# Algèbres de Lie classiques

Charles Cochet

Choisissons une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple complexe. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ fixée. Définissons pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, [H,X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$. Alors $\alpha$ est appelée racine si $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. L'ensemble des racines est noté $\Delta$ et l'on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*$ engendré par $\Delta$ est $\mathfrak{h}_0 = V$.

Fixons une notion de positivité sur $\Delta$ et l'ordre qui en résulte ; les racines positives forment alors un ensemble noté $\Delta^+$. Une racine $\alpha$ est simple si $\alpha > 0$ et ne se décompose pas sous la forme $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_1$ et $\beta_2$ positives. Leur ensemble est noté $\Pi$, il est de cardinal $r = \dim(V)$ et ses éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont linéairement indépendants. Toute racine se décompose sous la forme d'une somme à coefficients entiers tous de même signe des racines simples.

Les poids fondamentaux sont les $\omega_i^\vee \in \mathfrak{h}^*$ définis par $\langle \alpha_i, \omega_j^\vee\rangle = \frac{|\alpha_i|^2}{2}\delta_{i,j}$. La matrice de Cartan est définie par $A = (\langle\alpha,\beta\rangle)_{\alpha,\beta\in\Pi}$. La plus grande racine est écrite sous la forme d'un $r$-uplet indiquant la décomposition en termes des racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Soit $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$.

La base canonique de $\mathbb{C}^{r+1}$ est notée $(e_i)_i$ et sa base duale $(e^i)_i$. La base canonique de $\mathfrak{gl}_{r+1}$ est $(E_{i,j})_{i,j}$. Une base de l'algèbre des matrices diagonales est $(E_{i,i})_i$, sa base duale est notée $(E^{i,i})_i$.

Les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ sont les $V(a_1, \ldots, a_r)$ de plus haut poids $a_1\omega_1^\vee + \cdots + a_r\omega_r^\vee$. Seuls les cas $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont faciles à traiter.

Regardons $\mathfrak{g}$ comme une algèbre réelle. Une algèbre réelle $\mathfrak{g}_0$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$ est dite *forme réelle* de $\mathfrak{g}$ ; on a $\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_0$, et $\mathfrak{g}$ semi-simple ssi $\mathfrak{g}_0$ l'est.

Etudions les types $A, B, C$ et $D$ qui forment *les algèbres de Lie classiques.*

## 1 Type $A_r$

L'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ des matrices de trace nulle est de dimension $r(r+2)$ sur $\mathbb{C}$.
L'algèbre $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des matrices diagonales à trace nulle ; on peut l'assimiler à l'hyperplan $V = \{v \in \mathbb{C}^{r+1}\,;\, \langle v, e_1 + \cdots + e_{r+1}\rangle = 0\}$ (somme des coordonnées nulles) en identifiant $e_i$ et $E_{i,i}$, ce que nous ferons désormais. Définissons $\alpha_{i,j} = e^i - e^j \in \mathfrak{h}^*$ pour $i \neq j$.
Les racines sont $\Delta = \{\alpha_{i,j} = e^i - e^j\,;\, 1 \leq i \neq j \leq r+1\}$, au nombre de $r(r+1)$.
Les racines positives sont $\Delta^+ = \{e^i - e^j\,;\, i < j\}$.
Les racines simples sont $\Pi = \{\alpha_1 = e^1 - e^2, \ldots, \alpha_r = e^r - e^{r+1}\}$.
Poids fondamentaux : $\omega_i^\vee = e^1 + \cdots + e^i$.
$\rho = \frac{r}{2}e^1 + \frac{r-2}{2}e^2 + \cdots + \frac{-r}{2}e^{r+1}$.
Plus grande racine : $e^1 - e^{r+1} = (11\cdots1)$.
Treillis des poids : engendré par les arêtes d'un $r$-simplexe régulier centré en l'origine.
La chambre de Weyl est $\{a_1\omega_1^\vee + \cdots + a_r\omega_r^\vee\,;\, a_1, \ldots, a_r \geq 0\}$.
Forme de Killing : $K(\sum_i a_ie_i, \sum_i b_ie_i) = 2r\sum_i a_ib_i$.
$H_{\alpha_{i,j}} = e_i - e_j$.
Groupe de Weyl : $W = \mathfrak{S}_{r+1}$, engendré par les $s_i = (i, i+1)$ et d'ordre $(r+1)!$.
La construction de Weyl permet d'obtenir un lien entre les polynômes de Schur $S_\lambda$ et les représentations de $\mathfrak{g}$. Associons à $(a_1, \ldots, a_r)$ la partition $\lambda = (a_1 + \cdots + a_r, a_2 + \cdots + a_r, \ldots, a_r)$ et le diagramme d'Young construit sur $\lambda$ (en clair, $a_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ est la différence de longueur de deux rangées). Alors le produit tensoriel $V(\lambda)\otimes V(\mu)$ se décompose selon la règle de Littlewood-Richardson : $V(\lambda)\otimes V(\mu) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}V(\nu)$ où $c^\nu_{\lambda,\mu}$ est le nombre façons de passer de $\lambda$ à $\nu$ par une $\mu$-extension stricte. Grâce à cela, nous obtenons $\mathrm{ch}(V(\lambda)) = S_\lambda$ et $\dim(V(a_1, \ldots, a_r)) = \prod_{1\leq i<j\leq r+1} \frac{(a_i+\cdots+a_{j-1})+j-i}{j-i}$.
Des formes réelles : $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(n)$ (anti-hermitienne de trace nulle), $\mathfrak{su}(p,q)$ ($\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C\end{pmatrix}$ de trace nulle avec $A$ et $C$ antihermitiennes). Une forme réelle compacte : $\mathfrak{su}(n)$.

$$A_r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 2 Type $B_r$

Soient $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2r+1$. Définissons $SO_{2r+1}(\mathbb{C})$ comme étant le groupe des matrices de déterminant 1 conservant la forme quadratique $Q(z_1,\ldots,z_{2r+1}) = z_1^2+\cdots+z_{2r+1}^2$. Ainsi $= \{X \in GL(2r+1,\mathbb{C})\,;\, {}^TX \cdot X = 1, \det(X) = 1\}$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2r+1}(\mathbb{C})$ est égale à l'ensemble des matrices complexes de trace nulle et anti-symétriques ; elle est de dimension $r(2r+1)$ sur $\mathbb{C}$.
Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{so}_{2r+1}(\mathbb{C})$ est formée des matrices bloc-diagonales dont les blocs diagonaux sont $r$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & ih_j \\ -ih_j & 0 \end{pmatrix}$ de taille $2\times 2$ et 1 bloc $(0)$ de taille $1\times 1$.

Définissons des formes linéaires $L_j = e^j$ sur $\mathfrak{h}$ comme prenant la valeur $h_j$ sur la matrice précédente.
Les racines sont $\Delta = \{\pm L^i \pm L^j\,;\, 1 \le i < j \le r\} \cup \{\pm L^i\}$, au nombre de $2r^2$.
Les racines positives sont $\Delta^+ = \{L^i \pm L^j\,;\, i<j\} \cup \{L^i\}$.
Les racines simples sont $\Pi = \{\alpha_1 = L^1 - L^2, \ldots, \alpha_{r-1} = L^{r-1} - L^r, \alpha_r = L^r\}$.
Les poids fondamentaux sont $\omega_i^\vee = L^1 + \cdots + L^i$ pour $i<r$ et $\omega_r^\vee = \frac{1}{2}(L^1+\cdots+L^r)$.
$\rho = (r-\frac{1}{2})L^1 + (r-\frac{3}{2})L^2 + \cdots + (\frac{1}{2})L^r$.
Plus grande racine : $L^1 + L^2 = (122\cdots 2)$.
Forme de Killing : $K(\sum_i a_i L^i, \sum_i b_i L^i) = (4r-2)\sum_i a_i b_i$.
Le treillis des poids est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficient entiers des $L^i$ et de $\frac{L^1+\cdots+L^r}{2}$.
La chambre de Weyl est $\{a_1L^1 + \cdots + a_rL^r\,;\, a_1 \ge \ldots \ge a_r \ge 0\}$.

Groupe de Weyl : produit semi-direct du groupe des permutations des $L^i$ et du groupe $G = \{-1,1\}^r$, l'opération de $G$ sur les $L^i$ étant donnée par $w\cdot L^i = w_i L^i$ si $w = (w_i)_i$ avec $w_i = \pm 1$. Ainsi, $W$ est engendré par les permutations $(i, i+1)$ et par les changements de signe ; il est d'ordre $r!2^r$.

Ecrivons $\mu$ pour le poids $\mu_1 L^1 + \cdots + \mu_r L^r$. Alors le caractère de la représentation irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids $\lambda = \sum \lambda_i L^i$ avec $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_r \ge 0$ est $\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{|x_j^{\lambda_i+r-i+1/2} - x_j^{-(\lambda_i+r-i+1/2)}|}{|x_j^{r-i+1/2} - x_j^{-(r-i+1/2)}|}$. Sa dimension est $\dim(V(\lambda)) = \prod_{i<j}\frac{l_i^2-l_j^2}{m_i^2-m_j^2}\prod_i \frac{l_i}{m_i}$, avec $l_i = \lambda_i + r - i + 1/2$ et $m_i = r - i + 1/2$. Les formules pour $V(a_1\omega_1^\vee + \cdots + a_r\omega_r^\vee)$ s'obtiennent en utilisant les équations $\lambda_i = a_i + \cdots + a_{r-1} + \frac{1}{2}a_r$.

Une forme réelle est $\mathfrak{so}(2r+1)$ (antisymétrique réelle).
Soit $\mathfrak{so}(p,q) = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^TB & C \end{pmatrix}$ avec $A$ et $C$ antisymétriques ; en complexifiant puis conjugant par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, nous obtenons $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$. Donc $\mathfrak{so}(p,q)$ est isomorphe à une forme réelle de $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$ sous la conjugaison par la matrice diagonale bloc-diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

$$B_r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 3 Isomorphismes exceptionnels

$\mathfrak{so}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\times\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$. Ce sont les seuls. Ainsi, les algèbres de Lie semi-simples de rang deux sont $A_2, B_2 = C_2$ et $G_2$.

# 4 Type $C_r$

Soient $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2r$ et $Q$ une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur $V$. Définissons $Sp_{2r}(\mathbb{C}) = \{A \in GL(V)\,;\ A \text{ préserve } Q\}$ (groupe symplectique) et $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(V)\,;\ Q(Xv,w)+Q(v,Xw) = 0\ \forall\ v,w\}$ (algèbre symplectique). Ils sont indépendants du choix de $Q$.
L'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ est de dimension $r(2r+1)$ sur $\mathbb{C}$.

Fixons une base $e_1,\ldots,e_{2r}$ de $V$ telle que $Q(e_i,e_{i+r}) = 1, Q(e_{i+r},e_i) = -1$ et $Q(e_i,e_j) = 0$ sinon. Alors $Q(x,y) = x^t M y$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $Sp_{2r}(\mathbb{C}) = \{A\,;\ M = A^t M A\}$ et $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}) = \{X\,;\ M^t X + MX = 0\}$.
Pour $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on vérifie que $B^t = B, C^t = C, A^t = -D$.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \{\text{diag}\} \cap \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ a pour base les $r$ matrices $H_i = E_{i,i} - E_{i+r,i+r}$ (de taille $2r \times 2r$), de base duale notée $L^i$ pour $1 \le i \le r$.
Ainsi, $X_{i,j} = E_{i,j} - E_{r+j,r+i}, Y_{i,j} = E_{i,r+j} + E_{j,r+i}$ et $Z_{i,j} = E_{r+i,j} + E_{r+j,i}$ pour $i \neq j$, et $U_i = E_{i,r+i}, V_i = E_{r+i,r}$ pour tout $i$ sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres $L^i - L^j, L^i + L^j$ et $-L^i - L^j$ pour $i \neq j$ et $2L^i, -2L^i$.
Les racines sont $\Delta = \{\pm L^i \pm L^j\,;\ 1 \le i < j \le r\} \cup \{\pm 2L^i\}$, au nombre de $2r^2$.
Les racines positives sont $\Delta^+ = \{L^i \pm L^j\,;\ i < j\} \cup \{2L^i\}$.
Les racines simples sont $\Pi = \{\alpha_1 = L^1 - L^2, \ldots, \alpha_{r-1} = L^{r-1} - L^r, \alpha_r = 2L^r\}$.
Les poids fondamentaux sont $\omega_i^\vee = L^1 + \cdots + L^i$.
$\rho = rL^1 + (r-1)L^2 + \cdots + 1L^r)$.
Plus grande racine : $2L^1 = (2\cdots 221)$.
Forme de Killing : $K(\sum_i a_i L^i, \sum_i b_i L^i) = (4r+4)\sum_i a_i b_i$.
Le treillis des poids est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficient entiers des $L^i$.
La chambre de Weyl est $\{a_1 L^1 + \cdots + a_r L^r\,;\ a_1 \ge \ldots \ge a_r \ge 0\}$.

Groupe de Weyl : produit semi-direct du groupe des permutations des $L^i$ et du groupe $G = \{-1,1\}^r$, l'opération de $G$ sur les $L^i$ étant donnée par $w \cdot L^i = w_i L^i$ si $w = (w_i)_i$. Ainsi, $W$ est engendré par les permutations $(i,i+1)$ et par les changements de signe ; il est d'ordre $r!2^r$.

Ecrivons $\mu$ pour le poids $\mu_1 L^1 + \cdots + \mu_r L^r$. Alors le caractère de la représentation irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids $\lambda = \sum \lambda_i L^i$ avec $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_r \ge 0$ est $\text{ch}(V(\lambda)) = \frac{|x_j^{\lambda_i+r-i+1} - x_j^{-(\lambda_i+r-i+1)}|}{|x_j^{r-i+1} - x_j^{-(r-i+1)}|}$. Sa dimension est $\dim(V(\lambda)) = \prod_{i<j} \frac{l_i^2 - l_j^2}{m_i^2 - m_j^2} \prod_i \frac{l_i}{m_i}$, avec $l_i = \lambda_i + r - i + 1$ et $m_i = r - i + 1$. On obtient les formules pour $V(a_1\omega_1^\vee + \cdots + a_r\omega_r^\vee)$ en utilisant les équations $\lambda_i = a_i + \cdots + a_r$.

Des formes réelles : $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$. Une forme réelle compacte : $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n) \simeq \mathfrak{sp}(n)$.

$$C_r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

# 5 Type $D_r$

Soient $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2r$. Définissons $SO_{2r}(\mathbb{C})$ comme étant le groupe des matrices de déterminant 1 conservant la forme quadratique $Q(z_1,\ldots,z_{2r}) = z_1^2+\cdots+z_{2r}^2$. Ainsi $= \{X \in GL(2r,\mathbb{C})\,;\ {}^TX\cdot X = 1, \det(X)=1\}$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{C})$ est égale à l'ensemble des matrices complexes de trace nulle et antisymétriques ; elle est de dimension $r(2r-1)$ sur $\mathbb{C}$.
Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{C})$ est formée des matrices bloc-diagonales dont les blocs diagonaux sont $r$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & ih_j \\ -ih_j & 0 \end{pmatrix}$ de taille $2\times 2$.

Définissons des formes linéaires $L_j = e^j$ sur $\mathfrak{h}$ comme prenant la valeur $h_j$ sur la matrice précédente.
Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{C})$ est formée des matrices bloc-diagonales dont les blocs diagonaux sont $r$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & ih_j \\ -ih_j & 0 \end{pmatrix}$ de taille $2\times 2$.
Les racines sont $\Delta = \{\pm L^i \pm L^j\,;\ 1 \le i < j \le r\}$, au nombre de $2r(r-1)$.
Les racines positives sont $\Delta^+ = \{L^i \pm L^j\,;\ i<j\}$.
Les racines simples sont $\Pi = \{L^1 - L^2, \ldots, L^{r-1} - L^r, L^{r-1} + L^r\}$.
Les poids fondamentaux sont $\omega_i^\vee = L^1 + \cdots + L^i$ si $i \le r-2$, $\omega_{r-1}^\vee = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots L^{r-1} - L^r)$ et $\omega_r^\vee = \frac{1}{2}(L^1 + \cdots L^{r-1} + L^r)$.
$\rho = (r-1)L^1 + (r-2)L^2 + \cdots + 1L^{r-1}$.
Plus grande racine : $L^1 + L^2 = (122\cdots 221)$.
Forme de Killing : $K(\sum_i a_i L^i, \sum_i b_i L^i) = (4r-4)\sum_i a_i b_i$.
Le treillis des poids est l'ensemble des combinaisons linéaires à cœfficient entiers des $L^i$ et de $\frac{L^1+\cdots+L^r}{2}$.
La chambre de Weyl est $\{a_1L^1 + \cdots + a_rL^r\,;\ a_1 \ge \ldots \ge a_{r-1} \ge |a_r| \ge 0\}$.

Groupe de Weyl : produit semi-direct du groupe des permutations des $L_i$ et du groupe $G = \{-1,1\}^{r-1}$, l'opération de $G$ sur les $L^i$ étant donnée par $w\cdot L^i = w_iL^i$ si $w = (w_i)_i$ avec $i = \pm 1$ et $i < r$, et $w\cdot L^r = w_1\cdots w_{r-1}L^r$. Ainsi, $W$ est engendré par les permutations $(i, i+1)$ et par les changements de signe pairs ; il est d'ordre $r!2^{r-1}$.

Ecrivons $\mu$ pour le poids $\mu_1L^1 + \cdots + \mu_rL^r$. Alors le caractère de la représentation irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids $\lambda = \sum \lambda_i L^i$ avec $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_r \ge 0$ est $\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{|x_j^{l_i}+x_j^{-l_i}|+|x_j^{l_i}-x_j^{-l_i}|}{|x_j^{m_i}-x_j^{-m_i}|}$, où $l_i = \lambda_i + r - i$ et $m_i = r-i$.
Sa dimension est $\dim(V(\lambda)) = \prod_{i<j}\frac{l_i^2-l_j^2}{m_i^2-m_j^2}$. On obtient les formules pour $V(a_1\omega_1^\vee + \cdots + a_r\omega_r^\vee)$ en utilisant les équations $\lambda_i = a_i + \cdots + a_{r-2} + \frac{1}{2}(a_{r-1}+a_r)$ pour $1 \le i \le r-2$, $\lambda_{r-1} = \frac{1}{2}(a_{r-1}+a_r)$ et $\lambda_r = \frac{1}{2}(-a_{r-1}+a_r)$.

Une forme réelle est $\mathfrak{so}(2r)$ (antisymétrique réelle).
Soit $\mathfrak{so}(p,q) = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^TB & C \end{pmatrix}$ avec $A$ et $C$ antisymétriques ; en complexifiant puis conjugant par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, nous obtenons $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$. Donc $\mathfrak{so}(p,q)$ est isomorphe à une forme réelle de $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$ sous la conjugaison par la matrice diagonale bloc-diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

$$D_r = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Références

[1] W. Fulton and J. Harris : *Representation Theory*, GTM 129, Springer, 1999.

[2] B. Keller : cours de DEA de l'université Paris 7, année 1999-2000.

[3] A.W. Knapp : *Lie Groups Beyond an Introduction*, PM 140, Birkhäuser, 1996.

[4] P. Tauvel : *Introduction à la théorie des algèbres de Lie*, Diderot éditeur, 1998.