

Opgaver –Dansk version–

Opgave 1 De reelle tal x_1, \dots, x_{2011} opfylder

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

hvor $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ er en permutation af $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Vis at $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Opgave 2 Lad $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ være en funktion så der for alle heltal x og y gælder:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Vis at f er begrænset, dvs. at der findes en konstant C så

$$-C < f(x) < C$$

for alle heltal x .

Opgave 3 En følge a_1, a_2, a_3, \dots af ikke-negative heltal opfylder at a_{n+1} er det sidste ciffer i $a_n^n + a_{n-1}$ for alle $n > 2$. Er det altid sandt at der findes et heltal n_0 så følgen $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ er periodisk?

Opgave 4 Lad a, b, c, d være ikke-negative reelle tal så $a + b + c + d = 4$. Vis uligheden

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Opgave 5 Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion så

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

for alle reelle tal x . Bestem $f(0)$.

Opgave 6 Lad n være et positivt heltal. Vis at antallet af linjer der går gennem origo og netop et andet punkt med heltallige koordinater (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$, er mindst $\frac{n^2}{4}$.

Opgave 7 Lad T betegne mængden $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$ med 15 elementer. Lad S være en delmængde af T som opfylder at alle seks cifre 1, 2, ..., 6 indgår, samt at vilkårlige tre elementer ikke samlet indeholder alle seks cifre. Hvor mange elementer kan der maksimalt være i S ?

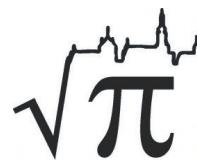
Opgave 8 I Greifswald er der tre skoler A , B og C , hvor der på hver går mindst en elev. For hvert valg af tre elever, en fra A , en fra B og en fra C , er der to som kender hinanden, og to som ikke kender hinanden. Vis at mindst et af følgende udsagn er sandt:

- Der er en elev fra A som kender alle elever fra B .
- Der er en elev fra B som kender alle elever fra C .
- Der er en elev fra C som kender alle elever fra A .

Opgave 9 Et rektangel består af $m \times n$ enhedskvadrater. En farvning af rektanglet i to farver (sort og hvid) kaldes *gyldig* hvis den opfylder følgende betingelser:

- Alle enhedskvadrater der støder op til kanten af rektanglet, er farvet sorte.
- I intet 2×2 kvadrat har de fire enhedskvadrater samme farve.
- I intet 2×2 kvadrat er de fire enhedskvadrater farvet så to diagonalt modstående kvadrater er sorte, mens de to andre er hvide.

For hvilke m og n (med $m, n \geq 3$) har rektanglet en gyldig farvning?



Opgaver –Dansk version–

Opgave 10 To personer spiller følgende spil med hele tal. Starttallet er 2011^{2011} . Spillerne skiftes til at trække. I hvert træk trækker man et tal mellem 1 og 2010 fra (begge tal inkluderet), eller dividerer med 2011 og runder om nødvendigt ned til nærmeste heltal. Spilleren som først opnår et ikke-positivt heltal, vinder. Hvilken spiller har en vindende strategi?

Opgave 11 Lad AB og CD være to diametre i cirklen \mathcal{C} . For et vilkårligt punkt P på \mathcal{C} lad R og S være projektionerne af P på henholdsvis AB og CD . Vis at længden af RS er uafhængig af valget af P .

Opgave 12 Lad P være et indre punkt i kvadratet $ABCD$ så $PA : PB : PC$ er $1 : 2 : 3$. Bestem vinklen $\angle BPA$.

Opgave 13 Lad E være et indre punkt i den konveksse firkant $ABCD$. Konstruer trekantene $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ og $\triangle DAI$ på ydersiden af firkanten så $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ og $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Lad henholdsvis P , Q , R og S være projektionerne af E på linjerne AB , BC , CD og DA . Vis at hvis firkanten $PQRS$ er indskrivelig, da er

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Opgave 14 Den indskrevne cirkel til trekant ABC rører siderne BC , CA , AB i henholdsvis D , E , F . Lad G være et punkt på den indskrevne cirkel så FG er diameter i cirklen. Linjerne EG og FD skærer hinanden i H . Vis at $CH \parallel AB$.

Opgave 15 Lad $ABCD$ være en konveks firkant så $\angle ADB = \angle BDC$. Antag at punktet E på siden AD opfylder at

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Vis at $\angle EBA = \angle DCB$.

Opgave 16 Lad a være et helt tal. Følgen x_0, x_1, \dots er defineret ved $x_0 = a$, $x_1 = 3$ og

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ for alle } n > 1.$$

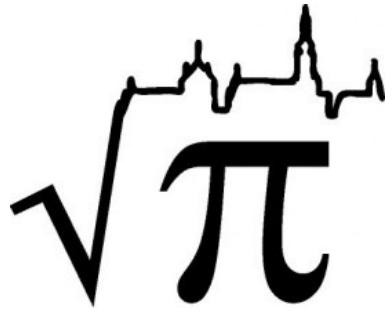
Bestem det største heltal k_a for hvilket der findes et primtal p så p^{k_a} går op i $x_{2011} - 1$.

Opgave 17 Bestem alle positive heltal d for hvilke der gælder at hvis d går op i et positivt heltal n , da går d også op i ethvert heltal der kan fås ved at omrangere cifrene i n .

Opgave 18 Bestem alle par (p, q) af primtal for hvilke både $p^2 + q^3$ og $q^2 + p^3$ er kvadrattal.

Opgave 19 Lad $p \neq 3$ være et primtal. Vis at der findes en ikke-konstant aritmetisk progression af positive heltal x_1, x_2, \dots, x_p så produktet af tallene er et kubiktal.

Opgave 20 Et helt tal $n \geq 1$ kaldes *balanceret* hvis det har et lige antal forskellige primdivisorer. Vis at det findes uendeligt mange positive heltal n så netop to af tallene n , $n+1$, $n+2$ og $n+3$ er balancerede.



Ülesanded –Estonian version–

Ülesanne 1 Reaalarvud x_1, \dots, x_{2011} rahuldavad tingimusi

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

kus $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ on permutatsioon arvudest $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Tõesta, et

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}.$$

Ülesanne 2 Olgu $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ selline funktsioon, et kõigi täisarvude x ja y korral kehtib

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Tõesta, et f on tõkestatud, st leidub selline konstant C , et iga täisarvu x korral

$$-C < f(x) < C.$$

Ülesanne 3 Mittenegatiivsete täisarvude jada a_1, a_2, a_3, \dots on selline, et iga $n > 2$ korral on a_{n+1} arvu $a_n^n + a_{n-1}$ viimane number. Kas alati peab paika, et mingi n_0 jaoks on jada $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ perioodiline?

Ülesanne 4 Olgu a, b, c, d sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $a + b + c + d = 4$. Tõesta võrratus

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

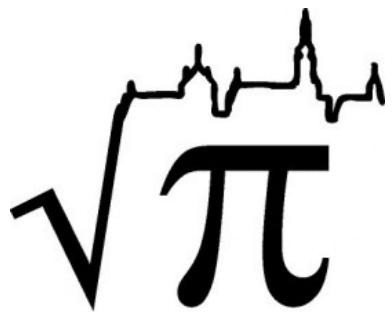
Ülesanne 5 Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selline funktsioon, et

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kõigi reaalarvude x korral. Leia $f(0)$.

Ülesanne 6 Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et selliseid sirgeid, mis läbivad koordinaatide alguspunkti ja veel täpselt ühte niisugust täisarvuliste koordinaatidega punkti (x, y) , kus $0 \leq x, y \leq n$, on vähemalt $\frac{n^2}{4}$.

Ülesanne 7 Olgu T 15-elemendiline hulk $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Olgu S hulga T alamhulk, mis kasutab ära kõik kuus numbrit $1, 2, \dots, 6$, kuid mille ükski kolm elementi ei kasuta ära kõiki neid kuut numbrit. Leia hulga S suurim võimalik elementide arv.



Ülesanded

–Estonian version–

Ülesanne 8 Greifswaldis on kolm kooli A , B ja C , millest igaühes õpib mõni õpilane. Iga kolme sellise õpilase seas, kellest üks õpib koolis A , teine koolis B ja kolmas koolis C , on kaks õpilast, kes on omavahel tuttavad, ja kaks õpilast, kes tuttavad ei ole. Tõesta, et kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest.

- Kooli A mingi õpilane on tuttav kooli B kõigi õpilastega.
- Kooli B mingi õpilane on tuttav kooli C kõigi õpilastega.
- Kooli C mingi õpilane on tuttav kooli A kõigi õpilastega.

Ülesanne 9 Mõõtmetega $m \times n$ ruudustiku värvimist kahe värviga (must ja valge) nimetame *korrektseks*, kui on rahuldatud järgmised tingimused.

- Kõik ruudustiku servades olevad ruudud on värvitud mustaks.
- Neli ruutu, mis moodustavad 2×2 ruudu, ei ole kunagi kõik ühte värv.
- Neli ruutu, mis moodustavad 2×2 ruudu, ei ole kunagi värvitud nii, et ainult diagonaalselt paiknevad ruudud on ühte värv.

Milliste mõõtmete $m \times n$ ($m, n \geq 3$) korral leidub korrektne värvimine?

Ülesanne 10 Kaks inimest mängivad järgnevat mängu täisarvudega. Alguses on arvuks 2011^{2011} . Käiakse kordamööda. Igal käigul kas lahitatakse arvust mingi täisarv 1-st 2010-ni või jagatakse arv 2011-ga, vajadusel ümardades tulemuse allapoole lähima täisarvuni. Võidab mängija, kes esimesena muudab arvu mittepositiivseks. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

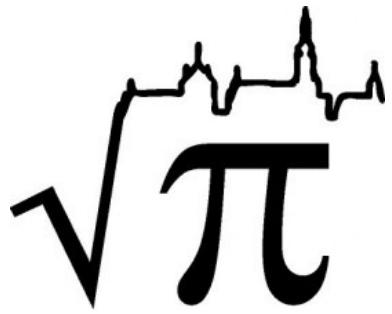
Ülesanne 11 Olgu AB ja CD ringjoone \mathcal{C} kaks diameetrit. Suvalise punkti P jaoks ringjoonel \mathcal{C} olgu R ja S punkti P projektsioonid vastavalt sirgetele AB and CD . Tõesta, et lõigu RS pikkus ei sõltu punkti P valikust.

Ülesanne 12 Olgu P selline punkt ruudu $ABCD$ sees, et $|PA| : |PB| : |PC|$ suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$. Leia nurk $\angle BPA$.

Ülesanne 13 Olgu E punkt kumera nelinurga $ABCD$ sees. Kolmnurgad $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ ja $\triangle DAI$ konstrueeritakse nelinurgast väljapoole nii, et kehtivad sarnasused $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ja $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Olgu P , Q , R ja S punkti E projektioonid vastavalt sirgetele AB , BC , CD ja DA . Tõesta, et kui $PQRS$ on kõõlnelinurk, siis

$$|EF| \cdot |CD| = |EG| \cdot |DA| = |EH| \cdot |AB| = |EI| \cdot |BC|.$$

Ülesanne 14 Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC , CA , AB vastavalt punktides D , E , F . Olgu G selline punkt siseringjoonel, et FG on diameeter. Sirged EG ja FD lõikuvad punktis H . Tõesta, et $CH \parallel AB$.



Ülesanded –Estonian version–

Ülesanne 15 Olgu $ABCD$ selline kumer nelinurk, et $\angle ADB = \angle BDC$. Eeldame, et punkt E küljel AD rahuldab võrdust

$$|AE| \cdot |ED| + |BE|^2 = |CD| \cdot |AE|.$$

Tõesta, et $\angle EBA = \angle DCB$.

Ülesanne 16 Olgu a suvaline täisarv. Defineerime jada x_0, x_1, \dots võrdustega $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ja

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ iga } n > 1 \text{ korral.}$$

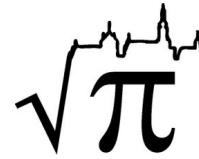
Leia suurim täisarv k_a , mille korral leidub selline algarv p , et p^{k_a} jagab arvu $x_{2011} - 1$.

Ülesanne 17 Leia kõik sellised positiivsed täisarvud d , et alati, kui d jagab mingit positiivset täisarvu n , jagab d ka iga täisarvu, mis on saadav arvu n numbrite ümberjärjestamisel.

Ülesanne 18 Leia kõik sellised algarvude paarid (p, q) , mille korral arvud $p^2 + q^3$ ja $q^2 + p^3$ on mõlemad täisruudud.

Ülesanne 19 Olgu $p \neq 3$ algarv. Tõesta, et leidub positiivsete täisarvude mittekonstantne aritmee-tiline jada x_1, x_2, \dots, x_p , mille kõigi liikmete korrutis on täiskuup.

Ülesanne 20 Ütleme, et täisarv $n \geq 1$ on *tasakaalus*, kui tal on paarisarv erinevaid algarvulisi jagajaaid. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n , et arvude $n, n+1, n+2$ ja $n+3$ hulgas on täpselt kaks tasakaalus arvu.



1. Reaaliluvut x_1, \dots, x_{2011} toteuttavat yhtälöt

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

missä $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ on jonon $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ permutaatio. Todista, että $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

2. Funktio $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ toteuttaa kaikilla kokonaislukuilla x ja y yhtälön

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Osoita, että f on rajoitettu, ts. että on olemassa sellainen vakio C , että $-C < f(x) < C$ kaikilla kokonaislukuilla x .

3. Epänegatiivisten kokonaislukujen jono a_1, a_2, a_3, \dots on sellainen, että a_{n+1} on luvun $a_n^n + a_{n-1}$ viimeinen numero kaikilla $n > 2$. Pitääkö aina paikkansa, että jollakin n_0 jono $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ on jaksollinen?

4. Olkoot a, b, c ja d epänegatiivisia reaalilukuja ja $a + b + c + d = 4$. Todista, että

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

5. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa ehdon

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kaikilla reaalilukuilla x . Määritä $f(0)$.

6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että niiden suorien lukumäärä, jotka kulkevat origon ja täsmälleen yhden toisen pisteen (x, y) kautta, missä x ja y ovat kokonaislukuja, $0 \leq x \leq n$ ja $0 \leq y \leq n$, on vähintään $n^2/4$.

7. Tarkastellaan 15-alkioista joukkoa $T = \{10a + b \mid a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Olkoon S joukon T osajoukko, jossa kaikki kuusi numeroa 1, 2, ..., 6 esiintyvät mutta joka ei sisällä kolmikkoa, jossa esiintyisivät kaikki nämä 6 numeroa. Määritä joukon S suurin mahdollinen koko.

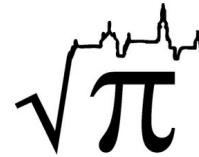
8. Greifswaldissa on koulut A , B ja C , joista kutakin käy ainakin yksi oppilas. Kustakin oppilaskolmikosta, joista yksi käy koulua A , toinen koulua B ja kolmas koulua C , jotkin kaksi tuntevat toisensa ja jotkin kaksi eivät tunne toisiaan. Todista, että ainakin yksi seuraavista pätee:

- Jokin koulun A oppilas tuntee kaikki koulun B oppilaat.
- Jokin koulun B oppilas tuntee kaikki koulun C oppilaat.
- Jokin koulun C oppilas tuntee kaikki koulun A oppilaat.

9. Väritetään $m \times n$ -ruudukon ruudut mustiksi ja valkoisiksi. Väritysen sanotaan olevan *pätevä*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

- Kaikki reunaruudut ovat mustia.
- Mitkään neljä 2×2 -ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole samanvärisiä.
- Mitkään neljä 2×2 -ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole niin väritetyt, että vain kulmitain toisiaan koskettavat ruudut ovat samanvärisiä.

Millä $m \times n$ -ruudukoilla, jossa $m, n \geq 3$, on olemassa pätevä väritys?



10. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa kokonaislukupeliä. Aluksi luku on 2011^{2011} , ja pelaajat siirtävät vuorotellen. Jokaisella siirrolla lukua voi vähentää kokonaisluvulla, joka on vähintään 1 ja korkeintaan 2010, tai luvun voi jakaa 2011:llä ja pyöristää alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Pelaaja, joka ensimmäisenä päättyy epäpositiiviseen kokonaislukuun, voittaa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?
11. Olkoot AB ja CD ympyrän \mathcal{C} kaksi halkaisijaa ja P \mathcal{C} :n mielivaltainen piste. Olkoot R ja S pistestä P AB :lle ja CD :lle piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet. Osoita, että janan RS pituus ei riipu pisteen P valinnasta.
12. Olkoon P sellainen neliön $ABCD$ sisäpiste, että $PA : PB : PC$ on $1 : 2 : 3$. Määritä $\angle BPA$.
13. Olkoon E kuperan nelikulmion $ABCD$ sisäpiste. Piirretään nelikulmion ulkopuolelle kolmiot ABF , BCG , CDH ja DAI siten, että $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ja $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Olkoot P , Q , R ja S pisteen E projektiot suorilla AB , BC , CD ja DA , tässä järjestyksessä. Todista, että jos $PQRS$ on jänne nelikulmio, niin

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

14. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja BC , CA ja AB pisteissä D , E ja F , tässä järjestyksessä. Olkoon G se sisään piirretyn ympyrän piste, jolle FG on ympyrän halkaisija. Suorat EG ja FD leikkaavat pisteessä H . Todista, että $CH \parallel AB$.
15. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa $\angle ADB = \angle BDC$. Oletetaan, että sivun AD piste E toteuttaa yhtälön

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

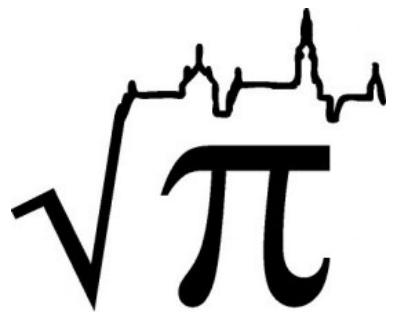
Osoita, että $\angle EBA = \angle DCB$.

16. Olkoon a kokonaisluku. Määritellään jono x_0, x_1, \dots asettamalla $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ja

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3,$$

kun $n > 1$. Määritä suurin kokonaisluku k_a , jolla on olemassa sellainen alkuluku p , että p^{k_a} jakaa luvun $x_{2011} - 1$.

17. Määritä kaikki sellaiset positiviset kokonaisluvut d , että jos d jakaa kokonaisluvun n , niin d jakaa myös jokaisen kokonaisluvun m , jonka numerot ovat jossain järjestyksessä samat kuin luvun n numerot.
18. Määritä kaikki alkulukuparit (p, q) , joille sekä $p^2 + q^3$ että $q^2 + p^3$ ovat kokonaisluvun neliötä.
19. Olkoon $p \neq 3$ alkuluku. Osoita, että on olemassa toistoton positiivisten kokonaislukujen x_1, x_2, \dots, x_p aritmeettinen jono, jonka jäsenten tulo on kokonaisluvun kuutio.
20. Kokonaislukua $n \geq 1$ kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos sillä on parillinen määrä eri alkutekijöitä. Todista, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n , että täsmälleen kaksi luvuista n , $n+1$, $n+2$ ja $n+3$ on tasapainoisia.



Aufgaben

–Deutsche Version–

Aufgabe 1 Die reellen Zahlen x_1, \dots, x_{2011} erfüllen

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

wobei $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ eine Permutation von $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ ist. Zeige: $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle ganzen Zahlen x und y gilt:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Zeige, dass f beschränkt ist, d.h. dass es eine Konstante C gibt, so dass für alle ganzen Zahlen x gilt:

$$-C < f(x) < C.$$

Aufgabe 3 Eine Folge a_1, a_2, a_3, \dots nicht-negativer ganzer Zahlen gehorche folgender Rekursionsvorschrift: a_{n+1} ist die letzte Ziffer von $a_n^n + a_{n-1}$ für alle $n > 2$. Gilt immer, dass für ein n_0 die Folge $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ periodisch ist?

Aufgabe 4 Es seien a, b, c, d nicht-negative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 4$. Beweise:

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

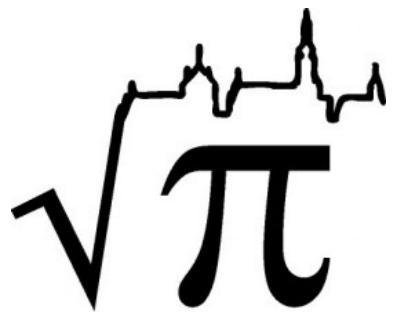
Aufgabe 5 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ für alle reellen Zahlen x . Bestimme $f(0)$.

Aufgabe 6 Sei n eine positive ganze Zahl. Zeige: Die Anzahl von Geraden, die durch den Ursprung und genau einen weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$, gehen, ist mindestens $\frac{n^2}{4}$.

Aufgabe 7 Mit T sei die 15-elementige Menge $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$ bezeichnet. Es sei S eine Teilmenge von T , in der alle sechs Ziffern $1, 2, \dots, 6$ auftauchen und die keine drei Elemente aufweist, in denen zusammen alle sechs Ziffern vorkommen. Wie viele Elemente kann S höchstens enthalten?

Aufgabe 8 In Greifswald gibt es drei Schulen A , B und C , und jede Schule wird von mindestens einer Schülerin besucht. Unter je drei Schülerinnen, von denen jeweils eine aus jeder der drei Schulen kommt, gibt es zwei, die einander kennen, und zwei, die einander nicht kennen. Zeige, dass dann mindestens eine der folgenden Aussagen gelten muss:

- Eine Schülerin der Schule A kennt alle Schülerinnen aus der Schule B .
- Eine Schülerin aus B kennt alle Schülerinnen von C .
- Eine Schülerin aus C kennt alle Schülerinnen von A .



Aufgaben –Deutsche Version–

Aufgabe 9 Ein rechteckiges Gitter bestehe aus $m \times n$ Quadraten. Eine Färbung dieser Quadrate in zwei Farben (schwarz und weiß) heiße *herbstlich*, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

- Alle Quadrate, die am Rand des Gitters liegen, sind schwarz.
- Keine vier Quadrate in einem 2×2 -Quadrat haben dieselbe Farbe.
- Keine vier Quadrate in einem 2×2 -Quadrat sind so gefärbt, dass nur diagonal gegenüberliegende Quadrate dieselbe Farbe aufweisen.

Für welche Gittergrößen $m \times n$ (mit $m, n \geq 3$) gibt es eine herbstliche Färbung?

Aufgabe 10 Zwei Personen spielen das folgende Spiel mit ganzen Zahlen: Die Anfangszahl ist 2011^{2011} . Die Spieler ziehen abwechselnd. Jeder Zug besteht entweder aus der Subtraktion einer ganzen Zahl zwischen 1 und 2010, jeweils eingeschlossen, oder einer Division durch 2011, wobei gegebenenfalls auf die nächste ganze Zahl abgerundet wird. Der Spieler, der als erster eine nicht-negative ganze Zahl erreicht, hat gewonnen. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 11 Es seien AB und CD zwei Durchmesser des Kreises \mathcal{C} . Für einen beliebigen Punkt P auf \mathcal{C} seien R und S die Lotfußpunkte von P auf AB bzw. CD . Zeige, dass die Länge der Strecke RS unabhängig von der Wahl von P ist.

Aufgabe 12 Sei P ein Punkt innerhalb des Quadrates $ABCD$ mit $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Bestimme die Größe des Winkels $\angle BPA$.

Aufgabe 13 Es sei E ein innerer Punkt des konvexen Vierecks $ABCD$. Außerhalb des Vierecks werden die Dreiecke $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ und $\triangle DAI$ so konstruiert, dass die Ähnlichkeitsbeziehungen $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ und $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ gelten. Es seien P , Q , R und S die Projektionen von E auf die Geraden AB , BC , CD bzw. DA . Beweise: Wenn $PQRS$ ein Sehnenviereck ist, dann gilt

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Aufgabe 14 Der Innenkreis eines Dreiecks ABC berühre die Seiten BC , CA und AB in D , E bzw. F . Es sei G der Punkt auf dem Innenkreis, für den FG ein Durchmesser ist. Die Geraden EG und FD mögen sich in H schneiden. Zeige, dass $CH \parallel AB$.

Aufgabe 15 Sei $ABCD$ ein konvexas Viereck mit $\angle ADB = \angle BDC$. Der Punkt E auf der Seite AD möge der Gleichung

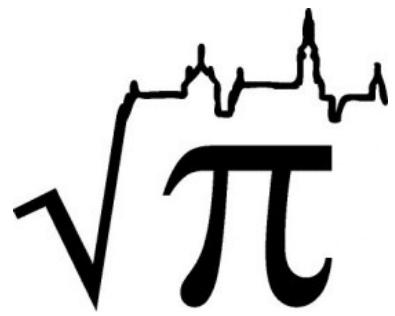
$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE$$

genügen. Zeige, dass $\angle EBA = \angle DCB$.

Aufgabe 16 Es sei a eine ganze Zahl. Man definiere die Folge x_0, x_1, \dots durch $x_0 = a$, $x_1 = 3$ und

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ für alle } n > 1.$$

Man bestimme die größte ganze Zahl k_a , für die eine Primzahl p derart existiert, dass p^{k_a} die Zahl $x_{2011} - 1$ teilt.



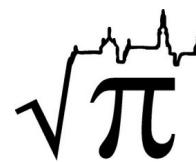
Aufgaben –Deutsche Version–

Aufgabe 17 Bestimme alle positiven ganzen Zahlen d mit der folgenden Eigenschaft: Wenn d eine positive ganze Zahl n teilt, dann teilt d auch alle anderen Zahlen, die aus der Zahl n durch Permutation ihrer Ziffern entstehen.

Aufgabe 18 Man bestimme alle Paare (p, q) von Primzahlen, für die sowohl $p^2 + q^3$ als auch $q^2 + p^3$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 19 Sei $p \neq 3$ eine Primzahl. Zeige, dass es eine nicht-konstante arithmetische Folge von ganzen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_p gibt, bei der das Produkt aller Folgenglieder eine Kubikzahl ist.

Aufgabe 20 Eine ganze Zahl $n \geq 1$ heiße *ausgeglichen*, wenn die Anzahl ihrer unterschiedlichen Primteiler gerade ist. Beweise, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n derart gibt, dass unter den vier Zahlen n , $n + 1$, $n + 2$ und $n + 3$ genau zwei ausgeglichen sind.



Dæmi 1 Rauntölurnar x_1, \dots, x_{2011} uppfylla

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

þar sem $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ er umröðun á $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Sannið að $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Dæmi 2 Látum $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ vera fall þannig að fyrir allar heiltölur x og y gildi eftirfarandi:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Sýnið að f er takmarkað, þ.e. til er fasti C þannig að

$$-C < f(x) < C$$

fyrir allar heiltölur x .

Dæmi 3 Í runu a_1, a_2, a_3, \dots af ekki neikvæðum heiltölum er a_{n+1} síðasti tölustafur $a_n^n + a_{n-1}$ fyrir öll $n > 2$. Er alltaf til n_0 þannig að runan $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ sé lotubundin?

Dæmi 4 Látum a, b, c, d vera ekki neikvæðar rauntölur þannig að $a+b+c+d = 4$. Sannið ójöfnuna

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Dæmi 5 Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall þannig að

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

fyrir allar rauntölur x . Ákvarðið $f(0)$.

Dæmi 6 Látum n vera jákvæða heiltölu. Sannið að fjöldi lína sem fara í gegnum upphafspunktinn og nákvæmlega einn annan punkt með heiltöluhnit (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$, er a.m.k. $\frac{n^2}{4}$.

Dæmi 7 Látum T tákna 15 staka mengið $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Látum S vera hlutmenzi í T þannig að allir sex tölustafirnir $1, 2, \dots, 6$ komi þar fyrir og engin þrjú stök í S innihaldi í sameiningu alla tölustafina. Ákvarðið mesta mögulega fjölda staka sem S getur innihaldið.

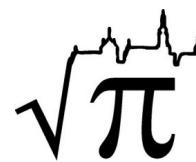
Dæmi 8 Í Greifswald eru þrír skólar, A , B og C . Í hverjum þeirra er a.m.k. einn nemandi. Meðal sérhverra þriggja nemenda, einum úr A , einum úr B og einum úr C , eru tveir sem þekkjast og tveir sem þekkjast ekki. Sannið að a.m.k. ein af efirfarandi fullyrðingum sé sönn:

- Einhver nemandi úr A þekkir alla nemendur úr B .
- Einhver nemandi úr B þekkir alla nemendur úr C .
- Einhver nemandi úr C þekkir alla nemendur úr A .

Dæmi 9 Rétthyrningslaga svæði er skipt í $m \times n$ ferninga. Ferningarnir eru litaðir tveimur litum (svörtum og hvítum). Litunin er sögð *gild* ef hún fullnægir eftirfarandi skilyrðum:

- Allir ferningar á jöðrum svæðisins eru svartir.
- Engir fjórir ferningar sem saman mynda 2×2 -ferning eru samlitir.
- Engir fjórir ferningar sem saman mynda 2×2 -ferning eru litaðir þannig að önnur hornalínan sé hvít og hin svört.

Fyrir hvaða m og n (með $m, n \geq 3$) er til gild litun?



Dæmi 10 Tveir menn keppa í eftirfarandi heiltöluleik. Þeir skiptast á að breyta heiltölu. Upphafstalan er 2011²⁰¹¹. Í hvert skipti sem þeir gera fæst ný heiltala með því að draga frá heiltölu milli 1 og 2010, að báðum meðtöldum, eða deila í töluna með 2011 og námunda að næstu heiltölu fyrir neðan ef þörf krefur. Sigurvegari er sá sem fyrstur fær ekki jákvæða útkomu. Hvort á sá sem byrjar eða andstæðingur hans örugga leið til sigurs?

Dæmi 11 Látum AB og CD vera two miðstrengi hringsins \mathcal{C} . Fyrir punkt P á \mathcal{C} látum við R og S vera ofanvarp punktsins P á AB annars vegar og CD hins vegar. Sýnið að lengd RS er óháð vali á punktinum P .

Dæmi 12 Látum P vera punkt innan ferningsins $ABCD$ þannig að $PA : PB : PC$ er $1 : 2 : 3$. Ákvarðið $\angle BPA$.

Dæmi 13 Látum E vera innri punkt í kúptum ferhýrningi $ABCD$. Myndum þríhyrninga $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ og $\triangle DAI$ utan ferhýrningsins þannig að $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ og $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ (\sim táknað að þríhyrningarnir eru einslaga). Látum P , Q , R og S vera ofanvörp punktsins E á línurnar AB , BC , CD og DA í þessari röð. Sannið að ef ferhýrningurinn $PQRS$ er umritanlegur þá

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Dæmi 14 Innritaði hringur þríhyrningsins ABC snertir hliðarnar BC , CA , AB í D , E , F í þessari röð. Látum G vera punkt á innritaða hringnum þannig að FG sé miðstrengur. Línurnar EG og FD skerast í H . Sannið að $CH \parallel AB$.

Dæmi 15 Látum $ABCD$ vera kúptan ferhýrning þannig að $\angle ADB = \angle BDC$. Gerum ráð fyrir að punkturinn E á hliðinni AD uppfylli jöfnuna

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Sýnið að $\angle EBA = \angle DCB$.

Dæmi 16 Látum a vera heiltölu. Skilgreinum rununa x_0, x_1, \dots með $x_0 = a$, $x_1 = 3$ og

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ fyrir öll } n > 1.$$

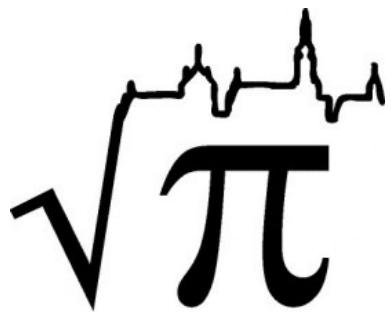
Ákvarðið stærstu heiltöluna k_a þannig að til sé frumtala p og p^{k_a} gengur upp í $x_{2011} - 1$.

Dæmi 17 Ákvarðið allar jákvæðar heiltölur d sem eru þannig að alltaf þegar d gengur upp í jákvæða heiltölu n þá gengur d líka upp í allar jákvæðar heiltölur sem fást með því að umraða tölustöfum tölunnar n .

Dæmi 18 Ákvarðið allar tvenndir (p, q) frumtalna sem eru þannig að $p^2 + q^3$ og $q^2 + p^3$ séu ferningstölur.

Dæmi 19 Látum $p \neq 3$ vera frumtölu. Sýnið að til sé jafnmunaruna, sem ekki er fastaruna, af jákvæðum heiltöllum x_1, x_2, \dots, x_p þannig að margfeldi liða rununnar sé teningstala (þriðja veldi jákvæðrar heiltölu).

Dæmi 20 Heiltala $n \geq 1$ er sögð í jafnvægi ef fjöldi ólíkra frumþátta hennar er slétt tala. Sannið að til séu óendanlega margar jákvæðar heiltölur n þannig að nákvæmlega tvær talnanna n , $n+1$, $n+2$ og $n+3$ séu í jafnvægi.



Užduotys –Lietuviška versija–

1 užduotis. Realieji skaičiai x_1, \dots, x_{2011} tenkina lygybes

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

kur $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ yra tie patys skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$, tik išrikiuoti galbūt kita tvarka. Irodykite, kad $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

2 užduotis. Duota funkcija $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, su visais sveikaisiais x ir y tenkinanti lygybę

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Irodykite, kad funkcija f aprėžta, t.y. egzistuoja tokia konstanta C , kad visiems $x \in \mathbb{Z}$ galioja

$$-C < f(x) < C.$$

3 užduotis. Neneigiamų sveikujų skaičių sekoje a_1, a_2, a_3, \dots kiekvienas narys a_{n+1} , $n > 2$, yra paskutinis skaičiaus $a_n^n + a_{n-1}$ skaitmuo. Ar būtinai egzistuoja toks n_0 , kad seką $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ yra periodinė?

4 užduotis. Duoti neneigiami realieji skaičiai a, b, c, d , tenkinantys lygybę $a + b + c + d = 4$. Irodykite nelygybę

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

5 užduotis. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenkina lygybę

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

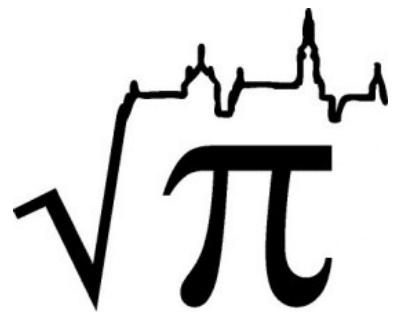
visiems realiesiems skaičiams x . Raskite $f(0)$.

6 užduotis. Tegu n yra natūralusis skaičius. Irodykite, kad yra mažiausiai $\frac{n^2}{4}$ tiesių, einančių per koordinacių pradžią ir dar lygiai vieną tašką su sveikosiomis koordinatėmis (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$.

7 užduotis. Duota 15 elementų aibė $T = \{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Jos poaibio S elementams užrašyti reikia visų šešių skaitmenų 1, 2, ..., 6, bet šio poaibio bet kuriems trims elementams užrašyti visų šešių skaitmenų nereikia. Kiek daugiausiai elementų gali būti aibėje S ?

8 užduotis. Greifswalde veikia trys mokyklos A, B, C (kiekvieną iš jų lanko bent vienas mokinys). Tarp bet kurių trijų mokinį, lankančių skirtinges mokyklas, yra du, pažistantys vienas kitą, ir yra du, vienas kito nepažistantys. Irodykite, kad bent vienas iš šių teiginių yra teisingas:

- Kuris nors mokinys iš A pažista visus mokinius iš B .
- Kuris nors mokinys iš B pažista visus mokinius iš C .
- Kuris nors mokinys iš C pažista visus mokinius iš A .



Užduotys –Lietuviška versija–

9 užduotis. Stačiakampė lenta padalyta į $m \times n$ langelių. Jos nudažymas (kiekvienas langelis nudažomas juodai arba baltai) vadinamas *leistinu*, jei tenkinamos šios sąlygos:

- Visi langeliai, susiliečiantys su lento kraštu, nudažti juodai.
- Jokie keturi langeliai, sudarantys kvadratą 2×2 , nėra vienspalviai.
- Tarp bet kurių keturių langelių, sudarančių kvadratą 2×2 , yra bent du bendrą kraštine turintys vienspalviai langeliai.

Kokių matmenų $m \times n$ (kur $m, n \geq 3$) lentelėms egzistuoja leistinas nudažymas?

10 užduotis. Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą su sveikaisiais skaičiais. Pradžioje duotas skaičius 2011²⁰¹¹. Žaidėjai éjimus atlieka paeiliui. Vienu éjimu leidžiama iš turimo skaičiaus atimti natūralujį skaičių nuo 1 iki 2010 imtinai arba padalyti jį iš 2011, jei reikia, pakeičiant dalmenį artimiausiu sveikuoju skaičiumi, mažesniu už jį. Žaidéjas, pirmasis gavęs neteigiamą skaičių, laimi. Kuris žaidéjas turi pergalės strategiją?

11 užduotis. Duoti du apskritimo C skersmenys AB ir CD . Bet kokiam apskritimo taškui P priskiriamei taškai R ir S , kurie yra statmenų, išvestų iš taško P atitinkamai į tieses AB ir CD , pagrindai. Irodykite, kad atkarpos RS ilgis nepriklauso nuo taško P parinkimo.

12 užduotis. Duotas toks kvadrato $ABCD$ vidaus taškas P , kad $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Raskite $\angle BPA$.

13 užduotis. Duotas iškilojo keturkampio $ABCD$ vidaus taškas E . Keturkampio išorėje nubréžti trikampiai ABF , BCG , CDH ir DAI , tenkinantys sąlygas $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ir $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ (šiose sąlygose trikampių viršunių tvarka yra svarbi). Taškai P , Q , R ir S yra taško E projekcijos atitinkamai į tieses AB , BC , CD ir DA . Irodykite, kad jei keturkampus $PQRS$ yra įbréžtinis, tai

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

14 užduotis. Trikampio ABC įbréžtinis apskritimas kraštines BC , CA , AB liečia atitinkamai taškuose D , E , F . Atkarpa FG yra šio apskritimo skersmuo. Tiesės EG ir FD kertasi taške H . Irodykite, kad $CH \parallel AB$.

15 užduotis. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampai ADB ir BDC yra lygūs. Kraštinėje AD pažymėtas toks taškas E , kad

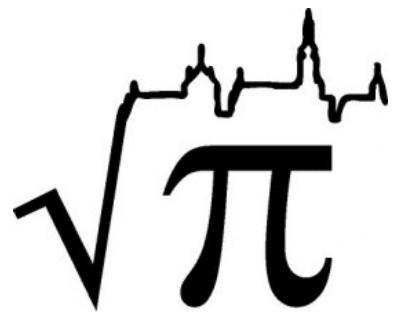
$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Irodykite, kad $\angle EBA = \angle DCB$.

16 užduotis. Duotas sveikasis skaičius a . Seka x_0, x_1, \dots yra apibrėžta lygybių $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ir

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ visiems } n > 1.$$

Raskite tokį didžiausią skaičių k_a , kad $x_{2011} - 1$ dalijasi iš p^{k_a} , kur p yra pirminis skaičius.



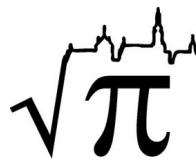
Užduotys –Lietuviška versija–

17 užduotis. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius d , kad bet kaip sukeitus skaičiaus d bet kurio natūraliojo kartotinio skaitmenis vietomis vėl gautuysi skaičiaus d kartotinis.

18 užduotis. Raskite visas tokias pirminių skaičių poras (p, q) , kad $p^2 + q^3$ ir $q^2 + p^3$ yra tikslūs kvadratai.

19 užduotis. Duotas pirmenis skaičius $p \neq 3$. Irodykite, kad egzistuoja aritmetinė progresija x_1, x_2, \dots, x_p , sudaryta iš skirtinių natūraliųjų skaičių, kurių sandauga yra natūraliojo skaičiaus kubas.

20 užduotis. Natūralusis skaičius n yra vadinas *sustyguotu*, jei turi lyginį skaičių skirtinių pirminių daliklių. Irodykite, kad egzistuoja be galio daug tokių natūraliųjų skaičių n , kad lygiai du iš skaičių $n, n+1, n+2$ ir $n+3$ yra *sustyguoti*.



Uzdevumi –Latvian version–

1. uzdevums. Reāliem skaitļiem x_1, \dots, x_{2011} izpildās sakarības

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

kur $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ ir skaitļu $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ permutācija. Pierādiet, ka $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

2. uzdevums. Dota funkcija $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tāda, ka visiem veseliem x un y izpildās:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Pierādiet, ka f ir ierobežota, t.i. eksistē tāda konstante C , ka $-C < f(x) < C$ visiem veseliem skaitļiem x .

3. uzdevums. Nenegatīvu veselu skaitļu virknē a_1, a_2, a_3, \dots visiem $n > 2$ piemīt īpašība, ka a_{n+1} ir $a_n^n + a_{n-1}$ pēdējais cipars. Vai noteikti eksistē tāds n_0 , ka virkne $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ ir periodiska?

4. uzdevums. Doti nenegatīvi reāli skaitļi a, b, c, d , tādi, ka $a+b+c+d=4$. Pierādiet nevienādību

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

5. uzdevums. Dota funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurai visiem reāliem x

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

Atrodiet $f(0)$ vērtību.

6. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n . Pierādiet, ka ir vismaz $\frac{n^2}{4}$ tādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un tieši vienu citu punktu ar veselām koordinātām (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$.

7. uzdevums. Apzīmēsim ar T 15-elementu kopu $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. S ir tāda T apakškopa, kurā sastopami visi seši cipari $1, 2, \dots, 6$, bet kurā nav tādu triju elementu, kas kopā saturētu visus sešus ciparus. Atrodiet lielāko iespējamo kopas S elementu skaitu.

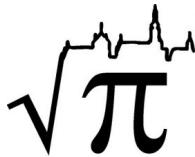
8. uzdevums. Katru no trim Greifsvaldes skolām A , B un C apmeklē vismaz viens skolēns. No katriem trim skolēniem, pa vienam no katras skolas A , B un C , var atrast divus, kuri pazīst viens otru un divus, kuri nepazīst viens otru. Pierādiet, ka vismaz viens no sekojošiem apgalvojumiem ir patiess:

- kāds skolēns no A pazīst visus skolēnus no B ;
- kāds skolēns no B pazīst visus skolēnus no C ;
- kāds skolēns no C pazīst visus skolēnus no A .

9. uzdevums. Dots taisnstūris, kura izmērs ir $m \times n$ rūtiņas, tās nokrāsotas melnā vai baltā krāsā. Krāsojumu sauksim par *labu*, ja izpildās sekojoši nosacījumi:

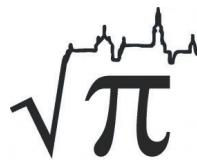
- Visas rūtiņas, kas pieskaras taisnstūra malai, ir melnas.
- Nekādas četras rūtiņas, kas veido 2×2 -kvadrātu, nav nokrāsotas vienā krāsā.
- Nekādas četras rūtiņas, kas veido 2×2 -kvadrātu, nav nokrāsotas tā, ka vienā krāsā ir tikai tās rūtiņas, kas saskaras tikai ar stūriem (pa diagonāli).

Kādiem taisnstūra izmēriem $m \times n$ ($m, n \geq 3$) ir iespējams labs krāsojums?



Uzdevumi –Latvian version–

- 10. uzdevums.** Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli ar veseliem skaitļiem. Sākotnējais skaitlis ir 2011^{2011} . Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Vienā gājienā no tā var vai nu atņemt kādu naturālu skaitli starp 1 un 2010 ieskaitot, vai arī izdalit to ar 2011, noapaļojot uz leju līdz tuvākajam veselajam skaitlim, kad tas nepieciešams. Uzvar spēlētājs, kurš pirmais iegūst nepozitīvu skaitli. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?
- 11. uzdevums.** AB un CD ir divi riņķa līnijas \mathcal{C} diametri. Patvalīgam uz \mathcal{C} izvēlētam punktam P , ar R un S apzīmēsim tā projekcijas attiecīgi uz AB un CD . Pierādiet, ka nogriežņa RS garums nav atkarīgs no punkta P izvēles.
- 12. uzdevums.** Kvadrāta $ABCD$ iekšpusē izvēlēts tāds punkts P , ka $PA : PB : PC$ ir $1 : 2 : 3$. Aprēķiniet leņķi $\angle BPA$.
- 13. uzdevums.** Punkts E atrodas izliekta četrstūra $ABCD$ iekšpusē. Četrstūra ārpusē konstruēti trijstūri $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ un $\triangle DAI$ tā, ka $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ un $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Punkti P , Q , R un S ir punkta E projekcijas attiecīgi uz taisnēm AB , BC , CD un DA . Pierādiet, ka, ja četrstūrim $PQRS$ var apvilkta riņķa līniju, tad
- $$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$
- 14. uzdevums.** Trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija pieskaras tā malām BC , CA , AB attiecīgi punktos D , E , F . Uz šīs riņķa līnijas izvēlēts tāds punkts G , ka FG ir tās diametrs. Taisnes EG un FD krustojas punktā H . Pierādiet, ka $CH \parallel AB$.
- 15. uzdevums.** Punkts E atrodas uz izliekta četrstūra $ABCD$ malas AD . Zināms, ka $\angle ADB = \angle BDC$ un
- $$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$
- Pierādiet, ka $\angle EBA = \angle DCB$.
- 16. uzdevums.** Dots patvalīgs vesels skaitlis a un skaitļu virkne x_0, x_1, \dots , kur $x_0 = a$, $x_1 = 3$ un
- $$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ visiem } n > 1.$$
- Atrodiet lielāko skaitli k_a , kuram var atrast tādu pirmskaitli p , ka $x_{2011} - 1$ dalās ar p^{k_a} .
- 17. uzdevums.** Atrodiet visus naturālos skaitļus d , kuriem ir spēkā īpašība: ja d ir kāda naturāla skaitļa n dalītājs, tad d ir arī jebkura tāda skaitļa dalītājs, kuru var iegūt no n , samainot vietām tā ciparus.
- 18. uzdevums.** Atrodiet visus pirmskaitļu pārus (p, q) , tādus, ka gan $p^2 + q^3$, gan $q^2 + p^3$ ir naturālu skaitļu kvadrāti.
- 19. uzdevums.** Dots pirmskaitlis $p \neq 3$. Pierādiet, ka var atrast aritmētisku progresiju x_1, x_2, \dots, x_p , kas sastāv no dažādiem naturāliem skaitļiem, kuras visu locekļu reizinājums ir naturāla skaitļa kubs.
- 20. uzdevums.** Vesels skaitlis $n \geq 1$ ir *balansēts*, ja starp tā dalītājiem ir pāra skaits pirmskaitļu. Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n , tādu, ka no skaitļiem n , $n+1$, $n+2$ un $n+3$ tieši divi ir balansēti.



Oppgaver –Norsk versjon–

Oppgave 1. De reelle tallene x_1, \dots, x_{2011} tilfredsstiller ligningene

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

der $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ er en permutasjon av $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Vis at $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Oppgave 2. La $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ være en funksjon slik at

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

for alle heltall x og y .

Vis at f er begrenset, det vil si at det finnes en konstant C slik at

$$-C < f(x) < C$$

for alle heltall x .

Oppgave 3. En følge a_1, a_2, a_3, \dots av ikke-negative heltall er slik at a_{n+1} er siste siffer i $a_n^n + a_{n-1}$ for alle $n > 2$. Er det alltid sant at det finnes en n_0 slik at følgen $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ er periodisk?

Oppgave 4. La a, b, c, d være ikke-negative reelle tall slik at $a + b + c + d = 4$. Vis ulikheten

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Oppgave 5. La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon slik at

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

for alle reelle tall x . Bestem $f(0)$.

Oppgave 6. La n være et positivt heltall. Vis at det finnes minst $\frac{n^2}{4}$ linjer gjennom origo som går gjennom nøyaktig ett annet punkt med heltallige koordinater (x, y) der $0 \leq x, y \leq n$.

Oppgave 7. La T være mengden med 15 elementer gitt som $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. La S være en delmengde av T der alle de seks sifrene 1, 2, ..., 6 forekommer og slik at ingen tre av dens elementer sammen bruker alle sifrene.

Bestem det største mulige antall elementer i S .

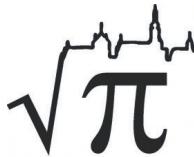
Oppgave 8. I Greifswald er det tre skoler, A , B , og C , hver av dem med minst én elev. Blant hver trippel av elever med én fra hver skole finnes det to som kjenner hverandre, og to som ikke kjenner hverandre. Vis at minst én av følgende holder:

- Det finnes en elev i A som kjenner alle elevene i B .
- Det finnes en elev i B som kjenner alle elevene i C .
- Det finnes en elev i C som kjenner alle elevene i A .

Oppgave 9. For et rutenett bestående av $m \times n$ kvadratiske ruter, kalles en fargelegging av rutene med to farger (sort og hvitt) *gyldig* hvis den tilfredsstiller følgende betingelser:

- Hver rute på kanten av rutenettet er sort.
- Intet 2×2 -kvadrat består av fire ruter av samme farge.
- Intet 2×2 -kvadrat er farget slik at kun diagonalt motsatte hjørner har samme farge.

For hvilke m og n (med $m, n \geq 3$) finnes det en gyldig fargelegging?



Oppgaver

–Norsk versjon–

Oppgave 10. To spillere spiller følgende spill med heltall. Spillet starter med tallet 2011^{2011} . Spillerne bytter på å gjøre trekk. Hvert trekk består i å enten subtrahere et heltall fra og med 1 til og med 2010, eller å dividere på 2011 og runde ned om nødvendig. Spilleren som først får et ikke-positivt tall vinner. Hvem har en vinnende strategi?

Oppgave 11. La AB og CD være to diametre i sirkelen \mathcal{C} . For et vilkårlig punkt P på \mathcal{C} , la R og S være fotpunktene til normalene fra P til henholdsvis AB og CD . Vis at lengden RS er uavhengig av P .

Oppgave 12. La P være et punkt i kvadratet $ABCD$ slik at $PA : PB : PC$ er $1 : 2 : 3$. Bestem $\angle BPA$.

Oppgave 13. La E være et indre punkt i den konvekske firkanten $ABCD$. Konstruer trekantene $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ og $\triangle DAI$ på utsiden av firkanten slik at formlikhetene $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ og $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ holder. La P , Q , R , og S være projeksjonene av E på linjene AB , BC , CD , og DA , henholdsvis. Vis at dersom firkanten $PQRS$ er syklisk, så er

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Oppgave 14. Innsirkelen til trekanten ABC tangerer sidene BC , CA og AB i henholdsvis D , E og F . La G være et punkt på innsirkelen slik at FG er en diameter. Linjene EG og FD skjærer hverandre i H . Vis at $CH \parallel AB$.

Oppgave 15. La $ABCD$ være en konveks firkant med $\angle ADB = \angle BDC$. Anta at punktet E på siden AD tilfredsstiller

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Vis at $\angle EBA = \angle DCB$.

Oppgave 16. La a være et vilkårlig heltall. Definér følgen x_0, x_1, \dots ved $x_0 = a$, $x_1 = 3$ og

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ for alle } n > 1.$$

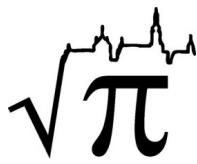
Bestem det største heltallet k_a slik at p^{k_a} deler $x_{2011} - 1$ for et primtall p .

Oppgave 17. Bestem alle positive heltall d som er slik at dersom d deler et positivt heltall n , så deler d også ethvert heltall som fås ved å stokke om sifrene i n .

Oppgave 18. Bestem alle par (p, q) av primtall som er slik at både $p^2 + q^3$ og $q^2 + p^3$ er kvadrattall.

Oppgave 19. La $p \neq 3$ være et primtall. Vis at det finnes en ikke-konstant aritmetisk følge x_1, x_2, \dots, x_p av positive heltall slik at produktet av elementene er et kubikktall.

Oppgave 20. Et heltall $n \geq 1$ kalles *balansert* dersom det har et partall antall forskjellige primfaktorer. Vis at det finnes uendelig mange positive heltall n for hvilke nøyaktig to av tallene n , $n + 1$, $n + 2$ og $n + 3$ er balansert.



Zadanie 1 Liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_{2011} spełniają warunki

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

gdzie ciąg $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ jest permutacją ciągu $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Wykazać, że $x_1 = \dots = x_{2011}$.

Zadanie 2 Niech $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnych liczb całkowitych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Wykazać, że f jest funkcją ograniczoną, tzn. istnieje taka stała C , że

$$-C < f(x) < C$$

dla wszystkich liczb całkowitych x .

Zadanie 3 Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, \dots , w którym a_{n+1} jest ostatnią cyfrą liczby $a_n^n + a_{n-1}$ dla każdego $n > 2$. Czy zawsze jest prawdą, że dla pewnego n_0 ciąg $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ jest okresowy?

Zadanie 4 Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 4$. Udowodnić nierówność

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Zadanie 5 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznaczyć $f(0)$.

Zadanie 6 Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Dowieść, że liczba prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych oraz dokładnie jeden inny punkt o współrzędnych całkowitych (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$ wynosi co najmniej $\frac{n^2}{4}$.

Zadanie 7 Przez T oznaczmy 15-elementowy zbiór $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Niech S będzie podzbiorem zbioru T , w którym występuje wszystkie sześć cyfr 1, 2, ..., 6, ale żadne trzy elementy nie używają łącznie tych sześciu cyfr. Wyznaczyć największy możliwy rozmiar zbioru S .

Zadanie 8 W Greifswaldzie są trzy szkoły A , B i C ; do każdej z nich uczęszcza przynajmniej jeden uczeń. Wśród dowolnych trzech uczniów, po jednym z każdej szkoły, pewnych dwóch się zna oraz pewnych dwóch się nie zna. Udowodnić, że zachodzi co najmniej jeden z warunków:

- Pewien uczeń z A zna wszystkich uczniów z B .
- Pewien uczeń z B zna wszystkich uczniów z C .
- Pewien uczeń z C zna wszystkich uczniów z A .

Zadanie 9 Dany jest prostokąt o wymiarach $m \times n$ podzielony na kwadraty jednostkowe. Kolorowanie tych kwadratów na biało i czarno nazywamy *poprawnym* jeśli spełnia następujące warunki:

- Wszystkie kwadraty przylegające do brzegu prostokąta są czarne.
- Żadne cztery kwadraty tworzące kwadrat 2×2 nie mają tego samego koloru.
- Żadne cztery kwadraty tworzące kwadrat 2×2 nie są pomalowane w taki sposób, że dwa kwadraty stykające się tylk rogiem mają taki sam kolor, a pozostałe dwa mają inny kolor.

Jakie prostokąty $m \times n$ (gdzie $m, n \geq 3$) posiadają poprawne kolorowanie?

Zadanie 10 Dwie osoby grają, wykonując ruchy na przemian, w następującą grę. Na początku dana jest liczba 2011^{2011} . Każdy ruch polega na odjęciu liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2010\}$ od bieżącej liczby, albo na podzieleniu bieżącej liczby przez 2011 i zaokrągleniu jej w dół do najbliższej liczby całkowitej. Gracz, który jako pierwszy otrzyma liczbę niedodatnią, wygrywa. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 11 Odcinki AB i CD są średnicami okręgu \mathcal{C} . Dla dowolnego punktu P na okręgu \mathcal{C} niech R i S będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AB i CD . Wykazać, że długość odcinka RS nie zależy od wyboru punktu P .

Zadanie 12 Punkt P leży wewnętrz kwadratu $ABCD$, przy czym stosunki $PA : PB : PC$ wynoszą $1 : 2 : 3$. Wyznaczyć miarę kąta $\angle BPA$.

Zadanie 13 Punkt E leży wewnętrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Konstruujemy takie trójkąty $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ oraz $\triangle DAI$ na zewnątrz danego czworokąta, że spełnione są podobieństwa $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ oraz $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Punkty P , Q , R i S są rzutami prostokątnymi punktu E odpowiednio na proste AB , BC , CD i DA . Dowieść, że jeśli na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, to

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Zadanie 14 Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Punkt G leży na tym okręgu, przy czym odcinek FG jest jego średnicą. Proste EG i FD przecinają się w punkcie H . Udowodnić, że $CH \parallel AB$.

Zadanie 15 W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość $\angle ADB = \angle BDC$. Na boku AD wybrano taki punkt E , że

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Wykazać, że $\angle EBA = \angle DCB$.

Zadanie 16 Dana jest liczba całkowita a . Określmy ciąg x_0, x_1, \dots wzorami: $x_0 = a$, $x_1 = 3$ oraz

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ dla wszystkich } n > 1.$$

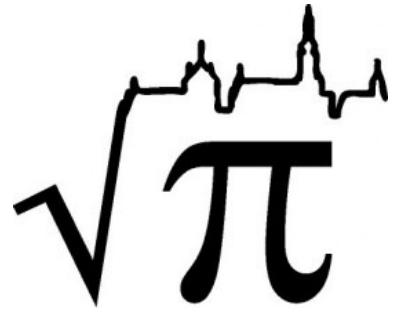
Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k_a , dla której istnieje taka liczba pierwsza p , że p^{k_a} dzieli $x_{2011} - 1$.

Zadanie 17 Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite d , że jeśli liczba d dzieli dodatnią liczbę całkowitą n , to d dzieli również dowolną liczbę całkowitą otrzymaną w wyniku przedstawienia cyfr liczby n .

Zadanie 18 Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q) , że liczby $p^2 + q^3$ i $q^2 + p^3$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 19 Dana jest liczba pierwsza $p \neq 3$. Udowodnić, że istnieje niestały ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych x_1, x_2, \dots, x_p , dla którego iloczyn wszystkich wyrazów jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 20 Liczbę całkowitą $n \geq 1$ nazywamy *zrównoważoną* jeśli ma ona parzystą liczbę różnych dzielników pierwszych. Dowieść, że istnieje nieskończoność wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że wśród liczb n , $n+1$, $n+2$ i $n+3$ są dokładnie dwie liczby zrównoważone.



Problems –English version–

Problem 1 The real numbers x_1, \dots, x_{2011} satisfy

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

where $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ is a permutation of $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$. Prove that $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Problem 2 Let $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ be a function such that, for all integers x and y , the following holds:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Show that f is bounded, i.e. that there is a constant C such that

$$-C < f(x) < C$$

for all integers x .

Problem 3 A sequence a_1, a_2, a_3, \dots of non-negative integers is such that a_{n+1} is the last digit of $a_n^n + a_{n-1}$ for all $n > 2$. Is it always true that for some n_0 the sequence $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ is periodic?

Problem 4 Let a, b, c, d be non-negative reals such that $a + b + c + d = 4$. Prove the inequality

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Problem 5 Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

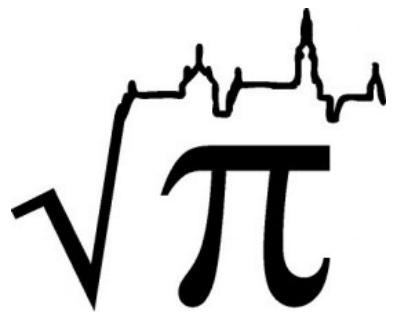
for all real numbers x . Determine $f(0)$.

Problem 6 Let n be a positive integer. Prove that the number of lines which go through the origin and precisely one other point with integer coordinates (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$, is at least $\frac{n^2}{4}$.

Problem 7 Let T denote the 15-element set $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Let S be a subset of T in which all six digits 1, 2, ..., 6 appear and in which no three elements together use all these six digits. Determine the largest possible size of S .

Problem 8 In Greifswald there are three schools called A , B and C , each of which is attended by at least one student. Among any three students, one from A , one from B and one from C , there are two knowing each other and two not knowing each other. Prove that at least one of the following holds:

- Some student from A knows all students from B .
- Some student from B knows all students from C .
- Some student from C knows all students from A .



Problems –English version–

Problem 9 Given a rectangular grid, split into $m \times n$ squares, a colouring of the squares in two colours (black and white) is called *valid* if it satisfies the following conditions:

- All squares touching the border of the grid are coloured black.
- No four squares forming a 2×2 -square are coloured in the same colour.
- No four squares forming a 2×2 -square are coloured in such a way that only diagonally touching squares have the same colour.

Which grid sizes $m \times n$ (with $m, n \geq 3$) have a valid colouring?

Problem 10 Two persons play the following game with integers. The initial number is 2011^{2011} .

The players move in turns. Each move consists of subtraction of an integer between 1 and 2010 inclusive, or division by 2011, rounding down to the closest integer when necessary. The player who first obtains a non-positive integer wins. Which player has a winning strategy?

Problem 11 Let AB and CD be two diameters of the circle \mathcal{C} . For an arbitrary point P on \mathcal{C} , let R and S be the feet of the perpendiculars from P to AB and CD , respectively. Show that the length of RS is independent of the choice of P .

Problem 12 Let P be a point inside a square $ABCD$ such that $PA : PB : PC$ is $1 : 2 : 3$. Determine the angle $\angle BPA$.

Problem 13 Let E be an interior point of the convex quadrilateral $ABCD$. Construct triangles $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ and $\triangle DAI$ on the outside of the quadrilateral such that the similarities $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ and $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ hold. Let P , Q , R and S be the projections of E on the lines AB , BC , CD and DA , respectively. Prove that if the quadrilateral $PQRS$ is cyclic, then

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Problem 14 The incircle of a triangle ABC touches the sides BC , CA , AB at D , E , F , respectively.

Let G be a point on the incircle such that FG is a diameter. The lines EG and FD intersect at H . Prove that $CH \parallel AB$.

Problem 15 Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that $\angle ADB = \angle BDC$. Suppose that a point E on the side AD satisfies the equality

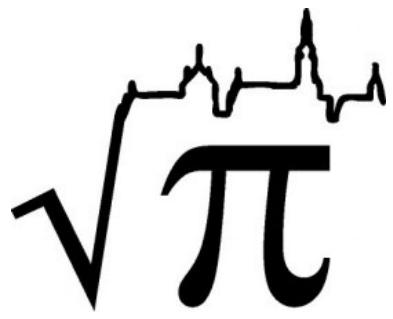
$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Show that $\angle EBA = \angle DCB$.

Problem 16 Let a be any integer. Define the sequence x_0, x_1, \dots by $x_0 = a$, $x_1 = 3$ and

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ for all } n > 1.$$

Determine the largest integer k_a for which there exists a prime p such that p^{k_a} divides $x_{2011} - 1$.



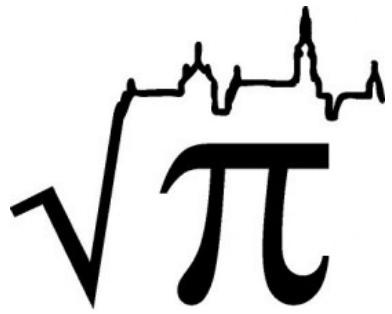
Problems –English version–

Problem 17 Determine all positive integers d such that whenever d divides a positive integer n , d will also divide any integer obtained by rearranging the digits of n .

Problem 18 Determine all pairs (p, q) of primes for which both $p^2 + q^3$ and $q^2 + p^3$ are perfect squares.

Problem 19 Let $p \neq 3$ be a prime number. Show that there is a non-constant arithmetic sequence of positive integers x_1, x_2, \dots, x_p such that the product of the terms of the sequence is a cube.

Problem 20 An integer $n \geq 1$ is called *balanced* if it has an even number of distinct prime divisors. Prove that there exist infinitely many positive integers n such that there are exactly two balanced numbers among $n, n + 1, n + 2$ and $n + 3$.



Problem –Svensk version–

Problem 1 De reella talen x_1, \dots, x_{2011} uppfyller

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

där $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ är talen $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ tagna i en annan ordning. Bevisa att $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

Problem 2 För alla heltal x och y , uppfyller funktionen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Visa att f är begränsad, det vill säga, att det för någon konstant C gäller att

$$-C < f(x) < C$$

för alla heltal x .

Problem 3 En följd a_1, a_2, a_3, \dots av naturliga tal definieras av att a_{n+1} är sista siffran av $a_n^n + a_{n-1}$ för alla $n > 2$. Gäller det alltid, att talföljden $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ är periodisk för något n_0 ?

Problem 4 Låt a, b, c, d vara icke-negativa reella tal, sådana att $a + b + c + d = 4$. Bevisa olikheten

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

Problem 5 Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion med egenskapen att

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

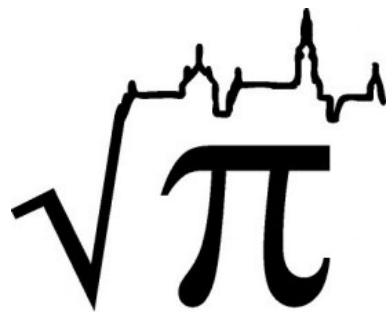
för alla reella tal x . Bestäm $f(0)$.

Problem 6 Låt n vara ett positivt heltal. Bevisa att åtminstone $\frac{n^2}{4}$ linjer passerar genom origo och precis en annan punkt med heltalskoordinater (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$.

Problem 7 Låt T beteckna mängden $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$ med 15 element. Låt S vara en delmängd av T , i vilken alla sex siffrorna $1, 2, \dots, 6$ förekommer, men varav tre element aldrig använder samtliga dessa sex siffror. Bestäm den största möjliga storleken på S .

Problem 8 I Greifswald finns tre skolor A , B och C , med vardera minst en elev. Bland vilka tre elever som helst, en från A , en från B och en från C , så finns det ett par som känner varandra och ett par som inte känner varandra. Bevisa att minst ett av följande påståenden är sant:

- Någon elev från A känner alla elever från B .
- Någon elev från B känner alla elever från C .
- Någon elev från C känner alla elever från A .



Problem –Svensk version–

Problem 9 Ett rektangulärt rutnät innehåller $m \times n$ rutor. En färgning av rutorna i två färger (svart och vitt) kallas *giltig* om den uppfyller följande villkor:

- Alla rutor som vidrör rutnätets kant är svarta.
- Fyra rutor i form av en 2×2 -kvadrat är aldrig i samma färg.
- Fyra rutor i form av en 2×2 -kvadrat färgas aldrig så, att enbart diagonalt motsatta rutor har samma färg.

Vilka storlekar $m \times n$ (där $m, n \geq 3$) på rutnätet medger en giltig färgning?

Problem 10 Två personer spelar följande spel med heltal. Starttalet är 2011^{2011} . Spelarna turas om med sina drag. Ett drag består antingen av subtraktion av ett heltal mellan 1 and 2010 (inklusive), eller av division med 2011, varvid avrundning sker nedåt till närmsta heltal. Spelaren som först skapar ett icke-positivt heltal vinner. Vilken spelare har en vinnande strategi?

Problem 11 Låt AB och CD vara två diametrar i cirkeln \mathcal{C} . Från en godtycklig punkt P på \mathcal{C} , drag normalerna till AB och CD , och låt R respektive S vara deras fotpunkter. Visa att längden av RS är oberoende av P .

Problem 12 Låt P vara en punkt inuti kvadraten $ABCD$ med den egenskapen, att förhållandet $PA : PB : PC$ är $1 : 2 : 3$. Beräkna vinkeln $\angle BPA$.

Problem 13 Låt E vara en punkt inuti den konvexa fyrhörningen $ABCD$. Konstruera trianglar $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ och $\triangle DAI$ utanför fyrhörningen på ett sådant vis, att likformighetsrelationerna $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ och $\triangle DAI \sim \triangle CBE$ blir uppfyllda. Låt P , Q , R och S vara projektionerna av E på linjerna AB , BC , CD respektive DA . Om dessutom fyrhörningen $PQRS$ är cyklisk, bevisa att

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Problem 14 Den inskrivna cirkeln till triangeln ABC tangerar sidorna BC , CA och AB i D , E respektive F . Låt G vara en punkt sådan att FG är en diameter i den inskrivna cirkeln. Linjerna EG och FD skär varandra i punkten H . Bevisa att $CH \parallel AB$.

Problem 15 Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning sådan att $\angle ADB = \angle BDC$. Antag att punkten E på sidan AD uppfyller likheten

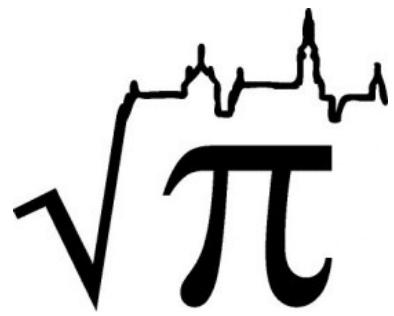
$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Visa att $\angle EBA = \angle DCB$.

Problem 16 Låt a vara ett godtyckligt heltal. Definiera talföljden x_0, x_1, \dots genom $x_0 = a$, $x_1 = 3$ och

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ för alla } n > 1.$$

Bestäm det största heltalet k_a , för vilket det existerar ett primtal p , sådant att p^{k_a} delar $x_{2011} - 1$.



Problem –Svensk version–

Problem 17 Bestäm alla positiva heltal d sådana att, närmelst d delar ett positivt heltal n , så kommer d också att dela varje heltal, som kan fås om siffrorna i n skrivs i en annan ordning.

Problem 18 Bestäm alla par (p, q) av primtal, sådana att $p^2 + q^3$ och $q^2 + p^3$ bågge är kvadrattal.

Problem 19 Låt p vara ett primtal skilt från 3. Visa att det finns en icke-konstant aritmetisk följd av positiva heltal x_1, x_2, \dots, x_p , sådan att produkten av elementen är ett kubiktal.

Problem 20 Ett heltal $n \geq 1$ kallas *balanserat*, om det har ett jämnt antal olika primtalsfaktorer. Bevisa att det finns oändligt många positiva heltal n , sådana att det finns exakt två balanserade tal bland talen $n, n + 1, n + 2$ och $n + 3$.