Ανθυφαίρεση των ριζών των αριθμών 3, 13 , 19 με την μονάδα

Στην επίλυση αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό :

$\alpha = \kappa_o\beta + \alpha_1$
$\beta = \lambda_o\alpha_1 + \beta_1$
....
$\alpha_\nu = \kappa_\nu\beta_\nu + \alpha_{\nu+1}$
$\beta_\nu = \lambda_\nu\alpha_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}$

με $\alpha>\beta>\alpha_1>\beta_1>.....>\alpha_\nu>\beta_\nu>.....$

και $Αν\theta(\alpha,\beta)=[\kappa_o,\lambda_o,\dots,\kappa_\nu,\lambda_\nu,\dots]$

(i) Αν $\alpha^2 = 3\beta^2$, παίρνουμε

υποθέτουμε ότι $\kappa_o=1$ τότε $\alpha = 1\beta + \alpha_1$
άρα $\beta<\alpha<2\beta$
ή $\beta^2<\alpha^2<4\beta^2$
ή $\beta^2<3\beta^2<4\beta^2$, κάτι που είναι ορθό

ακόμη από $\alpha = 1\beta + \alpha_1$ παίρνουμε $\alpha_1 = \alpha-\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_o=1$ τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

άρα $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha-\beta<\beta<2(\alpha-\beta)$
ή $\alpha-\beta<\beta$ και $\beta<2(\alpha-\beta)$
ή $\alpha<2\beta$ και $3\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<4\beta^2$ και $9\beta^2<4\alpha^2$
ή $3\beta^2<4\beta^2$ και $9\beta^2<12\beta^2$
τα οποία ισχύουν.

τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$ ¤ $\beta_1 = \beta- \alpha_1$ ¤ $\beta_1 = \beta- (\alpha-\beta)$ ¤ $\beta_1 = 2\beta - \alpha$

υποθέτουμε ότι κ1=1 τότε $\alpha_1 = 1\beta_1 + \alpha_2$

άρα $\beta_1 < \alpha_1 < 2\beta_1$
ή $2\beta - \alpha < \alpha - \beta < 2(2\beta - \alpha)$
ή $2\beta - \alpha < \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta < 4\beta - 2\alpha$
ή $3\beta < 2\alpha$ και $3\alpha < 5\beta$
ή $9\beta^2 < 4\alpha^2$ και $9\alpha^2 < 25\beta^2$
ή $9\beta^2 < 12\beta^2$ και $27\beta^2 < 25\beta^2$
ισχύει άτοπο

υποθέτουμε ότι κ1=2 τότε $\alpha_1 = 2\beta_1 + \alpha_2$

άρα $2\beta_1 < \alpha_1 < 3\beta_1$
ή $2(2\beta - \alpha) < \alpha - \beta < 3(2\beta - \alpha)$
ή $4\beta - 2\alpha < \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta < 6\beta - 3\alpha$
ή $5\beta < 3\alpha$ και $4\alpha < 7\beta$
ή $25\beta^2 < 9\alpha^2$ και $16\alpha^2 < 49\beta^2$
ή $25\beta^2 < 27\beta^2$ και $48\beta^2 < 49\beta^2$
ορθό ορθό

τότε $\alpha_1 = 2\beta_1 + \alpha_2$ ¤ $\alpha_2 = 3\alpha - 5\beta$

υποθέτουμε λ1=1 τότε $\beta_1 = 1\alpha_2 + \beta_2$

άρα $\alpha_2 < \beta_1 < 2\alpha_2$
ή $3\alpha - 5\beta < 2\beta - \alpha < 2(3\alpha - 5\beta)$
ή $3\alpha - 5\beta < 2\beta - \alpha$ και $2\beta - \alpha < 6\alpha - 10\beta$
ή $4\alpha < 7\beta$ και $12\beta < 7\alpha$
ή $16\alpha^2 < 49\beta^2$ και $144\beta^2 < 49\alpha^2$
ή $48\beta^2 < 49\beta^2$ και $144\beta^2 < 147\beta^2$
τα οποία ισχύουν

τότε $\beta_1 = 1\alpha_2 + \beta_2$ ‹ $\beta_2 = 7\beta - 4\alpha$

Όμως ισχύει $\beta / \alpha_1 = \beta_1 / \alpha_2$ ‹ $\alpha^2 = 3\beta^2$ αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε Ανθ(α, β) = [1, <u>1,2</u>]
Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $q_1 = k_0 = 1$

$p_2 = \lambda_0 = 1$ $q_2 = 1 + k_0\lambda_0 = 2$

$p_3 = k_1 p_2 + p_1 = 3$ $q_3 = k_1 q_2 + q_1 = 5$

$p_4 = \lambda_1 p_3 + p_2 = 4$ $\qquad q_4 = \lambda_1 q_3 + q_2 = 7$

$p_5 = k_2 p_4 + p_3 = 11$ $\qquad q_5 = k_2 q_4 + q_3 = 19$

$p_6 = \lambda_2 p_5 + p_4 = 15$ $\qquad q_6 = \lambda_2 q_5 + q_4 = 26$

$p_7 = k_3 p_6 + p_5 = 41$ $\qquad q_7 = k_3 q_6 + q_5 = 71$

$p_8 = \lambda_3 p_7 + p_6 = 56$ $\qquad q_8 = \lambda_3 q_7 + q_6 = 97$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2q_1 - p_1q_2 = -1 = (-1)^1$
$p_3q_2 - p_2q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4q_3 - p_3q_4 = -1 = (-1)^3$
$p_5q_4 - p_4q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6q_5 - p_5q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7q_6 - p_6q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8q_7 - p_7q_8 = -1 = (-1)^7$

(ii) Όταν $\alpha^2 = 13\beta^2$ θα έχουμε

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=1$, τότε $\alpha = 1\beta + \alpha_1$

τότε $\beta<\alpha<2\beta$
ή $\beta^2< \alpha^2<4\beta^2$
ή $\beta^2<13\beta^2 <4\beta^2$, Άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=2$, τότε $\alpha=2\beta+\alpha_1$

τότε $2\beta<\alpha<3\beta$
ή $4\beta^2< \alpha^2<9\beta^2$
ή $4\beta^2<13\beta^2 <9\beta^2$, Άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=3$, τότε $\alpha=3\beta+\alpha_1$

τότε $3\beta<\alpha<4\beta$
ή $9\beta^2<\alpha^2<16\beta^2$

ή $9\beta^2<13\beta^2<16\beta^2$ αληθές

άρα $\alpha=3\beta+\alpha_1$ ‹ $\alpha_1=\alpha-3\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=1$, τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

τότε $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha-3\beta<\beta<2\alpha-6\beta$
ή $\alpha<4\beta$ και $7\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<16\beta^2$ και $49\beta^2<4\alpha^2$
ή $13\beta^2<16\beta^2$ και $49\beta^2<52\beta^2$ ισχύουν

άρα $\beta=1\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=4\beta-\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_1=1$, τότε $\alpha_1=1\beta_1+\alpha_2$

άρα $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $4\beta-\alpha<\alpha-3\beta<8\beta-2\alpha$
ή $7\beta<2\alpha$ και $3\alpha<11\beta$
ή $49\beta^2<4\alpha^2$ και $9\alpha^2<121\beta^2$
ή $49\beta^2<52\beta^2$ και $117\beta^2<121\beta^2$, ορθές

επιπλέον $\alpha_1=\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=2\alpha-7\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_1=1$, τότε $\beta_1=1\alpha_2+\beta_2$

έτσι $\alpha_2<\beta_1<2\alpha_2$
ή $2\alpha-7\beta<4\beta-\alpha<4\alpha-14\beta$
ή $3\alpha<11\beta$ και $18\beta<5\alpha$
ή $9\alpha^2<121\beta^2$ και $324\beta^2<25\beta^2$
ή $117\beta^2<121\beta^2$ και $324\beta^2<325\beta^2$,που ισχύουν

άρα $\beta_1=1\alpha_2+\beta_2$ ‹ $\beta_2=11\beta-3\alpha$

υποθέτουμε ότι $κ_2=1$, τότε $α_2 = β_2 + α_3$

άρα $β_2<α_2<2β_2$

ή $11β - 3α<2α - 7β<22β - 6α$

ή $18β< 5α$ και $8α<29β$

ή $324β^2<325β^2$ και $832β^2<841β^2$,ορθές

τότε $α_2=β_2 +α_3 < α_3=5α - 18β$

υποθέτουμε ότι $λ_2=1$, τότε $β_2=α_3 +β_3$

άρα $α_3<β_2<2α_3$

ή $5α - 18β<11β - 3α<2(5α - 18β)$

ή $8α<29β$ και $47β<13α$

ή $832β^2<841β^2$ και $2209β^2<2197β^2$,άτοπο

Ομοίως για $λ_2=2$ ή 3 ή 4 ή 5 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $λ_2=1$, τότε $β_2=6α_3 +β_3$

έτσι $6α_3<β_2<7α_3$

ή $30α - 108β<11β - 3α<35α - 126β$

ή $33α<119β$ και $137β<38α$

ή $14157β^2<14161β^2$ και $18769β^2<18772β^2$,οι οποίες ισχύουν

ακόμη $β_2=α_3 +β_3 < β_3 =119β - 33α$

υποθέτουμε ότι κ3=1, τότε $α_3 = β_3 +α_4$

έτσι $β_3<α_3<2β_3$

ή $119β - 33α<5α -18β<238β - 66α$

ή $137β<38α$ και $71α<256β$

ή $18769β^2<18772β^2$ και $65533β^2<65536β^2$

επιπλέον $α_3 = β_3 +α_4 < α_4=38α - 137β$

Όμως ισχύει $\beta / \alpha_1 = \alpha_3/\beta_3 \; < \; \beta*\beta_3=\alpha_1*\alpha_3 \; < \; 13\beta^2=\alpha^2$, αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε $Ανθ(\alpha, \beta) = [3,\underline{1,1,1,1,6}\,]$

Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $\quad q_1 = k_0=3$

$p_2 = \lambda_0 = 1$ $\quad q_2 = 1 + k_0\lambda_0 =4$

$p_3 = k_1p_2 +p_1 =2$ $\quad q_3 = k_1q_2 + q_1 =7$

$p_4 = \lambda_1p_3 +p_2 =3$ $\quad q_4 = \lambda_1q_3 + q_2=11$

$p_5 = k_2p_4 +p_3 =5$ $\quad q_5 = k_2q_4 + q_3 =18$

$p_6 = \lambda_2p_5 + p_4=33$ $\quad q_6 = \lambda_2q_5 + q_4 =119$

$p_7 = k_3p_6 + p_5 =38$ $\quad q_7 = k_3q_6 + q_5 =137$

$p_8 = \lambda_3p_7 + p_6 =71$ $\quad q_8 = \lambda_3q_7 +q_6=256$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2q_1 - p_1q_2 =-1 = (-1)^1$
$p_3q_2 - p_2q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4q_3 - p_3q_4 = -1 = (-1)^3$
$p_5q_4 - p_4q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6q_5 - p_5q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7q_6 - p_6q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8q_7 - p_7q_8 = -1 = (-1)^7$

(iii) Όταν $\alpha^2 =19\beta^2$ θα έχουμε

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=1$, τότε $\alpha =1\beta + \alpha_1$

άρα $\quad \beta<\alpha<2\beta$
ή $\quad \beta^2<\alpha^2<4\beta^2$

ή $\beta^2<19\beta^2<4\beta^2$,άτοπο

ομοίως για $\kappa_0=2$ ή 3 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=4$, τότε $\alpha = 4\beta + \alpha_1$

έτσι $4\beta<\alpha<5\beta$
ή $16\beta^2<\alpha^2<25\beta^2$ αληθές

επιπλέον $\alpha = 4\beta + \alpha_1$ ‹ $\alpha_1 = \alpha - 4\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=1$, τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

άρα $\alpha_1<\beta< 2\alpha_1$
ή $\alpha - 4\beta <\beta<2(\alpha - 4\beta)$
ή $\alpha - 4\beta <\beta$ και $\beta< 2\alpha - 8\beta$
ή $\alpha<5\beta$ και $9\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<25\beta^2$ και $81\beta^2<4\alpha^2$
ή $19\beta^2< 25\beta^2$ και $81\beta^2< 76\beta^2$, άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=2$, τότε $\beta = 2\alpha_1 + \beta_1$

άρα $2\alpha_1<\beta< 3\alpha_1$
ή $2\alpha - 8\beta<\beta$ και $\beta< 3\alpha - 12\beta$
ή $2\alpha<9\beta$ και $13\beta<3\alpha$
ή $4\alpha^2<81\beta^2$ και $169\beta^2<9\alpha^2$
ή $76\beta^2< 81\beta^2$ και $169\beta^2< 171\beta^2$, ισχύουν

επομένως $\beta=2\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=9\beta-2\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_1=1$, τότε $\alpha_1 = \beta_1 + \alpha_2$

άρα $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $9\beta - 2\alpha< \alpha -4\beta< 18\beta - 4\alpha$
ή $13\beta<3\alpha$ και $5\alpha<22\beta$
ή $169\beta^2<9\alpha^2$ και $25\alpha^2< 484\beta^2$
ή $169\beta^2<171\beta^2$ και $475\beta^2<484\beta^2$, που είναι ορθές

ακόμη $\alpha_1=\beta_1+\alpha_2 \ ‹ \ \alpha_2=3\alpha-13\beta$

αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1=1$ ή 2 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_1=3$, τότε $\beta_1 = 3\alpha_2 + \beta_2$

άρα $3\alpha_2<\beta_1<4\alpha_2$
ή $9\alpha - 39\beta< 9\beta - 2\alpha < 12\alpha - 52\beta$
ή $11\alpha< 48\beta$ και $61\beta< 14\alpha$
ή $121\alpha^2< 2304\beta^2$ και $3721\beta^2< 196\alpha^2$
ή $2299\beta^2< 2304\beta^2$ και $3721\beta^2< 3724\beta^2$, που ισχύουν

ακόμη $\beta_1 = 3\alpha_2 + \beta_2 \ ‹ \ \beta_2 = 48\beta - 11\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_2=1$, τότε $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha_3$

αφού $\beta_2< \alpha_2<2\beta_2$
ή $48\beta - 11\alpha< 3\alpha - 13\beta< 96\beta - 22\alpha$
ή $61\beta< 14\alpha$ και $25\alpha< 109\beta$
ή $3721\beta^2< 196\alpha^2$ και $625\alpha^2<11881\beta^2$
ή $3721\beta^2< 3724\beta^2$ και $11875\beta^2<11881\beta^2$, που ισχύουν

επίσης $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha_3 \ ‹ \ \alpha_3=14\alpha - 61\beta$

αν υποθέσουμε ότι $\lambda_2=1$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_2=2$, τότε $\beta_2 = 2\alpha_3 + \beta_3$

άρα $2\alpha_3< \beta_2<3\alpha_3$
ή $28\alpha - 122\beta< 48\beta - 11\alpha< 42\alpha - 183\beta$
ή $39\alpha<170\beta$ και $231\beta<53\alpha$
ή $1521\alpha^2<28900\beta^2$ και $53361\beta^2<2809\alpha^2$
ή $28899\beta^2<28900\beta^2$ και $53361\beta^2<53371\beta^2$, που ισχύουν

έχουμε $\beta_2 = 2\alpha_3 + \beta_3 \ ‹ \ \beta_3=170\beta-39\alpha$

αν υποθέσουμε ότι $κ_3=1$ ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7, καταλήγουμε άτοπο

υποθέτουμε ότι $κ_3=8$, και παίρνουμε $α_3 = 8β_3 + α_4$

άρα $8β_3<α_3<9β_3$
ή $1360β-321α<14α - 61β<1530β-351α$
ή $1421β<326α$ και $365α<1591β$
ή $2019241β^2<106276α^2$ και $133225α^2<2531281β^2$
ή $2019241β^2<2019244β^2$ και $2531275α^2<2531281β^2$

έχουμε $α_3 = 8β_3 + α_4$ ‹ $α_4=326α-1421β$

Όμως ισχύει $β / α_1 = β_3/α_4$ ‹ $β*α_4=α_1*β_3$ ‹ $19β^2=α^2$, αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε $Ανθ(α, β) = [4,\underline{2,1,3,1,2,8}]$

Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $q_1 = k_0=4$

$p_2 = λ_0 =2$ $q_2 = 1 + k_0λ_0 =9$

$p_3 = k_1p_2 +p_1 =3$ $q_3 = k_1q_2 + q_1 =13$

$p_4 = λ_1p_3 +p_2 =11$ $q_4 = λ_1q_3 + q_2=48$

$p_5 = k_2p_4 +p_3 =14$ $q_5 = k_2q_4 + q_3 =61$

$p_6 = λ_2p_5 + p_4=39$ $q_6 = λ_2q_5 + q_4 =170$

$p_7 = k_3p_6 + p_5 =326$ $q_7 = k_3q_6 + q_5 =1421$

$p_8 = λ_3p_7 + p_6 =691$ $q_8 = λ_3q_7 +q_6=3012$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2q_1 - p_1q_2 =-1 = (-1)^1$
$p_3q_2 - p_2q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4q_3 - p_3q_4 = -1 = (-1)^3$

$p_5q_4 - p_4q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6q_5 - p_5q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7q_6 - p_6q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8q_7 - p_7q_8 = -1 = (-1)^7$

Εύρεση ισοδυναμιών επί γενικευμένων ανθυφαιρέσεων

(i) Ξέρουμε ότι $Ανθ(α,β)=[ν,\underline{2ν}]$

τότε $α=νβ+α_1$ ‹ $\boldsymbol{α_1=α-νβ}$

$β_1=β-2ν(α-νβ)=β-2να+2ν^2β$ ‹ $\boldsymbol{β_1=(1+2ν^2)β-2να}$

$Ανθ(α,β)=[ν,\underline{2ν}]$ fl $\boldsymbol{β/α_1=α_1/β_1}$ ‹ $ββ_1=α_1α_1$
‹ $β[(1+2ν^2)β-2να]= (α-νβ)\,(α-νβ)$
‹ $(1+2ν^2)β^2-2ναβ=α^2-2ναβ+ν^2β$
‹ $\boldsymbol{α^2=(1+ν^2)\,β^2}$

(ii) Ξέρουμε ότι $Ανθ(α,β)=[ν, \underline{ν, 2ν}]$

τότε $α=νβ+α_1$ ‹ $\boldsymbol{α_1=α-νβ}$

$β=να_1+β_1$ ‹ $β_1=β-να_1=β-ν(α-νβ)$
$=β-να+ν^2β$
‹ $\boldsymbol{β1=(1+ν^2)β-να}$

$α_1=2νβ_1+α_2$ ‹ $α_2=α_1-2νβ_1$
$=α-νβ-2ν[(1+ν^2)-να]$
$=α-νβ-2ν(1+ν^2)β+2ν^2α$
‹ $\boldsymbol{α_2=(2ν^2+1)α-ν[1+2(1+ν^2)]β}$

$Ανθ(α,β)=[ν, \underline{ν, 2ν}]$ fl $\boldsymbol{β/α_1=β_1/α_2}$ ‹ $βα_2=α_1β_1$ ‹
‹ $β\{(2ν^2+1)α-ν[1+2(1+ν^2)]β\}=(α-νβ)\,[(1+ν^2)β-να]$
‹ $(2ν^2+1)αβ-ν[1+2(1+ν^2)β^2=(1+ν^2)αβ-να^2-ν(1+ν^2)β^2+ν^2αβ$
‹ $(2ν^2+1)αβ-ν[1+2(1+ν^2)β^2=(2ν^2+1)αβ-να^2-ν(1+ν^2)β^2$
‹ $\boldsymbol{α^2=(ν^2+2)β^2}$

(iii) Ξέρουμε ότι $Αν\theta(\alpha,\beta)=[\nu-1, \underline{1, 2\nu-2}]$

τότε $\alpha=(\nu-1)\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-(\nu-1)\beta}$

$\beta=\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta-\alpha_1$
$=\beta-\alpha+(\nu-1)\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=\nu\beta-\alpha}$

$\alpha_1=(2\nu-2)\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha_1-(2\nu-2)\beta_1$
$=\alpha-(\nu-1)\beta-(2\nu-2)(\nu\beta-\alpha)$
$=\alpha-(\nu-1)\beta-\nu(2\nu-2)\beta+(2\nu-2)\alpha$
$=(2\nu-1)\alpha-(\nu-1+2\nu^2-2\nu)\beta$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=(2\nu-1)\alpha-(2\nu^2-\nu-1)\beta}$

$Αν\theta(\alpha,\beta)=[\nu-1, \underline{1, 2\nu-2}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta[(2\nu-1)\alpha-(2\nu^2-\nu-1)\beta] =[\alpha-(\nu-1)\beta][\nu\beta-\alpha]$
‹ $(2\nu-1)\alpha\beta-(2\nu^2-\nu-1)\beta^2=\nu\alpha\beta-\alpha^2-\nu(\nu-1)\beta^2+(\nu-1)\alpha\beta$
‹ $(2\nu-1)\alpha\beta-(2\nu^2-\nu-1)\beta^2 =(2\nu-1)\alpha\beta-\alpha^2-\nu(\nu-1)\beta^2$
‹ $\boldsymbol{\alpha^2=(\nu^2-1)\beta^2}$

(iv) Ξέρουμε ότι $Αν\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{4, 2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=4\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta-4\alpha_1$
$=\beta-4\alpha+4\nu\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+4\nu)\beta-4\alpha}$

$\alpha_1=2\nu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha-\nu\beta-2\nu[(1+4\nu)\beta-4\alpha]$
$=\alpha-\nu\beta-2\nu(1+4\nu)\beta+8\nu\alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=(8\nu+1)\alpha-\nu(3+8\nu)\beta}$

$Αν\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{4, 2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta[(8\nu+1)\alpha-\nu(3+8\nu)\beta] =[\alpha-\nu\beta][(1+4\nu)\beta-4\alpha]$
‹ $(8\nu+1)\alpha\beta-\nu(3+8\nu)\beta^2 =(1+4\nu)\alpha\beta-4\alpha^2-\nu(1+4\nu)\beta^2+4\nu\alpha\beta$
‹ $-\nu(3+8\nu)\beta^2 =-4\alpha^2-\nu(1+4\nu)\beta^2$
‹ $\boldsymbol{\nu(1+2\nu)\beta^2=2\alpha^2}$

(v) Ξέρουμε ότι $Ανθ(α,β)=[μ, \underline{μ, 2μ}]$

τότε $α=μβ+α_1$ ‹ $\boldsymbol{α_1=α-μβ}$

$β=μα+β_1$ ‹ $β_1=β - μα_1$
$=β- μα + μ^2β$
‹ $\boldsymbol{β_1=(1+μ^2)β – μα}$

$α_1=2νβ_1+α_2$ ‹ $α_2=α-μβ-2ν[(1+μ^2)β – μα]$
$=α-μβ-2ν(1+μ^2)β+2νμα$
‹ $\boldsymbol{α_2=-(2ν+2νμ^2+μ)β+(1+2νμ)α}$

$Ανθ(α,β)=[μ, \underline{μ,2ν}]$ fl $\boldsymbol{β/α_1=β_1/α_2}$ ‹ $βα_2=α_1β_1$ ‹
‹ $β[-(2ν+2νμ^2+μ)β+(1+2νμ)α]=(α-μβ)[(1+μ^2)β – μα]$
‹ $-(2ν+2νμ^2+μ)β^2+(1+2νμ)αβ=(1+μ^2)αβ-μ(1+μ^2)β^2 –μ^2+μ^2αβ$
‹ $(2ν+2νμ^2-μ^3)β^2+(μ^2+2νμ)αβ=μα^2$

Αρκεί $μ^2+2νμ=0$ ‹ $μ=ν$

τότε[1] $Ανθ(α,β)=[μ, \underline{μ,2ν}]$ fl $\boldsymbol{(2ν+ν^2μ)β^2=μα^2}$

(vi) Ξέρουμε ότι $Ανθ(α,β)=[ν, \underline{1, 1, 2ν}]$

τότε $α=(ν-1)β+α_1$ ‹ $\boldsymbol{α_1=α-νβ}$

$β=1α+β_1$ ‹ $β_1=β - α_1$
$=β- α + νβ$
‹ $\boldsymbol{β_1=(1+ν)β-α}$

$α_1=1β_1+α_2$ ‹ $α_2=α1 – β1$
$=α-νβ -(1+ν)β - α$
‹ $\boldsymbol{α_2=-(2ν+1)β +2α}$

$β_1=2να_2+β_2$ ‹ $β_2=(ν+1)β-α-2ν[-(2ν+1)β+2α]$
$=(ν+1)β-α+2ν(2ν+1)β-4να$
$=(ν+1+4ν^2+2ν)β-(4ν+1)α$
‹ $\boldsymbol{β_2=(4ν^2+3ν+1)β-(4ν+1)α}$

$Ανθ(α,β)=[ν, \underline{1, 1, 2ν}]$ fl $\boldsymbol{β/α_1=α_2/β_2}$ ‹ $ββ_2=α_1α_2$ ‹
‹ $β[(4ν^2+3ν+1)β-(4ν+1)α]= (α-νβ)[-(2ν+1)β +2α]$

---
[1] Fowler σελ.83

‹ $(4\nu^2+3\nu+1)\beta^2-(4\nu+1)\alpha\beta=-(2\nu+1)\alpha\beta+2\alpha^2+\nu(2\nu+1)\beta^2-2\nu\alpha\beta$
‹ $(4\nu^2+3\nu+1-2\nu^2-\nu)\beta^2 = 2\alpha^2$
‹ $\boldsymbol{(2\nu^2+2\nu+1)\beta^2 = 2\alpha^2}$

(vii) Ξέρουμε ότι Ανθ(α,β)=$[\nu, \underline{\mu, \mu, 2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=\mu\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta - \mu\alpha_1$
$=\beta- \mu\alpha + \mu\nu\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha}$

$\alpha_1=\mu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha_1 -\mu\beta_1$
$=\alpha-\nu\beta - \mu[(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha]$
$= \alpha-\nu\beta-\mu(1+\nu\mu)\beta+\mu^2\alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta +(1+\mu^2)\alpha}$

$\beta_1=2\nu\alpha_2+\beta_2$ ‹ $\beta_2= \beta_1-2\nu\alpha_2$
$=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha-2\nu[-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta +(1+\mu^2)\alpha]$
$=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha+2\nu(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta-2\nu(1+\mu^2)\alpha$
$=(1+\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu\mu+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha$
‹ $\boldsymbol{\beta_2=(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha}$

Ανθ(α,β)=$[\nu, \underline{\mu, \mu, 2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\alpha_2/\beta_2}$ ‹ $\beta\beta_2=\alpha_1\alpha_2$ ‹
‹ $\beta[(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha]=(\alpha-\nu\beta)[-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta]$
$+(1+\mu^2)\alpha]$
‹ $(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta^2-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha\beta=$
$=-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\alpha\beta+(1+\mu^2)\alpha^2+\nu(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta^2-\nu(1+\mu^2)\alpha\beta$
$=-(2\nu+\mu+2\nu\mu^2)\alpha\beta+(1+\mu^2)\alpha^2+(\nu^2+\nu\mu+\nu^2\mu^2)\beta^2$
‹ $(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2- \nu^2-\nu\mu-\nu^2\mu^2)\beta^2=(1+\mu^2)\alpha^2$
‹ $\boldsymbol{(1+2\nu\mu+ \nu^2+\nu^2\mu^2)\beta^2=(1+\mu^2)\alpha^2}$

Το είδος της Ανθ(β,ψ)=$[\underline{2,9,8,3}]$. Καθ᾽ ἔλλειψιν ἤ καθ᾽υπερβολήν;

Αφού Ανθ(β,ψ)=$[\underline{2,9,8,3}]$, θα έχουμε ότι

$$\beta/\psi = 2 + \cfrac{}{9 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\dots\dots\dots\dots}}}}$$

Αν θεωρήσουμε τις γραμμές ψ_1, ψ_2, ψ_3 θα πάρουμε :

$$\beta/\psi=2+\frac{1}{\beta/\psi_1} \ ‹\ \beta/\psi = 2 + \psi_1/\beta \quad ‹\quad \beta/\psi = (2\beta + \psi_1)/\beta \quad (\alpha)$$

$$\beta/\psi_1=9+\frac{1}{\beta/\psi_2} \ ‹\ \beta/\psi1 = 9 + \psi_2/\beta \ ‹\ \beta/\psi_1 = (9\beta + \psi_2) / \beta \quad (\beta)$$

$$\beta/\psi_2=8+\frac{1}{\beta/\psi_3} \ ‹\ \beta/\psi_2 = 8 + \psi_3/\beta \ ‹\ \beta/\psi_2 = (8\beta + \psi_3) / \beta \quad (\gamma)$$

$$\beta/\psi_3=3+\frac{1}{\beta/\psi} \ ‹\ \beta/\psi_3 = 3 + \psi/\beta \ ‹\ \beta/\psi_3 = (3\beta + \psi) /\beta \ (\delta)$$

Από αυτές τις σχέσεις, με τον ανάπαλιν λόγο (βιβλίο V, ορισμός 13) και τη σύνθεση λόγου (βιβλίο V, ορισμός 14) θα δείξουμε το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας τον ανάπαλιν λόγο για τη σχέση (δ), έχουμε :

$$\psi_3/\beta = \beta/(3\beta + \psi) \ ‹$$

$$(\psi_3 + 8\beta) /\beta = [\beta + 8(3\beta+\psi)] / [3\beta + \psi] \ ‹ \ (\text{σχέση } \gamma)$$

$$\beta/\psi_2 = (25\beta + 8\psi) / (3\beta + \psi) \ ‹$$

$$\psi_2 /\beta = (3\beta + \psi)/ (25\beta + 8\psi) \ ‹$$

$$(\psi_2 + 9\beta) / \beta = [3\beta + \psi + 9(25\beta+8\psi)] / [3\beta + \psi] \ ‹$$

$(\psi_2 + 9\beta) / \beta = (228\beta + 72\psi) / (3\beta + \psi)$ ‹ (σχέση β)

$\beta/\psi_1 = (228\beta + 72\psi) / (3\beta + \psi)$ ‹

$\psi_1/\beta = (3\beta + \psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹

$(\psi_1 + 2\beta) / \beta = [\, 3\beta + \psi + 2(228\beta + 72\psi)] / [228\beta + 72\psi]$ ‹

$(\psi_1 + 2\beta) / \beta = (459\beta + 145\psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹ (σχέση α)

$\beta/\psi = (59\beta + 145\psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹

$\beta\,(228\beta + 72\psi) = \psi\,(59\beta + 145\psi)$ ‹

$228\beta^2 + 72\beta\psi = 459\beta\psi + 145\psi^2$ ‹

$\mathbf{228\beta^2 = \psi(387\beta + 145\psi)}$ Η ζητούμενη δευτεροβάθμια εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι είναι όντως στη μορφή $\psi(\alpha+\chi)=M$, αρκεί $M=228\beta^2$, $\alpha=387\beta$ και $\chi=145\psi$. Τέλος, ο λόγος $\chi/\psi=145/1$, δηλαδή $\lambda=145$ και $\mu=1$. Άρα, είναι καθ' υπερβολήν.

Οι πρώτοι οκτώ πρώτοι όροι της ανθυφαίρεσης της αρμονίας του Φιλολάου και η απειρία της.

Ο Φιλόλαος στο Περί Φύσιος, fragment 6, γραμμές 16-24 υπολογίζει τους τέσσερις πρώτους όρους της ανθυφαίρεσης της αρμονίας :

ἁρμονί ας δὲ μέγεθό ς ἐ στι συλλαβὰ καὶ δι' ὀ ξειᾶ ν· τὸ
δὲ δι' ὀ ξειᾶ ν μεῖζον τᾶ ς συλλαβᾶ ς ἐ πογδό ωι. ἔ στι γὰρ
ἀπὸ ὑ πάτας ἐ πὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐ πὶ
νεάταν δι' ὀ ξειᾶ ν, ¢pÕ dὲ νε£taj ™j tr…tan sul l ab£, ἀπὸ
dὲ τρί τας ἐ ς Øp£tan di' ὀ ξειᾶ ν· τὸ δ' ἐ ν μέσωι μέσσας
καὶ τρί τας ἐ πό γδοον· i dὲ συλλαβὰ ἐ πί τριτον, tÕ dὲ
δι' ὀ ξειᾶ ν ἡμιό λιον, tÕ di¦ pas©n dὲ διπλÒon. οὕ τως ἁρ-
μονί α πέντε ἐ πό γδοα καὶ δύο διέσιες, δι' Ñxei©n dὲ τρί α
ἐ πό γδοα καὶ δί εσις, sul l ab¦ dὲ δύ' ἐ πό γδοα καὶ δί εσις.

(i) Εμείς γνωρίζουμε ότι :

$2/1 = (3/2)^1 * 4/3$, με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^1 * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^2 * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^2 * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία αναλυτικότερα γράφεται :

$3^2/2^3 = (2^8/3^5)^2 * 3^{12}/2^{19}$

Συνεχίζοντας έχουμε :

$2^8/3^5 = (3^{12}/2^{19})^3 * 2^{65}/3^{41}$

Αρκεί $2^{65}/3^{41} < 3^{12}/2^{19}$
ή $2^{84} < 3^{53}$
ή $84 \log 2 < 53 \log 3$
ή $25.286 < 25.287$ ορθό

Έπειτα παίρνουμε :

$3^{12}/2^{19} = (2^{65}/3^{41})^1 \times 3^{53}/2^{84}$

Αρκεί $3^{53}/2^{84} < 2^{65}/3^{41}$
ή $3^{94} < 2^{149}$
ή $94 \log 3 < 149 \log 2$
ή $44.849 < 44.853$, που ισχύει

Στο επόμενο βήμα :

$2^{65}/3^{41} = (3^{53}/2^{84})^5 * 2^{485}/3^{306}$

Αρκεί $2^{485}/3^{306} < 3^{53}/2^{84}$
ή $2^{569} < 3^{359}$
ή $569 \log 2 < 359 \log 3$
ή $171.2860 < 171.2865$, αληθές

Συνεχίζοντας έχουμε :

$3^{53}/2^{84} = (2^{485}/3^{306})^2 * 3^{665}/2^{1054}$

Πρέπει $3^{665}/2^{1054} < 2^{485}/3^{306}$
ή $3^{971} < 2^{1539}$
ή $971 \log 3 < 1539 \log 2$
ή $463.284 < 463.285$, το οποίο ισχύει

Συνολικά οι 8 πρώτοι όροι της (πολλαπλασιαστικής) ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι: [1,1,2,2,3,1,5,2,...]

(ii)

Από τις παραπάνω σχέσεις , για τα υπόλοιπα, έχουμε

$2^2/3 > 3^2/2^3 > 2^8/3^5 > 3^{12}/2^{19} > 2^{65}/3^{41} > 3^{53}/2^{84} > 2^{485}/3^{306} > 3^{665}/2^{1054}$

αυτά τείνουν στο λόγο 1/1. Όμως επειδή είναι της μορφής $2^\kappa/3^\lambda$ ή $3^\kappa/2^\lambda$ δεν θα γίνουν ποτέ ίσα με 1/1, ώστε η ανθυφαίρεση να είναι πεπερασμένη. Επομένως, η ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.

Το Κριτήριο λόγου και η τελικώς περιοδική ανθυφαίρεση

(Μία περίπτωση)

Υποθέτουμε ότι το ζεύγος μεγεθών α, β έχει τελικά περιοδική ανθυφαίρεση. **Θα δείξουμε πως ο λόγος δύο διαδοχικών υπολοίπων είναι ίσος με το λόγο δύο άλλων διαδοχικών υπολοίπων .**

Αφού είναι τελικά περιοδική θα υπάρχουν ν,μ για τα οποία θα ισχύει $Ανθ(α,β) = [\kappa_o,\lambda_o,\ldots,\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_\mu,\lambda_\mu,\ldots]$, με $\kappa_\nu=\kappa_\mu$, $\lambda_\nu=\lambda_\mu$, ...

Άρα θα έχουμε $Ανθ(α,β) = [κ_0,λ_0,\ldots,\underline{κ_ν,λ_ν,\ldots,κ_{μ-1},λ_{μ-1}}]$

Όμως τα $κ_i$, $λ_i$ είναι τα διαδοχικά πηλίκα και επομένως αν θεωρήσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων είναι η $α>β>α_1>β_1>\ldots>α_ν>β_ν>\ldots>α_μ>β_μ>\ldots$, θα πάρουμε τις σχέσεις

……… $α_ν = κ_νβ_ν + α_{ν+1}$ …………………………… $α_μ = κ_μβ_μ + α_{μ+1}$
………$β_ν = λ_να_{ν+1} + β_{ν+1}$ …………………………… $β_μ = λ_μα_{μ+1} + β_{μ+1}$

Οπότε $Ανθ(α_ν,β_ν) = [\underline{κ_ν,λ_ν,\ldots,κ_{μ-1},λ_{μ-1}}]$

και $Ανθ(α_μ,β_μ)= [\underline{κ_ν,λ_ν,\ldots,κ_{μ-1},λ_{μ-1}}]$

Δηλαδή, $Ανθ(α_ν,β_ν) = Ανθ(α_μ,β_μ)$

Επειδή $α_ν$, $β_ν$, $α_μ$, $β_μ$, μεγέθη για τα οποία ισχύει $α_ν>β_ν$, $α_μ>β_μ$ και όπως δείξαμε $Ανθ(α_ν,β_ν) = Ανθ(α_μ,β_μ)$ τότε από γνωστή πρόταση θα έχουμε ότι :

$$α_νβ_μ=β_να_μ \quad ή \quad \boldsymbol{α_ν/β_ν=α_μ/β_μ} \quad και\ ν<μ$$

Αντίστροφο :

Τώρα θα υποθέσουμε πως ο λόγος δύο διαδοχικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των α, β με $α>β$, είναι ίσος με το λόγο δύο άλλων διαδοχικών υπολοίπων. Θα δείξουμε ότι η ανθυφαίρεση είναι τελικά περιοδική.

Δηλαδή, υποθέσαμε ότι υπάρχουν ν, μ (φυσικοί) με ν<μ για τα οποία να ισχύει $\boldsymbol{α_ν/β_ν=α_μ/β_μ}$

Αν $Ανθ(α,β) = [κ_0,λ_0,\ldots,κ_ν,λ_ν,\ldots,κ_μ,λ_μ,\ldots]$

τότε :
$$Ανθ(α_ν,β_ν) = [κ_ν,λ_ν,\ldots,κ_μ,λ_μ,\ldots.]$$
$$Ανθ(α_μ,β_μ)= [κ_μ,λ_μ,\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

Δηλαδή, $Ανθ(α_ν,β_ν) = [κ_ν,λ_ν,\ldots, Ανθ(α_μ,β_μ)]$

Όμως η υπόθεση $α_ν/β_ν=α_μ/β_μ$ είναι ισοδύναμη με την $α_νβ_μ=β_να_μ$.

Επειδή $α_ν$, $β_ν$, $α_μ$, $β_μ$, μεγέθη για τα οποία ισχύει $α_ν>β_ν$, $α_μ>β_μ$ και όπως υποθέσαμε $α_νβ_μ=β_να_μ$, τότε $Ανθ(α_ν,β_ν) = Ανθ(α_μ,β_μ)$.

Ο μόνος τρόπος για να ισχύουν τα παραπάνω είναι αν έχουμε τελικά περιοδική ανθυφαίρεση. (δηλ. $κ_ν=κ_μ$, $λ_ν=λ_μ$, ...)