Les exemples effectifs et l'axiome du choix.

Par

Wacław Sierpiński (Varsovie).

Pour démontrer l'existence d'un objet jouissant de propriétés données P il n'est pas nécessaire de définir un objet p et de démontrer ensuite qu'il jouit de propriétés P. L'existence d'un objet jouissant de propriétés données peut résulter d'axiomes et de théorèmes donnés — directement ou par voie apagogique. Les démonstrations d'existence de ce genre — les si dites *pures démonstration d'existence* — ne nous donnent pas ordinairement aucun exemple particulier d'objet jouissant de propriétés désirées, mais déterminent habituellement toute une classe de tels objets (Une pure démonstration d'existence peut être cependant en même temps une démonstration d'existence d'un seul objet jouissant de propriétés données). Parfois nous ne savons pas distinguer dans cette classe aucun objet particulier. P. e. il résulte, comme on sait, de l'axiome de M. Zermelo l'existence des ensembles non mesurables (L); or nous ne savons pas indiquer aucun ensemble particulier, non mesurable (L).

Lorsque nous avons défini un objet particulier p jouissant de propriétés donnés P, nous disons que nous avons un *exemple effectif* d'un objet jouissant de propriétés P. Voici plusieurs exemples.

1) Du théorème que l'ensemble de tous les nombres algébriques est dénombrable et l'ensemble de tous les nombres réels n'est pas dénombrable résulte l'existence de nombres réels qui ne sont pas algébriques, c'est-à-dire de nombres transcendants. La démonstration précédente (de Cantor) ne nous donne pas directement aucun exemple effectif d'un nombre transcedant. Cependant la démonstration que le nombre e n'est pas algébrique nous donne en même temps un exemple effectif d'un nombre transcendant. De même, la démonstration connue de Liouville d'existence de nombres transcendants permet de déterminer effecti-

vement de tels nombres. On peut aussi obtenir un exemple effectif d'un nombre transcendant en rangeant dans une suite infinie déterminée tous les nombres algébriques développés en fractions décimales et en appliquant à la suite double de chiffres ainsi obtenue la méthode de diagonales (comme dans la démonstration connue de théorème que l'ensemble de nombres réels est non dénombrable).

2) Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ un nombre fini donné quelconque de nombres premiers. Il résulte du raisonnement connu d'Euclide qu'il existe un nombre premier p autre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ce raisonnement ne nous donne pas cependant aucun exemple effectif d'un tel nombre. Or il serait facile de déterminer une loi d'après laquelle à tout ensemble fini de nombre premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ correspondrait un nombre premier p distinct de tous les nombres de cet ensemble: il suffirait de désigner par p le plus petit diviseur du nombre $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, supérieur à 1.

3) Lorsque, en se basant sur le théorème de Cantor-Bernstein nous concluons que deux ensembles M et N ont même puissance, nous n'avons pas encore aucun exemple effectif d'une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N, seulement une démonstration qu'une telle correspondance existe. On pourrait cependant démontrer que si les correspondances biunivoques entre les éléments de l'ensemble M et ceux d'un sous-ensemble N_1 de N d'une part, et entre les éléments de N et ceux d'un sous-ensemble M_1 de M — d'autre part sont données effectivement, on peut définir effectivement une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux de N. On pourrait dire que deux ensembles M et N ont *effectivement même puissance*, si nous savons déterminer une correspondance biunivoque entre les éléments de ces ensembles (M. Borel appelle *effectivement énumérable* un ensemble pour lequel nous savons établir au moins une loi d'après laquelle à tout élément de l'ensemble considéré correspond un nombre naturel bien déterminé et réciproquement [1])). P. e. l'ensemble de tous les ensembles de nombres rationnels a effectivement même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels. Il est de même pour l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels. Or l'ensemble de tous les ensembles denombrables de nombres réels n'a pas effectivement même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels (S'il l'avait effectivement, on pourrait donner un exemple effectif d'un ensemble non mesurable (L) [2])).

4) On peut donner un exemple effectif d'une décomposition de l'intervalle en $\aleph_1$ ensembles non vides sans points communs [3]). Il en résulte tout de suite qu'on peut donner des exemples effectifs de $\aleph_1$ et de $2^{\aleph_1}$ fonctions distinctes d'une variable réelle. On pourrait même donner un exemple effectif de $\aleph_1$ fonctions di-

[1]) Dans une Note récente (Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives: *Acc. dei Lincei* vol. 28 serie 5, 1919, p. 164) M. Borel appelle effectivement énumérable un ensemble *donné sous la forme* $u_1, u_2, u_3, \ldots$, chaque élément u_n étant connu quand on donne son rang (et inversement).

[2]) Voir mon mémoire: „L'axiome de M. Zermelo etc.". *Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie* 1918, p. 145

[3]) L. c. p. 110.

stinctes représentables analytiquement [1]). Or, nous ne connaissons aucun exemple effectif de $\aleph_1$ nombres réels différents.

5) On ne sait pas définir effectivement une loi d'après laquelle à tout ensemble dénombrable de nombres réels correspondrait un élément déterminé de cet ensemble (Si l'on le saurait, on aurait aussi ùn exemple effectif d'un ensemble non mesurable (L)). Or, on peut définir une loi, d'après laquelle à tout ensemble G_δ dénombrable correspond un point déterminé de cet ensemble [2]). Ce parceque les ensembles G_δ dénombrables sont clairsemés et parcequ'on peut sans peine définir une loi, d'après laquelle à tout ensemble clairsemé correspond un point (isolé) de cet ensemble [3]). On ne sait pas cependant définir effectivement une loi d'après laquelle à tout ensemble G_δ correspondrait un point ce cet ensemble; si l'on le saurait, on pourrait donner un exemple effectif de $\aleph_1$ nombres réels différents. En effet, admettons qu'on a une loi φ, d'après laquelle à tout ensemble G_δ linéaire, E, correspond un point $\varphi(E)$ de cet ensemble. Posons $x_1 = 0$ et admettons que nous avons déjà défini tous les points x_ξ pour $\xi < \alpha$, α étant un nombre ordinal donné $< \Omega$, et soit E_α l'ensemble de tous ces points. L'ensemble E_α est au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$): son complémentaire CE_α est donc un ensemble G_δ et nous pouvons poser $x_\alpha = \varphi(CE_\alpha)$. Les nombres x_α $(1 \leqslant \alpha < \Omega)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie, et leur ensemble E est un ensemble de $\aleph_1$ nombres réels différents.

6) On peut définir effectivement un nombre, même un entier qui n'est pas *calculable* au sens de M. Borel. Désignons p. e. par k le plus petit nombre naturel pour lequel subsiste le théorème: „Tout nombre naturel n est une somme de k ou moins bicarrés de nombres naturels". On démontre dans la théorie des nombres qu'un tel nombre k existe et qu'il satisfait à l'inégalité $19 \leqslant k \leqslant 37$. Or nous ne savons pas déterminer ce nombre k à 1 près. En particulier, nous ne savons pas si $k = 19$, comme l'affirmait Waring, ou non.

On peut aussi définir effectivement un nombre calculable r, dont on sait d'avance qu'il est rationnel, mais pour lequel on ne connait aucune méthode de résoudre la question si $r = 1$ ou non. En effet, désignons par a_n le nombre 1 si le nombre naturel n est une somme de 19 ou moins bicarrés de nombres naturels et le nombre 0 dans le cas contraire. On pourrait déterminer sans peine une méthode qui permettrait de calculer le nombre a_n pour tout n naturel Posons maintenant $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{2^n}$ — ce sera, comme on voit sans peine, un nombre rationnel (le nombre 1, si tous les a_n sont $= 1$, et une fraction dyadique finie —

[1]) Voir ma note: „Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire". Ce journal, t. I, p. 141.

[2]) On appelle G_δ les ensembles qui sont produits d'une infinité dénombrable de domaines. Le problème d'existence d'une loi d'après laquelle à tout ensemble G_δ correspondrait un point de cet ensemble m'a été posé par mon élève M. Zalcwasser.

[3]) Voir ce journal, t. I, p. 2.

dans le cas contraire) et il est bien évident que le nombre r est calculable (nous savons calculer toutes les réduites de son développement dyadique). Cependant nous ne savons pas si $r=1$ ou non (S'il serait $r=1$, nous aurions $k=19$, sinon: $k>19$).

7) On peut sans peine définir effectivement une loi, d'après laquelle à tout ensemble de points infini et borné E correspond un point d'accumulation déterminé $a(E)$ de cet ensemble (appartenant à E ou non). Or nous ne savons pas définir une loi, d'après laquelle à tout ensemble non dénombrable E correspond un point d'accumulation de E appartenant à E (quoique l'existence d'un tel point dans tout ensemble non dénombrable de points peut être démontrée sans faire appel à l'axiome du choix [1]).

On peut sans peine définir effectivement une loi, d'après laquelle à tout ensemble linéaire borné E non dénombrable correspondent deux points de condensation distincts $c_1(E)$ et $c_2(E)$ de cet ensemble (qui lui appartiennent ou non). En effet, il suffit de désigner par $c_1(E)$ la borne supérieure de tous les nombres a tels que l'ensemble E contient un sous-ensemble au plus dénombrable (ou vide) de nombres $x<a$, et par $c_2(E)$ — la borne inférieure de tous les nombres b, tels que E contient un sous-ensemble au plus dénombrable (ou vide) de nombres $x>b$. Or nous ne savons pas démontrer qu'il est toujours $c_1(E)<c_2(E)$ autrement qu'en faisant appel à l'axiome de M. Zermelo [2]).

Dans tous les cas connus où nous ne savons pas donner des exemples effectifs, l'existence des objets considérés résulte de l'axiome de Zermelo. Il est ainsi p. e. pour les ensembles non mesurables (L), pour les ensembles de nombres réels de puissance $\aleph_1$, pour les résolutions discontinues de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=$ $=f(x)+f(y)$, pour la *base* de M. Hamel, pour l'ensemble non dénombrable de points qui ne contient aucun sous-ensemble parfait, pour l'ensemble de points qui, de même que son complémentaire, est de deuxième catégorie sur chaque segment, pour la correspondance biunivoque entre l'ensemble de toutes les fonctions de la deuxième classe et l'ensemble de tous les nombres réels, etc. [3]). Or, il n'en résulte pas qu'en se basant sur l'axiome du choix, nous n'obtenons jamais des exemples effectifs. Il peut notamment arriver qu'un objet soit défini effectivement (et même sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo), mais la démonstration que cet objet jouit de propriétés désirées fasse appel à l'axiome du choix. Il est ainsi p. e. pour l'exemple de M. Lebesgue d'une fonction échappant à la classification de M. Baire, comme j'ai le prouvé sur une autre

[1]) Cf. mon mémoire cité, p. 123.

[2]) L. c. p. 124.

[3]) Cf. l. c. p. 140.

place[1]). Nous nous occuperons ici d'un autre cas très instructif de ce genre.

Considérons tous les ensembles bien ordonnés, formés de nombres réels distincts (mais ordonnés pas nécessairement d'après la grandeur de ces nombres)[2]). Divisons ces ensembles en classes, en rangeant dans une même classe deux ensembles dans ce et seulement dans ce cas s'il sont semblables: soit E l'ensemble de toutes les classes K ainsi obtenues, la classe composée de l'ensemble vide y incluse. L'ensemble E peut être sans peine bien ordonné: il suffit de considérer de deux classes différentes K_1 et K_2 de E celle comme antérieure qui contient des ensembles dont le type ordinal est plus petit. Soit K une classe donnée de E: on démontre sans peine que l'ensemble de toutes les classes de E qui précèdent K (c'est-à-dire: le segment de E, déterminé par K) est semblable à tout ensemble appartenant à la classe K.

Si l'ensemble E avait une puissance inférieure ou égale à celle du continu, il existerait un ensemble G, formé de nombres réels ayant même puissance que E: l'application de E sur G ordonne en même temps G semblablement à E. Il existerait donc un ensemble bien ordonné G, formé de nombres réels et semblable à E: soit K la classe de E à laquelle appartient G. G étant semblable au segment de E, déterminé par la classe K, l'ensemble bien ordonné E serait semblable à son segment, ce qui est, comme on sait, impossible. L'ensemble E ne peut donc avoir une puissance inférieure ou égale à celle du continu.

Nous avons donc défini effectivement un ensemble E et nous avons démontré sans faire appel à l'axiome de M. Zermelo que la puissance de E n'est pas inférieure ni égale à celle du continu. Or, en se basant sur l'axiome de M. Zermelo (duquel résulte, comme on sait, la trichotomie), nous en concluons que la puissance de E est supérieure à celle du continu.

Donc: on peut donner un exemple effectif d'un ensemble bien ordonné dont la puissance est supérieure à celle du continu, mais la démonstration que l'ensemble considéré jouit de la propriété désirée fait appel à l'axiome de M. Zermelo.

[1]) L. c. p. 136.

[2]) Cf. F. Hartogs: Math. Ann. 76, p. 438—443.

L'ensemble bien ordonné E ayant une puissance supérieure à celle du continu, il existe des segments de E de puissance du continu: soit E_0 le plus petit d'entre eux. L'ensemble E_0 ainsi défini sera un exemple effectif d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu. Ici, non seulement la démonstration de cette propriété de E_0, mais même la définition de E_0 est fondée sur l'axiome du choix (sans recours auquel on ne saurait pas que E a la puissance supérieure à celle du continu). Nous démontrerons maintenant comment on peut définir sans l'intervention de l'axiome de M. Zermelo un ensemble bien ordonné, dont on peut démontrer ensuite en s'appuyant sur cet axiome qu'il a la puissance du continu.

Définissons à ce but un ensemble E_1 comme il suit S'il existe des segments de E dont la puissance n'est pas inférieure à celle du continu, il existe entre eux un qui est le plus petit: désignons-le alors par E_1; s'il n'existe pas de tels segments de E, posons $E_1 = E$. L'ensemble bien ordonné E_1 est ainsi défini sans faire appel à l'axiome du choix et on voit sans peine (aussi sans faire appel à cet axiome) que la puissance de E_1 n'est pas inférieure à celle du continu et que tout segment de E_1 a une puissance inférieure à celle du continu. Il en résulte (sans appel à l'axiome de M. Zermelo) que la puissance de E_1 n'est pas supérieure à celle du continu (En effet, si E_1 avait une puissance supérieure à celle du continu, il existerait un sous-ensemble E' de E_1 de puissance du continu, et E', comme un sous-ensemble bien ordonné de E_1, serait, d'après un théorème connu, semblable à E_1 ou à un segment de E_1, ce qui est impossible, E_1 ayant une puissance supérieure à celle de E', d'aprés l'hypothèse, et tout segment de E_1 — une puissance inférieure à celle de E_1, d'après la propriété de E_1).

Donc: on peut définir effectivement un ensemble bien ordonné dont on peut démontrer sans l'aide de l'axiome du choix qu'il a une puissance qui n'est pas inférieure ni supérieure à celle du continu. Or, il résulte tout de suite de l'axiome du choix que la puissance de notre ensemble E_1 est égale à celle du continu. Or il importe de remarquer que l'ensemble E_1 n'a pas effectivement même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels, puisque nous ne savons pas déterminer une correspondance biunivoque entre tous les éléments de E_1 et tous les nombres réels.

Si, au lieu de partir de l'ensemble de tous les nombres réels, comme nous l'avons fait plus haut, on partait d'un ensemble donné quelconque (ce que fait M. Hartogs l. c. à un autre but) et raisonnait comme plus haut, avec des modifications évidentes, on arrivait sans peine aux conclusions suivantes:

On peut définir effectivement une loi, d'après laquelle à tout ensemble donné M correspond un ensemble bien ordonné déterminé $E(M)$ et on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que la puissance de l'ensemble $E(M)$ n'est pas inférieure ni supérieure à celle de l'ensemble M et que tout segment de $E(M)$ a une puissance inférieure à celle de M. On pourrait encore dire qu'on peut effectivement faire correspondre à tout nombre cardinal m un aleph $\aleph(m)$, dont on peut démontrer sans l'aide de l'axiome du choix qu'il n'est pas ni plus grand ni plus petit que m et que tout nombre cardinal plus petit que $\aleph(m)$ est en même temps plus petit que m (Il est bien évident qu'un tel aleph est unique pour tout nombre cardinal m). Il résulte naturellement de l'axiome du choix que $m = \aleph(m)$.