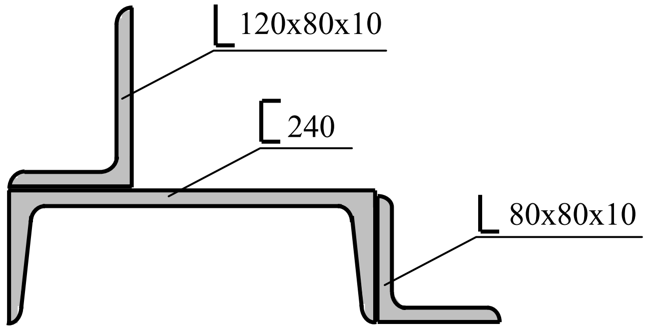
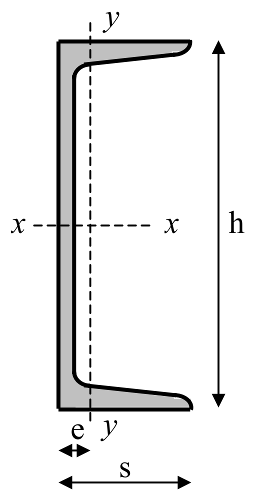
Przykład 2.6. Przekrój złożony z trzech kształtowników walcowanych.

Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższego przekroju złożonego z trzech kształtowników walcowanych.



Dane dotyczące kształtowników przyjęto wg: Mikołaj Żyburtowicz *Konstrukcje stalowe*, WSiP, 1974.

Kształtownik I - ceownik **[** 240



$h = 240mm$

$s = 85mm$

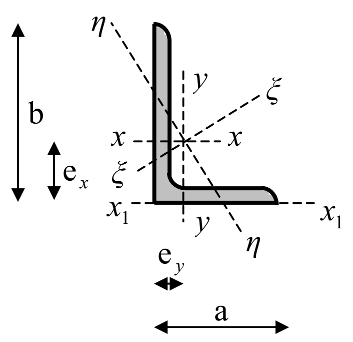
$e = 2.23cm$

$I_x = 3600cm^4$

$I_y = 248cm^4$

$F = 42.3cm^2$

Kształtownik II - kątownik nierównoramienny **L** 120x80x10



$a = 80mm$

$b = 120mm$

$e_y = 1.96cm$

$e_x = 3.93cm$

$I_x = 279cm^4$

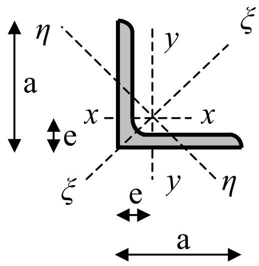
$I_y = 99.6cm^4$

$I_\eta = 57.7cm^4$

$I_{x_1} = 575cm^4$

$F = 19.2cm^2$

Kształtownik III - kątownik równoramienny **L** 80x80x10



$a = 80\text{mm}$

$e = 2.35\text{cm}$

$I_x = I_y = 88.4\text{cm}^4$

$I_\xi = 140\text{cm}^4$

$I_\eta = 36.5\text{cm}^4$

$F = 15.1\text{cm}^2$

W tablicach do projektowania konstrukcji stalowych nie są podane wartości momentów dewiacyjnych, których znajomość jest nieodzowna do wyznaczenia głównych centralnych momentów bezwładności oraz kierunków głównych dla rozpatrywanego przekroju złożonego. Moment dewiacyjny ceownika względem jego osi centralnych jest równy zero, gdyż oś *x* jest osią symetrii przekroju. Momenty dewiacyjne obu kątowników w układzie *xy* są różne od zera. W celu wyznaczenia momentu dewiacyjnego skorzystamy ze wzorów na główne momenty bezwładności:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2} .$$

Po odjęciu stronami otrzymamy:

$$I_1 - I_2 = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2} .$$

Następnie po przekształceniu wzór na moment dewiacyjny przyjmie postać:

$$I_{xy} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_1 - I_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2} .$$

W tablicach do projektowania konstrukcji stalowych kierunek maksymalnego momentu bezwładności oznaczony jest przez ξ, natomiast kierunek minimalnego momentu bezwładności oznaczony jest przez η. Uwzględniając to otrzymamy wzór:

$$I_{xy} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2} .$$

Wyznaczamy momenty dewiacyjne dla kątowników.

Kształtownik II - kątownik nierównoramienny **L** 120x80x10

W tablicach do projektowania konstrukcji stalowych podana jest tylko wartość minimalnego momentu bezwładności I_η. W celu wyznaczenia wartości I_ξ skorzystamy z zależności

$$I_x + I_y = I_\xi + I_\eta ,$$

czyli

$$I_\xi = I_x + I_y - I_\eta .$$

Po podstawieniu wartości odczytanych z tablic otrzymamy

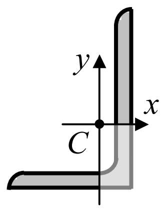
$$I_\xi = I_x + I_y - I_\eta = 279\text{cm}^4 + 99.6\text{cm}^4 - 57.7\text{cm}^4 = 320.9\text{cm}^4$$

Wyznaczamy moment dewiacyjny

$$I_{xy} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{320.9\text{cm}^4 - 57.7\text{cm}^4}{2}\right)^2 - \left(\frac{279\text{cm}^4 - 99.6\text{cm}^4}{2}\right)^2} =$$

$$= \pm 96.29\text{cm}^4$$

Znak momentu dewiacyjnego zależy od położenia kątownika nierównoramiennego w stosunku do układu osi centralnych *xy*.



W rozpatrywanym przypadku w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, w których iloczyn współrzędnych $x{\cdot}y$ jest dodatni, znajduje się większa część pola figury (na powyższym rysunku są to ciemniejsze fragmenty figury). Na tej podstawie można stwierdzić, że moment dewiacyjny kątownika nierównoramiennego jest dodatni.

$$I_{xy} = 96.29\text{cm}^4$$

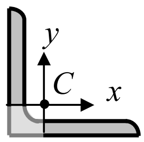
Kształtownik III - kątownik równoramienny **L** 80x80x10

W przypadku kątownika równoramiennego w tablicach podane są wartości obu głównych centralnych momentów bezwładności I_ξ i I_η. Poza tym $I_x = I_y$, a więc wzór na moment dewiacyjny uprości się.

$$I_{xy} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2} = \pm\frac{I_\xi - I_\eta}{2} = \pm\frac{140\text{cm}^4 - 36.5\text{cm}^4}{2} =$$

$$= \pm 51.75\text{cm}^4$$

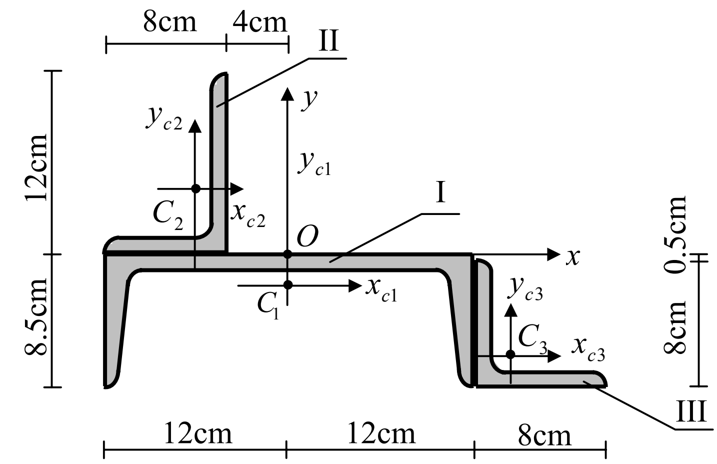
Znak momentu dewiacyjnego zależy od położenia kątownika równoramiennego w stosunku do układu osi centralnych *xy*.



W rozpatrywanym przypadku w drugiej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych, w których iloczyn współrzędnych $x{\cdot}y$ jest ujemny, znajduje się większa część pola figury (na powyższym rysunku są to ciemniejsze fragmenty figury). Na tej podstawie można stwierdzić, że moment dewiacyjny kątownika równoramiennego jest ujemny.

$$I_{xy} = -51.75\text{cm}^4$$

Dla przekroju złożonego z trzech kształtowników walcowanych przyjmujemy układ osi *Oxy*.



W celu wyznaczenia współrzędnych środka ciężkości figury złożonej określamy pola powierzchni i współrzędne środków ciężkości w układzie *Oxy* dla figur składowych na podstawie tablic do projektowania konstrukcji stalowych.

$A^{\mathrm{I}} = 42.3\mathrm{cm}^2 \qquad \tilde{x}_{c1} = 0 \qquad \tilde{y}_{c1} = -2.23\mathrm{cm}$

$A^{\mathrm{II}} = 19.2\mathrm{cm}^2 \qquad \tilde{x}_{c2} = -(4+1.96)\mathrm{cm} = -5.96\mathrm{cm} \qquad \tilde{y}_{c2} = 3.93\mathrm{cm}$

$A^{\mathrm{III}} = 15.1\mathrm{cm}^2 \qquad \tilde{x}_{c3} = (12+2.35)\mathrm{cm} = 14.35\mathrm{cm} \qquad \tilde{y}_{c3} = -(8.5-2.35)\mathrm{cm} = -6.15\mathrm{cm}$

Pole powierzchni figury złożonej wynosi

$$A = A^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{II}} + A^{\mathrm{III}} = 42.3\mathrm{cm}^2 + 19.2\mathrm{cm}^2 + 15.1\mathrm{cm}^2 = 76.6\mathrm{cm}^2$$

Moment statyczny figury złożonej względem osi *y* wynosi

$$S_y = A^{\mathrm{I}} \cdot \tilde{x}_{c1} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{x}_{c2} + A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{x}_{c3} =$$

$$= 42.3\mathrm{cm}^2 \cdot 0 + 19.2\mathrm{cm}^2 \cdot (-5.96\mathrm{cm}) + 15.1\mathrm{cm}^2 \cdot 14.35\mathrm{cm} = 102.253\mathrm{cm}^3$$

Moment statyczny figury złożonej względem osi *x* wynosi

$$S_x = A^{\mathrm{I}} \cdot \tilde{y}_{c1} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{y}_{c2} + A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{y}_{c3} =$$

$$= 42.3\mathrm{cm}^2 \cdot (-2.23\mathrm{cm}) + 19.2\mathrm{cm}^2 \cdot 3.93\mathrm{cm} + 15.1\mathrm{cm}^2 \cdot (-6.15\mathrm{cm}) = -111.738\mathrm{cm}^3$$

Współrzędne środka ciężkości figury złożonej są równe

$$\tilde{x}_c = \frac{\mathrm{S}_y}{A} = \frac{102.253\mathrm{cm}^3}{76.6\mathrm{cm}^2} = 1.335\mathrm{cm} \qquad \tilde{y}_c = \frac{\mathrm{S}_x}{A} = \frac{-111.738\mathrm{cm}^3}{76.6\mathrm{cm}^2} = -1.459\mathrm{cm}$$

Moment bezwładności figury złożonej względem osi *x* wynosi

$$I_x = I_x^{\ \mathrm{I}} + I_x^{\ \mathrm{II}} + I_x^{\ \mathrm{III}} = I_{x_{c1}}^{\ \mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} \cdot \tilde{y}_{c1}^{\ 2} + I_x^{\ \mathrm{II}} + I_{x_{c3}}^{\ \mathrm{III}} + A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{y}_{c3}^{\ 2} =$$

$$= 248\mathrm{cm}^4 + 42.3\mathrm{cm}^2 \cdot (-2.23\mathrm{cm})^2 + 575\mathrm{cm}^4 + 88.4\mathrm{cm}^4 + 15.1\mathrm{cm}^2 \cdot (-6.15\mathrm{cm})^2 = 1692.9\mathrm{cm}^4$$

Moment bezwładności figury złożonej względem osi *y* wynosi

$$I_y = I_y^{\ \mathrm{I}} + I_y^{\ \mathrm{II}} + I_y^{\ \mathrm{III}} = I_y^{\ \mathrm{I}} + I_{y_{c2}}^{\ \mathrm{II}} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{x}_{c2}^{\ 2} + I_{y_{c3}}^{\ \mathrm{III}} + A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{x}_{c3}^{\ 2} =$$

$$= 3600\mathrm{cm}^4 + 99.6\mathrm{cm}^4 + 19.2\mathrm{cm}^2 \cdot (-5.96\mathrm{cm})^2 + 88.4\mathrm{cm}^4 + 15.1\mathrm{cm}^2 \cdot (14.35\mathrm{cm})^2 = 7579.4\mathrm{cm}^4$$

Moment dewiacyjny figury złożonej w układzie *xy* wynosi

$$I_{xy} = I_{xy}^{\ \mathrm{I}} + I_{xy}^{\ \mathrm{II}} + I_{xy}^{\ \mathrm{III}} = I_{xy}^{\ \mathrm{I}} + I_{x_{c2}y_{c2}}^{\ \mathrm{II}} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{x}_{c2} \cdot \tilde{y}_{c2} + I_{x_{c3}y_{c3}}^{\ \mathrm{III}} + A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{x}_{c3} \cdot \tilde{y}_{c3} =$$

$$= 0 + 96.29\mathrm{cm}^4 + 19.2\mathrm{cm}^2 \cdot (-5.96\mathrm{cm}) \cdot 3.93\mathrm{cm} - 51.75\mathrm{cm}^4 + 15.1\mathrm{cm}^2 \cdot 14.35\mathrm{cm} \cdot (-6.15\mathrm{cm}) =$$

$$= -1737.8\mathrm{cm}^4$$

Znając wartości momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego figury złożonej w układzie *Oxy* możemy korzystając z twierdzenia Steinera wyznaczyć momenty bezwładności i moment dewiacyjny w układzie osi centralnych $x_c y_c$.

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot \tilde{y}_c^{\,2} = 1692.9\text{cm}^4 - 76.6\text{cm}^2 \cdot (-1.459\text{cm})^2 = 1529.8\text{cm}^4$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot \tilde{x}_c^{\,2} = 7579.4\text{cm}^4 - 76.6\text{cm}^2 \cdot (1.335\text{cm})^2 = 7442.9\text{cm}^4$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot \tilde{x}_c \cdot \tilde{y}_c = -1737.8\text{cm}^4 - 76.6\text{cm}^2 \cdot 1.335\text{cm} \cdot (-1.459\text{cm}) = -1588.6\text{cm}^4.$$

Momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności przyjmują wartości:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^{\;2}} =$$

$$= \frac{1529.8\text{cm}^4 + 7442.9\text{cm}^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{1529.8\text{cm}^4 - 7442.9\text{cm}^4}{2}\right)^2 + \left(-1588.6\text{cm}^4\right)^2} = 7842.7\text{cm}^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^{\;2}} =$$

$$= \frac{1529.8\text{cm}^4 + 7442.9\text{cm}^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{1529.8\text{cm}^4 - 7442.9\text{cm}^4}{2}\right)^2 + \left(-1588.6\text{cm}^4\right)^2} = 1130.0\text{cm}^4$$

Kąt φ_o między osiami prostokątnego układu $x_c y_c$ i układu głównych osi bezwładności spełnia równanie:

$$tg\, 2\varphi_o = \frac{-2 I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{-2 \cdot \left(-1588.6\text{cm}^4\right)}{1529.8\text{cm}^4 - 7442.9\text{cm}^4} = -0.5373$$

stąd $2\varphi_o = -0.4930\text{rad}$, $\varphi_o = -0.2465\text{rad}$.

Główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_1 = I_{max}$ tworzy z osią x_c kąt φ_1, natomiast główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_2 = I_{min}$ tworzy z osią x_c kąt φ_2.

Ponieważ $I_{x_c} < I_{y_c}$ to kąt $\varphi_1 = \varphi_o + \frac{\pi}{2} = \left(-0.2465 + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad} = 1.3243\text{rad}$, natomiast kąt $\varphi_2 = \varphi_o = -0.2456\text{rad}$.