuições de fluxo dos blocos e originando respostas de pressões similares àquelas preditas pelas condições de escoamento em regime de pseudo-equilíbrio.

PARÂMETROS HIDRÁULICOS

Tal como foi descrito por Gringarten (1982), define-se a condutividade hidráulica do sistema de fracturas pela relação:

$$K_f = K'_f \cdot V_f \quad (1)$$

e a condutividade hidráulica do sistema de blocos por:

$$K_b = K'_b \cdot V_b \quad (2)$$

onde K'_f é a condutividade hidráulica médias das fracturas, K'_b a condutividade hidráulica média dos blocos, V_f a razão entre o volume ocupado pelas fracturas e o volume total e V_b a razão entre o volume dos blocos e o volume total. A soma de V_f com V_b é igual à unidade. Como normalmente V_b é muito próximo da unidade $K_b \approx K'_b$.

A designação de condutividade hidráulica do sistema de fracturas tal como definida em (1) é vantajosa, uma vez que torna desnecessário especificar a condutividade hidráulica ou abertura de uma fractura individual (Moench, 1984). De forma a definir-se a transmissividade do sistema de fracturas (T_f) multiplica-se a sua condutividade hidráulica (K_f) pela espessura H do aquífero. Esta transmissividade do sistema de fracturas coincide com a transmissividade do aquífero, T , se considerarmos que o escoamento para o poço de produção provém somente das fracturas.

De forma idêntica o armazenamento específico do sistema de fracturas pode ser definido por:

$$S_{sf} = S'_{sf} \cdot V_f \quad (3)$$

e o armazenamento específico do sistema de blocos por

$$S_{sb} = S'_{sb} \cdot V_b \quad (4)$$

onde S'_{sf} representa o armazenamento específico médio das fracturas e S'_{sb} o armazenamento específico médio dos blocos. Os coeficientes de armazenamento do sistema de blocos e do sistema de fracturas obtêm-se multiplicando os respectivos armazenamentos específicos pela espessura do aquífero:

$$S_f = S_{sf} \cdot H$$

$$S_b = S_{sb} \cdot H$$

O efeito parietal de fractura (efeito de pele) é quantificado pela expressão:

$$S_F = \frac{K_b \cdot b_p}{K_p \cdot b_b} \quad (\text{Moench, 1984}) \quad (5)$$

onde K_p representa a condutividade hidráulica da pele de fractura, b_p a sua espessura média e b_b a espessura média dos blocos.

EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO

CONDIÇÕES GERAIS

Nos modelos seguidamente descritos consideram-se, salvo afirmação em contrário, as seguintes condições gerais:

- 1 - meio com porosidade dupla;
- 2 - aquífero confinado de extensão infinita;

- 3 - fluxo radial para o poço apenas através do sistema de fracturas;
- 4 - poço totalmente penetrante;
- 5 - caudal de extracção constante;
- 6 - matriz isótropa e homogénea;
- 7 - lei de Darcy aplicável a todo o sistema;
- 8 - fluido e rocha compressíveis.

A condição 3 admite-se como válida porque a permeabilidade dos blocos é normalmente muito baixa quando comparada com a permeabilidade das fracturas. Desta forma o volume de água que entra no poço, conduzido pelas fracturas é muito maior que o conduzido pelos blocos e a condutividade hidráulica do aquífero será a das fracturas. Este facto torna desnecessária a condição, pouco realista, colocada por alguns autores, p. ex. Boulton & Streltsova (1977b), do poço captar apenas nas fracturas.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ESCOAMENTO

A equação diferencial que descreve o fluxo no sistema de fracturas é a seguinte:

$$K_f \left(\frac{\partial^2 h_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_f}{\partial r} \right) = S_{sf} \frac{\partial h_f}{\partial t} + q_b \quad (6)$$

O termo q_b representa o caudal cedido pelos blocos às fracturas, por unidade de volume de aquífero, dependendo do tipo de fluxo considerado. No caso de regime de pseudo-equilíbrio dos blocos para as fracturas é dado pela equação:

$$q_b = -\alpha K_b (h_b - h_f) \quad (7)$$

e, no caso de regime transitório:

$$q_b = -A \frac{K_b}{b_b} \left(\frac{\partial h_b}{\partial z} \right)_{z=b_b} \quad (8)$$

sendo α um parâmetro geométrico que caracteriza os blocos, igual ao inverso do produto da distância do centro dos blocos à superfície dos mesmos pela espessura do aquífero e A a razão entre a área dos blocos e a área unitária do aquífero (Barker, 1985).

A equação da difusividade para os blocos é, para o modelo de pseudo-equilíbrio:

$$S_{sb} = \frac{\partial h_b}{\partial t} = q_b \quad (9)$$

Para o modelo transitório, as equações de escoamento nos blocos dependem da geometria considerada. No caso de blocos tabulares tem-se (Moench, 1984):

$$S_{sb} = \frac{\partial h_b}{\partial t} = -K_b \frac{\partial^2 h_b}{\partial z^2} \quad 0 < z \leq b_b \quad (10)$$

No caso de blocos esféricos:

$$S_{sb} = \frac{\partial h_b}{\partial t} = -K_b \left(\frac{\partial^2 h_b}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial h_b}{\partial \rho} \right) \quad 0 < \rho \leq b_b \quad (11)$$

E, finalmente, para o caso de blocos cilíndricos tem-se (Barker, 1985):

$$S_{sb} = \frac{\partial h_b}{\partial t} = -K_b \left(\frac{\partial^2 h_b}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h_b}{\partial \rho} \right) \quad 0 < \rho \leq b_b \quad (12)$$

CONDIÇÕES INICIAIS

$$h_f(r, 0) = h_0$$

$$h_b(r, y, 0) = h_0$$

onde h_0 é o nível piezométrico inicial e y é a coordenada generalizada para os blocos (igual a z no caso de blocos tabulares e igual a ρ no caso de blocos esféricos).

CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

$$h_f(\infty, t) = h_0$$

$$\frac{\partial h_b}{\partial z} = 0 \text{ para } z = 0 \text{ no caso de blocos tabulares}$$

CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PARTICULARES

Efeito de armazenamento no poço

O efeito de armazenamento no poço ocorre em poços de diâmetro finito, nos primeiros tempos de extracção, devendo-se ao facto do volume de água armazenado no poço provocar um atraso na cedência de água pela formação. O seu efeito faz-se sentir tanto no poço de produção como no poço de observação. A não consideração deste efeito conduz à subavaliação dos valores de transmissividade e à sobreavaliação dos valores de coeficiente de armazenamento. A parte da curva rebaixamentos vs tempo influenciada pelo efeito de armazenamento é rectilínea e de pendor unitário.

O efeito de armazenamento no poço pode ser caracterizado pelo coeficiente adimensional

$$W_D = \frac{C}{2\pi r_w^2 S_f}$$

onde C é um parâmetro relacionado com o armazenamento no poço, admitindo-se ser constante durante o ensaio. Este efeito pode ser devido quer à mudança do nível de água no poço quer à deformação do conjunto água/poço. No primeiro caso $C = \pi r_c^2$ em que r_c é o raio do poço na zona de rebaixamento. No segundo caso, $C = V_w \rho_w g C_{obs}$ em que V_w representa o volume de líquido na secção pressurizada do poço, ρ_w é a densidade da água, g a aceleração da gravidade e C_{obs} a compressibilidade observada do sistema água/poço (Moench, 1984).

O volume de água que o poço fornece do seu armazenamento por unidade de tempo é:

$$Q_w = -\pi r_c^2 \frac{\partial h_w}{\partial t}$$

e o caudal total extraído do poço é dado pela expressão:

$$Q = 2\pi r_w T \left(\frac{\partial h_f}{\partial r} \right)_{r=r_w} - \pi r_c^2 \frac{\partial h_w}{\partial t} \text{ com a condição inicial } h_w(0) = h_0$$

Efeito de pele no poço

O efeito de pele no poço manifesta-se por um acréscimo, ou decréscimo, do nível piezométrico na vizinhança do poço sendo devido à existência de uma zona envolvente (pele) caracterizada por permeabilidade e coeficiente de armazenamento diferentes dos da formação. A existência desta zona resulta do próprio processo de furação e pode ser devido à infiltração de lamas na formação, com consequente diminuição da permeabilidade (efeito de pele positivo) ou a fracturação da rocha que poderá ocasionar um aumento da permeabilidade (efeito de pele negativo).

O efeito de pele pode ser analisado matematicamente de duas formas: admitindo uma zona envolvente de espessura infinitesimal ou considerando a sua espessura (Novakowski, 1989). No primeiro caso despreza-se o armazenamento na pele sendo o seu efeito dado pela seguinte condição (Moench, 1984):

$$h_w = h_f - r_w S_w \frac{\partial h_f}{\partial r} \quad r = r_w$$

onde S_w é um factor adimensional que reflecte o efeito de pele. Aquela expressão liga o nível piezométrico da formação h_f ao nível de água no poço h_w por meio de um factor que reflecte a descida do nível piezométrico através da pele.

Efeito de pele de fractura

Devido à existência de uma pele de fractura de espessura finita, com armazenamento desprezável e permeabilidade baixa, o escoamento na interface bloco/fractura é perpendicular àquela, processando-se de acordo com a lei de Darcy. Na interface verifica-se a seguinte condição:

$$h_b = h_f - \frac{b_b S_F}{H} \frac{\partial h_b}{\partial y} \quad y = b_b$$

onde S_F é descrito por (5) e h_b é o nível piezométrico do bloco na superfície da pele. Para garantir a validade das soluções apresentadas neste trabalho é necessário que $b_p \ll b_b$.

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ESCOAMENTO

O processo normal para obter as soluções analíticas correspondentes aos diferentes modelos envolve a transformada de Laplace das equações originais e a sua inversão analítica para as condições iniciais e de fronteira específicas. Tal inversão implica, normalmente, o recurso a outros tipos de transformação e a solução final consiste quase sempre num integral impróprio, cuja função integranda

contém funções J_0 e Y_0 de Bessel. Estas soluções são de difícil solução numérica dado que a função integranda é oscilante convergindo lentamente.

Com o objectivo de evitar essas dificuldades a tendência actual é inverter numericamente a solução obtida no espaço de Laplace usando um dos vários algoritmos que para esse efeito têm sido propostos. Esta técnica, já utilizada pelos engenheiros do petróleo desde a década de 60, foi preconizada para a resolução de problemas de hidráulica de poços por Moench & Ogata (1981), Streltsova (1982) e Barker (1982).

O algoritmo de Stehfest (1970), dada a sua simplicidade e exactidão, tem sido o mais utilizado pelos diferentes autores.

SOLUÇÕES PARA O MODELO PSEUDO-ESTACIONÁRIO

As soluções para problemas de escoamento em meios com porosidade dupla, tendo como modelo subjacente o pseudo-estacionário, surgiram na década de sessenta.

Barenblatt *et al.* (1960) forneceram soluções para o caso de um aquífero drenado por uma galeria e para o caso de bombeamento a caudal constante por um poço de diâmetro infinitesimal. De entre as hipóteses de base admitidas destacam-se: blocos de tamanho e forma irregulares e variação do volume de água, devida à compressibilidade das fracturas, desprezável.

Warren & Root (1963) consideram a cedência de água devida à compressibilidade das fracturas, fornecendo uma solução para os rebaixamentos no poço de extracção que tem em conta a anisotropia do meio.

Kazemi *et al.* (1969) usando os mesmos pressupostos dos autores anteriores, fornecem uma solução para o rebaixamento num piezómetro. Streltsova

(1976) fornece soluções para o rebaixamento em piezômetros nas fracturas e nos blocos e generaliza as soluções para aquíferos cujas fracturas estão preenchidas por depósitos de permeabilidade mais baixa do que a dos blocos.

Mavor & Cinco (1979) fornecem soluções que têm em conta o armazenamento no poço e o efeito de pele de poço.

Finalmente Moench (1984) modifica as soluções anteriormente propostas incorporando o efeito de pele de fractura.

SOLUÇÃO GERAL

A solução geral é, para o poço de extracção:

$$\bar{s}_{wD} = \frac{2[K_0(x) + xS_w K_1(x)]}{p\{pW_D[K_0(x) + xS_w K_1(x)] + xK_1(x)\}} \quad (14)$$

e, para um piezómetro:

$$\bar{s}_D = \frac{2K_0(r_D x)}{p\{pW_D[K_0(x) + xS_w K_1(x)] + xK_1(x)\}} \quad (15)$$

onde:

$$\bar{s}_{wD} = 4\pi T_f \bar{s}_w / Q, \text{ rebaixamento adimensional no poço} \quad (16)$$

$$\bar{s}_D = 4\pi T_f \bar{s} / Q, \text{ rebaixamento adimensional num piezómetro} \quad (17)$$

$$W_D = \frac{r_c^2}{2r_w^2 S}$$

$$x = \sqrt{(p + \bar{q}_D)} \quad (18)$$

$$r_D = r / r_w$$

K_0 e K_1 são funções modificadas de Bessel

p é o parâmetro de Laplace, adimensional

r_c é o raio da parte armazenante do poço

r_w é o raio da parte drenante do poço

S_w é o parâmetro que traduz o efeito parietal do poço, adimensional

Em função da geometria considerada,

$$\bar{q}_D = \frac{\gamma^2 m^2}{1 + S_F m^2} \text{ para geometria tabular e} \quad (19)$$

$$\bar{q}_D = \frac{3\gamma^2 m^2}{3 + S_F m^2} \text{ para geometria esférica} \quad (20)$$

$$\text{onde, } \gamma = \frac{r_w}{b_b} \sqrt{K_b / K_f}$$

$$m = \frac{\sqrt{\sigma p}}{\gamma}$$

$$\sigma = S_b / S_f$$

CASOS PARTICULARES

a) *Ausência de pele de fractura*. Neste caso

$$\bar{q}_D = \frac{p}{1/\sigma + p/\lambda} \quad (21)$$

onde $\lambda = \alpha(K_b/K_f)r_w^2$. Esta solução corresponde à que foi proposta por Mavor & Cinco (1979).

b) *Poço com diâmetro finito mas com capacidade de armazenamento desprezável.*

Corresponde ao modelo de Warren & Root (1963). A solução para o rebaixamento no poço de extracção obtém-se a partir de (14) fazendo S_w e W_D nulos.

c) *Poço de diâmetro infinitesimal (poço linear).* Neste caso a equação geral é:

$$\bar{s}_D = \frac{2K_0(x)}{p} \quad (22)$$

com \bar{q}_D dado pelas expressões (19) ou (20), consoante se considere geometria tabular ou esférica (Moench, 1984) ou, no caso de ausência de pele de fractura, dado pela expressão (21). Este último caso corresponde à solução de Kazemi *et al.* (1969).

SOLUÇÕES PARA O MODELO TRANSITÓRIO

O escoamento em meios com porosidade dupla admitindo fluxo transitório entre blocos e fracturas foi abordado pela primeira vez por Kazemi (1969) que, considerando geometria tabular, usou um modelo de diferenças finitas para simular o escoamento para um poço.

As soluções analíticas surgiram na década seguinte com os trabalhos de Boulton & Streltsova (1977a, 1977b), Najurieta (1980), Moench (1984), Barker (1985), e outros.

Também Boulton & Streltsova (1977a, 1977b) adoptaram a geometria tabular nos seus trabalhos.

Najurieta (1980) fornece solução não só para a geometria referida mas ainda para o caso de blocos cúbicos. No entanto, invocando a dificuldade em obter soluções exactas, possíveis de utilizar, fornece soluções aproximadas. Estas são

obtidas resolvendo um conjunto de equações diferenciais estabelecidas por de Swaan (1976).

Como já foi referido, a utilização da técnica de inversão numérica das transformadas de Laplace da função de poço permite ultrapassar as dificuldades apontadas por Najurieta (1980) e obter soluções exactas.

Um outro aspecto a considerar dentro da geometria tabular é o tipo de escoamento dentro dos blocos. Assim, tem-se os modelos em que se admite apenas fluxo vertical do centro dos blocos para as fracturas e fluxo horizontal destas para o poço (Boulton & Streltsova, 1977b, Najurieta, 1980 - fig. 4) e os que admitem fluxo vertical dos blocos para as fracturas e horizontal das fracturas e dos blocos para o poço (Boulton & Streltsova, 1977a).

As soluções gerais, para o rebaixamento no poço de extracção e num piezómetro, no modelo transitório são as mesmas do modelo pseudo-estacionário, equações (14) e (15).

Em função da geometria considerada,

$$\bar{q}_D = \frac{\gamma^2 \cdot m \cdot \tanh(m)}{1 + S_F \cdot m \cdot \tanh(m)} \text{ para a geometria tabular ou} \quad (23)$$

$$\bar{q}_D = \frac{3\gamma^2 \cdot m \cdot [\coth(m) - 1]}{1 + S_F \cdot m \cdot [\coth(m) - 1]} \text{ para a geometria esférica} \quad (24)$$

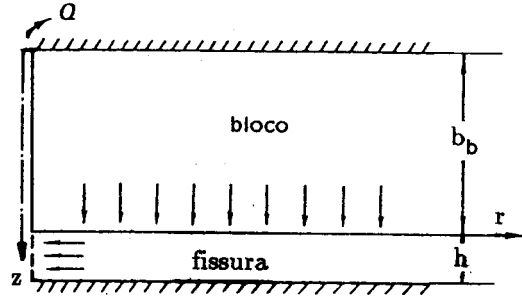


Fig. 4 - Esquema do escoamento dos blocos para as fracturas e destas para poço. Boulton & Streltsova (1977b).

O rebaixamento nos blocos obtém-se a partir das expressões (Moench, 1984):

$$\bar{s}_b = \frac{\bar{s}_f}{1 + S_F m \tanh(m)} \frac{\cosh(z_D m)}{\cosh(m)} \text{ para a geometria tabular ou } (25)$$

$$\bar{s}_b = \frac{\bar{s}_f}{\rho_D \{1 + S_F [m \coth(m) - 1]\}} \frac{\sinh(\rho_D m)}{\sinh(m)} \text{ para a esférica } (26)$$

onde \bar{s}_f é o rebaixamento transformado nas fracturas, $z_D = z/b_b$ e $\rho_D = \rho/b_b$.

CASOS PARTICULARES

a) *Ausência de pele de fractura.* Neste caso \bar{q}_D obtém-se pelas expressões (23) e (24) fazendo $S_F = 0$

b) *Poço com diâmetro finito sem efeito parietal nem efeito de pele de fractura e geometria cilíndrica* (Barker, 1985).

As equações são obtidas a partir das equações gerais (14) e (15) fazendo $S_w = 0$ e

$$\bar{q}_D = 2\gamma^2 m \frac{I_1(m)}{I_0(m)} \quad (27)$$

c) *Poço com diâmetro finito sem efeito parietal nem efeito de pele de fractura e considerando o coeficiente de armazenamento das fracturas desprezável* (Barker, 1985).

As equações são obtidas a partir das soluções gerais (14) e (15) fazendo $S_w = 0$ e

$$x = \sqrt{p \frac{\tanh(m)}{m}} \text{ para geometria tabular} \quad (28)$$

$$x = \sqrt{\frac{3p}{m^2} [m \cdot \coth(m) - 1]} \text{ para geometria esférica e} \quad (29)$$

$$x = \sqrt{\frac{2p}{m} \frac{I_1(m)}{I_0(m)}} \text{ para geometria cilíndrica} \quad (30)$$

d) *Poço de diâmetro infinitesimal (poço linear)* (Moench, 1984)

As equações são obtidas a partir da solução geral (22). Em função da geometria considerada \bar{q}_D é dado pelas equações (23) ou (24) com

$$\gamma = \frac{r}{b_b} \sqrt{K_b / K_f} \quad (31)$$

O rebaixamento nos blocos obtém-se a partir das expressões (25) ou (26).

e) *Poço de diâmetro infinitesimal (poço linear) sem efeito de pele de fractura.*

As equações são obtidas a partir da solução geral (22). Em função da geometria considerada \bar{q}_D é dado pelas equações (23) ou (24), com $S_F = 0$ e γ definido como no caso anterior.

O rebaixamento nos blocos para a geometria tabular é dado pela expressão (Moench & Ogata, 1984):

$$\bar{s}_b = \bar{s}_f [\cosh(m \cdot z / b_b) - \tanh(m) \cdot \sinh(m \cdot z / b_b)] \quad (32)$$

As soluções para a geometria tabular correspondem aos modelos de Boulton & Streltsova (1977b). A solução para o modelo de geometria esférica foi dada por Moench (1984).

f) *Aquífero livre*

O único trabalho de que temos conhecimento que fornece soluções para um aquífero livre fissurado é o de Boulton & Streltsova (1978). As condições gerais deste modelo são as já referidas, com excepção da condição 2. Neste modelo considera-se uma geometria tabular, poço linear e ausência de pele de fractura.

As principais diferenças em relação aos modelos estabelecidos para aquíferos confinados derivam da espessura saturada ser variável e haver cedência de água por esvaziamento de poros. Por esse motivo há necessidade de introduzir um parâmetro suplementar, a cedência específica (S_y).

A solução no espaço de Laplace é dada pela expressão (22) com

$$\bar{q}_D = \frac{\alpha_1 S_b r^2 p}{T_p + r^2 S_f \alpha_1} + \frac{\alpha_2 S_y r^2 p}{T_p + r^2 S_f \alpha_2} \quad (33)$$

onde $\alpha_1 = \frac{\pi^2 \kappa_2}{4b_b}$, $\alpha_2 = 3K_f / S_y H$, κ_2 é a difusividade hidráulica dos blocos.

CURVAS TIPO

Como se pode deduzir a partir das equações de rebaixamento, estas dependem de vários parâmetros hidráulicos e geométricos, sendo possível gerar uma grande diversidade de curvas jogando com os valores desses parâmetros. Um problema que aqui se coloca é o da não unicidade da solução obtida, pois a partir de um conjunto distinto de parâmetros é possível obter curvas idênticas. Este torna-se, portanto, um factor a ter em conta quando se faz a interpretação de ensaios.

Por outro lado, o conhecimento exacto do modelo a utilizar também é importante, pelo menos no que refere à geometria do meio, uma vez que a partir de modelos diferentes é igualmente possível obter curvas semelhantes. Por exemplo, um modelo de esferas apresenta uma curva semelhante à do modelo tabular quando o semi-diâmetro dos blocos esféricos é três vezes a semi-espessura dos blocos tabulares (fig. 5).

POÇO SEM ARMAZENAMENTO

No início do bombeamento, o caudal extraído provém fundamentalmente do fluido armazenado nas fracturas e, a prazo mais ou menos longo, do fluido cedido pelos blocos e fracturas. Por essa razão, as curvas rebaixamento vs tempo partem inicialmente da curva de Theis com argumento $u = S_f \cdot r^2 / 4Tt$ e tendem, para tempos de extracção mais longos, para a curva de Theis com argumento $u = (S_f + S_b) \cdot r^2 / 4Tt$, estando estas curvas desfasadas horizontalmente de um factor σ (fig. 5).

No caso de regime de pseudo-equilíbrio dos blocos para as fracturas, existe um tempo intermédio em que o volume de água cedido pelos blocos é igual ao

extraído, resultando daí um patamar mais ou menos horizontal que faz a ligação das curvas de Theis.

No caso de regime transitório dos blocos para as fracturas a transição dos primeiros para os últimos tempos faz-se de um modo gradual, pelo que a curva tipo afasta-se da primeira curva de Theis logo nos primeiros instantes ou não se chega a observar essa primeira parte.

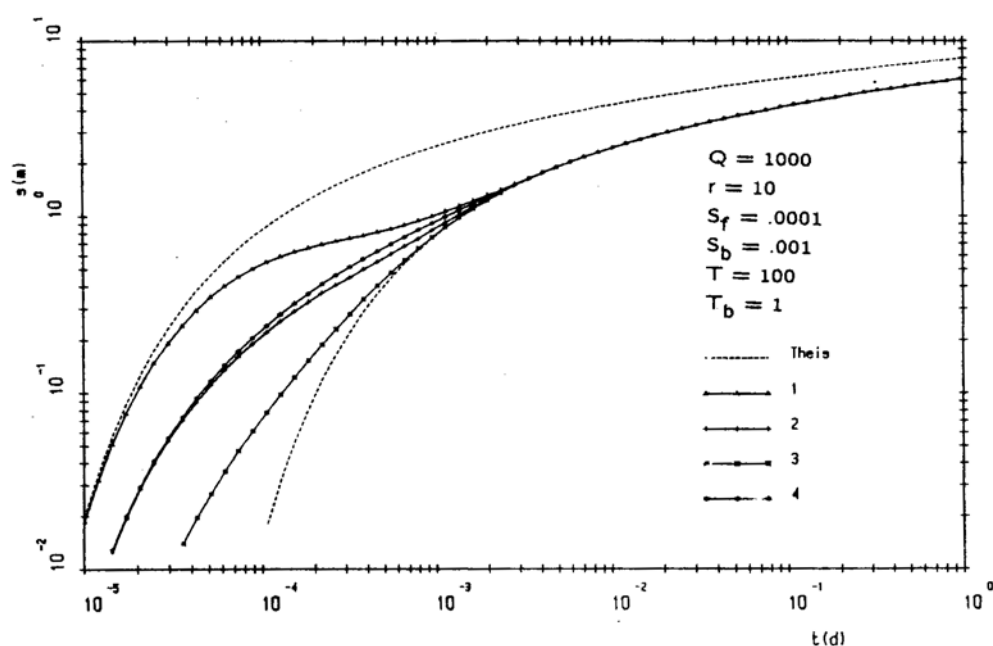


Fig. 5 - Comparação entre as curvas tipo para poço linear: 1- modelo de Kazemi *et al.* (1969) com $\alpha = 1$; 2 - modelo de Boulton & Streltsova (1977) com $b_b = 1$; 3 - modelo de Moench (1984) com $b_b = 1$; 4- idem, com $b_b = 3$.

No caso de geometria tabular os rebaixamentos iniciais são superiores aos que se verificam para a geometria esférica mantendo os mesmos parâmetros hidráulicos. No entanto, as duas curvas acabam por coincidir a partir de certos valores de tempo.

Moench (1984) demonstrou que os rebaixamentos para um modelo esférico são praticamente iguais aos de um modelo tabular se o seu valor de γ for três vezes menor do que o deste último, o que corresponde a uma condutividade hidráulica dos blocos nove vezes menor.

POÇO COM ARMAZENAMENTO

No caso de poço de produção com armazenamento, o caudal extraído provém, inicialmente, do seu armazenamento, sendo os rebaixamentos observados directamente proporcionais ao tempo de extracção. Assim, as curva-tipo apresentam nos primeiros tempos um troço rectilíneo de pendor aproximadamente unitário com rebaixamentos inferiores aos da curva de Theis, para a qual tendem nos tempos finais, tanto mais tarde quanto maior o armazenamento no poço (maior r_c , maior W_D).

O efeito de armazenamento no poço tende a atenuar-se com a distância deixando de se observar a partir de certo valor desta.

EFEITO DE PELE NO POÇO

Este efeito manifesta-se de forma diferente consoante o rebaixamento é medido no poço de produção ou num piezómetro. Se a medição for feita no poço de produção verifica-se que quanto maior o valor de S_w maior é o desnível entre o potencial hidráulico no poço e na zona envolvente e maiores são os rebaixamentos nele observados. Para valores de S_w elevados os rebaixamentos no poço tendem a estabilizar gerando-se um fluxo em regime quase estacionário através da região parietal (fig. 6).

Num piezómetro, os rebaixamentos relacionam-se inversamente com S_w apresentando as curvas-tipo um troço inicial rectilíneo e tendendo, para tempos de extracção longos, para a curva de Theis (fig. 7).

EFEITO DE PELE DE FRACTURA

O efeito de pele de fractura manifesta-se através de um ressalto do potencial hidráulico na face dos blocos. Quanto mais elevado for o parâmetro de pele de fractura, maior será o rebaixamento medido nas fracturas (fig. 8) e menor será o rebaixamento medido nos blocos (fig. 9).

No caso de regime transitório dos blocos para as fracturas verifica-se que quanto maior for o parâmetro de pele de fractura maior é o tempo necessário para passar da primeira para a segunda curva assintótica de Theis. Esta passagem faz-se por um período de regime de equilíbrio de duração proporcional ao valor de S_F . No caso de valores elevados deste parâmetro, as curvas apresentam uma forma semelhante à das curvas de regime de pseudo-equilíbrio dos blocos para as fracturas.

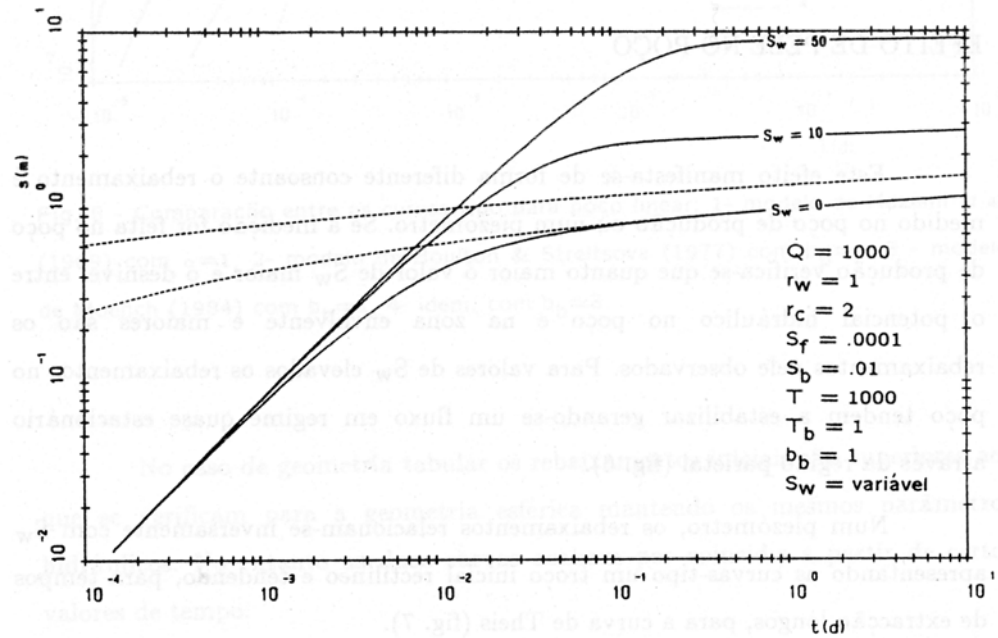


Fig. 6 - Curvas rebaixamento/tempo mostrando a relação entre o efeito de pele do poço e os rebaixamentos observados no poço, admitindo regime transitório dos blocos para as fissuras (modelo de Moench, 1984).

Moench (1984) demonstra que as curvas-tipo que se obtém em regime transitório com efeito de pele de fractura são semelhantes às obtidas para regime de pseudo-equilíbrio com o mesmo efeito quando

$$t \geq 10 \frac{b_b^2}{K_b/S_{sb}}$$

Com o aumento de S_F verifica-se que as curvas de regime transitório se aproximam das curvas de regime de pseudo-equilíbrio geradas com o mesmo valor daquele parâmetro. Isto deve-se ao facto de grande parte da queda do potencial hidráulico do bloco ocorrer através da pele de fractura, pelo que pode ser

considerado aproximadamente constante no interior do bloco. O escoamento passa então a fazer-se segundo o previsto pelo modelo de pseudo-equilíbrio. Para tempos elevados todas as curvas se reduzem ao caso de regime de pseudo-equilíbrio.

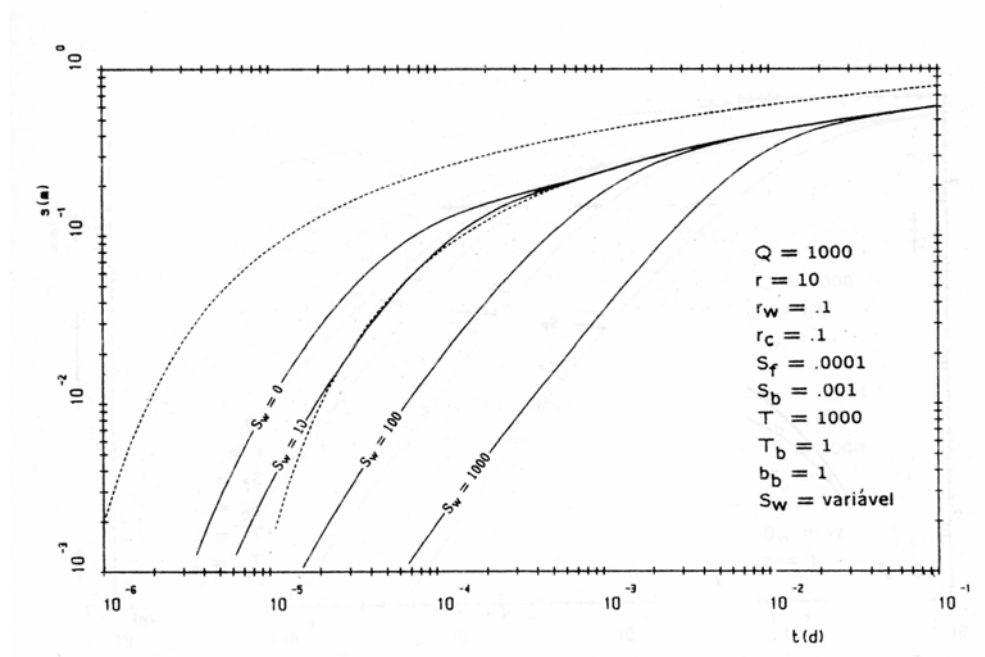


Fig. 7 - Curvas rebaixamento/tempo mostrando a relação entre o efeito de pele do poço e os rebaixamentos observados num piezómetro, admitindo regime transitório dos blocos para as fissuras (modelo de Moench, 1984).

No caso de regime transitório, quando $S_F = 0$, a projecção em papel semilogarítmico dos rebaixamentos vs tempo durante a transição dos primeiros para os últimos tempos, mostra uma linha recta cujo pendor é metade do da recta obtida para os últimos tempos (correspondente à curva de Theis). Na presença de pele de fractura ($S_F \neq 0$) também pode aparecer uma linha recta mas o seu pendor poderá ser muito inferior a metade do da linha recta correspondente aos últimos

tempos. Neste caso, uma deficiente interpretação da curva obtida, poderá conduzir a valores de transmissividade exagerados.

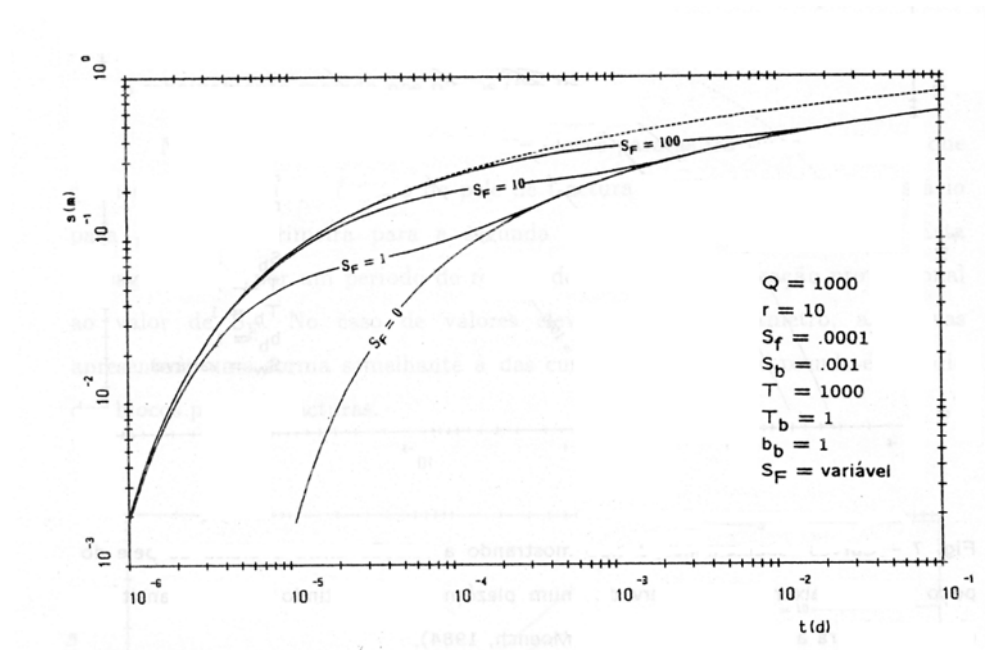


Fig. 8 - Curvas rebaixamento/tempo para diferentes valores do parâmetro de pele de fratura. Modelo de Moench (1984) para regime de pseudo-equilíbrio, poço linear e rebaixamento num piezômetro nas fracturas.

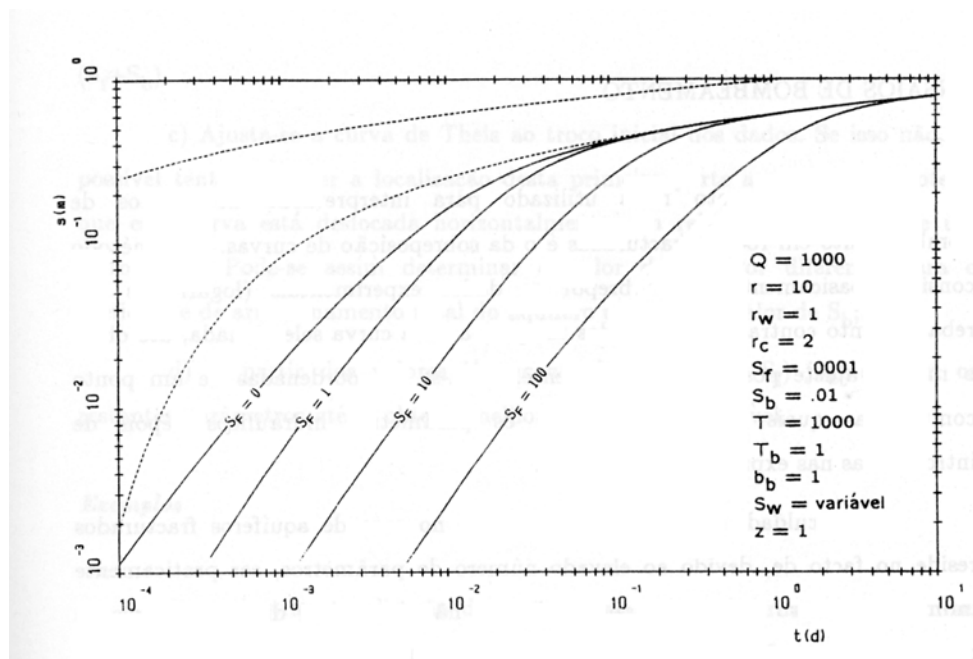


Fig. 9 - Curvas rebaixamento/tempo para diferentes valores do parâmetro de pele de fratura. Modelo de Moench (1984) para regime transitório dos blocos para as fraturas, poço com armazenamento e piezômetro nos blocos.

CARACTERIZAÇÃO HIDRÁULICA DOS AQUÍFEROS FRACTURADOS

A caracterização hidráulica consiste em determinar os parâmetros de campo que intervêm nas equações de rebaixamento. Esta identificação é conhecida pelo "problema inverso", pois trata-se de, a partir das respostas de um aquífero a determinados impulsos, avaliar os parâmetros físicos que permitem um melhor ajuste das mesmas a um dado modelo teórico.

A caracterização faz-se sobretudo recorrendo a ensaios de bombeamento ou a outros tipos de ensaios, nomeadamente ensaios pontuais (*slug tests*).

ENSAIOS DE BOMBEAMENTO

O procedimento mais utilizado para interpretação de ensaios de bombeamento em rochas fracturadas é o da sobreposição de curvas. Este método consiste, basicamente, em sobrepor os dados experimentais (logarítmos dos rebaixamento contra logarítmos dos tempos) a uma curva seleccionada, até obter o melhor ajuste possível. Seguidamente, lêem-se as coordenadas de um ponto comum, as quais permitem calcular os parâmetros hidráulicos depois de introduzidas nas expressões apropriadas.

A dificuldade de utilizar este método no caso de aquíferos fracturados reside no facto de, devido ao elevado número de parâmetros, ser praticamente infinito o número de combinações, pelo que não é possível dispôr de jogos de curvas suficientes para poder interpretar correctamente os ensaios. Uma solução consiste em dispôr de um programa capaz de gerar curvas-tipo a partir de modelos de escoamento e de conjuntos de parâmetros seleccionados pelo utilizador. Oliveira (1990) elaborou um programa que permite a projecção, no monitor, dos dados de campo e posterior sobreposição de curvas geradas a partir de um conjunto de parâmetros seleccionáveis pelo utilizador.

O procedimento consiste nos seguintes passos:

a) em função do conhecimento das características da captação, da geologia do local e da geometria dos blocos, selecciona-se o modelo adequado. No caso de conhecimento insuficiente, pode-se seleccionar o modelo a partir da própria configuração da curva experimental;

b) Ajusta-se a curva de Theis ao troço final dos dados. Deste modo determina-se a transmissividade das fracturas o que corresponde, em geral, à transmissividade do aquífero e o coeficiente de armazenamento total do aquífero ($S_f + S_b$).

c) Ajusta-se a curva de Theis ao troço inicial dos dados. Se isso não for possível tenta-se prever a localização desta primeira parte assintótica. Note-se que esta curva está deslocada horizontalmente, em relação à primeira, de um factor $1/\sigma$. Pode-se assim determinar o valor de S_f . Por diferença para o coeficiente de armazenamento total do aquífero obtém-se o valor de S_b ;

d) A partir dos valores já encontrados (T , S_b e S_f) joga-se com os restantes parâmetros até se obter o melhor ajustamento possível.

Exemplos

Para ilustrar a aplicação da metodologia acima descrita apresentam-se, seguidamente, os resultados da interpretação de três ensaios efectuados na região de. Paderne (Algarve Central). Os ensaios foram realizados em captações de pequeno diâmetro implantadas na Unidade Tor-Silves, constituída fundamentalmente por dolomitos e calcários dolomíticos do Liásico e Dogger. Esta unidade encontra-se confinada nalgumas zonas por terraços ou outros depósitos impermeáveis.

Os métodos usados foram os de Boulton & Streltsova (1977b), no caso de aquífero confinado (fig. 10), e Boulton & Streltsova (1978) no caso de aquífero livre (fig. 11). Os dados de campo e os resultados obtidos constam das referidas figuras.

SIMBOLOS UTILIZADOS

A barra indica que se trata de uma variável transformada. São usados os seguintes índices: b para os blocos, f para as fracturas, w para o poço de produção, p para a pele de fractura.

A razão entre a área dos blocos e a área unitária do aquífero

b_b semi-espessura ou semi-diâmetro médio dos blocos

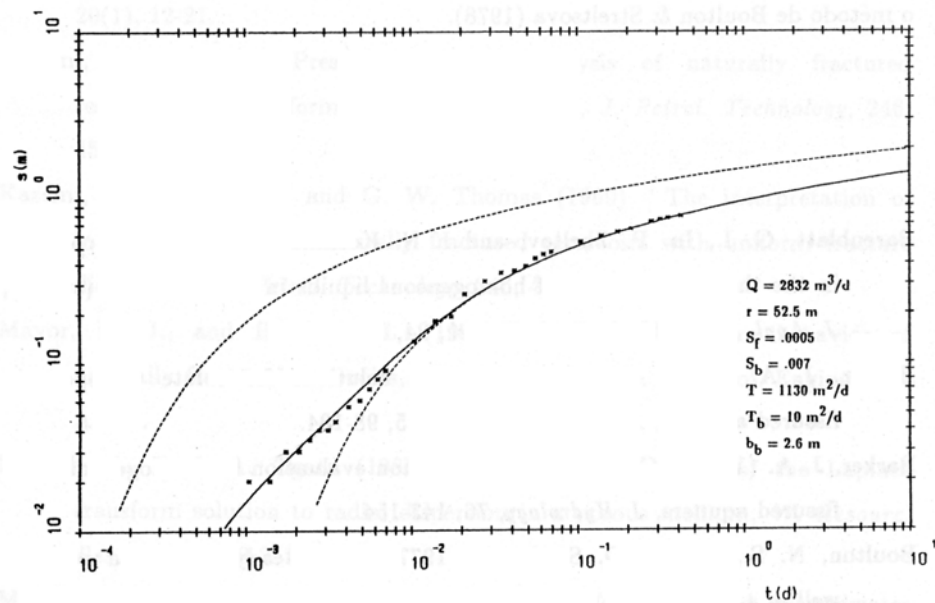


Fig. 10 - Exemplo de interpretação de um ensaio realizado na Unidade Tôr-Silves utilizando o método de Boulton & Streltsova (1977b).

b_p	espessura média da pele de fractura
C	volume de água armazenado no poço
H	espessura do aquífero
h_b	nível piezométrico no bloco
h_f	nível piezométrico nas fracturas
h_w	nível piezométrico no poço
h_o	nível piezométrico inicial
K_f	condutividade hidráulica do sistema de fracturas
K'_f	condutividade hidráulica média das fracturas
K_p	condutividade hidráulica da pele de fractura

$$m = \frac{\sqrt{\sigma p}}{\gamma}$$

p	parâmetro de Laplace
Q	caudal de extracção
Q _w	caudal proveniente do armazenamento no poço
q _b	caudal cedido pelos blocos às fracturas, v. expressão (7)
r	distância radial ao poço produtivo
r _c	raio do poço na zona revestida
r _D = r/r _w	
r _w	raio do poço na zona drenante
S _F	parâmetro de pele de fractura
S _{sb}	armazenamento específico do sistema de blocos
S' _{sb}	armazenamento específico médio dos blocos
S _{sf}	armazenamento específico do sistema de fracturas
S' _{sf}	armazenamento específico médio das fracturas
S _w	parâmetro de pele de poço
s	rebaixamento no piezómetro
s _w	rebaixamento no poço
\bar{s}_D	rebaixamento adimensional no piezómetro, v. expressão (17)
\bar{s}_{wD}	rebaixamento adimensional no poço, v. expressão (16)

T	transmissividade do aquífero
T _b	transmissividade dos blocos
T _f	transmissividade do sistema de fissuras
t	tempo de extração
W _D	parâmetro que caracteriza o efeito de armazenamento no poço
y	coordenada generalizada para os blocos
z	distância vertical ao centro do bloco
V _f	razão entre o volume de fracturas e o volume total
V _b	razão entre o volume de blocos e o volume total
α	parâmetro geométrico que caracteriza os blocos
ρ	distância do centro do bloco à fractura
$\lambda = \alpha(K_b/K_f)r_w^2$	
$\sigma = S_b/S_f$	

BIBLIOGRAFIA

- Barenblatt, G. I, Iu. P. Zheltov, and I. N. Kochina (1960) - Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata), *J. Appl. Math. Mech. Engl. Transl.*, 24, 1286-1303.
- Barker, J. A. (1982) - Laplace transform solutions for solute transport in fissured aquifers, *Adv. Water Resour.*, 5, 98-104.
- Barker, J. A. (1985) - Generalized well function evaluation for homogeneous and fissured aquifers, *J. Hydrology*, 76, 143-154.

Boulton, N. S., and T. D. Streltsova (1977a) - Unsteady flow to a pumped well in a two-layered water bearing formation, *J. Hydrology*, 35, 245-256.

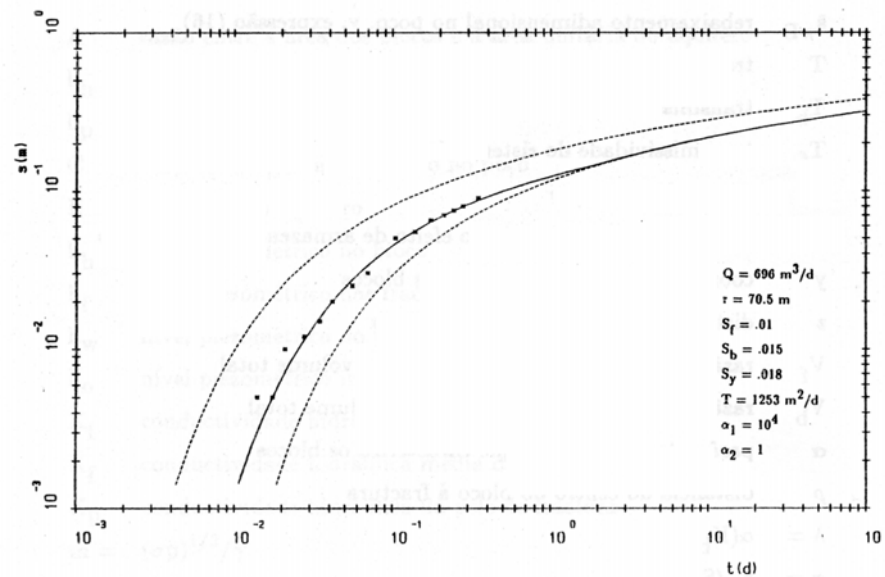


Fig. 11 - Interpretação de um ensaio realizado na Unidade Tor-Silves, utilizando o método de Boulton & Streltsova (1978).

Boulton, N. S., and T. D. Streltsova (1977b) - Unsteady flow to a pumped well in a fissured water bearing formation, *J Hydrology*, 35, 257-270.

Boulton, N. S., and T. D. Streltsova-Adams (1978) - Unsteady flow to a pumped well in an unconfined fissured aquifer, *J. Hydrology*, 37, 349-363.

de Marsily, G. (1985) - Flow and Transport in Fractured Rocks: Connectivity and Scale Effect, Symposium of the Hydrogeology of Rocks of Low Permeability, *IAH Memoires*, vol. XVII, part 1, 267-277.

de Swaan, O., A. (1976) - Analytic solution for determining naturally fractured reservoir properties by well testing, *J. Petrol. Technology*, 261, 117-122.

- Gringarten, A. C. & Ramey, H. J. (1974) - Unsteady state pressure distributions created by a well with a single horizontal fracture, partial penetration or restricted entry, *Soc. Petr. Eng. J., AIME*, Dallas, 413426.
- Jenkins, D. N. & Prentice, J. K. (1982), Theory for aquifer test analysis in fractured rocks under linear (nonradial) flow conditions, *Ground Water*, 20(1), 12-21.
- Kazemi, H. (1969) - Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, *J. Petrol. Technology*, 246, 451-462.
- Kazemi, H., M. S. Seth, and G. W. Thomas (1969) - The interpretation of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, *J. Petrol. Technology*, 246, 463-472.
- Mavor, M. J., and H. Cinco L. (1979) - Transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs, *Pap. SPE 7977*, Soc. of Petrol. Engineers of AIME.
- Moench, A. F. & A. Ogata (1981) - A numerical inversion of the Laplace transform solution to radial dispersion in a porous medium, *W. Resour. Res.*, 17(1), 250-252.
- Moench, A. F. (1984) - Double-porosity models for a fissured groundwater reservoir with fracture skin, *Water Resour. Res.*, 20 (7), 831-846.
- Najurieta, H. L. (1980) - A theory for pressure transient analysis in naturally fractured reservoirs, *J. Petrol. Technology*, 1241-1250.
- Novakowski, K. S. (1989) - A composite analytical model for analysis of pumping test affected by well bore storage and finite thickness skin, *W. Resour. Res.*, 25 (9), 1937-1946
- Oliveira, M. M. (1990) - AQFIS - Um programa para gerar curvas rebaixamento/tempo para aquíferos fracturados, *Geolis, Rev. de Geologia Aplicada e do Ambiente*, vol. IV(1 e 2), 97-107.
- Pinto, A. D. (1987) - Ensaios de bombagem em rochas fracturadas, *Estudos, Notas e Trabalhos, DGGM*, 29, 85-160.

- Pirson, S. J. (1953) - Performance of fractured oil reservoirs, *Bull. Amer. As. Petrol. Geol.*, 37(2), 232-244.
- Stehfest, H. (1970) - Numerical inversion of Laplace transforms, *Commun. ACM*, 13(1), 47-49.
- Streltsova, T. D. (1976) - Hydrodynamics of groundwater flow in a fractured formation, *Water Resour. Res.*, 12 (3), 405-414.
- Streltsova, T. D. (1982) - Well hydraulics in vertically heterogenous formations, *J. Hydraul. Div., ASCE*, 108 (HY11), 1311-1327.
- Warren, J. E., and P. J. Root (1963) - The behavior of naturally fractured reservoirs, *J. Petrol. Technology*, 228, 3 (3), 245-255.