

**Almeida, C., T. Ribeiro e M. M. Oliveira (1979)**

**Interpretação Automática de Ensaio de Bombagem**

Geonovas, número especial 3, p. 64-82.

## INTERPRETAÇÃO AUTOMÁTICA DE ENSAIOS DE BOMBAGEM

**Carlos Almeida \*, Teresa Ribeiro \*\*, Manuel M. Oliveira \*\*\***

### RESUMO

Os ensaios de bombagem têm sido utilizados, desde há muito, pelos hidrogeólogos para obter um melhor conhecimento das características dos aquíferos onde são executados e também das próprias captações.

Acompanhando a grande expansão dos meios de cálculo, nomeadamente a dos computadores pessoais, surgiram numerosos trabalhos propondo metodologias de interpretação automatizada dos ensaios de bombagem. Na maioria desses trabalhos a metodologia seguida consiste em minimizar, através de várias técnicas, uma função objectivo dada pelo somatório dos quadrados dos desvios entre os rebaixamentos observados e os calculados, introduzindo nas expressões analíticas apropriadas a cada caso, estimativas dos parâmetros hidráulicos dos quais dependem.

Neste trabalho apresenta-se a fundamentação básica de algumas das técnicas utilizadas e dão-se alguns exemplos de programas que foram desenvolvidos para interpretar ensaios em condições variadas.

### 1. INTRODUÇÃO

Os ensaios de bombagem têm sido uma metodologia usada tradicionalmente pelos hidrogeólogos para obter informações quer sobre os aquíferos quer sobre captações neles implantadas. As informações que esta metodologia pode fornecer são essencialmente de dois tipos: em primeiro lugar os ensaios permitem quantificar alguns parâmetros hidráulicos dos aquíferos na vizinhança da captação onde se realizam e em segundo lugar fornecem dados relativos às próprias captações, dados esses que permitem avaliar a sua eficiência (razão entre o rebaixamento teórico e o observado), quando da sua construção, ou mudanças da mesma devido a processos de desenvolvimento natural, corrosões, incrustações, etc.

Em relação ao local onde se realizam as observações dos rebaixamentos, os ensaios podem ser de dois tipos: observações na própria captação de produção ou observações num piezómetro, ou captação que funciona como tal, diferente da captação em actividade. Os ensaios do primeiro tipo são os únicos que fornecem dados que permitem avaliar a eficiência da captação sendo, pelo contrário, menos úteis para caracterizar as propriedades hidráulicas dos aquíferos.

Quanto ao caudal, os ensaios de bombagem podem ser basicamente de dois tipos: de caudal constante ou de caudal variável, podendo este variar de forma mais ou menos regular (relacionado com o funcionamento da bomba de extracção) ou de forma brusca (ensaios escalonados).

A interpretação dos ensaios de bombagem faz-se pelo ajuste dos dados de tempo/rebaixamento

---

\*Departamento de Geologia da FCUL. Centro de Geologia da Univ. de Lisboa (INIC).

\*\*Colaboradora da Partex

\*\*\*Bolseiro da JNICT.

## A INFORMÁTICA NA GEOLOGIA

a valores teóricos obtidos pela resolução das equações de fluxo adequadas ao aquífero em análise. A este tipo de solução chama-se resolução do problema inverso, i. é., a partir de dados experimentais procura-se conhecer os valores dos parâmetros hidráulicos do aquífero que lhes deram origem.

Antes da difusão dos computadores, os ensaios eram interpretados mediante o ajuste do conjunto dos dados experimentais a curvas teóricas, ou curvas padrão, ou usando aproximações logarítmicas.

O método de ajustamento de curvas implica projectar os dados em papel logarítmico e sobrepor manualmente estes às curvas padrão. Por vezes o critério para seleccionar o melhor ajustamento é bastante subjectivo, dependendo, em grande parte, da experiência do operador.

Actualmente, com o desenvolvimento da informática e uso comum dos computadores pessoais, basta elaborar ficheiros com os dados experimentais para, mediante a utilização do programa adequado, obter os parâmetros necessários à caracterização do aquífero e/ou captação.

Com a interpretação automática de ensaios de bombagem consegue-se obter uma caracterização dos aquíferos mais objectiva e com menor consumo de tempo, muito embora certos métodos gráficos sejam úteis no definir do tipo de modelo a seguir, bem como em estimativas iniciais de parâmetros.

O grande desenvolvimento dos métodos de análise automática deu-se após o aparecimento das calculadoras programáveis e, sobretudo, dos microcomputadores.

Os trabalhos anteriores a este período são relativamente raros ou, pelo menos, pouco divulgados. Os mais antigos de que temos conhecimento são os de Saleem (1970), Berg (1971) e Korganoff & Besbes (1973).

A partir da década de 80 são publicados numerosos trabalhos dos quais podemos destacar os de McElwee (1980), Chander *et al.* (1981), Herbert & Kitching (1981), Cobb *et al.* (1982), Patel & Mishra (1983), Butt & McElwee (1985), Mishra & Chachadi (1985), Carrera & Neuman (1986), Ledesma & Lloret (1986), Singh & Das Gupta (1986), Hund-Der Yeh (1987), Hund-Der Yeh & Hung-Yuang Han (1989) e muitos outros.

Dos trabalhos publicados em Portugal referimos Henriques (1980), que apresenta diversas soluções para a avaliação de parâmetros hidráulicos de diferentes tipos de aquíferos utilizando o método de Fletcher-Powell para minimização de funções não lineares.

Almeida (1981), seguindo a formulação de McElwee (1980), utilizou para o modelo de Theis o método da sensibilidade na minimização da função objectivo tendo, ainda, apresentado uma versão automatizada do método de Jacob, incluindo uma rotina de eliminação automática de valores anómalos. Ambos os programas incluíam subrotinas gráficas permitindo uma apreciação visual do ajuste obtido.

Afonso (1987) aplicou a alguns modelos de aquíferos o método de Davidon-Fletcher-Powell. Os programas incluem subrotinas gráficas e podem ser utilizados em ensaios a caudal variável.

Almeida, C. *et al.* (1989) e Rodrigues *et al.* (1989) apresentam diversas soluções para a interpretação automática de ensaios em patamares de caudal.

Ribeiro (1990), seguindo a formulação de McElwee (1980) alarga o estudo ao modelo de Hantush & Jacob (1955) e a ensaios a caudal variável, utilizando directamente, para os poços de grande diâmetro a solução analítica de Papadopoulos & Cooper (1967).

Almeida *et al.* (1992) utilizaram o método de Gauss-Newton e a inversão numérica da transformada de Laplace para cálculo da função de poço na interpretação de ensaios de bombagem em poços de grande diâmetro.

## 2. MÉTODO DA INVERSÃO GENERALIZADA

Para fundamentar as técnicas de ajuste automático devemos começar por referir que nesta metodologia se utiliza, tal como nos métodos clássicos de interpretação, um modelo teórico que se julga

adequado ao caso em estudo - a função de poço.

Em termos gerais a resolução do problema inverso de que nos ocupamos consiste, pois, em obter um ajuste automático a um conjunto de observações, utilizando modelos que dependem não linearmente de um conjunto de  $k$  parâmetros desconhecidos,  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

Neste caso, ao contrário do que sucede com problemas de regressão usando modelos que dependem linearmente dos parâmetros, não é possível obter uma solução imediata pelo que se terá de proceder de modo iterativo.

O modelo é uma função que depende de variáveis independentes - tempo, distância do ponto de observação ao poço de produção, caudal deste último, etc. - e de parâmetros hidráulicos. Estes últimos, consideram-se constantes em cada ensaio, embora sejam variáveis num contexto regional. Isto é, para cada ensaio a interpretar, considera-se existir um, e um só, conjunto de valores para os parâmetros que produzem um ajustamento óptimo.

Dispomos, assim, de um vector de observações  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$  e um vector  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de valores calculados usando uma estimativa de valores para os parâmetros.

Tem-se pois:

$s^*$  vector das observações e

$s = f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  vector de estimativas dos rebaixamentos, sendo  $f$  o modelo escolhido (função de poço),  $\mathbf{x}$  o vector de variáveis independentes e  $\mathbf{p}$  um vector de parâmetros (transmissividade, coeficiente de armazenamento, etc.).

Se dispusermos de uma estimativa inicial do vector de parâmetros de tal modo que difiram dos verdadeiros a menos de um vector de desvios  $\Delta \mathbf{p}$ , podemos escrever a seguinte igualdade, aproximada, que resulta do desenvolvimento, em série de Taylor, truncada a partir da primeira derivada:

$$s^*(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \cong s(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathbf{A} \Delta \mathbf{p}$$

sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz que contém as derivadas parciais da função de poço, em ordem aos parâmetros considerados (matriz jacobiana):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial p_1} & \frac{\partial s_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial s_n}{\partial p_1} & \frac{\partial s_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial s_n}{\partial p_k} \end{bmatrix}$$

Os desvios entre os valores teóricos, obtidos a partir do conjunto de estimativas inicial, e os observados  $\varepsilon_i = s_i^* - s_i$ , fornecem uma medida do ajuste pretendido. No entanto, por diversas razões, a função que se procura minimizar, função objectivo, é a que resulta do somatório dos quadrados dos referidos desvios.

A essência dos métodos de ajuste automático consiste, pois, em obter um mínimo para a função objectivo. Esta função,  $\Phi$ , pode ser obtida através da operação:

$\Phi = \varepsilon^T \varepsilon = (\mathbf{s}^* - \mathbf{s})^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) = (\mathbf{s}^* - \mathbf{s} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{p})^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{p})$  onde o superíndice  $T$  significa a transposta e  $\varepsilon$  o vector dos desvios.

Derivando  $\Phi$  em ordem ao vector  $\Delta \mathbf{p}$  e igualando a zero para encontrar o mínimo, obtém-se:

$$(-\mathbf{A})^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{p}) + (\mathbf{s}^* - \mathbf{s} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{p})^T (-\mathbf{A}) = 0$$

Tendo em conta a identidade:  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{y}$  um vector (Constantinides, 1987), a igualdade anterior pode-se escrever assim:

$$2(-\mathbf{A})^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{p}) = 0 \therefore \mathbf{A}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) - \mathbf{A}^T\mathbf{A}\Delta\mathbf{p} = 0$$

$$\Delta\mathbf{p} = (-\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) \quad [1]$$

É esta expressão que permite calcular o vector contendo os desvios que irão ser usados para actualizar o vector das estimativas iniciais através de um algoritmo iterativo:

$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \Delta\mathbf{p}, \text{ onde } i \text{ representa a iteração.} \quad [2]$$

Efectuando a operação  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$  obtém-se uma matriz simétrica de dimensões  $k \times k$  podendo-se apresentar a equação [1] da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \dots \\ \Delta p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial s_i}{\partial p_1}\right)^2 & \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_1} \frac{\partial s_i}{\partial p_2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_1} \frac{\partial s_i}{\partial p_k} \\ & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial s_i}{\partial p_2}\right)^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_2} \frac{\partial s_i}{\partial p_k} \\ & & \dots & \\ & & & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial s_i}{\partial p_k}\right)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_1} (s_i^* - s_i) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_2} (s_i^* - s_i) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial p_k} (s_i^* - s_i) \end{bmatrix} \quad [3]$$

Existem outras variantes à formulação anterior, conhecida por método de Gauss-Newton. Assim, no método do gradiente máximo (steepest descent) o vector dos desvios é obtido através da expressão:

$\Delta\mathbf{p} = 2 \mathbf{K} \mathbf{A}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s})$ , ou seja substitui-se  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$  por  $2 \mathbf{K}$ , enquanto que na formulação de Marquardt se tem:

$\Delta\mathbf{p} = (-\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s})$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\lambda$  um parâmetro empírico que pode ser modificado em cada iteração.

Pode-se dizer que esta última formulação combina as vantagens do método de Gauss-Newton - rapidez de convergência para boas estimativas iniciais - com as do método de gradiente máximo - estabilidade, mesmo para estimativas iniciais afastadas - pois valores de  $\lambda$  elevados aproximam o algoritmo de Marquardt do método do gradiente máximo enquanto que quando  $\lambda$  tende para zero o método tende para a formulação de Gauss-Newton.

O processo iterativo termina quando se atinge um valor menor do que o critério de convergência estabelecido podendo o ajuste ser avaliado mediante o erro padrão de estimativa, dado por:

$$\text{REQM} = \sqrt{\frac{\Phi}{N}}$$

### 3. ENSAIOS A CAUDAL VARIÁVEL

Para proceder à interpretação de ensaios escalonados, admite-se que o caudal é uma função discreta do tempo, ou seja, o período de bombagem encontra-se repartido em intervalos onde o caudal se mantém constante.

O rebaixamento,  $s(r, t)$ , em cada instante e para cada ponto do aquífero obtém-se por aplicação do princípio da sobreposição, sendo dado por:

$$s(r, t) = \sum_{i=1}^K \Delta Q_i \cdot f(r, t) \quad [4]$$

onde  $K$  representa o número de escalões de caudal;  $\Delta Q_i$  representa a variação de caudal no inésimo escalão e  $f(r, t)$  a função de poço.

Considerando-se:

$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i-1}$  = variação de caudal entre dois escalões consecutivos;

$t_0 = 0$ ;  $Q_0 = 0$

Deste modo, o rebaixamento, em dado instante e para determinado ponto do aquífero, resulta do somatório dos rebaixamentos que cada variação de caudal (positiva ou negativa) provocaria isoladamente nesse ponto.

#### 4. APLICAÇÕES

##### 4.1 Exemplo 1: Aquífero confinado (Theis, 1935)

O modelo analítico de Theis (1935) representa um aquífero confinado, ou seja, onde não existe recarga superior nem inferior, em regime transitório e nas seguintes condições:

1. Aquífero como um meio poroso homogéneo e isótropo.
2. Água com densidade e viscosidade constantes.
3. Espessura do aquífero constante e a base do mesmo horizontal.
4. Antes da bombagem não existe fluxo, correspondendo o nível piezométrico ao nível hidrostático do aquífero.
5. O poço de bombagem possui um raio infinitesimal quando comparado com a extensão do aquífero, ou seja, é nulo o armazenamento na captação.
6. O fluxo é radial e horizontal.
7. A captação é totalmente penetrante e de raio constante em toda a espessura drenante.
8. O aquífero tem extensão infinita e no mesmo não existem outras captações de água ou, caso existam, encontram-se paradas.
9. Não existem perdas de carga na admissão de água ao poço.
10. O nível piezométrico observado a uma distância radial infinita, relativamente ao eixo do poço de bombagem, é igual ao nível hidrostático.

O rebaixamento, num aquífero confinado bombeado a caudal constante e para as condições de Theis, pode ser dado pela seguinte equação:

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad [5]$$

sendo:

$$u = \frac{Sr^2}{4Tt};$$

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = -0.57721566 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2.2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n.n!} \quad [6]$$

$s(r, t)$  corresponde ao rebaixamento, observado no tempo  $t$  e à distância radial  $r$  do eixo do poço de bombeamento, e  $Q$  ao caudal de extracção;  $S$  e  $T$  são o coeficiente de armazenamento e transmissividade do aquífero confinado, respectivamente; a variável  $u$  é o argumento da função de poço, representada por  $W(u)$ , e é adimensional.

A minimização da função objectivo  $\Phi(T, S)$  exige, como já foi referido, o conhecimento das derivadas parciais da equação de fluxo, em ordem aos parâmetros a estimar:

$$\frac{\partial s(r,t)}{\partial T} = -\frac{s(r,t)}{T} + \frac{Q}{4\pi T^2} e^{-u} \quad [7]$$

$$\frac{\partial s(r,t)}{\partial S} = -\frac{Q}{4\pi TS} e^{-u} \quad [8]$$

derivadas estas que irão constituir a matriz jacobiana:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial T} & \frac{\partial s_1}{\partial S} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial s_n}{\partial T} & \frac{\partial s_n}{\partial S} \end{bmatrix}$$

As equações [7] e [8] obtêm-se aplicando a regra de Leibnitz para derivação do integral da função de poço.

A regra de Leibnitz para a derivação de um integral pode ser expressa por (Boas, 1966, p. 195):

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t) dt = f(x,v) \frac{dv}{dx} - f(x,u) \frac{du}{dx} + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x} dt$$

Para manter a estabilidade do método e garantir um significado físico real, os parâmetros devem ter sempre valor superior a zero e impõem-se restrições aos incrementos em cada iteração, não devendo estes exceder uma certa magnitude, calculada em relação aos valores obtidos na iteração anterior (Cobb *et al.*, 1982).

Para interpretar ensaios a caudal variável a metodologia seguida é em tudo idêntica, sendo a equação [5] substituída por:

$$s(r, t) = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^K \Delta Q_i \cdot W(u_i) \quad [9]$$

(Butt & McElwee, 1985)

Vem a propósito referir que a interpretação de ensaios de recuperação constitui um caso especial de ensaios a caudal variável, interpretando-se, neste caso, apenas a parte correspondente à mudança de escalão do caudal do ensaio para caudal nulo, i. é, os dados correspondentes à recuperação.

Baseado neste facto, Almeida (1987b) apresentou um programa capaz de determinar, a partir de dados de recuperação, não só a transmissividade mas também o coeficiente de armazenamento. Deve-se recordar que os métodos clássicos não permitem a avaliação deste último parâmetro, salvo no caso de existir pelo menos uma observação feita durante a extracção.

## 4.2 Exemplo 2: Aquífero livre sem drenagem diferida

Nos aquíferos livres, existem, além do fornecimento de água devido à expansão desta e compressão do aquífero, uma drenagem gravítica, à medida que a superfície piezométrica vai baixando, e fenómenos capilares, sendo ainda possível recarga superior.

Em aquíferos livres com drenagem instantânea e ausência de recarga, é possível aplicar a metodologia expressa no exemplo anterior, sendo para tal necessário efectuar a correcção de Jacob, a qual despreza o efeito de mobilidade da superfície freática, satisfazendo-se deste modo a terceira condição de fronteira do modelo de Theis:

$$s_c = s - \frac{s^2}{2H_0}$$

onde:

$s_c$  - rebaixamento corrigido;

$s$  - rebaixamento observado;

$H_0$  - espessura saturada inicial do aquífero.

É assim possível efectuar uma boa estimativa da transmissividade e coeficiente de armazenamento para aquíferos livres sem drenagem diferida, e desde que se possa desprezar o fluxo vertical. Condição esta que é observada para rebaixamentos pequenos quando comparados com a espessura saturada inicial do aquífero ( $s/H_0 < 0.25$ ).

Com base na metodologia apresentada nos dois exemplos anteriores, elaborou-se o programa SENTHEIS, o qual permite interpretar ensaios a caudal constante ou variável, em regime transitório, efectuados em aquíferos confinados e livres sem drenagem diferida, nas condições estabelecidas no modelo de Theis.

### 4.3 Exemplo 3: Aquíferos semiconfinados (Hantush & Jacob, 1955)

O modelo proposto por Hantush & Jacob (1955) para aquíferos semiconfinados, considera que a recarga se estabelece através de um aquitardo, com coeficiente de armazenamento nulo, localizado na base ou tecto do aquífero, não sendo, no entanto, instantânea.

A solução de Hantush e Jacob que exprime o escoamento em regime transitório, na situação de bombagem a caudal constante, num aquífero semiconfinado e para as condições fronteira acima referidas, é dada por:

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{1}{x} \exp(-x - z) dx \quad [10]$$

Na equação [10] tem-se:

$$z = \frac{r^2}{4B^2 x}, \text{ sendo } B \text{ o factor de drenância: } B = \sqrt{\frac{Tb'}{K'}};$$

$b'$  a espessura do aquitardo e  $K'$  a respectiva condutividade hidráulica;

$$u = \frac{Sr^2}{4Tt}$$

Cobb *et al.* (1982) apresentaram três soluções distintas para o modelo expresso pela equação [10], correspondentes a diferentes intervalos de  $u$  e  $r/B$ :

- $u \geq 1$  e  $r/B$  qualquer:

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} G(u, r/B) \quad [11]$$

- $u \leq 1$  e  $(r/B)^2 \geq u$ :

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} (2K_0(r/B) - G(p, r/B)) \quad [12]$$

- $u \leq 1$  e  $(r/B)^2 \leq u$ :

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} \left\{ 2K_0(r/B) - I_0(r/B)E(p) + e^{-p} \left[ 0.57721566 + \ln(u) + E(u) - u + \frac{u(I_0(r/B) - 1)4B^2}{r^2} - u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n+m} (n-m+1)!}{((n+2)!)^2} \left( \frac{r^2}{4B^2} \right) u^{n-m} \right] \right\} \quad [13]$$

Considerando:

$$p = \frac{Tt}{SB^2} = \frac{r^2}{4B^2 u};$$



$$E(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy ;$$

$$G(x, r/B) = \int_x^{\infty} \frac{\exp\left\{-x-r^2 / \left[4B^2(y+x)\right]\right\}}{y+x} e^{-y} dy ; \quad [14]$$

$I_0, K_0$  = funções de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipos, respectivamente.

Deve-se notar que, quando a drenância é muito reduzida ou quando o tempo de bombagem é reduzido, não dando tempo a que a recarga do acuitardo atinja o aquífero, a solução da equação [10] resume-se à solução de Theis, uma vez que em tais circunstâncias  $r/B \rightarrow 0$ .

A resolução do integral exponencial  $[E(x)]$  é feita através da aproximação polinomial definida por Huntton (1980).

A função,  $G(x, r/B)$  obtém-se utilizando o método de integração de Laguerre (Cobb *et al.*, 1982), que a seguir se descreve.

Uma função da forma:

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx$$

pode, através da fórmula da quadratura de Laguerre, ser aproximada a um polinómio do tipo:

$$\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

onde  $w_i$  corresponde ao factor de peso de ordem  $i$  e  $x$  ao inésimo zero do polinómio de Laguerre de ordem  $n$ .

Utilizou-se uma aproximação de Laguerre de ordem 15 e a função  $f(x)$  corresponde a

$$\frac{\exp\left\{-x-r^2 / \left[4B^2(y+x)\right]\right\}}{y+x}$$

Os factores de peso e os zeros do polinómio vêm catalogados em Abramowitz & Stegun (1970, p. 923).

As soluções para as funções de Bessel  $I_0 (r/B)$  e  $K_0 (r/B)$  são obtidas também por aproximação polinomial (Abramowitz & Stegun, 1970, p. 378-379).

O duplo somatório da equação [13] é resolvido numericamente através de uma soma truncada, uma vez que apenas um número finito de termos é necessário para o aproximar a uma série convergente.

As derivadas parciais para a constituição da matriz jacobiana obtém-se de acordo com o parâmetro em questão (Cobb *et al.*, 1982).

Aplicando a regra de Leibnitz para a derivação do integral da equação [10], obtém-se as derivadas parciais desta equação em ordem a  $S$  e  $T$ :

$$\frac{\partial s}{\partial S} = -\frac{Qr^2}{16\pi T^2 t} \left[ \frac{1}{u} \exp\left(-u - \frac{L^2 r^2}{4u}\right) \right] \quad \text{onde } L = B^{-1} \quad [15]$$

$$\frac{\partial s}{\partial T} = -\frac{s(r,t)}{T} - \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial S} \quad [16]$$

A determinação de  $\frac{\partial s}{\partial L}$ , utilizando a regra de Leibnitz, conduz a um novo integral infinito e para

evitar o seu cálculo, utilizou-se uma aproximação em diferenças finitas:

$$\frac{\partial s(r,t)}{\partial L} \approx \frac{\Delta s(r,t)}{\Delta L} \approx \frac{s(L+\Delta L) - s(L-\Delta L)}{2\Delta L}$$

onde:

$$s(L \pm \Delta L) = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{1}{x} \exp \left[ -x - \frac{(L \pm \Delta L)^2 r^2}{4x} \right] dx$$

A aproximação é tanto mais exacta quanto menor for o valor de  $\Delta L$ , obtendo-se uma boa aproximação para um  $\Delta L$  igual à milésima parte de  $L$ .

Segundo Afonso (1987, p. 106), no processo de minimização o que importa é a ordem de grandeza das derivadas e não o seu valor exacto. É pois conveniente que se utilize um factor que permita obter a mesma ordem de grandeza das derivadas parciais. Utilizaram-se factores diferentes, consoante a ordem de grandeza inicial do parâmetro:

$$FAT = \text{factor de ampliação para } \frac{\partial s}{\partial T} = 10^3$$

$$FAS = \text{factor de redução para } \frac{\partial s}{\partial S} = 10^{-3}$$

$$FAL = \text{factor de redução para } \frac{\partial s}{\partial L} = 10^{-2}$$

A não utilização destes factores acarreta a ausência de sensibilidade do método de minimização da função objectivo em relação a cada um dos parâmetros hidráulicos, nomeadamente no que concerne com o parâmetro  $L$ . Sendo de salientar, que as derivadas parciais são, consequentemente, afectadas destes factores, e que no final do processo se deve desfazer a mudança de variável.

No processo de minimização é necessário considerar certas restrições, sendo utilizadas as referidas no exemplo 1, estendidas agora ao parâmetro  $L$  (Cobb *et al.*, 1982).

A metodologia apresentada permite agora automatizar o processo de minimização da função objectivo, de modo a obter uma estimativa dos parâmetros hidráulicos do aquífero, tanto na situação presente como na de bombagem a caudal variável, bastando considerar a equação seguinte:

$$s(r, t) = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^k \Delta Q_i W(u_i, r/B) \quad [17]$$

O programa elaborado com a metodologia descrita neste exemplo é designado de SCINVGEM.

#### Exemplo 4: Poços de grande diâmetro (Papadopoulos & Cooper, 1967)

A solução analítica proposta por Papadopoulos & Cooper (1967), define o rebaixamento observado no poço ou em piezómetros para aquíferos confinados, em regime transitório, considerando o efeito de armazenamento na captação em consequência do diâmetro desta não ser considerado infinitesimal quando comparado com a extensão do aquífero. Como resultado a quinta e a nona condições de fronteira admitidas no exemplo 1 deixam de ser válidas, sendo de referir que com o decorrer do ensaio, o caudal fornecido pelo aquífero tende a igualar o extraído do poço, aproximando-se do modelo de Theis (1935) para tempos superiores a  $250r_c^2 / T$ .

Á equação seguinte traduz a solução de Papadopoulos & Cooper:

$$s(r,t) = \frac{2Q\alpha}{\pi^2 T} \int_0^\infty (1 - e^{-\beta^2/4u_w}) \{ J_0(\beta r/r_w) [\beta Y_0(\beta) - 2\alpha Y_1(\beta)] - Y_0(\beta r/r_w) [\beta J_0(\beta) - 2\alpha J_1(\beta)] \} \frac{d\beta}{\beta^2 \Delta(\beta)} \quad [18]$$

onde:

$$\alpha = \frac{Sr_w^2}{r_c^2};$$

$$u = \frac{Sr_w^2}{4Tt};$$

$$\Delta(\beta) = [\beta J_0(\beta) - 2\alpha J_1(\beta)]^2 + [\beta Y_0(\beta) - 2\alpha Y_1(\beta)]^2$$

Correspondendo  $\alpha$  e  $u_w$ , aos argumentos da função de poço [adimensionais], traduzindo o primeiro a diferença entre os raios do poço, e quando estes são iguais, o valor de  $\alpha$  é o do coeficiente de armazenamento do aquífero;  $J_i$  e  $Y_i$  as funções de Bessel de ordem  $i$ ;  $r_w$ , e  $r_c$  aos raios do poço, respectivamente, raio efectivo do poço e raio da zona de variação de níveis de água.

Em consequência da complexidade da equação [18], cuja avaliação implica grande consumo de tempo de cálculo e, consequentemente, grande morosidade na estimação automática dos parâmetros hidráulicos, optou-se por utilizar a inversão numérica da transformada de Laplace na obtenção da solução do modelo considerado.

A transformação de Laplace pode definir-se do seguinte modo:

$$L[h(t)] = \bar{h}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt$$

onde  $h(t)$  é a função original e  $\bar{h}(p)$  a função imagem ou a transformada de Laplace da função  $h(t)$ .

A solução da equação da difusividade para cada caso específico pode ser obtida por inversão analítica ou numérica da transformada de Laplace. Para problemas relacionados com sistemas de fluxo radial, a inversão analítica resulta em funções complexas contendo, em geral, integrais impróprios que incluem com frequência, na sua função integranda, funções de Bessel.

Esses integrais são, pois, de difícil avaliação dada a complexidade da função integranda e dado que muitas vezes esta é oscilante, pelo que os métodos numéricos, normalmente utilizados, convergem lentamente não sendo possível, por vezes, obter convergência satisfatória.

Uma outra abordagem do problema consiste em efectuar a inversão numérica da transformada de Laplace, processo este em geral mais eficiente e rápido. A aplicação desta técnica a problemas de hidráulica de poços foi proposta, quase em simultâneo, por diversos autores (Moench & Ogata, 1984, Barker, 1985, Streltsova, 1982)

Um dos métodos de inversão numérica mais utilizado, dada a sua simplicidade e precisão é o algoritmo desenvolvido por Stehfest (1970).

No caso dos poços de grande diâmetro a transformada de Laplace da equação [18] e dada por:

$$\bar{s}_{wD} = \frac{QK_0(r_D\sqrt{p})}{2\pi T p [W_D p K_0(\sqrt{p}) + \sqrt{p} K_1(\sqrt{p})]} \quad [19]$$

onde:

$p$  é a variável de Laplace, correspondendo ao parâmetro  $\theta = Tt/r_w^2 S$ ;

$$r_D = r/r_w;$$

$\bar{s}_{wD}$  = transformada de Laplace da função de poço;

$$W_D = \frac{r_c^2}{2r_w^2 S};$$

$K_0$  e  $K_1$  são funções modificadas de Bessel.

A inversão numérica da transformada de Laplace é obtida através do algoritmo de Stehfest (1970). As funções de Bessel são calculadas por aproximação polinomial (Abramowitz & Stegun, 1970). O método da inversão numérica de Laplace mostrou-se, para o presente caso, cinco vezes mais rápido do que a avaliação da solução de Papadopoulos & Cooper através do método da quadratura gaussiana.

O cálculo das derivadas da matriz **A** (matriz jacobiana) é feito através de uma expressão em diferenças finitas centradas:

$$\frac{\partial s}{\partial T} \cong \frac{s(T + \Delta T) - s(T - \Delta T)}{2\Delta T}$$

$$\frac{\partial s}{\partial S} \cong \frac{s(S + \Delta S) - s(S - \Delta S)}{2\Delta S}$$

À semelhança dos exemplos anteriores, são impostas certas restrições aos incrementos dos parâmetros a estimar, em cada iteração.

O programa elaborado com base nesta metodologia designa-se de LARGWELL e pode ser igualmente aplicado à interpretação de ensaios a caudal variável, bem como a aquíferos livres com drenagem instantânea (desde que os rebaixamentos sejam corrigidos, em conformidade com o mencionado no exemplo 2).

Todos os programas mencionados anteriormente foram elaborados em QuickBASIC e permitem, para além da estimativa dos parâmetros hidráulicos para as situações mencionadas, obter curvas de ajuste do conjunto de dados experimentais às correspondentes curvas teóricas. De salientar que basta possuir o conjunto de dados relativos ao ensaio de caudal, não sendo inclusivé necessário fornecer as estimativas iniciais dos parâmetros.

#### 4. 4 Exemplo 4: Ensaios em patamares de caudal com observações na captação de produção

Este tipo de ensaios, muito utilizado pelos construtores de captações, destina-se sobretudo a avaliar a eficiência destas, isto é, a razão entre o rebaixamento teórico que seria produzido na ausência de perdas de carga na captação e o rebaixamento real. No entanto este tipo de ensaios pode fornecer também boas estimativas da transmissividade.

Os ensaios em patamares podem ser feitos com paragem da extracção entre cada patamar de caudal durante um tempo suficiente para que se dê a total recuperação do nível ou sem paragem.

O tratamento automático deste tipo de ensaios tem sido tentado por vários autores dada a dificuldade em utilizar outros métodos. Entre os trabalhos que visam contribuir para essa interpretação refiram-se os de Sheahan (1971), Labadie & Helweg (1975), Nahm (1980), Miller & Weber (1983), Butt & McElwee (1985), Almeida (1987a), Almeida *et al.* (1989), Rodrigues *et al.* (1989).

A fórmula básica que dá o rebaixamento numa captação é, segundo Rorabaugh (1953):

$$s = BQ + CQ^n \quad [20]$$

onde

$s$  = rebaixamento na captação

$Q$  = caudal de bombagem

$B$  = coeficiente de perdas de carga no aquífero

$C$  = coeficiente de perdas de carga introduzidas pela captação

$n$  = constante que traduz as características do escoamento na captação e suas imediações.

O parâmetro  $B$  depende das características do aquífero e varia com o tempo de bombagem. Pode ser calculado pela fórmula de Theis, ou outro modelo apropriado, com  $r = r_p$  sendo  $r_p$  o raio da captação.

## A INFORMÁTICA NA GEOLOGIA

No caso de se tratar de um aquífero confinado é quase sempre possível usar a aproximação logarítmica de Jacob, válida quando  $u < 0,01$ :

$$B = \frac{1}{4\pi T} \ln \frac{2.25Tt}{S_r^2}$$

já que para valores de  $r_p$  pequenos o valor de  $u = S_r^2 / 4Tt$  é pequeno, mesmo para tempos curtos.

O coeficiente  $C$  é constante para cada captação sendo o seu valor uma característica específica desta. Menores valores de  $C$  significam menores perdas de carga e, portanto, maior eficiência da captação.

O expoente  $n$  pode variar entre 1 e 3,5, sendo os valores mais frequentes situados entre 2 e 3 (Custódio & Llamas, 1976). Dentro de certos limites de caudal, o valor de  $n$  pode ser considerado constante e característico da captação. Contudo, ele pode variar com o caudal quando ocorre alteração do regime de escoamento na captação.

Em numerosas situações é aceitável tomar  $n=2$ , o que facilita grandemente a interpretação dos resultados.

Nestas condições, a fórmula [20] tem a expressão:

$$s = BQ + CQ^2 \quad [21]$$

e designa-se por equação de Jacob (Jacob, 1946) de que a equação [20] é uma generalização.

As bombagens em aquíferos livres que provoquem grandes rebaixamentos, fazendo, portanto, variar a transmissividade do aquífero, conduzem a elevados valores de  $n$ . Velocidades elevadas de entrada de água nas captações conduzem a resultados idênticos.

Para se estimarem os três parâmetros ( $B$ ,  $C$  e  $n$ ) que constam da equação [20] é necessário dispôr de, pelo menos, três observações de rebaixamentos medidos na própria captação e correspondentes a outros tantos caudais e a tempos de extração iguais para cada caudal.

No caso das mudanças de caudal serem feitas sem interrupção os rebaixamentos correspondentes ao segundo patamar e seguintes devem ser corrigidos da influência dos patamares anteriores, sendo estes valores corrigidos que entram nos cálculos. A correcção é feita extrapolando para o escalão seguinte os rebaixamentos verificados no anterior. Informações complementares sobre esta metodologia podem consultar-se, por exemplo, em Custódio & Llamas, 1976 ou Villanueva da Iglesias, 1984.

Dado que, neste caso, se têm três parâmetros e que as derivadas parciais dos rebaixamentos em ordem aos mesmos são dadas pelas expressões:

$$\frac{\partial s}{\partial B} = Q; \quad \frac{\partial s}{\partial C} = Q^n; \quad \frac{\partial s}{\partial n} = CQ^n \ln Q \text{ a matriz } \mathbf{A} \text{ assume a forma:}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1^n & CQ_1^n \ln Q_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_p & Q_p^n & CQ_p^n \ln Q_p \end{bmatrix}$$

sendo  $p$  o número de observações.

Quando existem várias observações em cada escalão é possível estimar a transmissividade através de um método desenvolvido por Almeida *et al.* (1989) que poderá ser usado mesmo no caso da equação dos rebaixamentos não se ajustar ao modelo teórico [20]. Este método, ao contrário do anterior, não exige que a duração dos diferentes patamares de caudal sejam iguais. No entanto, apenas permite estimar a transmissividade e não os parâmetros que caracterizam as perdas de carga da captação.

Para fundamentar este método começemos por notar que o rebaixamento que se verifica num dado

instante  $s(t)$ , será o somatório dos rebaixamentos parciais causados pelos escalões de bombagem realizados até esse momento (princípio da sobreposição).

Então, aplicando o referido princípio e a aproximação de Jacob tem-se:

$$s(t) = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^k \Delta Q_i \ln \frac{2,25T(t - t_i)}{S r_p^2} + CQ^n \quad [22]$$

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i-1} \quad (Q_0 = 0)$$

$Q$  = caudal em extracção no instante  $t$

$t_i$  = tempo correspondente ao início do escalão  $i$

$k$  = número de escalões.

Admitindo que  $C$  e  $n$  não variam no decorrer do ensaio, a equação [22] pode ser escrita do seguinte modo:

$$s(t) = \frac{1}{4\pi T} \left[ \sum_{i=1}^k \Delta Q_i \ln(t - t_i) + Q \ln T + \alpha Q \right] + CQ^n \quad [23]$$

O que mostra que, dentro de cada patamar de caudal, a equação [23] é redutível à equação de uma recta em que a variável dependente  $s(t)$  é função linear de  $\sum_{i=1}^k \Delta Q_i \ln(t - t_i)$ .

Tem-se, então:

$$S(t) = a + bZ \text{ onde,}$$

$$Z = \sum_{i=1}^k \Delta Q_i \ln(t - t_i) \quad t > t_i$$

$k$  = número máximo de escalões em que se verifica a condição  $t > t_i$

$$b = 1/(4\pi T)$$

$$a = \frac{Q}{4\pi T} (\ln T + \alpha) + CQ^n$$

Assim, fazendo a regressão linear  $s_i$  em função de  $Z_i$  obtém-se o pendente da recta que permite o cálculo de  $T$ :

$$T = 1/(4\pi b)$$

No caso de se dispor de boas estimativas de  $n$  e  $C$ , obtidas pelo primeiro método, poder-se-à estimar o valor de  $S$ . No entanto, a experiência mostra que, quase sempre, este cálculo produz valores absurdos (Cooley & Cunningham, 1979) ao contrário dos valores de transmissividade que, em geral, se ajustam bem aos valores determinados por outros métodos.

#### 4.5 Exemplo 5: Ensaio em aquíferos com porosidade dupla

A interpretação clássica de ensaios realizados em aquíferos fracturados com porosidade dupla é dificultada não só pelo facto de não existirem curvas padrão facilmente disponíveis, mas também devido ao

## A INFORMÁTICA NA GEOLOGIA

facto de ser difícil a sua elaboração dado que as funções de poço para este tipo de aquífero dependem de numerosos parâmetros, pelo que é praticamente impossível construir curvas que correspondam a todas as combinações possíveis.

Com o objectivo de auxiliar a interpretação de ensaios realizados em aquíferos com porosidade dupla, Oliveira (1990) elaborou um programa que permite elaborar curvas padrão para qualquer conjunto de valores de parâmetros. Embora não se trate propriamente de interpretação automática de ensaios, esta é grandemente facilitada pela utilização do referido programa.

Em aquíferos com porosidade dupla podem considerar-se dois campos piezométricos, um associado às fracturas e outro associado ao restante meio não fracturado (vulgarmente designado por blocos porosos). O programa engloba 34 modelos diferentes que consideram as seguintes condições base:

- aquífero de extensão infinita;
- fluxo para o poço de extracção apenas através das fracturas;
- poço totalmente penetrante;
- matriz porosa isotrópica e homogénea;
- fluido e rocha compressíveis;
- caudal de extracção constante ou variável.

Como é hábito na interpretação de ensaios de bombagem, raramente se verifica a totalidade das condições base mas o não cumprimento de uma das condições não invalida a aplicação de um modelo. A diversidade dos modelos deve-se a vários factores:

- à consideração de dois tipos de fluxo entre blocos e fracturas;
- ao local onde são feitas as observações de rebaixamento (no furo de extracção ou num furo de observação);
- a considerar-se furo de extracção com capacidade de armazenamento ou não (assumindo-se neste caso furo linear);
- a considerar-se aquífero livre ou confinado;
- a considerar-se uma camada com características hidráulicas diferentes das dos blocos e das fracturas (designada por pele de fractura);
- a considerar-se uma zona que envolve o furo de extracção com características diferentes das do aquífero;
- a considerar-se diferentes geometrias para os blocos: prismas, esferas, ou cilindros.

Ao leitor interessado na problemática do funcionamento hidráulico de aquíferos com porosidade dupla recomenda-se o trabalho de Almeida & Oliveira (1990) onde se passam em revista os principais aspectos da mesma e se apresentam diversos modelos que têm sido propostos para a caracterização matemática do escoamento nesse tipo de aquíferos.

### Modelos incorporados no programa AQFIS - versão 3

O Quadro I apresenta de forma sucinta as características dos modelos presentes no programa AQFIS.

#### Quadro I - QUADRO DOS MODELOS DISPONÍVEIS NESTE PROGRAMA

I. Aquífero confinado (com fluxo radial para o poço à excepção da opção 35)

A) Regime pseudo-estacionário dos blocos para as fracturas

A.1) Poço de diâmetro infinitamente pequeno (poço sem armazenamento)

Nº	Modelo	Características
1	Kazemi <i>et al.</i> (1969)	rebaixamento num piezómetro
3	Warren & Root (1963)	rebaix. No poço de extracção de diâmetro finito mas s/armazen.
4	Moench (1984)	modelo tabular, pele de fractura
5	Moench (1984)	modelo de esferas, pele de fractura

## A.2) Poço de diâmetro finito (poço com armazenamento)

Nº	Modelo	Características
6	Mavor & Cinco L. (1919)	rebaixamento no poço
7	Mavor & Cinco L. (1919)	rebaixamento num piezómetro
8	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento no poço, pele de fractura
9	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento num piezómetro, pele de fractura
10	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento no poço, pele de fractura
11	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaix. num piezómetro, pele de fractura

## B) Regime transitório dos blocos para as fracturas

## B.1) Poço de diâmetro infinitamente pequeno (poço sem armazenamento)

Nº	Modelo	Características
12	Boulton & Streltsova (1977)	rebaixamento nas fissuras
13	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento nas fissuras, pele de fractura
14	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento nos blocos, pele de fractura
15	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento nas fissuras
16	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento nas fissuras, pele de fractura
17	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento nos blocos, pele de fractura

## B.2) Poço de diâmetro finito (poço com armazenamento)

Nº	Modelo	Características
18	Barker (1985)	modelo tabular, armazenamento desprezável nas fissuras, rebaixamento nas fissuras, s/ pele de poço
19	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento no poço
20	Moench (1984)	modelo tabular, rebaixamento num piezómetro
21	Moench (1984)	modelo tabular, rebaix. no poço e nas fissuras, pele de fractura
22	Moench (1984)	modelo tabular, rebaix. no poço e nos blocos, pele de fractura
23	Moench (1984)	modelo tabular, rebaix. num piezóm. e nas fis., pele de fractura
24	Moench (1984)	mod. tabular, rebaix. num piez. e nos blocos, pele de fractura
25	Barker (1985)	modelo de esferas, armazenamento desprezável nas fissuras, rebaixamento nas fissuras, s/ pele de poço
26	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento no poço
27	Moench (1984)	modelo de esferas, rebaixamento num piezómetro
28	Moench (1984)	mod. esf., rebaix. no poço e nas fissuras, pele de fractura
29	Moench (1984)	mod. esf., rebaix. no poço e nos blocos, pele de fractura
30	Moench (1984)	mod. esf., rebaix. num piez. e nas fissuras, pele de fractura
31	Moench (1984)	mod. esf., rebaix. num piez. e nos blocos, pele de fractura
32	Barker (1985)	modelo cilíndrico, rebaixamento nas fissuras, s/ pele de poço
33	Barker (1985)	modelo cilíndrico, armazenamento desprezável nas fissuras, rebaixamento nas fissuras, s/ pele de poço
35	Jenkins e Prentice(1982)	fluxo linear para uma fractura vertical única onde se localiza o poço de extracção, rebaixamento num piezómetro
34	Boulton e Streltsova (1978)	modelo tabular, fluxo radial para o poço de extracção, regime transitório, poço sem armazenamento



### Utilização do programa AQFIS

O programa apresenta cinco opções iniciais com as seguintes funções:

- MONITOR: permite seleccionar entre monitor CGA e VGA;
- PROJECCÃO: permite fazer uma visualização dos dados em qualquer uma das escalas possíveis (aritmética, logarítmica ou semi-logarítmica);
- THEIS: permite adaptar a curva de Theis a um conjunto de dados;
- MODELOS: selecciona o modelo desejado e gera curvas a partir de um conjunto de parâmetros;
- SAIR: sai do programa.

Estas opções são apresentadas sob a forma de menus em cascata pelo que a sua selecção é simples. Em Oliveira (1990) dá-se um exemplo detalhado da utilização do programa.

### BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M. & I. A. Stegun (1970) - Handbook of mathematical functions. 2º edição, Dover Publications Inc., New-York: 1046 p.
- Afonso, P. N. (1987) - Análise de ensaios de bombagem assistida por computador. Tese para obtenção do grau de Mestre em Hidráulica e Recursos Hídricos, Departamento de Engenharia Civil do I. S. T., Universidade Técnica de Lisboa: 143 p.
- Almeida, C. (1981) - Aplicação do cálculo automático à interpretação de ensaios de bombeamento. II Encontro Nacional de Geociências, resumos das comunicações, Coimbra.
- Almeida, C. (1987a) - Novo método para resolução da equação dos rebaixamentos em ensaios a caudal variável. *Geolis*, 1: 101-103.
- Almeida, C. (1987b) - Determinação da transmissividade e coeficiente de armazenamento por ensaios de recuperação. *Hidrogeologia y Recursos Hidráulicos*, tomo XII, IV Simposio de Hidrogeologia: 689-694, Palma de Maiorca.
- Almeida, C., J. D. Rodrigues & A. R. S. Lopes (1989) - Interpretação automática de ensaios em patamares de caudal. I - Aspectos teóricos. *Recursos Hídricos*, Rev. da Assoc. Port. Rec. Hídricos, 10 (1-3): 59-64.
- Almeida, C. & Oliveira, M. M. (1990) - Caracterização hidráulica de aquíferos fracturados. Livro de Homenagem a Carlos Romariz, Departamento de Geologia da FCUL: 30-64.
- Almeida, C., T. Ribeiro & M. M. Oliveira (1992) - LARGWELL: a program to pumping test analysis in large diameter wells. *Geolis* (em publicação).

- Barker, J. A. (1985) - Generalized well function evaluation for homogeneous and fissured aquifers. *J. Hydrology*, 76: 143-154.
- Berg, A. V. (1971) - An algorithm for least square analysis of drawdown in observation wells. *Journal of Hydrology*, 14 (1).
- Boas, M. L. (1966) - Mathematical methods in the physical sciences. 2ª edição, John Wiley & Sons, New-York: 793 p.
- Boulton, N. S., & T. D. Streltsova (1977) - Unsteady flow to a pumped well in a fissured water bearing formation. *J. Hydrology*, 35: 257-270.
- Boulton, N. S., & T. D. Streltsova-Adams (1978) - Unsteady flow to a pumped well in an unconfined. fissured aquifer. *J. Hydrology*, 37: 349-363.
- Butt, M. A. & C. D. McElwee (1985) - Aquifer-parameter evaluation from variable-rate pumping tests using convolution and sensitivity analysis. *Ground Water*, 23(2): 212-219.
- Carrera, J. & S. Neuman (1986) -Estimation of aquifer parameters under steady-state and transient conditions: I. Background and statistical framework. *Water Res. Research*, 22(2): 199-210.
- Chander, S., P. N. Kapoor & S. K. Goyal (1981) - Analysis of pumping test data using Marquardt algorithm. *Ground Water*, 19(3): 275-278.
- Cobb, P. M., C. D. McElwee & M. A. Butt (1982) - Analysis of leaky aquifer pumping test data : an automated numerical solution using sensitivity analysis. *Ground Water*, 20(3): 325-333.
- Constantinides, A. (1987) - Applied Numerical Methods with Personal Computers. McGraw-Hill Intern. Ed., 626 pp.
- Cooley, R. L. and A. B. Cunningham (1979) - Consideration of total energy loss in theory of flow to wells. *Jour. of Hydrology*, 43: 161-184.
- Custodio, E. & M. R. Llamas (1976) - Hidrología Subterránea. Tomo I, Ed. Omega, Barcelona.
- Hantush, M. S. & C. E. Jacob (1955) - Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer. *Am. Geophys. Union Trans.*, 6: 95-100.
- Henriques, R. G. (1980) - Métodos de cálculo automático para a avaliação de parâmetros hidráulicos de aquíferos com base na análise de dados de ensaios de bombagem. Tese apresentada a concurso para especialista do L.N.E.C., Departamento de Hidráulica, Lisboa.
- Herbert, R. & R. Kitching (1981) - Determination of aquifer parameters from large-diameter dug well pumping tests. *Ground Water*, 19(6): 593-599.
- Hund-Der Yeh (1987) - Theis solution by nonlinear least-squares and finite-difference Newton's method. *Ground Water*, 25(6): 710-715.
- Hund-Den Yeh & Hung-Yuang Han (1989) - Numerical identification of parameters in leaky aquifers. *Ground Water*, 27(5): 655-663.
- Huntoon, P. W. (1980) - Computationally efficient polynomial approximations used to program the Theis equation. *Ground Water*, 18(2): 134-136.
- Jacob, C. E. (1946) - Drawdown test to determine effective radius of artesian well. *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, 72(5).
- Jenkins & Prentice (1982) - Theory for aquifer test analysis in fractured rocks under linear (nonradial) flow conditions. *Ground Water*, 20(1): 12-21.

- Kazemi, H., M. S. Seth, & G. W. Thomas (1969) - The interpretation of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *J. Petrol. Technology*, 246: 463-472.
- Korganoff, A. & M. Besbes (1973) - Restitution des paramètres hydrauliques d'un aquifère à partir de l'historique des niveaux en un puits-témoin. *Bull. du B. R. G. M.*, 2<sup>a</sup> série, secção III, n. 2: 113-117.
- Labadie, J. W. & O. J. Helweg (1975) - Step-drawdown test analysis by computer. *Ground Water*, 13(5): 438-449.
- Ledesma, A. & A. Lloret (1986) - Interpretación de ensayos de bombeo mediante técnicas de identificación de parámetros. *Hidrogeologia*, 1: 1-13.
- Mavor, M. J., & H. Cinco L. (1979) - Transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs. *Pap. SPE 7977*, Soc. of Petrol. Engineers of AIME.
- McElwee, C. D. (1980) - Theis parameter evaluation from pumping tests by sensitivity analysis. *Ground Water*, 18(1): 56-60.
- Miller, C. T. & W. J. Weber, Jr. (1983) - Rapid solution of the nonlinear step-drawdown equation, *Ground-Water*, 21(5), p. 584-588.
- Mishra, G. C. & A. G. Chachadi (1985) - Analysis of flow to a large-diameter well during the recovery period. *Ground Water*, 23(5): 646-651.
- Moench, A. F. (1984) - Double-porosity models for a fissured groundwater reservoir with fracture skin. *Water Resour. Res.*, 20(7): 831-846.
- Moench, A. F. & A. Ogata (1984) - Analysis of constant discharge wells by numerical inversion of Laplace transform solutions. *Groundwater Hydraulics, Water Resour. Monogra. Serv.*, 9, editado por J. Rosenshein & G. D. Bennett, A.G.U., Washington D. C.:146-170.
- Naham, G. Y. (1980) - Estimating transmissivity and well loss constant using multirate test data from a pumped well. *Ground-Water*, 18(3), p. 281-285.
- Oliveira, M. M. (1990) - AQFIS-Um programa para, gerar curvas rebaixamento/tempo para aquíferos fracturados. *Geolis*, IV(1 e 2): 97-107
- Papadopoulos, I. S. & H. H. Cooper, Jr. (1967) - Drawdown in a well of large-diameter. *Water Resour. Res.*, 3(9): 1937-1946.
- Patel, S. C. & G. C. Mishra (1983) -Analysis of flow to a large-diameter well by discrete kernel approach. *Ground-Water*, 21(5): 573-576.
- Ribeiro, M. T. (1990) - Interpretação automática de ensaios de bombeamento em meios porosos. Relatório de estágio profissionalizante, Departamento de Geologia da F. C. U. L., 176 p.
- Rodrigues, J. D., C. Almeida & A. R. S. Lopes (1989) - Interpretação automática de ensaios em patamares de caudal. II- Aplicações. *Recursos Hídricos*, Rev. da Assoc. Port. Rec. Hídricos, 10 (13): 65-70.
- Rorabaugh, M. I. (1953) - Graphical and theoretical analysis of step-drawdown test of artesian well, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 79, separate 362, 23 p.
- Saleem, Z. A. (1970)- A computer-method for pumping-test analysis, *Ground Water*, 8(5).
- Sheahan, N. T. (1971) - Type-curve solution of a step-drawdown test. *Ground Water*, 9(1), 25-29.
- Singh, V. S. & C. P. Das Gupta (1986) - Hydrogeological parameter estimation from pump tests on a large diameter well. *Jour. Hydrology*, 87: 223-232.
- Stehfest, H. (1970) - Numerical inversion of Laplace transforms. *Commun. A.C.M.*, 13(1): 47-49.

- Streltsova, T. D. (1982) -Well Hydraulics in Verticaly Heterogeneous Formations. *Journ. Hyd. Division*, ASCE, 108, No. HY11: 1311-1327.
- Villanueva, M. M. & A. L. Iglesias (1984) - Pozos y acuíferos, tecnicas de evaluación mediante ensayos de bombeo. Inst. Geol. y Minero de España, 429 p. MADRID.
- Warren, J. E., & P. J. Root (1963) - The behavior of naturally fractured reservoirs. *J. Petrol. Technology*, 228, 3(3): 245-255.