

# BASES CRISTALLINES DES GROUPES QUANTIQUES

Notes de Charles Cochet

Automne 2000

Ces notes ont pour support :

(1) Un cours du DEA « Méthodes Algébriques » de l'Université Paris VI, dispensé par Masaki Kashiwara à l'automne 2000.

(2) De nombreux articles sur le sujet (voir bibliographie).

Ces notes sont l'ancêtre du livre [12].

## 1. $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ et ses représentations

**1.1. Définition.** — Fixons un corps  $K$  (de caractéristique arbitraire) et un élément  $q$  de  $K$  non-nul et non racine de l'unité. L'algèbre enveloppante quantique  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  de  $\mathfrak{sl}_2$  est la  $K$ -algèbre engendrée par les symboles  $e, f, t, t^{-1}$  en accord avec les relations  $tet^{-1} = q^2e$ ,  $tft^{-1} = q^{-2}f$  et  $[e, f] = (t - t^{-1})/(q - q^{-1})$ . En posant  $t = q^h$  et en faisant tendre  $q$  vers 1, nous retrouvons l'algèbre enveloppante classique  $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$ , c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les trois éléments  $e, f, h$  avec les relations  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ .

Le produit tensoriel de deux  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules est muni d'une structure de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module grâce au co-produit  $\Delta : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow \mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ ,  $\Delta t = t \otimes t$ ,  $\Delta e = e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e$ ,  $\Delta f = f \otimes 1 + t \otimes f$ .

Des analogues quantiques des entiers, factorielle et coefficients binomiaux apparaissent naturellement lors de l'étude du monde quantique. Les  $q$ -entiers sont définis par  $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ , la  $q$ -factorielle par  $[n]! = [n] \cdots [1]$  et les  $q$ -coefficients binomiaux par  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$ .

Notons par ailleurs  $\{x\} = (x - x^{-1})/(q - q^{-1})$  et  $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{\{x\}\{q^{-1}x\}\cdots\{q^{1-k}x\}}{[k]!}$ . En posant  $e^{(n)} = e^n/[n]!$  et  $f^{(n)} = f^n/[n]!$ , nous obtenons la formule de pseudo-commutation

$$(1) \quad e^{(n)} f^{(m)} = \sum_{0 \leq k \leq \min(n, m)} f^{(m-k)} e^{(n-k)} \begin{Bmatrix} n-m \\ k \end{Bmatrix}.$$

**1.2. Représentations de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ .** — Il n'existe que deux représentations unidimensionnelles de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ , à savoir  $K = K \cdot 1$  avec  $t \cdot 1 = 1$ ,  $e \cdot 1 = f \cdot 1 = 0$ , et  $V_- = K \cdot 1_-$  avec  $t \cdot 1_- = -1_-$ ,  $e \cdot 1_- = f \cdot 1_- = 0$ .

Pour tout entier  $l$ , il existe un et un seul  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module irréductible de dimension  $l+1$ , à savoir  $V(l)$  construit comme suit. C'est l'espace vectoriel dont une base est  $\{u_k^{(l)}\}_{0 \leq k \leq l}$  et sur lequel l'action de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  est

$$(2) \quad tu_k^{(l)} = q^{l-2k}u_k^{(l)}, \quad eu_k^{(l)} = [l-k+1]u_{k-1}^{(l)}, \quad fu_k^{(l)} = [k+1]u_{k+1}^{(l)}.$$

Cette base est telle que  $u_k^{(l)} = f^k u_0^{(l)} = e^{l-k} u_l^{(l)}$ . Ceci se visualise par  $u_0^{(l)} \longrightarrow u_1^{(l)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_l^{(l)}$ .

De plus, tout  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module est complètement réductible. Ainsi, un module  $M$  est isomorphe à la somme de certains  $V(l)$  si et seulement si il se décompose sous la forme  $M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$ , où  $M_k = \{u \in M; tu = q^k u\}$  (puisque les valeurs propres de  $t$  sur  $V(l)$  sont de la forme  $q^k$  et celles sur  $V(l) \otimes V_-$  sont de la forme  $-q^k$ ).

Nous pouvons définir pour un tel module son *caractère* par la formule  $\text{ch}(M)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(M_k)x^k \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ . Alors  $\text{ch}(V(l))(x) = (x^{l+1} - x^{-l-1})/(x - x^{-1})$  et  $(\text{ch}(V(l)))_{l \geq 0}$  est une famille linéairement indépendante. Si  $M \simeq \bigoplus V(l_j)$ , alors  $\text{ch}(M) = \sum \text{ch}(V(l_j))$  et les  $l_j$  sont déterminés de façon unique par  $\text{ch}(M)$ .

## 2. $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ et ses représentations

**2.1. Définition.** — Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Notons  $P$  le treillis des poids ; c'est un  $\mathbb{Z}$ -module libre. L'ensemble des racines simples  $\alpha_i$  est indexé par  $I$ . Les co-racines simples seront notées  $h_i$ . Par hypothèse sur  $\mathfrak{g}$ , nous avons  $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{N}$  pour tout  $i$ ,  $\langle h_i, \lambda \rangle = \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$  pour tous  $i$  et  $\lambda \in P$  et  $(\alpha_i, \alpha_j) \in -\mathbb{N}$  si  $i \neq j$ .

Soient maintenant un corps  $K$  et un élément  $q \in K$  non racine de l'unité. L'algèbre enveloppante quantique  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  est la  $K$ -algèbre engendrée par les symboles  $e_i, f_i$  et  $q(h)$  pour  $i \in I$  et  $h \in P^*$  avec les relations suivantes :

- (1)  $q(0) = 1$  et  $q(h_1)q(h_2) = q(h_1 + h_2)$ .
- (2)  $q(h)e_i q(h)^{-1} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i$  et  $q(h)f_i q(h)^{-1} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i$ .
- (3)  $[e_i, f_j] = \delta_{i,j} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ , en notant  $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2}$  et  $t_i = q^{(\frac{\alpha_i, \alpha_i}{2})} h_i$ .
- (4)  $\sum_{k=0}^b (-1)^k e_i^{(k)} e_j e_i^{(b-k)} = \sum_{k=0}^b (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(b-k)} = 0$  pour  $i \neq j$  (relations de Serre).

Ici, nous avons écrit  $b$  pour  $1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$ , et les puissances divisées  $e_i^{(k)}, f_i^{(k)}$  sont définies par  $e_i^{(k)} = e_i^k / [k]_i!$  et  $f_i^{(k)} = f_i^k / [k]_i!$ , avec  $[k]_i = (q_i^k - q_i^{-k}) / (q_i - q_i^{-1})$  et  $[k]_i! = [k]_i \cdots [1]_i$  (analogues quantiques les entiers et de la factorielle).

En posant  $q(h) = q^h$  et en faisant tendre  $q$  vers 1, l'algèbre enveloppante quantique  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  devient l'algèbre enveloppante classique de  $\mathfrak{g}$ .

La sous-algèbre de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les  $q(h)$  est isomorphe à  $K[P^*]$ . Notons  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$  (resp.  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ ) la sous-algèbre de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les  $e_i$  (resp.  $f_i$ ). Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt nous fournit un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g}) \otimes K[P^*] \otimes \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ ,  $a \otimes q(h) \otimes b \mapsto aq(h)b$ .

Le co-produit  $\Delta = \Delta_+ : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ , défini par

$$(3) \quad \Delta q(h) = q(h) \otimes q(h), \quad \Delta e_i = e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta f_i = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i,$$

permet de munir d'une structure de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module le produit tensoriel de deux  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules.

**2.2. Modules intégrables.** — Un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module  $M$  est *intégrable* si

$$(4) \quad \begin{cases} M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda, \text{ où } M_\lambda = \{u \in M ; q(h)u = q^{\langle h, \lambda \rangle} u \text{ pour tout } h \in P^*\}, \\ M \text{ est réunion de } \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i\text{-modules de dimension finie pour tout } i. \end{cases}$$

Les représentation unidimensionnelles de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  sont paramétrées par les caractères  $\chi : P^* \longrightarrow K^*$  tels que  $\chi(\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle h_i) = 1$  pour tout  $i$  ; ce sont les  $V^\chi = K \cdot 1_\chi$  avec  $e_i 1_\chi = f_i 1_\chi = 0$  et  $q(h) 1_\chi = \chi(h) 1_\chi$ .

Définissons la catégorie  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$  comme étant celle des  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules intégrables tels que la dimension des espaces  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})u$  pour  $u \in M$  soit finie (nilpotence locale des  $e_i$ ).

Les poids dominants intégraux sont les poids  $\lambda$  tels que  $\langle h_i, \lambda \rangle \geq 0$  pour tout  $i \in I$  ; leur ensemble est noté  $P_+$ . Pour  $\lambda \in P_+$ , notons  $V(\lambda)$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module engendré par  $u_\lambda$  avec les relations

$$(5) \quad q(h)u_\lambda = q^{\langle h, \lambda \rangle} u_\lambda, \quad e_i u_\lambda = 0, \quad f_i^{1 + \langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda = 0.$$

**Théorème 2.1.** — Supposons  $K$  de caractéristique nulle. Soit  $\lambda \in P_+$ .

- (1) Nous avons  $V(\lambda)_\lambda = \{u \in V(\lambda) ; e_i u = 0 \text{ pour tout } i\} = K u_\lambda \neq 0$ .
- (2) L'espace  $V(\lambda)$  est un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module irréductible et intégrable dans  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$ .
- (3) Tout  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module dans  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$  est complètement réductible.
- (4) Tout  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module irréductible dans  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$  est isomorphe à un  $V(\lambda)$  avec  $\lambda \in P_+$ .

Alors se pose une question. Soit  $M$  intégrable ; pour tout  $i$ , nous avons un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i$ -linéaire  $M \simeq \bigoplus_j V(l_j)$  avec les  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules irréductibles  $V(l_j)$ . Existe-t-il une base  $B$  du  $K$ -espace  $M$  (indépendante de  $i$ ) telle que pour tout  $i$ , il y ait un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i$ -linéaire  $M \simeq \bigoplus_j V(l_j)$  envoyant  $B$  sur la base  $\{u_k^{(l_j)}\}_{0 \leq k \leq l_j}$  de  $\bigoplus_j V(l_j)$  ? La réponse est non pour  $q = 1$  (l'algèbre enveloppante classique), mais oui pour  $q = 0$  comme nous allons le voir.

### 3. Bases locales et bases cristallines

**3.1. Définitions.** — Pour  $K = k(q)$ , notons  $A$  le sous-anneau de  $K$  formé des fractions rationnelles sans pôle en  $q = 0$ . Via l'évaluation, nous avons un isomorphisme  $A/qA \xrightarrow{\sim} k$ . Une *base locale* d'un  $K$ -espace vectoriel  $V$  est un couple  $(L, B)$  où  $L$  est un  $A$ -treillis de  $V$  qui est un  $A$ -module libre, et  $B$  est une base du  $k$ -espace vectoriel  $L/qL$ .

Par exemple, à toute base  $B$  de  $V$  est associée une base locale  $(L, \bar{B})$  où  $L = \text{Mod}_A(B)$  et  $\bar{B}$  est l'image de  $B$  dans  $L/qL$ . Grosso modo, toute base locale est construite de la sorte. La somme directe et le produit tensoriel de bases locales se définissent naturellement.

Fixons pour toute la suite un corps  $k$  de caractéristique nulle, et posons  $K = k(q)$ . Soit  $M$  un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable de décomposition en espaces de poids  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ . Une *base cristalline* est une base locale  $(L, B)$  satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Pour tout  $\lambda$ , il existe une base locale  $(L_\lambda, B_\lambda)$  de  $M_\lambda$  telle que  $(L, B) = \bigoplus_\lambda (L_\lambda, B_\lambda)$ .

(2) Pour tout  $i$ , il existe un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i$ -linéaire  $\xi_i : M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_j V(l_j)$  envoyant  $(L, B)$  sur la base locale  $\{u_k^{(l_j)}\}_{0 \leq k \leq l_j}$  de  $\bigoplus_j V(l_j)$ .

Une telle base, si elle existe, répond à la question posée précédemment.

Définissons maintenant le graphe cristallin associé à une base cristalline. Fixons un  $i$  et notons  $\xi = \xi_i$ . Pour  $b \in B$ , il existe  $l_j$  et  $k$  tels que  $b = \xi(u_k^{(l_j)})$ . Notons alors  $\tilde{f}_i b$  et  $\tilde{e}_i b$  les éléments de  $B$  tels que  $\xi(\tilde{f}_i b) = u_{k+1}^{(l_j)}$  et  $\xi(\tilde{e}_i b) = u_{k-1}^{(l_j)}$  respectivement, avec les conventions  $0 = \tilde{e}_i b$  si  $k = 0$  et  $0 = \tilde{f}_i b$  si  $k = l_j$ , pour un élément fantôme  $0$ . Ainsi, nous avons construit des applications  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{0\}$ . En fait, ces applications sont indépendantes du choix de  $\xi$ .

Pour tout  $i$ , joignons des éléments  $b$  et  $b'$  de  $B$  par une flèche  $b \xrightarrow{i} b'$  si  $b' = \tilde{f}_i b$  (équivalent à  $b = \tilde{e}_i b'$ ). Nous obtenons ainsi un graphe numéroté, le *graphe cristallin de  $B$* .

Une  *$i$ -corde* est un sous-ensemble de  $B$  correspondant à  $u_0^{(l_j)} \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} u_{l_j}^{(l_j)}$  par  $\xi$ ; c'est une composante connexe du graphe pour les  $i$ -flèches. La base cristalline  $B$  est la réunion disjointe des  $i$ -cordes pour un  $i$  fixé. Nous verrons qu'en combinant toutes les  $i$ -cordes la structure est plus riche.

Notons  $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$  et  $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$ . Ces nombres correspondent à

$$(6) \quad \circ \xrightarrow{\quad i \quad} \dots \xrightarrow{\quad i \quad} \overset{b}{\circ} \xrightarrow{\quad i \quad} \dots \xrightarrow{\quad i \quad} \circ$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon_i(b)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\varphi_i(b)}$

Pour  $b \in B_\lambda$ , définissons le *poids de  $b$*  par  $\text{wt}(b) = \lambda$ . Alors  $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b)$  et la longueur de la  $i$ -corde contenant  $b$  est  $\varphi_i(b) + \varepsilon_i(b)$ .

**3.2. Propriétés élémentaires des bases cristallines.** — La somme directe de bases cristallines se définit naturellement. Le produit direct nécessite quant à lui quelques précisions.

**Théorème 3.1.** — Soient  $M_j$  des  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules intégrables et  $(L_j, B_j)$  des bases cristallines pour  $j = 1, 2$ . Alors  $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$  est une base cristalline pour laquelle les applications  $\tilde{e}_i$  et  $\tilde{f}_i$  sont

$$(7) \quad \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \text{sinon} \end{cases},$$

$$(8) \quad \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus,  $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle\}$  et  $\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varphi_i(b_1) + \langle h_i, \text{wt}(b_2) \rangle, \varphi_i(b_2)\}$ .

Ce théorème permet de retrouver la formule de Clebsch-Gordan dans le cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Des formules analogues permettent le calcul de  $\tilde{e}_i^n(b_1 \otimes b_2)$  et  $\tilde{f}_i^n(b_1 \otimes b_2)$ .

**3.3. Existence et unicité de la base cristalline dans  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$ .** — Soient  $\lambda \in P_+$  et  $V(\lambda)$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module irréductible de vecteur de plus haut poids  $u_\lambda$  de poids  $\lambda$ . Les deux théorèmes ci-dessous nous assurent de l'existence et l'unicité (à isomorphisme près) des bases cristallines.

**Théorème 3.2 (existence).** — *Le module  $V(\lambda)$  admet une unique base cristalline  $(L(\lambda), B(\lambda))$  satisfaisant à  $(L(\lambda)_\lambda, B(\lambda)_\lambda) = \{u_\lambda\}$ . De plus,  $B(\lambda) = \{\tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_l}^{a_l} u_\lambda; l \geq 0, i_1, \dots, i_l \in I, a_1, \dots, a_l > 0\} \setminus \{0\}$ .*

**Théorème 3.3 (unicité).** — *Soit  $M$  un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module dans  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g})$ . Soit  $(L, B)$  une base cristalline de  $M$ . Alors il existe un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaire tel que  $M \simeq \bigoplus_j V(\lambda_j)$  par lequel  $(L, B)$  est isomorphe à  $\bigoplus_j (L(\lambda_j), B(\lambda_j))$ .*

**3.4. Décomposition irréductible.** — Remarquons que  $B(\lambda)$  est connexe et connecté à  $u_\lambda$ . Il s'ensuit que  $B = \bigsqcup_j B(\lambda_j)$  est la décomposition de  $B$  en composantes connexes. Un élément  $b$  de  $B$  est de plus haut poids si  $\tilde{\varepsilon}_i b = 0$  pour tout  $i$ . D'après le théorème 3.3, la base cristalline  $B(\lambda)$  admet un unique vecteur de plus haut poids  $u_\lambda$ .

Ainsi, décomposer  $M$  en composantes irréductibles revient à trouver les vecteurs de plus haut poids de  $B$ , ceci étant équivalent à décomposer  $B$  en composantes connexes. En découle la

**Proposition 3.4.** — *Pour  $\lambda, \mu \in P_+$ , nous avons  $V(\lambda) \otimes V(\mu) = \bigoplus V(\lambda + \text{wt}(b))$ , où la somme est sur les  $b \in B(\mu)$  tels que  $\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$  pour tout  $i$ .*

Par conséquent, si le graphe cristallin de  $B(\mu)$  est connu, la décomposition de  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$  en composantes irréductibles peut s'effectuer. Cela sera l'objet de la section 4 pour le cas  $\mathfrak{gl}_n$ .

**3.5. Restriction à une sous-algèbre.** — Soit  $J \subset I$ . Définissons pour  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_J)$  le treillis de ses poids intégraux dominants par  $P_+^J = \{\lambda \in P; \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \text{ pour tout } i \in J\}$ . De même, soit  $V_J(\lambda)$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_J)$ -module intégrable et irréductible de plus haut poids  $\lambda$ .

**Théorème 3.5.** — *Pour tout  $\lambda \in P_+$ , il existe un isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_J)$ -linéaire  $V(\lambda) \simeq \bigoplus V_J(\text{wt}(b))$ , où la somme est sur l'ensemble des  $b \in B(\lambda)$  tels que  $\varepsilon_i(b) = 0$  pour tout  $i \in J$ .*

#### 4. Tableaux de Young

Plaçons-nous dans le cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , et décrivons les bases et graphes cristallins à l'aide de tableaux de Young. Le treillis des poids est  $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e^i$ . Les racines simples  $\alpha_i = e^i - e^{i+1}$  sont indexées par  $I = \{1, \dots, n-1\}$ . Les co-racines simples  $h_i$  sont telles que  $\langle h_i, \lambda \rangle = (\alpha_i, \lambda)$ . Les poids fondamentaux  $\omega_j = \alpha_1 + \dots + \alpha_j$  pour tout  $j$  sont construits afin d'avoir  $\langle h_i, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}$ . Nous avons ainsi  $P_+ = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{N}\omega_i + \mathbb{Z}\omega_n$ . Notons enfin  $\tilde{P}_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{N}\omega_i$ .

**4.1. Représentations fondamentales  $V(\omega_j)$ .** — La représentation  $V(\omega_1)$ , appelée *représentation vectorielle*, est de dimension  $n$  et se décompose sous la forme  $V(\omega_1) = \bigoplus_{i=1}^n K[\mathbf{i}]$  avec  $q(h)[\mathbf{i}] = q^{(h, e^i)}[\mathbf{i}]$ ,  $e_j[\mathbf{i}] = \delta_{j, i-1}[\mathbf{i-1}]$  et  $f_j[\mathbf{i}] = \delta_{j, i}[\mathbf{i+1}]$ . Le vecteur  $[\mathbf{1}]$  est de plus haut poids. La base  $\{[\mathbf{i}]; 1 \leq i \leq n\}$  forme une base cristalline de  $V(\omega_1)$ , de graphe  $B(\omega_1) : [\mathbf{1}] \xrightarrow{1} [\mathbf{2}] \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{n-1} [\mathbf{n}]$ . De plus  $\text{wt}([\mathbf{i}]) = e^i$ .

Décrivons les *représentations fondamentales*  $V(\omega_i)$  en les plongeant dans le produit tensoriel de copies de  $V(\omega_1)$ . Considérons le vecteur  $[\mathbf{1}] \otimes \dots \otimes [\mathbf{i}] \in B(\omega_1)^{\otimes i}$ ; c'est un vecteur de plus haut poids, de poids  $\omega_i$ . D'après le théorème 3.3, la base cristalline  $B(\omega_i)$  est isomorphe à la composante connexe de  $B(\omega_1)^{\otimes i}$  contenant  $[\mathbf{1}] \otimes \dots \otimes [\mathbf{i}]$ . Plus précisément,

**Proposition 4.1.** — *Par l'isomorphisme ci-dessus, la base cristalline  $B(\omega_i)$  est isomorphe à l'ensemble des  $[\mathbf{a}_1] \otimes \dots \otimes [\mathbf{a}_i] \in B(\omega_1)^{\otimes i}$  avec  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_i \leq n$ .*

Rappelons qu'à tout  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \in \tilde{P}_+$  correspond un diagramme de Young  $Y(\lambda)$  à  $n$  lignes de longueurs respectives  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  (c'est-à-dire un diagramme avec  $\lambda_i$  colonnes de longueur  $i$ ).

La base cristalline  $B(\lambda)$  s'injecte dans  $B(\omega_1)^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes B(\omega_n)^{\otimes \lambda_n}$  par  $u_\lambda \mapsto u_{\omega_1}^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes u_{\omega_n}^{\otimes \lambda_n}$ . Mais puisque  $B(\omega_i)$  s'injecte dans  $B(\omega_1)^{\otimes i}$ , la base cristalline  $B(\lambda)$  s'injecte finalement dans  $B(\omega_1)^{\otimes N}$  avec  $N = \sum_{i=1}^n i\lambda_i$ .

Passer d'une représentation d'un vecteur par un produit tensoriel à une représentation par un diagramme de Young numéroté revient à traduire l'expression du vecteur dans l'écriture japonaise (de haut en bas et de droite à gauche). Nous obtenons des diagrammes de Young dont les blocs sont numérotés par des entiers inférieurs à  $n$ ; un tel objet est appelé *tableau de Young de forme  $Y(\lambda)$* . Un tableau de Young est dit *semi-standard* si les nombres inscrits dans les blocs croissent de gauche à droite et croissent strictement de haut en bas. Alors :

**Théorème 4.2.** — *Par l'injection composée ci-dessus, la base cristalline  $B(\lambda)$  est identifiée à l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme  $Y(\lambda)$ .*

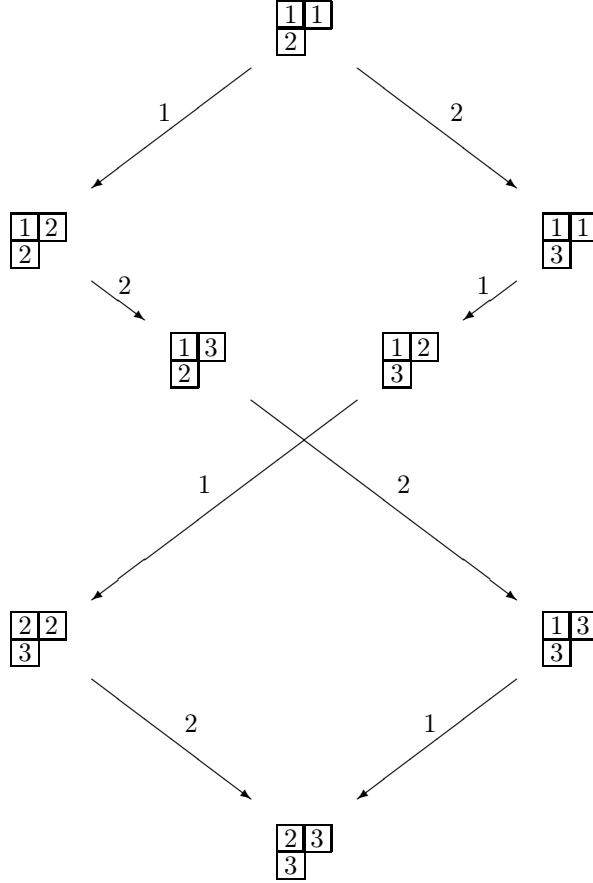
Pour déterminer complètement  $B(\lambda)$ , il nous faut comprendre l'action des  $\tilde{e}_i$  et des  $\tilde{f}_i$ . Posons  $b = [\mathbf{a}_1] \otimes \dots \otimes [\mathbf{a}_i]$ . Alors  $\tilde{e}_i b$  et  $\tilde{f}_i b$  sont obtenus par l'algorithme suivant :

- négliger les  $a_k$  autres que  $i$  et  $i+1$ ;
- négliger les  $[\mathbf{i}] \otimes [\mathbf{i+1}]$ ;
- à ce stade, il reste un élément de la forme  $[\mathbf{i+1}] \otimes \dots \otimes [\mathbf{i+1}] \otimes [\mathbf{i}] \otimes \dots \otimes [\mathbf{i}]$ . Alors  $\tilde{e}_i$  change le  $[\mathbf{i+1}]$  le plus à droite en  $[\mathbf{i}]$  et  $\tilde{f}_i$  change le  $[\mathbf{i}]$  le plus à gauche en  $[\mathbf{i+1}]$ . Si de tels  $i+1$  et  $i$  n'existent pas, l'élément est transformé en le vecteur 0.

**Exemple 4.3.** — Prenons  $b = [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}]$ . Alors les chaînes contenant ce vecteur sont :

$$\begin{array}{c} [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{1}] \xrightarrow{1} [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{1}] \xrightarrow{1} [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}] \\ [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}] \xrightarrow{2} [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}] \xrightarrow{2} [\mathbf{1}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{2}] \otimes [\mathbf{4}] \otimes [\mathbf{3}] \otimes [\mathbf{3}] \end{array}$$

Il est désormais possible d'effectuer le graphe cristallin d'une base cristalline de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$  donnée. Voici par exemple la base cristalline  $B(\omega_1 + \omega_2)$  pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ .



Ainsi, la base cristalline est  $B(\omega_1 + \omega_2) = \{ \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix} \}$ . Nous nous servirons au paragraphe suivant de ces données.

**4.2. Règle de Littlewood-Richardson.** — Nous sommes maintenant à même de décrire le produit tensoriel  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ . La formule que nous obtiendrons sera équivalente à celle de Littlewood-Richardson. Remarquons que :

(1) Le vecteur  $u_\lambda \otimes \boxed{i}$  est de plus haut poids si et seulement si le diagramme  $Y(\lambda) + i$  (obtenu en ajoutant un bloc à la  $i^{\text{ème}}$  rangée) est encore un diagramme de Young. Dans ce cas, le poids du vecteur  $u_\lambda \otimes \boxed{i}$  est  $\lambda + e^i$  et il est représenté par le diagramme de Young  $Y(\lambda) + i$ .

(2) Le vecteur  $u_\lambda \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_l$  est de plus haut poids si et seulement si les vecteurs  $u_\lambda \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_k$  sont de plus haut poids pour tout  $k \leq l$ .

Ces remarques permettent d'obtenir le

**Théorème 4.4.** — Pour  $\lambda, \mu \in P_+$ , nous avons  $V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus V(\lambda + e^{a_{i_1}} + \dots + e^{a_{i_N}})$  où  $N = \sum_i i\lambda_i$  et la somme est sur l'ensemble des  $\boxed{a_{i_1}} \otimes \dots \otimes \boxed{a_{i_N}} \in B(\mu) \subset B(\omega_1)^{\otimes N}$  tels que tous les  $Y(\lambda) + a_{i_1}, (Y(\lambda) + a_{i_1}) + a_{i_2}, \dots$  soient des diagrammes de Young.

Par exemple, considérons le cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  et  $\lambda = \omega_2, \mu = \omega_1 + \omega_2$ . Commençons par écrire  $B(\mu)$  sous forme de tableaux de Young :  $B(\mu) = \{ \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix} \}$ .

$$\text{Alors } \left( \left( \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix} + 1 \right) + 1 \right) + 2 = \left( \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix} + 1 \right) + 2 = \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix} + 2 = \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix}.$$

Par contre,  $\left( \left( \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix} + 2 \right) + 1 \right) + 2 = \left( \begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix} + 1 \right) + 2$ , et  $\begin{smallmatrix} \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \\ \boxed{\phantom{1}} & \boxed{\phantom{1}} \end{smallmatrix}$  n'est pas un diagramme de Young. En

continuant cette procédure, nous vérifions que seulement  $\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix} \in B(\mu)$  contribuent au

produit tensoriel. D'où finalement

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

L'étude du cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$  est ainsi achevée. Pour les algèbres de Lie de types  $\mathfrak{sp}_n$  et  $\mathfrak{so}_n$ , des règles similaires existent, moyennant quelques modifications des définitions (voir [13] et [15]).

## 5. Description des bases cristallines par des chemins pour les algèbres affines

Dans ce paragraphe ne sera étudié que le cas de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ . Rappelons que cette algèbre est l'algèbre affine associée à  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = (\mathfrak{sl}_2 \otimes k[t, t^{-1}]) \oplus kt \frac{d}{dt}$  avec comme crochet  $[x \otimes f, y \otimes g] = [x, y] \otimes fg + K(x, y)(fg')_{-1}$  où  $h_{-1}$  est le coefficient de  $t^{-1}$  de la série de Laurent  $h$ .

L'algèbre enveloppante quantique  $\mathfrak{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  est construite comme suit. Posons  $I = \{0, 1\}$ . Soient  $P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta$  et  $h_0, h_1, \nu \in P^*$  sa base duale. Notons  $\alpha_0 = 2\Lambda_0 - 2\Lambda_1 + \delta$  et  $\alpha_1 = 2\Lambda_1 - 2\Lambda_0$ . Choisissons une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot, \cdot)$  sur  $P$  telle que  $(\alpha_0, \alpha_0) = (\alpha_1, \alpha_1) = 2$  et  $(\alpha_0, \alpha_1) = -2$ . Ainsi,  $(\alpha_0, \Lambda_0) = 1$  et  $(\alpha_1, \Lambda_0) = 0$ . La valeur de  $(\Lambda_0, \Lambda_0)$  peut être choisie arbitrairement. L'algèbre enveloppante quantique associée à  $P$  est effectivement  $\mathfrak{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ .

Définissons  $\mathfrak{U}_q^{cl}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  à l'aide du treillis  $P_{cl} = P/\mathbb{Z}\delta$ . Alors  $\mathfrak{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) = \mathfrak{U}_q^{cl}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \otimes K[q(\nu), q(\nu)^{-1}]$ .

L'algèbre  $\mathfrak{U}_q^{cl}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  admet des représentations de dimension finie grâce au morphisme d'anneaux de  $\mathfrak{U}_q^{cl}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  vers  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  défini par

$$(9) \quad \begin{cases} e_0, f_1 & \mapsto f, \\ e_1, f_0 & \mapsto e, \\ t_0 & \mapsto t^{-1}, \\ t_1 & \mapsto t. \end{cases}$$

Soit  $V$  la représentation bi-dimensionnelle de  $\mathfrak{U}_q^{cl}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  induite par le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module  $V(1)$ ; donc  $V = Ku_0 \oplus Ku_1$  avec  $q(h)u_0 = q^{(h, \Lambda_1 - \Lambda_0)}u_0$ ,  $q(h)u_1 = q^{(h, \Lambda_0 - \Lambda_1)}u_1$ ,  $e_0u_k = f_1u_k = u_{k+1}$ ,  $e_1u_k = f_0u_k = u_{k-1}$ . Alors  $B = \{u_0, u_1\}$  est une base cristalline de  $V$  de graphe cristallin  $u_0 \xrightarrow{\frac{1}{q}} u_1$ .

**Proposition 5.1.** — *Il existe des isomorphismes de cristaux  $\Phi_0 : B(\Lambda_0) \xrightarrow{\simeq} B(\Lambda_1) \otimes B$  et  $\Phi_1 : B(\Lambda_1) \xrightarrow{\simeq} B(\Lambda_0) \otimes B$  envoyant respectivement  $u_{\Lambda_0}$  et  $u_{\Lambda_1}$  sur  $u_{\Lambda_1} \otimes u_1$  et  $u_{\Lambda_0} \otimes u_0$ .*

Pour tout entier  $n$ , nous avons une chaîne d'isomorphismes  $\Psi_n : B(\Lambda_1) \xrightarrow{\Phi_0} B(\Lambda_0) \otimes B \xrightarrow{\Phi_1 \otimes B} B(\Lambda_0) \otimes B \otimes B \xrightarrow{\Phi_1 \otimes B} \dots \xrightarrow{\Phi_1 \otimes B} B(\Lambda_0) \otimes B^{\otimes 2n}$ . De plus,  $\Psi_n(u_{\Lambda_0}) = u_{\Lambda_0} \otimes (u_0 \otimes u_1)^{\otimes n}$ . Posons alors  $p_g(n) = u_0$  si  $n$  est pair et  $u_1$  sinon.

Pour  $b \in B$  fixé, nous avons pour un  $n$  assez grand  $\Psi(b) = u_{\Lambda_0} \otimes b_{2n} \otimes \dots \otimes b_1$ . Donc en associant  $b$  et la suite  $\{b_1, \dots, b_{2n}, p_g(2n+1), p_g(2n+2), \dots\}$ , nous obtenons une bijection entre  $B(\Lambda_0)$  et l'ensemble des suites  $\{p(n)\}_{n \geq 1}$  d'éléments de  $B$  telles que  $p(n) = p_g(n)$  pour  $n$  grand. Ainsi,  $B(\Lambda_0)$  est décrit par un espace de chemins dans  $B$ .



## 6. Catégorie des cristaux

**6.1. Définitions.** — Un *cristal* est un ensemble  $B$  muni d'applications  $\text{wt} : B \longrightarrow P$ ,  $\varepsilon_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $\varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $\tilde{e}_i : B \longrightarrow B \sqcup \{0\}$  et  $\tilde{f}_i : B \longrightarrow B \cup \{0\}$  où  $0$  est un élément fantôme, satisfaisant aux axiomes :

- (1)  $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle$  pour tout  $i$ .
- (2) Si  $b \in B$  est tel que  $\tilde{e}_i b \neq 0$ , alors  $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$ ,  $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$ ,  $\text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i$ .
- (3) Si  $b \in B$  est tel que  $\tilde{f}_i b \neq 0$ , alors  $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$ ,  $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$ ,  $\text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i$ .
- (4) Pour  $b_1, b_2 \in B$ , nous avons  $b_2 = \tilde{f}_i b_1$  si et seulement si  $b_1 = \tilde{e}_i b_2$ .
- (5) Si  $\varphi_i(b) = -\infty$ , alors  $\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$ .

Par exemple, une base cristalline d'un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable est un cristal.

Pour des cristaux  $B_1, B_2$ , un *morphisme de cristaux*  $\psi : B_1 \longrightarrow B_2$  est une application  $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \longrightarrow B_2 \sqcup \{0\}$  telle que :

- (1)  $\psi(0) = 0$ .
- (2) Si  $\psi(b) \neq 0$ , alors  $\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b)$ ,  $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$  et  $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$ .
- (3) Pour tout  $b \in B_1$  tel que  $\psi(b) \neq 0$  et  $\psi(\tilde{e}_i b) \neq 0$ , nous avons  $\psi(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \psi(b)$ .
- (4) Pour tout  $b \in B_1$  tel que  $\psi(b) \neq 0$  et  $\psi(\tilde{f}_i b) \neq 0$ , nous avons  $\psi(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \psi(b)$ .

Il est facile de voir que les cristaux forment une catégorie.

**6.2. Produit tensoriel de cristaux.** — Comme précédemment, définissons le produit tensoriel de deux cristaux  $B_1$  et  $B_2$ . Ensemblistement, le cristal  $B_1 \otimes B_2$  est  $\{b_1 \otimes b_2; b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ . Posons

$$\begin{aligned} \text{wt}(b_1 \otimes b_2) &= \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2), \\ \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) &= \max\{\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle\}, \\ \varphi_i(b_1 \otimes b_2) &= \max\{\varphi_i(b_1) + \langle h_i, \text{wt}(b_2) \rangle, \varphi_i(b_2)\}, \\ \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble  $B_1 \otimes B_2$  ainsi construit est un cristal. De plus, pour tous cristaux  $B_1, B_2, B_3$ , nous avons un isomorphisme de cristaux  $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \longrightarrow B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3)$ ,  $(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 \mapsto b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3)$ . Enfin, des formules existent pour le calcul de  $\tilde{e}_i^n(b_1 \otimes b_2)$  et  $\tilde{f}_i^n(b_1 \otimes b_2)$ ; par exemple

$$\tilde{f}_i^n(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i^n b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq n + \varepsilon_i(b_2), \\ \tilde{f}_i^{(\varphi_i(b_1) - \varepsilon_i(b_2))_+} b_1 \otimes \tilde{f}_i^{n - (\varphi_i(b_1) - \varepsilon_i(b_2))_+} b_2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $x_+ = \max\{x, 0\}$ .

**6.3. Exemples.** —

**Exemple 6.1.** — Pour un cristal  $B$ , notons  $B^\vee$  le cristal obtenu en renversant les flèches. En clair,  $B^\vee = \{b^\vee; b \in B\}$  avec  $\text{wt}(b^\vee) = -\text{wt}(b)$ ,  $\varepsilon_i(b^\vee) = \varphi_i(b)$ ,  $\varphi_i(b^\vee) = \varepsilon_i(b)$ ,  $\tilde{e}_i(b^\vee) = (\tilde{f}_i b)^\vee$  et  $\tilde{f}_i(b^\vee) = (\tilde{e}_i b)^\vee$ . Alors  $(B_1 \otimes B_2)^\vee \simeq B_2^\vee \otimes B_1^\vee$ . Cette construction correspond à l'automorphisme d'anneau de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  qui permute  $e_i$  et  $f_i$  et envoie  $q(h)$  sur  $q(-h)$ .

**Exemple 6.2.** — Pour  $\lambda \in P_+$ , posons  $B(-\lambda) = B(\lambda)^\vee$ . Alors  $B(-\lambda)$  est assimilé à la base cristalline du module  $V(-\lambda)$  sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  de plus bas poids  $-\lambda$ .

**Exemple 6.3.** — Soit  $\lambda \in P$ . Définissons  $T_\lambda = \{t_\lambda\}$  avec  $\text{wt}(t_\lambda) = \lambda$ ,  $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$ ,  $\tilde{e}_i t_\lambda = \tilde{f}_i t_\lambda = 0$ . C'est bien un cristal, et il vérifie  $T_\lambda \otimes T_\mu \simeq T_{\lambda+\mu}$  pour tous  $\lambda, \mu \in P$ . De plus, pour tout cristal  $B$ , nous avons  $T_0 \otimes B \simeq B \otimes T_0 \simeq B$  par l'application  $t_0 \otimes b \leftrightarrow b \otimes t_0 \leftrightarrow b$ . Donc  $T_0$  est un objet neutre pour le produit tensoriel.

**Exemple 6.4.** — Définissons un cristal  $B_i = \{b_i(n); n \in \mathbb{Z}\}$  avec  $\text{wt}(b_i(n)) = n\alpha_i$  et

$$(10) \quad \varepsilon_j(b_i(n)) = \begin{cases} -n & \text{si } j = i, \\ -\infty & \text{si } j \neq i, \end{cases} \quad \varphi_j(b_i(n)) = \begin{cases} n & \text{si } j = i, \\ -\infty & \text{si } j \neq i, \end{cases}$$

$$(11) \quad \tilde{e}_j b_i(n) = \begin{cases} b_i(n+1) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i, \end{cases} \quad \tilde{f}_j b_i(n) = \begin{cases} b_i(n-1) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Notons par ailleurs  $b_i = b_i(0)$ . Le graphe cristallin associé est

$$(12) \quad \cdots \xrightarrow{i} b_i(1) \xrightarrow{i} b_i(0) \xrightarrow{i} b_i(-1) \xrightarrow{i} \cdots .$$

En outre  $T_\lambda \otimes B_i \simeq B_i \otimes T_{s_i\lambda}$  pour  $i \in I$  et  $\lambda \in P$ . L'isomorphisme est donné par  $t_\lambda \otimes b_i(n) \leftrightarrow b_i(n + \langle h_i, \lambda \rangle) \otimes t_{s_i\lambda}$ .

**6.4. Diverses notions.** — Un morphisme est *strict* s'il commute avec l'action des  $\tilde{e}_i$  et des  $\tilde{f}_i$ . Si l'application associée  $B_1 \sqcup \{0\} \longrightarrow B_2 \sqcup \{0\}$  est injective, nous dirons que  $\psi$  est un *plongement* et que  $B_1$  est un *sous-cristal* de  $B_2$ . Un plongement de cristaux est *plein* si  $\tilde{e}_i\psi_i(b_1) \neq 0$  implique  $\tilde{e}_ib_1 \neq 0$  pour tout  $b_1 \in B_1$ .

Un cristal est *semi-normal* si  $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$  et  $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$  pour tous  $b \in B$  et  $i \in I$ . Ceci signifie que  $B$ , considéré comme cristal sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i$ , est isomorphe au cristal associé à un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_i$ -module intégrable. Par exemple, les cristaux  $B(\lambda)$  et  $B(-\lambda)$  sont semi-normaux mais  $T_\lambda$  et  $B_i$  ne le sont pas.

Pour un cristal  $B$  et un sous-ensemble  $J \subset I$ , notons  $\Phi_J(B)$  le cristal  $B$  regardé comme cristal sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_J)$ . Alors

**Proposition 6.5.** — *Pour tout cristal  $B$ , il y a équivalence entre :*

- *pour tout sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  tel que la matrice  $((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j \in J}$  soit symétrique définie positive (c'est-à-dire  $\mathfrak{g}_J$  de dimension finie), le cristal  $\Phi_J(B)$  est isomorphe au cristal associé à un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_J)$ -module intégrable ;*
- *la condition ci-dessus est vérifiée pour tout  $J$  avec au plus deux éléments.*

Un cristal est dit *normal* s'il satisfait aux conditions équivalentes de la proposition.

**6.5. Action du groupe de Weyl sur les cristaux semi-normaux.** — Soit  $B$  un cristal semi-normal. Pour  $i \in I$ , définissons un automorphisme  $S_i$  de l'ensemble  $B$  par

$$(13) \quad S_i b = \begin{cases} \tilde{f}_i^{\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0, \\ \tilde{e}_i^{-\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

En clair,  $S_i b$  est le symétrique de  $b$  par rapport au milieu de la  $i$ -chaîne contenant  $b$ . Nous avons  $S_i^2 = \text{id}$  et  $\text{wt}(S_i b) = s_i(\text{wt}(b))$ . De plus, les  $S_i$  vérifient  $S_i \tilde{e}_i S_i^{-1} = \tilde{f}_i$ .

**Théorème 6.6.** — *Si  $B$  est un cristal normal, alors il existe une seule action  $S : W \longrightarrow \text{Aut}(B)$  de  $W$  sur l'ensemble  $B$  telle que  $S_{s_i} = S_i$  pour tout  $i \in I$  (c'est-à-dire prolongeant l'action des  $S_i$ ).*

En outre  $\text{wt}(S_w b) = w(\text{wt}(b))$  pour tous  $w \in W$  et  $b \in B$ .

## 7. Réalisation par des chemins de Littelmann

Les cristaux  $B(\lambda)$  peuvent se décrire de façon géométrique grâce aux chemins de Littelmann. Posons  $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ . Un *chemin* est une application continue et linéaire par morceaux de  $[0, 1]$  dans  $P_{\mathbb{R}}$ , modulo les reparamétrisations. Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des chemins  $\pi$  tels que  $\pi(0) = 0$  et  $\pi(1) \in P$ . Munissons  $\mathcal{P}$  d'une structure de cristal.

Soit  $\pi \in \mathcal{P}$ . Le chemin inverse de  $\pi^{\vee}$  est défini par  $t \mapsto \pi(1-t) - \pi(1)$ . Le poids de  $\pi$  est défini par  $\text{wt}(\pi) = \pi(1)$ . Pour tout  $i$ , posons  $h = \min\{\mathbb{Z} \cap \{\langle h_i, \pi(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1\}\} \leq 0$ . Soient  $\varepsilon_i(\pi) = -h \leq 0$  et  $\varphi_i(\pi) = \varepsilon(\pi^{\vee}) = \langle h_i, \pi(1) \rangle - h \leq 0$ .

Si  $\varepsilon_i(\pi) = 0$ , posons  $\tilde{e}_i\pi = 0$ . Sinon, prenons le plus petit  $t_1 > 0$  tel que  $\langle h_i, \pi(t_1) \rangle = h$  et le plus grand  $t_0 < t_1$  tel que  $\langle h_i, \pi(t_1) \rangle = h + 1$ . Alors définissons  $\tilde{e}_i\pi$  par

$$(14) \quad (\tilde{e}_i\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t) - \langle h_i, \pi(t) - \pi(t_0) \rangle \alpha_i & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{si } t_1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En clair, la partie  $t_0 \leq t \leq t_1$  est la réflexion de la partie de  $\pi$  correspondante par rapport à l'hyperplan  $\{\lambda \in P_{\mathbb{R}}; \langle h_i, \pi(t_1) \rangle = h + 1\}$  et la partie  $t_1 \leq t \leq 1$  est la translation de la partie de  $\pi$  correspondante. Posons enfin  $\tilde{f}_i\pi = (\tilde{e}_i(\pi^{\vee}))^{\vee}$ .

Alors  $\mathcal{P}$  est muni d'une structure de cristal semi-normal. De plus, si nous notons  $*$  la concaténation de chemins de  $\mathcal{P}$ , alors l'application  $\pi_1 \otimes \pi_2 \mapsto \pi_1 * \pi_2$  est un morphisme de cristaux de  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ .

Voici enfin la réalisation par des chemins de la base cristalline  $B(\lambda)$ . Pour  $\lambda \in P$ , notons  $\pi_{\lambda}$  la ligne de 0 à  $\lambda$  (c'est-à-dire  $\pi_{\lambda}(t) = t\lambda$ ).

**Théorème 7.1.** — *Pour tout  $\lambda \in P_+$ , il existe un unique morphisme de cristaux de  $B(\lambda)$  vers  $\mathcal{P}$  envoyant  $u_{\lambda}$  sur  $\pi_{\lambda}$ . Par ce morphisme, le cristal  $B(\lambda)$  est isomorphe à la composante connexe de  $\mathcal{P}$  contenant  $\pi_{\lambda}$ .*

L'image de  $B(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{P}$  se décrit de façon explicite à l'aide des *chemins de Lakshmibai-Seshadri*. Voir [1] et [14] pour plus de détails.

## 8. Base cristalline de la partie négative de l'algèbre enveloppante quantique

**8.1. Définition.** — Tout comme  $V(\lambda)$ , l'algèbre  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  admet une base cristalline. Cette base est en fait obtenue comme limite de celle de  $V(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers l'infini.

Pour tout  $\lambda \in P_+$ , nous avons un morphisme  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ -linéaire  $\pi_\lambda : \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \longrightarrow V(\lambda)$  défini par  $\pi_\lambda(P) = Pu_\lambda$ . Pour  $\xi \in Q_- = -\sum_i \mathbb{N}\alpha_i$ , posons  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi = \{P \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) ; q(h)Pq(h)^{-1} = q^{\langle h, \xi \rangle} P\}$ . Alors  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\xi \in Q_-} \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi$  et  $\pi_\lambda(\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi) \subset V(\lambda)_{\lambda+\xi}$ . Le noyau de  $\pi_\lambda$  est  $\sum_i \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle}$ . Par conséquent, si  $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$  alors  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi \xrightarrow{\pi_\lambda} V(\lambda)_{\lambda+\xi}$  est un isomorphisme. La sous-algèbre  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  peut donc être considérée comme limite de  $V(\lambda)$  lorsque  $\langle h_i, \lambda \rangle$  tend vers l'infini.

Etudions la relation entre  $\pi_\lambda$  et  $\pi_{\lambda+\mu}$  avec  $\mu \in P_+$ . Il existe une unique application  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaire  $S_{\lambda, \mu} : V(\lambda + \mu) \longrightarrow V(\lambda) \otimes V(\mu)$  envoyant  $u_{\lambda+\mu}$  sur  $u_\lambda \otimes u_\mu$ . Notons  $p_\mu : V(\mu) \longrightarrow K$  l'unique application  $K$ -linéaire qui envoie  $u_\mu$  sur 1 et  $V(\mu)_\nu$  sur 0 lorsque  $\mu \neq \nu$ . Puisque les flèches du diagramme suivant sont  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ -linéaires, celui-ci est commutatif

$$(15) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\pi_{\lambda+\mu}} & V(\lambda + \mu) & \xrightarrow{S_{\lambda, \mu}} & V(\lambda) \otimes V(\mu) \\ \downarrow \pi_\lambda & \swarrow p_{\lambda, \lambda+\mu} & & & \downarrow V(\lambda) \otimes p_\mu \\ V(\lambda) & \xlongequal{\hspace{2cm}} & V(\lambda) \otimes K & & \end{array}$$

L'application  $S_{\lambda, \mu}$  envoie  $L(\lambda + \mu)$  sur  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  et  $V(\lambda) \otimes p_\mu$  envoie  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  sur  $L(\lambda)$ . Les bases cristallines sont également préservées par ces morphismes. Puisque ceux-ci commutent avec  $\tilde{f}_i$ , le morphisme  $p_{\lambda, \lambda+\mu}$  envoie  $L(\lambda + \mu)$  sur  $L(\lambda)$  et induit un morphisme de cristaux  $B(\lambda + \mu) \longrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu) \longrightarrow B(\lambda) \otimes T_\mu$ . Enfin, en faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini nous obtenons le

**Théorème 8.1.** — *Il existe une unique base locale  $(L(\infty), B(\infty))$  de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  ayant les propriétés suivantes :*

- (1) *Pour tout  $\lambda \in P_+$ , les morphismes  $\pi_\lambda$  et  $\bar{\pi}_\lambda$  envoient respectivement  $L(\infty)$  et  $B(\infty)$  sur  $L(\lambda)$  et  $B(\lambda) \sqcup \{0\}$ .*
- (2) *La structure cristalline de  $B(\infty)$  est telle que l'application  $B(\infty) \longrightarrow B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}$ ,  $b \mapsto \pi_\lambda(b) \otimes t_{-\lambda}$  est un morphisme de cristaux, qui de plus commute avec les  $\tilde{f}_i$  pour tout  $\lambda \in P_+$ .*
- (3) *Soit  $b \in B(\infty)$  tel que  $\pi_\lambda(b) \neq 0$ . Alors  $\tilde{e}_i \pi_\lambda(b) = \pi_\lambda(\tilde{e}_i b)$ .*
- (4) *La base  $B(\infty)$  est stable sous l'action des  $\tilde{f}_i$ .*
- (5) *L'application  $\{b \in B(\infty) ; \bar{\pi}_\lambda(b) \neq 0\} \xrightarrow{\bar{\pi}_\lambda} B(\lambda)$  est bijective pour tout  $\lambda \in P_+$ .*

Il est à noter que l'application  $\bar{\pi}_\lambda$  n'est pas un morphisme de cristaux (non-conservation de  $\varphi_i$ ,  $\varepsilon_i$ , wt).

**8.2. Construction de la base cristalline  $B(\infty)$ .** — Soit  $R \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ . Il existe  $R_1$  et  $R_2$  dans  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  tels que  $[e_i, R] = \frac{t_i R_1 - t_i^{-1} R_2}{q_i - q_i^{-1}}$ . Définissons alors des endomorphismes  $e'_i$  et  $e''_i$  de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  par  $e'_i(R) = R_2$  et  $e''_i(R) = R_1$ . Ces endomorphismes vérifient

$$(16) \quad \begin{aligned} e'_i f_j &= q_i^{-\langle h_i, \alpha_j \rangle} f_j e'_i + \delta_{i,j}, \\ \sum_{n=0}^b (-1)^n \binom{b}{n}_i e_i^n e'_j e_i^{b-n} &= \sum_{n=0}^b (-1)^n \binom{b}{n}_i f_i^n f_j f_i^{b-n} = 0 \text{ pour tous } i \neq j. \end{aligned}$$

Ici, nous avons noté  $b = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$ . L'algèbre  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les endomorphismes  $e'_i$  et  $f_i$  de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  est appelée *q-analogue réduite*. L'algèbre  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  est un  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche. De plus,  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{B}_q(\mathfrak{g}) / \sum_i \mathcal{B}_q(\mathfrak{g}) e'_i$ .

Définissons des endomorphismes  $\tilde{e}_i$  et  $\tilde{f}_i$  de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  comme dans le cas des modules intégrables par

$$(17) \quad \tilde{e}_i f_i^{(k)} u = f_i^{(k-1)} u \quad \text{et} \quad \tilde{f}_i f_i^{(k)} u = f_i^{(k+1)} u \quad \text{pour } u \in \ker(e'_i).$$

Ils vérifient  $\tilde{e}_i \tilde{f}_i = 1$ . Soit  $L(\infty)$  le sous- $A$ -module de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  engendré par les vecteurs de la forme  $\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} \cdot 1$  et  $B(\infty)$  le sous-ensemble de  $L(\infty)/qL(\infty)$  formé des vecteurs non-nuls de la forme  $\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} \cdot 1 \pmod{qL(\infty)}$ . Alors le couple  $(L(\infty), B(\infty))$  est la base cristalline recherchée.

La base  $B(\lambda)$  peut donc être vue comme un sous-cristal de  $B(\infty) \otimes T_\lambda$  par  $\bar{\pi}_\lambda(b) \leftrightarrow b \otimes t_\lambda$ . L'application  $B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda$  commute avec les  $\tilde{e}_i$ ; son image sera explicitée dans la proposition 8.6.

Notons  $u_\infty$  l'élément de  $B(\infty)$  correspondant à  $1 \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ . Alors  $\bar{\pi}_\lambda(u_\infty) = u_\lambda$ . En outre, pour tout  $b \in B(\infty)$  nous avons  $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$ . Par contre  $\varphi_i$  peut être négatif (par exemple  $\varphi_i(\tilde{f}_i u_\infty) = -1$ ). Notons par ailleurs que  $u_\infty$  est le seul élément  $b$  de  $B(\infty)$  tel que  $\varepsilon_i(b) = 0$  pour tout  $i$ . Par ailleurs,

**Théorème 8.2.** — *L'algèbre  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  est un  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$ -module simple. Si  $\mathcal{O}(\mathcal{B}_q(\mathfrak{g}))$  désigne la catégorie des  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$ -modules sur lesquels les  $e'_i$  sont localement nilpotents, alors cette catégorie est semi-simple et  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  en est l'unique classe d'objets simples. Enfin, la base cristalline d'un  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$ -module dans  $\mathcal{O}(\mathcal{B}_q(\mathfrak{g}))$  est somme directe de copies de  $(L(\infty), B(\infty))$ .*

**8.3. Description de  $B(\infty)$ .** — Pour  $\lambda, \mu \in P_+$ , nous avons  $B(\lambda + \mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu)$ . En tensorisant à droite par le cristal  $T_{-(\lambda+\mu)}$ , nous obtenons un morphisme de cristaux  $B(\lambda + \mu) \otimes T_{-(\lambda+\mu)} \hookrightarrow B(\lambda) \otimes (B(\mu) \otimes T_{-\mu}) \otimes T_{-\lambda}$ , qui nous fournit lorsque  $\lambda$  est fixé et  $\mu$  tend vers l'infini un morphisme (strict)  $B(\infty) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\infty) \otimes T_{-\lambda}$ . Par ailleurs,  $B_\lambda \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda$ . D'où finalement un morphisme strict

$$(18) \quad \Theta_\lambda : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda \otimes B(\infty) \otimes T_{-\lambda}, \quad u_\infty \mapsto u_\infty \otimes t_\lambda \otimes u_\infty \otimes t_{-\lambda}.$$

Fixons un  $i_0 \in I$ . Soit  $\lambda \in P_+$  tel que  $\langle h_{i_0}, \lambda \rangle = 0$  et  $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$  pour tout  $i \neq i_0$ . Démontrons par récurrence que  $\Theta_\lambda(b)$  s'écrit sous la forme  $\Theta_\lambda(b) = b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}$ , avec  $b_1 \in B(\infty)$  et  $a \in \mathbb{N}$ . Quand nous aurons démontré cela, nous pourrons définir  $\Psi_{i_0} : B(\infty) \longrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_0}$  par  $\Psi_{i_0}(b) = b_1 \otimes \tilde{f}_{i_0}^a b_{i_0}$ .

Prouvons que si  $\Theta_\lambda(b)$  s'écrit sous la forme  $\Theta_\lambda(b) = b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}$ , alors  $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b)$  s'écrit également sous une forme analogue. Le morphisme  $\Theta_\lambda$  étant strict, nous avons  $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i(b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda})$ . Or  $\varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda})$  est égal à  $\varepsilon_i(\tilde{f}_{i_0}^a u_\infty) - \langle h_i, \lambda \rangle$ . Donc :

(1) Si  $i \neq i_0$  et  $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$ , de sorte à avoir  $\varphi_i(b) > \varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda})$ , alors

$$(19) \quad \Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = (\tilde{f}_i b_1) \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}.$$

(2) Si par contre  $i = i_0$ , alors  $\varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}) = a$ . Ainsi, nous avons

$$(20) \quad \Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda} & \text{si } \varphi_i(b_1) > a, \\ b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^{a+1} u_\infty \otimes t_{-\lambda} & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq a. \end{cases}$$

Dans les deux cas, l'élément  $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b)$  a bien la forme souhaitée.

**Théorème 8.3.** — *Il existe un unique plongement strict de cristaux  $\Psi_i : B(\infty) \longrightarrow B(\infty) \otimes B_i$  vérifiant  $\Psi_i(u_\infty) = u_\infty \otimes b_i$ , à savoir le morphisme que nous venons de décrire.*

Prenons maintenant une suite  $i_1, i_2, \dots$  dans  $I$  telle que pour tout  $i$ , l'ensemble  $\{n > 0; i_n = i\}$  soit infini. Nous avons alors

$$(21) \quad \Psi^n : B(\infty) \xrightarrow{\Psi_{i_1}} B(\infty) \otimes B_{i_1} \xrightarrow{\Psi_{i_2} \otimes B_{i_1}} B(\infty) \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_n} \otimes \dots \otimes B_{i_1}.$$

Pour tout  $b \in B(\infty)$ , il existe  $n$  assez grand tel que  $\Psi^n(b)$  soit de la forme  $u_\infty \otimes \tilde{f}_i^{a_n} b_{i_n} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_i^{a_1} b_{i_1}$ . Posons alors  $a_m = 0$  si  $m > n$ . Puisque  $\Psi^{n'}(b) = u_\infty \otimes b_{i_{n'}} \otimes \dots \otimes b_{i_{n+1}} \otimes \tilde{f}_i^{a_n} b_{i_n} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_i^{a_1} b_{i_1}$  pour  $n' \geq n$ , la suite  $\{a_1, a_2, \dots\}$  est indépendante du choix de  $n$ . D'où un plongement

$$(22) \quad \Psi : B(\infty) \longrightarrow \{(a_n)_{n \geq 1}; (a_n) \text{ suite d'entiers positifs tels que } a_n = 0 \text{ pour } n \gg 0\}.$$

La description de  $B(\infty)$  que nous venons d'obtenir dépend du choix de la suite  $\{i_1, i_2, \dots\}$ .

**8.4. Description de  $B(\infty)$  dans le cas de  $\mathfrak{sl}_3$ .** — Nous avons  $B(\infty) = \{\tilde{f}_1^{a_3} \tilde{f}_2^{a_2} \tilde{f}_1^{a_1} u_\infty; a_i \in \mathbb{N}\}$  dans le cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ . Ainsi, le calcul de  $\Psi$  se restreint à son évaluation sur un élément de la forme  $\{\tilde{f}_1^{a_3} \tilde{f}_2^{a_2} \tilde{f}_1^{a_1} u_\infty\}$ . Choisissons comme suite d'indices  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 1$ . Un théorème avancé permet d'affirmer que ces trois indices, correspondant à une décomposition réduite de l'élément le plus long du groupe de Weyl de  $\mathfrak{sl}_3$ , permettent à eux seuls le calcul de  $\Psi$ .

Nous obtenons après calculs

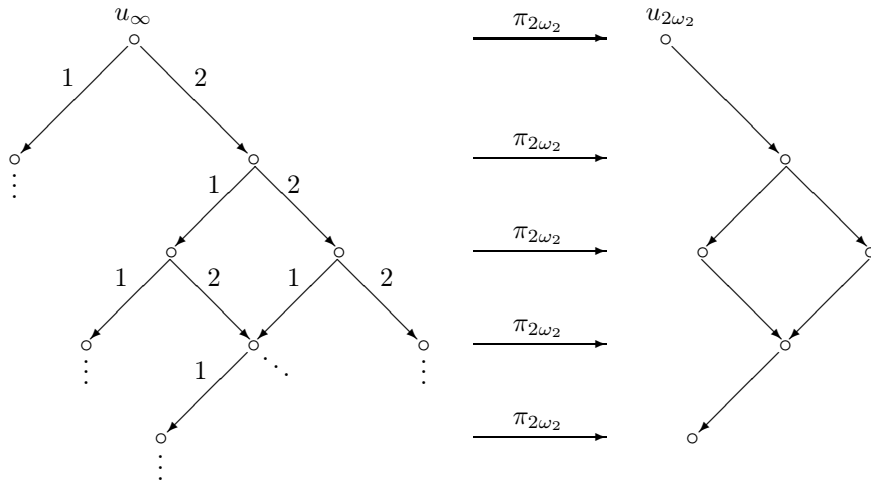
(23)

$$\Psi(\tilde{f}_1^{a_3} \tilde{f}_2^{a_2} \tilde{f}_1^{a_1} u_\infty) = \begin{cases} u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1} b_1 & \text{si } 0 \geq a_3 + a_1 - a_2, \\ u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{(a_2 - a_1)_+} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_3 + a_1 - (a_2 - a_1)_+} b_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $x_+$  désigne  $\max\{x, 0\}$ . D'où une injection

$$\tilde{f}_1^{a_3} \tilde{f}_2^{a_2} \tilde{f}_1^{a_1} u_\infty \mapsto \begin{cases} (a_1, a_2, a_3, 0, \dots) & \text{si } a_2 \geq a_1 + a_3, \\ (a_3 + a_1 - (a_2 - a_1)_+, a_2, (a_2 - a_1)_+, 0, \dots) & \text{si } a_2 < a_1 + a_3. \end{cases}$$

Etant donné que  $a_2 \geq a_1 + a_3 \geq a_3$  dans le premier cas et  $a_2 \geq (a_2 - a_1)_+$  dans le second, la base cristalline s'injecte dans l'ensemble des suites d'entiers  $(a_n)_{n \geq 1}$  telles que  $a_2 \geq a_3$  et  $a_n = 0$  pour tout  $n \geq 4$ . Le fait que toutes les telles suites sont atteintes est clair.



Le diagramme se complique très vite, car il « contient » les  $B(\lambda)$  pour tout  $\lambda$ , et les croisements se multiplient.

**8.5. \*-opération.** — Soit  $*$  l'anti-automorphisme de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  laissant inchangés  $q, e_i$  et  $f_i$  mais transformant  $q(h)$  en  $q(-h)$ . Alors  $*$  envoie  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  sur  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ .

**Théorème 8.4.** — Nous avons  $L(\infty)^* = L(\infty)$  et  $B(\infty)^* = B(\infty)$ .

Définissons sur  $B(\infty)$  une autre structure de cristal par

$$(24) \quad \tilde{e}_i^* b = (\tilde{e}_i(b^*))^*, \quad \tilde{f}_i^* b = (\tilde{f}_i(b^*))^*, \quad \varepsilon_i^*(b) = \varepsilon_i(b^*), \quad \varphi_i^*(b) = \varphi_i(b^*), \quad \text{wt}^* = \text{wt}.$$

Cette seconde structure se comprend à l'aide de la

**Proposition 8.5.** — Pour  $b \in B(\infty)$ , posons  $\Psi_i(b) = b' \otimes \tilde{f}_i^m b_i$ . Alors

$$(25) \quad \varepsilon_i^*(b') = 0, \quad \varepsilon_i^*(b) = m, \quad \Psi_i(\tilde{f}_i^* b) = b' \otimes \tilde{f}_i^{m+1} b_i, \quad \Psi_i(\tilde{e}_i^* b) = \begin{cases} b' \otimes \tilde{f}_i^{m-1} b_i & \text{si } m > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, l'image de  $\Psi_i : B(\infty) \rightarrow B(\infty) \otimes B_i$  est l'ensemble des  $b \otimes \tilde{f}_i^m b_i \in B(\infty) \otimes B_i$  tels que  $\varepsilon_i^*(b) = 0$ . De plus

**Proposition 8.6.** — Pour tout  $\lambda \in P_+$ , l'image de  $B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda$  est l'ensemble des  $b \otimes t_\lambda$  tels que  $\varepsilon_i^*(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$  pour tout  $i \in I$ .

La sous-algèbre  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$  admet de façon similaire une base cristalline, notée  $(L(-\infty), B(-\infty))$ . En fait, les cristaux  $B(-\infty)$  et  $B(\infty)^\vee$  sont isomorphes. Posons  $u_{-\infty} = u_\infty^\vee$ ; cet élément correspond à  $1 \in \mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$ .

## 9. Polarisation

Soit  $M$  un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module. Soit  $(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  satisfaisant pour tous  $u, v \in M$  à

$$\begin{aligned} (q^h u, v) &= (u, q^h v), \\ (f_i u, v) &= (u, q_i^{-1} t_i e_i v), \\ (e_i u, v) &= (u, q_i t_i^{-1} f_i v). \end{aligned}$$

Soient deux  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules  $M_1$  et  $M_2$  munis de formes bilinéaires symétriques vérifiant (26). Alors la forme  $(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) = (u_1, v_1)(u_2, v_2)$  est bilinéaire symétrique sur  $M_1 \otimes M_2$  et vérifie (26).

Pour tout  $\lambda \in P_+$ , il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $(\cdot, \cdot)$  sur  $V(\lambda)$  vérifiant (26) et  $(u_\lambda, u_\lambda) = 1$ .

Soient  $\lambda, \mu \in P_+$  et définissons des applications  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaires  $\Phi_{\lambda, \mu} : V(\lambda + \mu) \longrightarrow V(\lambda) \otimes V(\mu)$  et  $\Psi_{\lambda, \mu} : V(\lambda) \otimes V(\mu) \longrightarrow V(\lambda + \mu)$  par  $\Phi_{\lambda, \mu}(u_{\lambda + \mu}) = u_\lambda \otimes u_\mu$  et  $\Psi_{\lambda, \mu}(u_\lambda \otimes u_\mu) = u_{\lambda + \mu}$ . Ces applications vérifient  $\Psi_{\lambda, \mu} \circ \Phi_{\lambda, \mu} = \text{Id}_{V(\lambda + \mu)}$ . Soient  $(\cdot, \cdot)$  les formes bilinéaires symétriques sur  $V(\lambda + \mu)$  et  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$  définies comme ci-dessus. Alors nous avons

$$(26) \quad (\Psi_{\lambda, \mu}(w), u) = (w, \Phi_{\lambda, \mu}(u))$$

pour tous  $w \in V(\lambda) \otimes V(\mu)$  et  $u \in V(\lambda + \mu)$ .

**Proposition 9.1.** — Soit  $\lambda \in P_+$ . Soit  $(\cdot, \cdot)_0$  la forme induite sur  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  par la forme  $(\cdot, \cdot)|_{q=0}$  sur  $L(\lambda)$ . Alors :

- (1) Nous avons  $(L(\lambda), L(\lambda)) \subset A$  et  $L(\lambda)$  est caractérisé par  $L(\lambda) = \{u \in V(\lambda); (u, L(\lambda)) \subset A\}$ .
- (2) La forme  $(\cdot, \cdot)_0$  vérifie  $(\tilde{e}_i u, v) = (u, \tilde{f}_i v)$  pour tous  $u, v \in L(\lambda)/qL(\lambda)$ . De plus, la base cristalline  $B(\lambda)$  est une base orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)_0$ . En particulier, la forme  $(\cdot, \cdot)_0$  est définie positive.

De façon similaire,

**Proposition 9.2.** — Il existe une unique forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  vérifiant  $(f_i R, S) = (R, e'_i S)$  et  $(1, 1) = 1$  pour tous  $R, S \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ .

L'ensemble  $M = \text{Hom}(\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}), k(q))$  est un  $\mathcal{B}_q(\mathfrak{g})$ -module pour l'action  $(f_i \varphi)R = \varphi(e'_i R)$  et  $(e'_i \varphi)R = \varphi(f_i R)$  pour  $R \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  et  $\varphi \in M$ . Soit  $\varphi_0$  un élément de  $M$  tel que  $\varphi_0(1) = 1$  et  $\varphi_0(\sum_i f_i \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})) = 0$ . Puisque  $e'_i \varphi_0 = 0$ , nous avons un isomorphisme  $\psi : \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{B}_q(\mathfrak{g}) / \sum_i \mathcal{B}_q(\mathfrak{g}) e'_i \longrightarrow M$ . Nous définissons alors  $(\cdot, \cdot)$  par  $(R, S) = \psi(R)(S)$  pour  $R, S \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ . La non-dégénérescence provient du fait que  $R \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  est un multiple constant de 1 s'il vérifie  $e'_i R = 0$  pour tout  $i$ .

**Proposition 9.3.** — Soit  $(\cdot, \cdot)_0$  la forme induite sur  $L(\infty)/qL(\infty)$  par la forme  $(\cdot, \cdot)|_{q=0}$  sur  $L(\infty)$ . Alors :

- (1) Nous avons  $(L(\infty), L(\infty)) \subset A$  et  $L(\infty)$  est caractérisé par  $L(\infty) = \{P \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}); (P, L(\infty)) \subset A\}$ .
- (2) La forme  $(\cdot, \cdot)_0$  vérifie  $(\tilde{e}_i u, v) = (u, \tilde{f}_i v)$  pour tous  $u, v \in L(\infty)/qL(\infty)$ . De plus, la base cristalline  $B(\infty)$  est une base orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)_0$ . En particulier, la forme  $(\cdot, \cdot)_0$  est définie positive.

Une conséquence de la positivité des formes  $(\cdot, \cdot)_0$  est la

**Proposition 9.4.** — Pour  $\lambda \in P_+$ , les espaces  $L(\lambda)$  et  $L(\infty)$  sont caractérisés par

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \{u \in V(\lambda); (u, u) \in A\}, \\ L(\infty) &= \{R \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}); (R, R) \in A\}. \end{aligned}$$



## 10. Base cristalline de l'algèbre enveloppante quantique modifiée

**10.1. Algèbre enveloppante quantique modifiée.** — Soit  $\text{Mod}(\mathfrak{g}, P)$  la catégorie des  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules  $M$  admettant une décomposition en espaces de poids  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ . Pour un tel  $M$ , la projection canonique  $a_\lambda : M \rightarrow M_\lambda$  vérifie  $q(h)a_\lambda = q^{(h, \lambda)}a_\lambda$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ . Ainsi,  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda$  est un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche.

Soit  $1$  le foncteur identité de  $\text{Mod}(\mathfrak{g}, P)$  et  $R = \text{End}(1)$ . En clair, un élément  $\varphi$  de  $R$  associe à tout  $M$  un endomorphisme  $\varphi(M)$  de  $M$  tel que pour tout morphisme de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules  $f : M \rightarrow N$ , nous ayons  $f \circ \varphi(M) = \varphi(N) \circ f$  (le foncteur  $\varphi$  associe à  $f$  le morphisme  $\varphi(f) = f$ ). Considérons  $a_\lambda$  comme le foncteur tel que  $a_\lambda(M) = M_\lambda$  et  $a_\lambda(f) = f|_{M_\lambda}$  si  $f$  est un morphisme de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules de  $M$  dans  $N$ . Ainsi  $a_\lambda \in R$ .

En fait, l'algèbre  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  peut être vue comme un sous-anneau de  $R$ . De plus,  $R$  est isomorphe à  $\prod_{\lambda} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda$ . Définissons l'algèbre enveloppante quantique modifiée par  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda$  et munissons-la d'une structure de bimodule sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  de la façon suivante. Pour  $\xi \in Q = \bigoplus_i \mathbb{Z}\alpha_i$ , notons  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_\xi = \{R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) ; q(h)Rq(-h) = q^{(h, \lambda)}R \text{ pour tout } h \in P^*\}$ ; alors  $a_\lambda R = Ra_{\lambda - \xi}$  si  $R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_\xi$ . La structure d'anneau sur  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  est telle que  $a_\lambda a_\mu = \delta_{\lambda, \mu} a_\lambda$  et  $(uR)v = u(Rv)$  pour tous  $u, v \in \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  et  $R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ . Enfin, nous avons

$$(27) \quad \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda, \mu \in P; \lambda - \mu \in Q} a_\lambda \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) a_\mu.$$

**10.2. Base cristalline de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ .** — Le raisonnement pour construire une base cristalline sur  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  est le même que dans le cas de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ . Soient  $\lambda \in P$  et  $\zeta, \mu \in P_+$  tels que  $\lambda = \zeta - \mu$ . Nous avons un morphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaire  $\pi_{\zeta, \mu} : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda \rightarrow V(\zeta) \otimes V(-\mu)$  défini par  $a_\lambda \mapsto u_\zeta \otimes u_{-\mu}$ . Ici  $V(-\mu)$  est le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable irréductible de plus bas poids  $-\mu$ , c'est-à-dire  $V(-\mu) = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})u_{-\mu}$  avec les relations

$$q(h)u_{-\mu} = q^{(h, -\mu)}u_{-\mu}, \quad f_i u_{-\mu} = 0, \quad e_i^{1 - \langle h_i, \mu \rangle} u_{-\mu} = 0.$$

Le morphisme  $\pi_{\zeta, \mu}$  est surjectif. Nous avons alors pour tout  $\xi \in P_+$  un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda & \xrightarrow{\pi_{\zeta+\xi, \mu+\xi}} & V(\zeta + \xi) \otimes V(-\xi - \mu) \\ & \searrow \pi_{\zeta, \mu} & \downarrow \alpha \\ & & V(\zeta) \otimes V(\xi) \otimes V(-\xi) \otimes V(-\mu) \\ & & \downarrow \beta \\ & & V(\zeta) \otimes V(-\mu) \end{array}$$

où  $\alpha$  est défini à l'aide des morphismes  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaires  $V(\zeta + \xi) \rightarrow V(\zeta) \otimes V(\xi)$ ,  $u_{\zeta+\xi} \mapsto u_\zeta \otimes u_\xi$ , et  $V(-\zeta - \xi) \rightarrow V(-\zeta) \otimes V(-\xi)$ ,  $u_{-\zeta-\xi} \mapsto u_{-\zeta} \otimes u_{-\xi}$ . Le morphisme  $\beta$  est pour sa part défini grâce à l'unique morphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -linéaire  $V(\xi) \otimes V(-\xi) \rightarrow K$ ,  $u_\xi \otimes u_{-\xi} \mapsto 1$ . Les applications  $\alpha$  et  $\beta$  induisent au niveau des cristaux des morphismes de cristaux stricts

$$B(\zeta + \xi) \otimes B(-\mu - \xi) \rightarrow B(\zeta) \otimes B(\xi) \otimes B(-\xi) \otimes B(-\mu) \rightarrow B(\zeta) \otimes B(0) \otimes B(-\mu) \simeq B(\zeta) \otimes B(-\mu),$$

où  $B(\xi) \otimes B(-\xi) \rightarrow B(0) = \{u_0\}$  est donné par  $b_1 \otimes b_2 \mapsto \begin{cases} u_0 & \text{si } b_1 = u_\xi \text{ et } b_2 = u_{-\xi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Nous obtenons ainsi le

**Théorème 10.1.** — *Pour tout  $\lambda \in P$ , il existe une unique base locale  $(L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda), B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda))$  du module  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda$  telle que pour tous  $\zeta, \mu \in P_+$  avec  $\lambda = \zeta - \mu$ , on ait*

(1) *L'application  $\pi_{\zeta, \mu}$  envoie  $L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  dans  $L(\zeta) \otimes L(-\mu)$  et l'application induite*

$$\bar{\pi}_{\zeta, \mu} : L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda) / qL(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda) \rightarrow (L(\zeta) / qL(\zeta)) \otimes (L(-\mu) / qL(-\mu))$$

*vérifie  $\bar{\pi}_{\zeta, \mu}(B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)) \subset B(\zeta) \otimes B(-\mu) \cup \{0\}$ .*

(2) *Il existe sur  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  une unique structure de cristal telle que  $\bar{\pi}_{\zeta, \mu}$  soit un morphisme strict de cristaux de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  dans  $B(\zeta) \otimes B(-\mu)$ .*

(3) *L'application  $B(\zeta) \otimes B(-\mu) \rightarrow B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  est un plongement strict de cristaux.*

Posons  $(L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})), B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))) = \bigoplus_{\lambda} (L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda}), B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda}))$ . C'est une base locale de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ , et  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  est normal.

Pour  $\zeta, \mu \in P_+$ , on a des plongements  $B(\zeta) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_{\zeta}$  et  $B(-\mu) \hookrightarrow T_{-\mu} \otimes B(-\infty)$ , d'où un plongement  $B(\zeta) \otimes B(-\mu) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_{\zeta-\mu} \otimes B(-\infty)$ . En fixant  $\lambda = \zeta - \mu \in P_+$  et en faisant tendre  $\zeta, \mu$  vers l'infini, on a

**Théorème 10.2.** — *Les cristaux  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda})$  et  $B(\infty) \otimes T_{\lambda} \otimes B(-\infty)$  sont isomorphes.*

Ceci est à rapprocher de l'isomorphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda} \simeq \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \otimes Ka_{\lambda} \otimes \mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$ .

**10.3. Structure cristalline sur  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ .** — Puisque  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  est un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -bimodule, considérons-le comme un module sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$ . De même, étendons la structure de cristal de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  en une structure sur  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ . Pour ce faire, construisons une seconde structure de cristal de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  puis recollons les deux.

Soit  $*$  l'anti-automorphisme de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  défini par  $a_{\lambda}^* = a_{-\lambda}$  et  $(R_1 u R_2)^* = R_2^* u^* R_1^*$  pour  $u \in \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  et  $R_1, R_2 \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ .

**Théorème 10.3.** — (1) *Nous avons  $L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))^* = L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  et  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))^* = B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ .*

(2) *Grâce à l'identification  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})) \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} B(\infty) \otimes T_{\lambda} \otimes B(-\infty)$ , on a  $(b_1 \otimes t_{\lambda} \otimes b_2)^* = b_1^* \otimes t_{-\lambda - \text{wt}(b_1) - \text{wt}(b_2)} \otimes b_2^*$  pour  $b_1 \in B(\infty)$  et  $b_2 \in B(-\infty)$ .*

Pour  $b \in B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda})$ , posons maintenant

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^*(b) &= \varepsilon_i(b^*), \\ \varphi_i^*(b) &= \varphi_i(b^*), \\ \tilde{e}_i^*(b) &= (\tilde{e}_i(b^*))^*, \\ \tilde{f}_i^*(b) &= (\tilde{f}_i(b^*))^*, \\ \text{wt}^*(b) &= -\lambda. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une seconde structure de cristal sur  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ . Les deux structures sont compatibles, c'est-à-dire  $\tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^* : B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})) \rightarrow B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  sont des morphismes de cristaux (ils sont stricts en plus). Donc  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  peut être muni d'une structure de cristal sur  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ .

Soit  $T = W \cdot P_+ = \{\lambda \in P; (\alpha, \lambda) < 0 \text{ pour un nombre fini de racines positives } \alpha\}$  le cône de Tits. Posons  $B_T(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})) = \{b \in B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})); \text{wt}(b) \in T, -\text{wt}^*(b) \in T\}$ . Alors

**Théorème 10.4.** — *Nous avons  $B_T(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})) \simeq \bigoplus_{\lambda \in P_+} B(\lambda) \otimes B(-\lambda)$ .*

En considérant le treillis des poids  $P \oplus P$  de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ , le produit tensoriel  $B(\lambda) \otimes B(-\lambda)$  signifie  $B(\lambda \oplus 0) \otimes B(0 \oplus (-\lambda))$ , donc  $B(\lambda) \otimes B(-\lambda)$  est identifié avec  $\{b_1 \otimes b_2; b_1 \in B(\lambda), b_2 \in B(-\lambda)\}$ . Les  $\tilde{e}_i$  et  $\tilde{f}_i$  agissent sur le premier facteur tandis que les  $\tilde{e}_i^*$  et  $\tilde{f}_i^*$  agissent sur le second facteur. De même,  $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \varepsilon_i(b_1)$ ,  $\varepsilon_i^*(b_1 \otimes b_2) = \varepsilon_i(b_2)$ , etc.

## 11. Base cristalline globale

Jusqu'à maintenant, nous avons décrit des bases cristallines, c'est-à-dire des bases locales en  $q = 0$ . En fait, nous pouvons construire de vraies bases des représentations  $V(\lambda)$ ,  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$  et  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ .

**11.1. Triplet équilibré.** — Soient  $k (= \mathbb{Q})$  un corps et  $K = k(q)$ . Posons  $A = \{f \in K ; f \text{ régulière en } q = 0\}$  et  $A_\infty = \{f \in K ; f \text{ régulière en } q = \infty\}$ . Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. Prenons un  $A$ -treillis  $L$  sur  $V$ , un  $A_\infty$ -treillis  $L_\infty$  sur  $V$  et un  $k[q, q^{-1}]$ -treillis  $V_k$  sur  $V$ .

**Proposition 11.1.** — Notons  $E = L \cap L_\infty \cap V_k$ . Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'application  $E \rightarrow L/qL$  est un isomorphisme.
- (2) L'application  $E \rightarrow L_\infty/q^{-1}L_\infty$  est un isomorphisme.
- (3) L'application  $(L \cap V_k) \text{coef}(q^{-1}L_\infty \cap V_k) \rightarrow V_k$  est un isomorphisme.
- (4) Les applications  $A \otimes_k E \rightarrow L$ ,  $A_\infty \otimes_k E \rightarrow L_\infty$ ,  $k[q, q^{-1}] \otimes_k E \rightarrow V_k$  et  $K \otimes_k E \rightarrow V$  sont des isomorphismes.

Un triplet  $(L, L_\infty, V_k)$  vérifiant les quatre conditions équivalentes ci-dessus est dit *équilibré* (« balanced »). Dans ce cas, notons  $G : L/qL \rightarrow E$  l'isomorphisme inverse de celui de la proposition 11.1.

Notons  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k$  la  $k[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  engendrée par  $e_i^{(n)}$ ,  $f_i^{(n)}$ ,  $q(h)$  et  $\left\{ \begin{smallmatrix} q(h) \\ n \end{smallmatrix} \right\}$  pour tous  $n \geq 1$ ,  $i \in I$  et  $h \in P^*$ . Notons également  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})_k$  (resp.  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_k$ ) la  $k[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre engendrée par les  $e_i^{(n)}$  (resp.  $f_i^{(n)}$ ). Alors

$$(28) \quad \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k \simeq \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_k \otimes_{k[q, q^{-1}]} \mathcal{T}_k \otimes_{k[q, q^{-1}]} \mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})_k$$

où  $\mathcal{T}_k$  est la  $k[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de  $K[P^*]$  engendrée par  $q(h)$  et  $\left\{ \begin{smallmatrix} q(h) \\ n \end{smallmatrix} \right\}$  pour tout  $h$ . Soit  $-$  l'automorphisme d'anneau de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  fixant les  $e_i$  et  $f_i$  et envoyant  $q$  et  $q(h)$  sur respectivement  $q^{-1}$  et  $q(-h)$ .

Soit  $M$  un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module. Soit  $-$  une involution de  $M$  satisfaisant à  $(au)^- = \bar{a}\bar{u}$  pour tous  $a \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  et  $u \in M$ . Soit  $M_k$  un sous- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k$ -module de  $M$  stable par  $-$  tel que  $M \simeq k(q) \otimes_{k[q, q^{-1}]} M_k$  et  $u - \bar{u} \in (q-1)M_k$  pour tout  $u \in M_k$ . Si un triplet  $(L, \bar{L}, M_k)$  est équilibré, nous dirons que  $M$  admet une base globale. Dans ce cas, notons  $G : L/qL \rightarrow E = L \cap \bar{L} \cap M_k$  l'isomorphisme inverse de  $E \xrightarrow{\simeq} L/qL$ . Si  $B$  est une base de  $L/qL$ , alors  $G(B)$  devient une base de  $M$ . Nous l'appellerons une base globale de  $M$ . Cette base vérifie  $G(b)^- = G(b)$  pour tout  $b \in B$ . En outre,

**Lemme 11.2.** — Il existe des éléments  $F_{b,b'}^i \in qq_i^{1-\varepsilon_i(b')}k[q]$  et  $E_{b,b'}^i \in qq_i^{1-\varphi_i(b')}k[q]$  tels que

$$(29) \quad \begin{aligned} f_i G(b) &= [\varepsilon_i(b) + 1]G(\tilde{f}_i b) + \sum_{\varepsilon_j(b') \geq \varepsilon_j(b) + \langle h_j, \alpha_i \rangle} F_{b,b'}^i G(b') \\ \text{et } e_i G(b) &= [\varphi_i(b) + 1]G(\tilde{e}_i b) + \sum_{\varphi_j(b') \geq \varphi_j(b) + \langle h_j, \alpha_i \rangle} E_{b,b'}^i G(b'). \end{aligned}$$

De plus  $\bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b) = \sum_{m \geq n} f_i^{(m)} M_k$  et  $\bigoplus_{\varphi_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b) = \sum_{m \geq n} e_i^{(m)} M_k$ .

**11.2. Base globale et filtration.** — Pour un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module  $M$  dans  $\mathcal{O}_{int}$ , notons  $I_\lambda(M) = \text{Hom}_{\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})}(V(\lambda), M) \otimes V(\lambda)$  sa composante isotypique selon  $\lambda \in P_+$ . Ainsi, nous avons

$$(30) \quad M = \bigoplus_{\lambda \in P_+} I_\lambda(M).$$

Posons  $W_\lambda(M) = \bigoplus_{\mu \in P_+ ; \mu \leq \lambda} I_\mu(M)$  et  $W_{<\lambda}(M) = \bigoplus_{\mu \in P_+ ; \mu < \lambda} I_\mu(M)$ . Définissons pour tout ensemble  $F \subset P_+$  une filtration de  $M$  par  $W_F(M) = \sum_{\lambda \in F} W_\lambda(M)$ . Pareillement, définissons pour un sous-espace  $S$  de  $M$  les espaces  $W_\lambda(S) = W_\lambda(M) \cap S$  et  $W_{<\lambda}(S) = W_{<\lambda}(M) \cap S$ , et pour tout sous-ensemble  $F$  de  $P_+$  l'espace  $W_F(S) = \sum_{\lambda \in F} W_\lambda(S)$ .

**Proposition 11.3.** — Supposons le triplet  $(L_0, L_\infty, M_k)$  équilibré. Alors pour tout sous-ensemble  $F$  de  $P_+$ , le triplet  $(W_F(L_0), W_F(L_\infty), W_F(M_k))$  est équilibré.

**11.3. Bases globales de  $V(\lambda)$  et de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ .** — L'automorphisme  $-$  est étendu à  $V(\lambda)$  par  $Ru_\lambda \mapsto \bar{R}u_\lambda$  (si  $\lambda \in P_+$ ). Alors  $L(\lambda)^-$  est un  $A_\infty$ -module. Posons  $V(\lambda)_k = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k u_\lambda = \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_k u_\lambda$ .

**Théorème 11.4.** — *Le triplet  $(L(\lambda), L(\lambda)^-, V(\lambda)_k)$  est équilibré.*

Ainsi, si  $G_\lambda$  est l'isomorphisme réciproque de  $L(\lambda) \cap L(\lambda)^- \cap V(\lambda)_k \xrightarrow{\cong} L(\lambda)/qL(\lambda)$ , l'ensemble  $G_\lambda(B(\lambda))$  est une base de  $V(\lambda)$ , appelée *base globale de  $V(\lambda)$* . En clair,  $V(\lambda) = \bigoplus_{b \in B(\lambda)} KG_\lambda(b)$ .

De même, nous avons le

**Théorème 11.5.** — *Le triplet  $(L(\infty), L(\infty)^-, \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_k)$  est équilibré.*

Ainsi, si  $G_\infty$  est l'isomorphisme réciproque de  $L(\infty) \cap L(\infty)^- \cap \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})_k \xrightarrow{\cong} L(\infty)/qL(\infty)$ , l'ensemble  $G_\infty(B(\infty))$  est une base de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$ , appelée *base globale de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})$* . En clair,

$$(31) \quad \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{b \in B(\infty)} KG_\infty(b).$$

Si l'application induite par  $\pi_\lambda : \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow V(\lambda)$ ,  $R \mapsto Ru_\lambda$ , est notée  $\bar{\pi}_\lambda : L(\infty)/qL(\infty) \rightarrow L(\lambda)/qL(\lambda)$ , alors pour tout  $b \in B(\infty)$  nous avons

$$(32) \quad G_\infty(b)^- = G_\infty(b), \quad G_\infty(b)^* = G_\infty(b^*), \quad G_\infty(b)u_\lambda = G_\lambda(\bar{\pi}_\lambda(b)).$$

**Exemple 11.6.** — La base globale de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{sl}_2)$  est  $\{f^{(n)}; n \geq 0\}$ .

**Exemple 11.7.** — La base globale de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{sl}_3)$  est  $\{f_1^{(l)} f_2^{(m)} f_1^{(n)}; m \geq l+n\} \cup \{f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_2^{(n)}; m \geq l+n\}$ . Notons que  $f_1^{(l)} f_2^{(l+n)} f_1^{(n)} = f_2^{(l)} f_1^{(l+n)} f_2^{(n)}$  si  $l, n > 0$  et que l'intersection des deux ensembles est exactement l'ensemble de ces cas.

**Exemple 11.8.** — Dans le cas de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{sl}_4)$ , voir [16].

## 12. Base globale de l'algèbre enveloppante quantique modifiée

**12.1. Construction de la base globale.** — Construisons maintenant la base globale de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ . Prolongeons l'automorphisme d'anneaux  $-$  à  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  par  $(Ra_\lambda)^- = \bar{R}a_\lambda$  et posons  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})_k = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k a_\lambda$ .

**Théorème 12.1.** — *Le triplet  $(L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})), L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))^-, \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})_k)$  est équilibré.*

Ainsi  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  admet elle-aussi une base globale. Notons  $G$  l'inverse de l'isomorphisme  $L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})) \cap L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))^- \cap \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})_k \xrightarrow{\cong} L(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))/qL(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ . L'ensemble  $G(B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})))$  est une base de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ , appelée *base globale* de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ . En clair

$$(33) \quad \tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{b \in B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))} KG(b).$$

**Exemple 12.2.** — La base globale de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{sl}_2)$  est  $\{f^{(m)}e^{(n)}a_\lambda \text{ pour } \langle h, \lambda \rangle \geq m - n\} \cup \{e^{(n)}f^{(m)}a_\lambda \text{ pour } \langle h, \lambda \rangle < m - n\}$ . Remarquons que  $f^{(m)}e^{(n)}a_\lambda = e^{(n)}f^{(m)}a_\lambda$  lorsque  $\langle h, \lambda \rangle = m - n$ .

**12.2. Interprétation de la base globale de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ .** — Pour  $i \in I$  et  $\lambda \in P_+$ , notons  $V_i(\lambda)$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module engendré par  $u_{i,\lambda}$  avec les relations

$$(34) \quad q^h u_{i,\lambda} = q^{\langle h, \lambda \rangle} u_{i,\lambda}; \quad e_j u_{i,\lambda} = 0 \text{ pour tout } j; \quad f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} u_{i,\lambda} = 0.$$

De même, notons  $V_i(\mu)$  pour  $\mu \in P_-$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module engendré par  $u_{i,\mu}$  avec les relations

$$(35) \quad q^h u_{i,\mu} = q^{\langle h, \mu \rangle} u_{i,\mu}, \quad f_j u_{i,\mu} = 0 \text{ pour tout } j, \quad e_i^{1+\langle h_i, \mu \rangle} u_{i,\mu} = 0.$$

Considérons maintenant le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module  $V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)$ . Il est engendré par  $u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}$  avec les relations

$$q^h (u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}) = q^{\langle h, \lambda + \mu \rangle} (u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}), \quad f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} (u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}) = 0, \quad e_i^{1+\langle h_i, \mu \rangle} (u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}) = 0.$$

Désignons par  $\Phi_{\lambda,\mu}^i$  le morphisme  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu} \rightarrow V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)$  qui envoie  $a_{\lambda+\mu}$  sur  $u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu}$ . Posons  $L(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)) = \Phi_{\lambda,\mu}^i(L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu}))$ , et notons  $\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i$  le morphisme induit

$$L(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})/qL(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu}) \rightarrow L(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu))/qL(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)).$$

Définissons  $B(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)) = \{\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i(b); b \in B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})\} \setminus \{0\}$ . Alors nous avons la

**Proposition 12.3.** — (1) *Le couple  $(L(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)), B(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)))$  est une base cristalline du  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_i)$ -module intégrable  $V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)$ .*

(2) *Pour tout  $b \in B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})$ , nous avons  $\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i(b) \neq 0$  si et seulement si  $\varepsilon_i^*(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$ .*

(3) *L'ensemble des  $b \in B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})$  tels que  $\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i(b) \neq 0$  est isomorphe à  $B(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu))$ .*

(4) *L'ensemble des  $G(b)(u_{i,\lambda} \otimes u_{i,\mu})$  forme une base de  $V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu)$ , où  $b$  parcourt l'ensemble des éléments de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})$  tels que  $\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i(b) \neq 0$ .*

(5) *L'application  $\bar{\Phi}_{\lambda,\mu}^i$  est un morphisme de  $\mathfrak{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_{\lambda+\mu})$  dans  $B(V_i(\lambda) \otimes V_i(\mu))$ .*

La base globale de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  vérifie également

$$(36) \quad \begin{aligned} f_i^{(n)} G(b) &= \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_i(b) + n \\ n \end{array} \right]_i G(\tilde{f}_i^n b) + \sum_{\varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(b) + n} F_{b,b'}^{i,n}(q) G(b'), \\ e_i^{(n)} G(b) &= \left[ \begin{array}{c} \varphi_i(b) + n \\ n \end{array} \right]_i G(\tilde{e}_i^n b) + \sum_{\varphi_i(b') > \varphi_i(b) + n} E_{b,b'}^{i,n}(q) G(b'). \end{aligned}$$

**12.3. Vecteurs extrémaux.** — Soit  $M$  un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable. Un vecteur de poids  $u$ , de poids  $\lambda \in P$ , est dit *i-extrémal* si  $e_i u = 0$  ou  $f_i u = 0$ . Dans ce cas, posons  $S_i u = f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle} u$  ou  $S_i u = e_i^{\langle -h_i, \lambda \rangle} u$  respectivement. Un vecteur  $u$  de poids est *extrémal* si pour tout  $l \geq 0$  le vecteur  $S_{i_1} \cdots S_{i_l} u$  est *i-extrémal* pour tous  $i, i_1, \dots, i_l \in I$ . Cette notion généralise celle de vecteur de plus haut poids. De façon similaire, un élément  $b$  d'un cristal normal  $B$  est *i-extrémal* si  $\tilde{e}_i b = 0$  ou  $\tilde{f}_i b = 0$ , et *extrémal* si pour tout  $l \geq 0$  l'élément  $S_{i_1} \cdots S_{i_l} b$  est *i-extrémal* pour tous  $i, i_1, \dots, i_l \in I$ .

Soit  $\lambda$  un poids intégral. Notons  $\lambda_+ = \sum_{\langle h_i, \lambda \rangle \geq 0} \langle h_i, \lambda \rangle \Lambda_i$  sa composante positive et  $\lambda_- = \lambda_+ - \lambda \in P_+$  sa composante négative. Alors  $V'(\lambda) = V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-)$  est isomorphe à

$$(37) \quad \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda \Big/ \sum_{\langle h_i, \lambda \rangle \geq 0} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})e_i^{1-\langle h_i, \lambda \rangle} + \sum_{\langle h_i, \lambda \rangle \leq 0} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle},$$

et  $V'(\lambda)$  admet une base globale induite par celle de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  par la formule  $V'(\lambda) = \bigoplus_{\varepsilon_i^*(b) = \langle h_i, \lambda \rangle} k(q)G(b)$ . Notons  $p_\lambda : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda \rightarrow V'(\lambda)$  la projection canonique et  $u'_\lambda = p_\lambda(a_\lambda)$ . Lorsque  $\lambda \in P_+$  (resp.  $P_-$ ), nous retrouvons  $V'(\lambda) = V(\lambda)$  et  $u'_\lambda = u_\lambda$ ; c'est pourquoi nous écrivons  $u_\lambda$  au lieu de  $u'_\lambda$ .

Soient  $B^{\max}(\lambda)$  l'ensemble des éléments  $b$  de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  tels que  $b^*$  soit extrémal, et

$$(38) \quad I_\lambda = \bigoplus_{b \in B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda) \setminus B^{\max}(\lambda)} k(q)G(b).$$

L'espace  $I_\lambda$  est un sous- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda$  et  $V^{\max}(\lambda) = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda / I_\lambda$  est un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable. Notons  $p_\lambda : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda \rightarrow V^{\max}(\lambda)$  la projection. En fait, le module  $V^{\max}(\lambda)$  est engendré par un élément  $u_\lambda$  avec comme condition le fait que  $u_\lambda$  soit extrémal de poids  $\lambda$ . Puisque

$$(39) \quad V^{\max}(\lambda) \simeq \bigoplus_{b \in B^{\max}(\lambda)} k(q)G(b),$$

l'ensemble  $B^{\max}(\lambda)$  est une base cristalline globale de  $V^{\max}(\lambda)$ .

**Proposition 12.4.** — (1) *Le vecteur  $p_\lambda(a_\lambda)$  est extrémal de poids  $\lambda$ , et égal à  $u_\lambda$ .*

(2) *Pour tout  $w \in W$ , l'application  $V^{\max}(\lambda) \rightarrow V^{\max}(w\lambda), u_\lambda \mapsto S_{w^{-1}}u_{w\lambda}$ , est un isomorphisme qui envoie base globale sur base globale.*

(3) *Pour tout  $w \in W$ , l'application  $S_w^* = *S_w^*$  induit un isomorphisme  $B^{\max}(\lambda) \xrightarrow{\simeq} B^{\max}(w\lambda)$ .*

Si  $\lambda \in P_+$  (resp.  $P_-$ ), alors  $V^{\max}(\lambda)$  est égal au  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module irréductible  $V(\lambda)$ .

Désignons par  $\tilde{B}(\lambda)$  la composante connexe de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})a_\lambda)$  contenant  $a_\lambda$ . Alors  $S_w^*$  induit

$$(40) \quad \tilde{B}(\lambda) \simeq \tilde{B}(w\lambda) \quad \text{pour tout } w \in W.$$

Si  $\lambda \in P_+$  (resp.  $P_-$ ), alors  $\tilde{B}(\lambda)$  et  $B^{\max}(\lambda)$  coïncident avec  $B(\lambda)$ .

**Lemme 12.5.** — *Pour tous  $\lambda \in P_+$  et  $\mu \in P$  le cristal  $\tilde{B}(\lambda + \mu)$  est isomorphe à la composante connexe de  $\tilde{B}(\lambda) \otimes \tilde{B}(\mu)$  contenant  $u_\lambda \otimes u_\mu$ .*

En effet, nous avons  $\tilde{B}(\lambda + \mu) \hookrightarrow \tilde{B}(\lambda + \mu_+) \otimes \tilde{B}(-\mu_-) = B(\lambda + \mu_+) \otimes B(-\mu_-) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu_+) \otimes B(-\mu_-)$  et  $\tilde{B}(\lambda) \otimes \tilde{B}(\mu) = B(\lambda) \otimes \tilde{B}(\mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu_+) \otimes B(-\mu_-)$ .

Une nouvelle preuve de la conjecture de Parthasarathy-Varadarajan-Rao en découle :

$$(41) \quad \text{soient } \lambda, \mu \in P_+ \text{ et } w, w' \in W; \text{ si } w'(\lambda + w\mu) \in P_+ \text{ alors } V(w'(\lambda + w\mu)) \text{ apparaît dans } V(\lambda) \otimes V(\mu).$$

Il suffit de prouver que le cristal  $B(w'(\lambda + w\mu))$  apparaît dans  $B(\lambda) \otimes B(\mu)$ . Or  $B(w'(\lambda + w\mu)) \simeq B(\lambda + w\mu)$  par la proposition 12.4. Le lemme 12.5 nous fournit un plongement  $B(\lambda + w\mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(w\mu)$ . Encore grâce à la proposition 12.4, nous avons  $B(w\mu) \simeq B(\mu)$ , d'où finalement un plongement  $B(w'(\lambda + w\mu)) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu)$ .

**12.4. Propriétés de la base cristalline de  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$ .** — Soit  $B'$  une composante connexe de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ .

**Proposition 12.6.** — *L'ensemble  $\{\|\text{wt}(b)\|^2; b \in B'\}$  est borné.*

Puisqu'un élément  $b \in B'$  est extrémal si  $\text{wt}(b)$  est maximal, nous obtenons le

**Corollaire 12.7.** — *Toute composante connexe  $B'$  de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  contient un vecteur extrémal. De plus, le sous-cristal  $B'$  s'injecte dans un certain  $B^{\max}(\lambda)$ . Enfin, pour tout  $b$  dans la composante  $\tilde{B}(\lambda)$  de  $B(\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_{a_\lambda})$  contenant  $\lambda$ , nous avons  $\|\text{wt}(b)\|^2 \leq \|\lambda\|^2$ .*

### 13. Bases globales des $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$ -modules

**13.1. Le module  $V_w(\lambda)$ .** — Nous noterons  $w' \rightarrow w$  si  $w = w's_i$  et  $l(w) > l(w')$ . L'ordre de Bruhat est défini par  $w' \leq w$  si  $w' = w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_l = w$ . En fait  $w' \leq w$  si et seulement si  $w'$  est obtenu en omettant des éléments de la décomposition réduite de  $w$ .

Soit  $w \in W$ . Soit  $u_{w\lambda}$  une base globale de  $V(\lambda)_{w\lambda}$ , donnée par  $u_{w\lambda} = f_i^{\langle h_i, s_i w \lambda \rangle} u_{s_i w \lambda}$  si  $s_i w < w$ . Nous avons  $u_{s_i w \lambda} = f_i^{(m)} u_{w\lambda}$  si  $m = \langle h_i, w \lambda \rangle \geq 0$ .

Posons  $V_w(\lambda) = \mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda}$ . Si  $s_i w < w$ , alors  $f_i V_{s_i w}(\lambda) \subset V_w(\lambda)$  et  $V_w(\lambda) = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_i)V_{s_i w}(\lambda)$  puisque  $\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}_i)\mathfrak{U}_q^+(\mathfrak{g})$ . Fixons une décomposition réduite  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  de  $w$ . Alors  $V_w(\lambda) = \sum_{a_1, \dots, a_l} k(q) f_{i_1}^{a_1} \cdots f_{i_l}^{a_l} u_\lambda$ . Soit  $B_w(\lambda) = \{ \tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_l}^{a_l} u_\lambda ; a_i \in \mathbb{N} \} \setminus \{0\} \subset B(\lambda)$  (indépendant du choix de la décomposition réduite).

**Théorème 13.1.** — *Le module  $V_w(\lambda)$  vérifie  $V_w(\lambda) = \bigoplus_{b \in B_w(\lambda)} k(q)G_\lambda(b)$ .*

**Proposition 13.2.** — (1) *L'ensemble  $B_w(\lambda)$  est tel que  $\tilde{e}_i B_w(\lambda) \subset B_w(\lambda) \sqcup \{0\}$ .*

(2) *Si  $s_i w < w$ , alors  $B_w(\lambda) = \bigcup_{k \geq 0} \tilde{f}_i^k B_{s_i w}(\lambda) \setminus \{0\}$ .*

(3) *L'inégalité  $w' \leq w$  pour l'ordre de Bruhat implique  $B_{w'}(\lambda) \subset B_w(\lambda)$ .*

En faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini, nous obtenons la

**Proposition 13.3.** — *Il existe un unique sous-ensemble  $B_w(\infty)$  de  $B(\infty)$  tel que :*

(1) *L'ensemble  $B_w(\infty)$  vérifie  $B_1(\infty) = 1$  et  $\tilde{e}_i B_w(\infty) \subset B_w(\infty) \sqcup \{0\}$ .*

(2) *Si  $s_i w < w$ , alors  $B_w(\infty) = \bigcup_{k \geq 0} \tilde{f}_i^k B_{s_i w}(\infty)$ . Si  $w' \leq w$ , alors  $B_{w'}(\infty) \subset B_w(\infty)$ .*

(3) *Pour toute décomposition réduite  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ , nous avons  $\bigoplus_{b \in B_w(\infty)} k(q)G(b) = \sum k(q) f_{i_1}^{k_1} f_{i_l}^{k_l}$ .*

(4) *Pour tout  $\lambda \in P_+$ , nous avons  $B_w(\lambda) = \bar{\pi}_\lambda(B_w(\infty)) \setminus \{0\}$ .*

Soit  $\bar{B}_w(\lambda) = B_w(\lambda) \setminus \bigcup_{w' < w} B_{w'}(\lambda)$ . Alors la base cristalline  $B(\lambda)$  vérifie

$$(42) \quad B(\lambda) = \bigsqcup_{w \in W} \bar{B}_w(\lambda) = \bigcup_{w \in W} B_w(\lambda) = B_{w_0}(\lambda).$$

**13.2. Propriétés avancées de  $B_w(\infty)$ .** — Grâce à la proposition 13.3, nous obtenons  $B_w(\infty)^* = B_{w^{-1}}(\infty)$ .

**Théorème 13.4.** — *Si  $b \in B_w(\infty)$  vérifie  $\tilde{f}_i b \in B_w(\infty)$ , alors  $\tilde{f}_i^k b \in B_w(\infty)$  pour tout entier  $k$ .*

Un élément  $b$  d'une  $i$ -chaîne  $S$  est dit *plus haut élément* si  $\tilde{e}_i b = 0$ . Ainsi pour toute  $i$ -chaîne  $S$  de  $B(\infty)$  de plus haut élément  $b$ , l'ensemble  $B_w(\infty) \cap S$  est soit vide, soit réduit à  $b$ , soit égal à  $S$ . Or  $\lambda \in P_+$  l'ensemble  $B_w(\lambda)$  est l'image réciproque de  $B_w(\infty) \otimes T_\lambda$  par l'injection  $B(\infty) \rightarrow B_w(\infty) \otimes T_\lambda$ . D'où

**Proposition 13.5.** — *Pour toute  $i$ -chaîne  $S$  de  $B(\lambda)$  de plus haut élément  $b$ , l'ensemble  $B_w(\lambda) \cap S$  est soit vide, soit réduit à  $b$ , soit égal à  $S$ .*

Cette proposition implique la généralisation suivante par Littelmann de la formule du caractère de Demazure.

**Théorème 13.6.** — *Si  $\lambda \in P_+$ , alors  $\sum_{b \in B_w(\lambda)} b = \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_l} u_\lambda$  où  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$  est une décomposition réduite de  $w \in W$  et où l'opérateur additif  $\mathcal{D}_i$  est défini par*

$$\mathcal{D}_i b = \begin{cases} \sum_{0 \leq k \leq \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} \tilde{f}_i^k b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0. \\ - \sum_{0 \leq k \leq -\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} \tilde{e}_i^k b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle < 0 \end{cases}$$

Les  $\mathcal{D}_i$  ne vérifient pas la relation de tresses (pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  et  $\lambda = 2\omega_1 + \omega_2$ , on a  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1(\tilde{f}_1 u_\lambda) \neq \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2(\tilde{f}_1 u_\lambda)$ ).



**13.3. Base globale de  $\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})u_{w\lambda}$ .** — Soient  $\lambda \in P_+$  et  $w \in W$ .

**Proposition 13.7.** — (1) Pour tout  $b \in B(\infty)$ , l'élément  $G(b)u_{w\lambda}$  est dans  $G_\lambda(B(\lambda)) \sqcup \{0\}$ .  
(2) Soient  $b, b' \in B(\infty)$  tels que  $G(b)u_{w\lambda} = G(b')u_{w'\lambda}$ ; alors  $b = b'$ .

Soit  $B^w(\lambda) = \{b \in B(\lambda); G_\lambda(b) \in \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})u_{w\lambda}\}$ . Alors  $\tilde{f}_i B^w(\lambda) \subset B^w(\lambda) \sqcup \{0\}$  et

$$(43) \quad \mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})u_{w\lambda} = \bigoplus_{b \in B^w(\lambda)} k(q)G_\lambda(b).$$

Par ailleurs, si  $s_i w < w$  alors  $B^{s_i w}(\lambda) = \{\tilde{e}_i^k b; k \geq 0, b \in B^w(\lambda)\} \setminus \{0\}$ . Le lien entre  $B_w(\lambda)$  et  $B^{w'}(\lambda)$  est décrit par la

**Proposition 13.8.** — Pour  $w_1, w_2 \in W$ , on a  $B^{w_1}(\lambda) \cap B_{w_2}(\lambda) = \emptyset \Leftrightarrow u_{w_2\lambda} \in B^{w_1}(\lambda) \Leftrightarrow u_{w_1\lambda} \in B_{w_2}(\lambda) \Leftrightarrow w_1 \leq w_2$ .

#### 14. Analogie quantique de l'anneau des coordonnées

Soit  $\varphi$  l'anti-automorphisme de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  laissant stable  $q(h)$  mais échangeant  $e_i$  et  $f_i$ . Un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche peut être vu comme un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à droite par  $\varphi$ . Considérons la catégorie  $\mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g}^{opp})$  des  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules à droite intégrables  $M$  tels que  $\dim(u\mathfrak{U}_q^-(\mathfrak{g})) < +\infty$  pour tout  $u \in M$ . Définissons de même pour un  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à droite  $M$  l'espace de poids  $\lambda$  par  $M_\lambda = \{u \in M; uq^h = q^{\langle h, \lambda \rangle} u \text{ pour tout } h \in P^*\}$ . Soit  $V^r(\lambda)$  le  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à droite irréductible de plus haut poids  $\lambda \in P_+$ , c'est-à-dire

$$(44) \quad V^r(\lambda) = \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) / \left( \sum_h (q^h - q^{\langle h, \lambda \rangle}) \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) + \sum_i f_i \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) + \sum_i e_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \right).$$

Les espaces  $V(\lambda)$  et  $V^r(\lambda)$  sont isomorphes par  $\varphi$ . Notons  $v_\lambda$  le vecteur de plus haut poids de  $V^r(\lambda)$ . Il existe un unique produit scalaire  $\langle ; \rangle : V^r(\lambda) \otimes V(\lambda) \rightarrow K$  vérifiant

$$(45) \quad \langle v_\lambda, u_\lambda \rangle = 1, \quad \langle vR, u \rangle = \langle v, \varphi(R)u \rangle \quad \text{pour tous } u \in (\lambda), v \in V^r(\lambda), R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}).$$

Les notions de treillis cristallin et base cristalline se définissent naturellement pour les modules à droite. Notons  $(L^r(\lambda), B^r(\lambda))$  la base cristalline (supérieure) de  $V^r$ . Les treillis  $L(\lambda)$  et  $L^r(\lambda)$  sont normalisés de sorte à avoir  $L(\lambda)_\lambda = Au_\lambda$  et  $L^r(\lambda)_\lambda = A_\infty v_\lambda$ .

La co-multiplication  $\Delta_+ : \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  définie par

$$(46) \quad \Delta_+ q(h) = q(h) \otimes q(h); \Delta_+ e_i = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i; \Delta_+ f_i = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i,$$

induit une structure d'anneau (unitaire) sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*$ . Puisque  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  est un bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module, l'anneau  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*$  est également un bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module. Le produit sur  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*$  est alors un morphisme de bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules, où  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^* \otimes \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*$  est muni de la structure de bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module fournie par le co-produit  $\Delta_+$ .

Définissons

$$(47) \quad A_q(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*; \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})u \in \mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g}) \text{ et } u\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}) \in \mathcal{O}_{int}(\mathfrak{g}^{opp})\}.$$

C'est en fait un sous-anneau de  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*$ . Appelé *analogie quantique de l'anneau des coordonnées*, il est égal à  $\bigoplus_{\lambda \in P} \{u \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})^*_\lambda; \text{il existe } l \geq 0 \text{ tel que } e_{i_1} \cdots e_{i_l} u = u f_{i_1} \cdots f_{i_l} = 0 \text{ pour tous } i_1, \dots, i_l \in I\}$ .

**Proposition 14.1.** — *L'anneau  $A_q(\mathfrak{g})$  est isomorphe en tant que bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ -module à  $\bigoplus_\lambda V^r(\lambda) \otimes V(\lambda)$  par les applications  $\Phi_\lambda : V^r(\lambda) \otimes V(\lambda) \rightarrow A_q(\mathfrak{g})$  définies par*

$$(48) \quad \langle \Phi_\lambda(v \otimes u), R \rangle = \langle vR, u \rangle \quad \text{pour tous } v \in V^r(\lambda), u \in V(\lambda) \text{ et } R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g}).$$

Notons  $-$  l'automorphisme d'anneau de  $A_q(\mathfrak{g})$  défini par  $\langle \bar{u}, R \rangle = \langle u, \bar{R} \rangle^-$  pour  $u \in A_q(\mathfrak{g})$  et  $R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$  (ici  $- : K \rightarrow K$  est l'automorphisme envoyant  $q$  sur  $q^{-1}$ ). Notons également  $-$  les automorphismes de  $V^r(\lambda)$  et  $V(\lambda)$  définis par  $\bar{u}_\lambda = u_\lambda$ ,  $\bar{v}_\lambda = v_\lambda$  et  $\bar{R}u = \bar{R}\bar{u}$ ,  $\bar{v}\bar{R} = \bar{v}R$  pour tous  $u \in V(\lambda)$ ,  $v \in V^r(\lambda)$  et  $R \in \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})$ . Alors nous avons  $\Phi_\lambda \circ (- \otimes -) = - \circ \Phi_\lambda$ .

Définissons

$$\begin{aligned} L(A_q(\mathfrak{g})) &= \bigoplus_\lambda L^r(\lambda) \otimes L(\lambda), & \bar{L}(A_q(\mathfrak{g})) &= \bigoplus_\lambda \bar{L}^r(\lambda) \otimes \bar{L}(\lambda), \\ B(A_q(\mathfrak{g})) &= \bigcup_\lambda B^r(\lambda) \otimes B(\lambda), & \bar{B}(A_q(\mathfrak{g})) &= \bigcup_\lambda \bar{B}^r(\lambda) \otimes \bar{B}(\lambda). \end{aligned}$$

L'automorphisme  $-$  échange  $L(A_q(\mathfrak{g}))$  et  $\bar{L}(A_q(\mathfrak{g}))$ . De plus, il échange  $B(A_q(\mathfrak{g}))$  et  $\bar{B}(A_q(\mathfrak{g}))$ , et commute avec  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ . Définissons enfin

$$(49) \quad A_q^k(\mathfrak{g}) = \{u \in A_q(\mathfrak{g}); \langle u, \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k \rangle \subset k[q, q^{-1}]\}.$$

L'ensemble  $A_q^k(\mathfrak{g})$  est un sous-bi- $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k$ -module de  $A_q(\mathfrak{g})$  puisque  $\Delta_+$  envoie  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k$  dans  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k \otimes \mathfrak{U}_q(\mathfrak{g})_k$ . Un lien entre  $A_q^k(\mathfrak{g})$  et  $A_q(\mathfrak{g})$  est donné par le

**Lemme 14.2.** — *Nous avons  $A_q(\mathfrak{g}) \simeq K \otimes_{k[q, q^{-1}]} A_q^k(\mathfrak{g})$ .*

Le théorème suivant affirme l'existence d'une base cristalline globale du bimodule  $A_q(\mathfrak{g})$ .

**Théorème 14.3.** — L'application  $A_q^k(\mathfrak{g}) \cap L(A_q(\mathfrak{g})) \cap \bar{L}(A_q(\mathfrak{g})) \longrightarrow L(A_q(\mathfrak{g}))/qL(A_q(\mathfrak{g}))$  est un isomorphisme. Si son inverse est désignée par  $G$ , alors

$$A_q^k(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{b \in B(A_q(\mathfrak{g}))} k[q, q^{-1}]G(b).$$

Par ailleurs, les algèbres  $\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})$  et  $A_q(\mathfrak{g})$  sont liées par le théorème suivant.

**Théorème 14.4.** — Il existe un unique plongement de cristaux  $\psi : B(A_q(\mathfrak{g})) \longrightarrow B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  tel que

$$(50) \quad (G(b), G(b')) = \delta_{\psi(b), b'} \text{ pour tous } b \in B(A_q(\mathfrak{g})) \text{ et } b' \in B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})).$$

Nous considérerons donc  $B(A_q(\mathfrak{g}))$  comme un sous-ensemble de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ . C'est en fait le plus petit sous-cristal de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  (pour  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ ) contenant tous les  $a_\lambda$  pour  $\lambda \in P$ .

**Proposition 14.5.** — (1) Si  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, alors  $B(A_q(\mathfrak{g})) = B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$ .

(2) Si  $\mathfrak{g}$  est affine, notons  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})_+)$  le sous-cristal de  $B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g}))$  formé des vecteurs de niveau positif. Alors  $B(A_q(\mathfrak{g})) = B(\tilde{\mathfrak{U}}_q(\mathfrak{g})_+) \sqcup \{a_0\}$ .

Rappelons que dans le cas affine nous prenons  $c = \sum c_i h_i$  avec des entiers strictement positifs  $c_i$  tel que  $\langle c, h_i \rangle = 0$  pour tout  $i$  et que nous définissons le niveau de  $\lambda \in P$  comme étant l'entier  $\langle c, \lambda \rangle$ .

## Références

- [1] A. Joseph : *Algèbres de Kac-Moody et introduction à la théorie des cristaux*, cours accéléré de DEA de l'université Paris VI, 2000.
- [2] M. Kashiwara : *Crystallising the  $q$ -Analogue of Universal Enveloping Algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), n°2, 249-260.
- [3] M. Kashiwara : *Bases cristallines*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I (1990), 277-280.
- [4] M. Kashiwara : *On Crystal Bases of the  $q$ -Analogue of Universal Enveloping Algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), n°2, 465-516.
- [5] M. Kashiwara : "Crystallising the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras" in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, 1990*, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1991, 791-797.
- [6] M. Kashiwara : *The Crystal Bases and Littelmann's Refined Demazure Character Formula*, Duke Math. J. **71** (1993), n°3, 839-858.
- [7] M. Kashiwara : *Global Crystal Bases of Quantum Groups*, Duke Math. J. **69** (1993), n°2, 455-487.
- [8] M. Kashiwara : *Crystal Bases of Modified Quantized Enveloping Algebras*, Duke Math. J. **73** (1994), n°2, 383-413.
- [9] M. Kashiwara : *Crystal Graphs for Representations of the  $q$ -Analogue of Classical Lie Algebras*, J. Alg. **165** (1994), 295-345.
- [10] M. Kashiwara : *On Crystal Bases*, collection : representation of groups, 155-197, Progress of the AMS, 1995.
- [11] M. Kashiwara : *On Level Zero Representations of Quantized Affine Algebras*, preprint, 2000.
- [12] M. Kashiwara : *Bases cristallines des groupes quantiques*, rédigé par Charles Cochet, Cours Spécialisé 19 de la SMF.
- [13] M. Kashiwara and T. Nakashima : *Crystal graphs for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras*, Journal of Algebra, **165** (1994), 295-345.
- [14] P. Littelmann : *A Littlewood-Richardson rule for symmetrisable Kac-Moody Lie algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329-346.
- [15] T. Nakashima : *Crystal bases and a generalization of Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 215-243.
- [16] N. Xi : *Canonical Bases for type  $A_3$* , Comm. Alg. **27** (1996), 5703-5710.