Master Informatique

Épistémologie de l'Informatique

L'équation de 3éme et 4éme degré

Par

Mechatte El Manafi Nabil

Sujet proposé par

Richard Terrat

Novembre 2007

-Historique

- Equation de 3éme degré
  - Antiquité
  - Mathématiciens Persans
  - Renaissance
    - Les mathématiciens de la renaissance Italienne
      - Scipione Del Ferro (1465-1526)
      - Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557)
      - Jérôme Cardan (1501-1576)
      - Raphaël Bombelli (1526-1572)
    - Les mathématiciens de la renaissance Française
- Equation de 4éme degré
  - Ferrari Lodovico (1522-1565)
  - Descartes (1596-1650)

-Résolution

- -Les Grecs
  - -Les Perses
- -3éme degré
  - La méthode Analytique
  - La méthode Algébrique (Démonstration, Discussion et Application)
  - Selon Viète
  - Del Ferro
- -4éme degré
  - La méthode Analytique
  - La méthode Algébrique (Démonstration, Discussion et Application)
  - Selon Ferrari
  - Méthode de Sotta
- Conclusion

- Equation de 3éme degré
  - Antiquité

Les **équations cubiques** se posaient chez les Grecs vers 300 av. J.-C. Ils les auraient résolues géométriquement, par intersection de coniques (ellipses, paraboles et hyperboles). Le plus ancien des problèmes du 3ème degré remonterait à Ménechme (vers 380 à 320 av. J.-C.) qui, pour obtenir $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{x^3=a^2b}$, se ramène à l'intersection de $\mathbf{x^2=ay}$ (parabole) et de $\mathbf{xy=ab}$ (hyperbole).

Archimède (Syracuse, 287 à 212 av. J.-C.) avait cherché à couper une sphère de rayon $\mathbf{r}$ par un plan de façon que le rapport des volumes des 2 parties ait une valeur donné $\mathbf{k}$. Cela donne une équation du 3ème degré. Si $\mathbf{h}$ est la hauteur d'une des parties, $\mathbf{h}$ vérifie : $\mathbf{(h^3+4kr^3)/(k+1)=3rh^2}$.

- Mathématiciens Persans

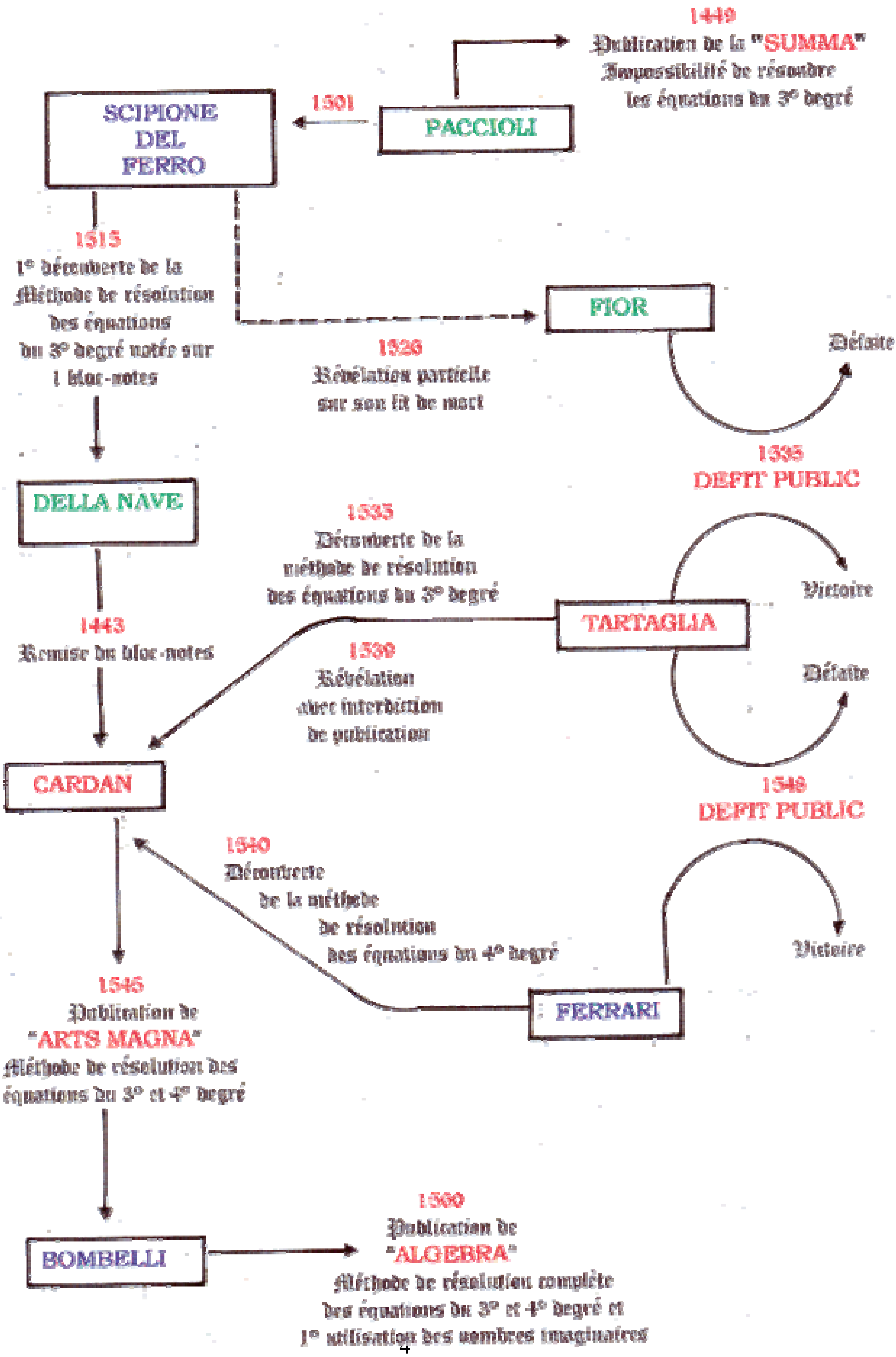
Puis c'est Omar Khayyam (1048 - 1131), originaire de Perse, qui, dans son traité d'algèbre, *Démonstrations de problèmes d'algèbre* (vers 1070), étudie les équations cubiques à coefficients strictement positifs. À l'instar des Grecs, il utilise la géométrie. Il démontre que les équations cubiques peuvent avoir plus d'une racine.

Il fait état aussi d'équations ayant deux solutions, mais n'en trouve pas à trois solutions. C'est le premier mathématicien qui ait traité systématiquement des équations cubiques, en employant d'ailleurs des tracés de coniques pour déterminer le nombre des racines réelles et les évaluer approximativement. Par exemple, pour $\mathbf{x^3+ax=b}$, il pose $\mathbf{a=c^2}$, $\mathbf{b=c^2h}$ et obtient la solution comme intersection de la parabole $\mathbf{y=x^2/c}$ et du cercle $\mathbf{y^2=x(h-x)}$.

Sharaf ad Din at Tusi (1135 - 1213) classe un siècle plus tard les équations cubiques suivant l'existence de racines strictement positives et non pas comme Omar Khayyam qui suivait le signe des coefficients. Il résout les problèmes liés à l'homogénéité de dimension : le nombre $\mathbf{x}$ s'identifie aussi bien à une longueur qu'à une surface rectangulaire de côté $\mathbf{1}$ et $\mathbf{x}$ ou encore à un volume $\mathbf{(1,1,x)}$. Il inaugure en outre l'étude des polynômes, introduisant leur dérivée, recherchant leur maximum, etc.

- Les mathématiciens de la renaissance Italienne

Voici le schéma récapitulatif des principaux événements :


1449
Publication de la "SUMMA"
Impossibilité de résoudre
les équations du 3° degré
1501
PACCIOLI
SCIPIONE
DEL
FERRO
1515
1° découverte de la
Méthode de résolution
des équations
du 3° degré notée sur
1 bloc-notes
FIOR
1526
Révélation partielle
sur son lit de mort
Défaite
1535
DEFIT PUBLIC
DELLA NAVE
1535
Découverte de la
méthode de résolution
des équations du 3° degré
TARTAGLIA
Victoire
1443
Remise du bloc-notes
1539
Révélation
avec interdiction
de publication
Défaite
1548
DEFIT PUBLIC
CARDAN
1540
Découverte
de la méthode
de résolution
des équations du 4° degré
Victoire
FERRARI
1545
Publication de
"ARTS MAGNA"
Méthode de résolution des
équations du 3° et 4° degré
BOMBELLI
1560
Publication de
"ALGEBRA"
Méthode de résolution complète
des équations du 3° et 4° degré et
1° utilisation des nombres imaginaires

Vers **1 450**, l'invention de l'imprimerie par Gütemberg fit faire un pas de géant à la propagation des idées...

Paccioli Luca

En 1 494, le moine franciscain Paccioli a imprimé le premier livre d'algèbre intitulé la "Summa". Il y reprit tous les travaux des Arabes. On y retrouve donc la résolution complète des équations du premier et deuxième degré. Il pensait que les équations du 3° degré étaient insolubles par la méthode algébrique.

De 1 501 à 1 502, il enseigna les mathématiques à l'université de Bologne. Il y rencontra un autre professeur de mathématique : Scipione del Ferro. Il lui fit part de sa conviction sur l'insolubilité des équations du 3° degré. C'est alors que Scipione s'intéressa au problème.

Scipione del Ferro

En 1 515, après le départ de Paccioli de la faculté de Bologne, Scipione découvrit enfin la méthode algébrique de résolution des équations du 3° degré. Plutôt que la publier, il la nota sur son bloc-notes.

En 1 526, C'est son gendre, Hannibal Nave (lui aussi professeur de mathématique), qui hérita du bloc-notes à la mort de Scipione. Sur son lit de mort, il ne confia à son étudiant Fior, qu'une partie de la méthode. Dès lors Fior commença à se vanter qu'il était capable de résoudre toutes les équations du 3° degré et lança des défis aux mathématiciens.

Fontana Niccolo dit Tartaglia

En 1 535, Tartaglia releva le défi algébrique et une sorte de duel s'engagea entre les deux hommes. Chacun déposa une liste de 30 problèmes chez un notaire ainsi qu'une somme d'argent. Celui qui, dans les 40 jours, aurait résolu le plus de problèmes serait désigné vainqueur et remporterait la somme. Tartaglia découvrit à son tour la méthode et résolut les 30 équations alors que Fior n'en résolut que 10.

Comme Tartaglia avait résolu le plus de problème, il fût reconnu comme l'inventeur de la formule de résolution des équations du 3° degré. Cette méthode de résolution resta secrète car Tartaglia ne la publia pas.

Cardan Girolamo

En tant que conférencier de mathématique à la fondation Piatti de Milan, Cardan connaissait le problème. Avant le défit Fior-Tartaglia, il était d'accord avec la "Summa" de Paccioli qui déclarait que la résolution algébrique des équations du 3° degré était impossible.

Très intrigué après le défi, il essaya de découvrir seul la méthode mais en vain. Il contacta Tartaglia et lui demanda de lui confier sa méthode en lui promettant de garder le secret. Tartaglia refusa.

En colère, Cardan écrivit de nouveau à Tartaglia lui exprimant sa profonde amertume et lui proposa de le présenter au marquis del Vasto un des plus puissants mécènes après l'empereur de Milan s'il acceptait de lui révéler sa méthode.

Après réception de la lettre, Tartaglia révisa sa position, réalisant que l'appui du gouvernement milanais pouvait être une aide non négligeable à son ascension sociale.

Il répondit amicalement à Cardan lui suggérant d'organiser une entrevue avec le marquis lors de sa prochaine visite à Milan.

En 1 539, Tartaglia quitta Venise pour Milan. A son grand désespoir, l'empereur ainsi que le marquis del Vasto s'étaient absentés. Tartaglia donna son accord pour révéler sa méthode à Cardan à condition qu'il jure de ne jamais la divulguer. Cardan jura et Tartaglia lui révéla sa méthode sous forme de poème pour aider à protéger le secret.

En contre-partie il obtint de Cardan une lettre de recommandation auprès du marquis. N'osant pas se présenter seul, il retourna frustré à Venise se demandant s'il n'avait pas eu tort de dévoiler son secret.

En 1 540, grâce à la formule de Tartaglia, Ferrari l'assistant de Cardan découvre la méthode générale de résolution des équations du 4° degré.

En 1 543, Cardan et Ferrari se rendirent à Bologne et apprirent de Hannibal della Nave que Scipione del Ferro avait résolu bien avant Tartaglia les équations de degré 3. Pour le leur prouver, il leur confia le bloc-notes du feu Del Ferro. Cardan pensa que bien qu'il ait juré de ne jamais révéler la méthode de Tartaglia, personne ne l'empêcherait de publier celle de Del Ferro.

En 1 545, Cardan publia "Arts Magna" bien connu pour contenir la démonstration de la méthode algébrique permettant de résoudre les équations du 3° et 4° degré. Depuis lors, la formule de résolution des équations du 3° degré s'appelle formule de Cardan!!!

Tartaglia fut furieux quand il découvrit que Cardan avait transgressé sa promesse.

En 1 546, Tartaglia publia un livre "Nouveaux problèmes et inventions" dans lequel il révélait sa version de l'histoire et sans cacher le parjure de Cardan. Grâce à son "Arts Magna", Cardan était devenu intouchable.

En 1 548, Tartaglia reçut une importante proposition de conférencier à Brescia, sa ville natale. Afin d'établir ses aptitudes pour ce poste, Tartaglia fut invité à Milan pour un face à face avec Ferrari son concurrent. Le 10 août, le défi eut lieu dans l'église des frères Zoccolanti sous les yeux des célébrités milanaises dont l'empereur. Malgré son inexpérience en public, Ferrari fit une meilleure prestation que Tartaglia qui déclara forfait.

-Bombelli Rafaello

En 1 560, Bombelli reprit du vivant de Cardan dans son "Algebra", les travaux de ce dernier. Il remarqua que lorsque la formule de Cardan aboutissait à un discriminant négatif, la méthode géométrique donnait une solution réelle positive. Il sera le premier à utiliser dans ses calculs, à titre transitoire, des racines carrées imaginaires de nombres négatifs pour obtenir finalement la solution réelle tant recherchée. C'est sa résolution des équations du 3° degré qui a été le point de départ de la construction du corps des nombres complexes. Il arriva à la conclusion que toute équation du 3° degré possédait au moins une solution réelle.

- Les mathématiciens de la renaissance Française

François Viète

Dans un important traité, publié en **1579**, il affirmait pouvoir ramener les problèmes de son époque à la résolution d'équations et émet, à juste titre, la conjoncture selon laquelle la trisection de l'angle est liée l'équation du 3° degré qu'il résolut à sa manière.

Il sera le premier à remarquer les relations, dites de Viète, existant entre les solutions et les coefficients d'une équation algébrique (fonctions symétriques des racines).

- Equation de 4éme degré

Ferrari Lodovico

Ce brillant élève de Cardan rédigea pour son maître la résolution des équations du 4° degré par l'intermédiaire d'une équation auxiliaire de degré 3, dite équation résolvante. Cardan la publia dans son "**Arts Magna**" en **1545** en précisant qu'elle avait été découverte par son élève.

Descartes René

En **1637**, en annexe de son "**Discours sur la méthode**", il publiait son algèbre dans lequel figura une autre méthode de résolution des équations du 4° degré par coefficients indéterminés.

-Résolution

-Les Grecs

Ils utilisaient une méthode géométrique (intersection de deux coniques) pour résoudre les équations du 3° degré.

Ils arrivèrent à la conclusion que les solutions des équations du 3° degré sont les points d'intersection d'une parabole avec une hyperbole.

Les Perses

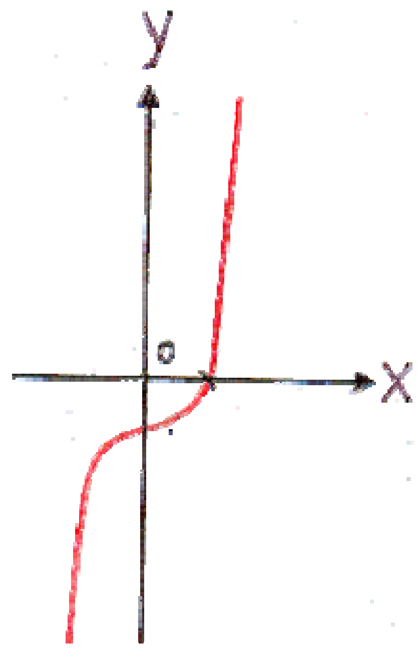
Omar Al Khayyam tenta de résoudre les équations du 3° degré par décomposition et recomposition de cubes; mais ce qui avait été possible deux siècle plus tôt dans le plan avec les équations du 2° degré s'avérait impossible dans l'espace. Devant cette impasse algébrique, il utilisa une autre méthode géométrique pour résoudre les problèmes du 3° degré.

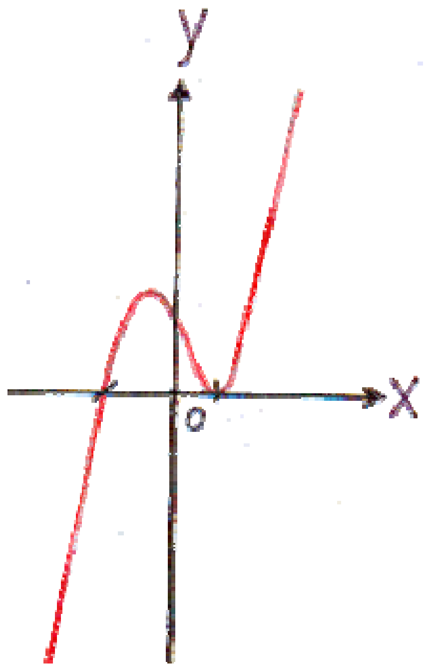
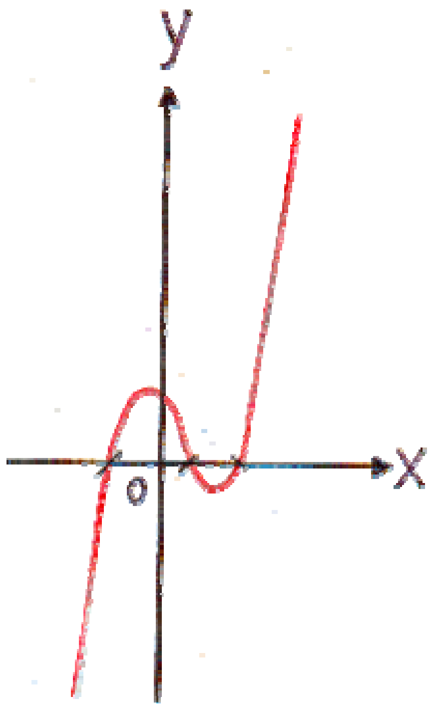
-3éme degré

- La méthode Analytique

On étudie les variations de la fonction h(x), puis combien de fois sa courbe représentative coupe l'axe Ox ;

$$\mathbf{h(x)= ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

	1 solution réelle

	2 solutions réelles
	3 solutions réelles

- La méthode Algébrique (Démonstration, Discussion Application)

- Equations du 3° degré

<u>Démonstration</u>

Soit l'équation (1):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \times \frac{1}{a}$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

On pose :

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

$$\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

On sait que :**$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$**

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$$z^3 - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{3b}{3a}z^2 + \frac{3b^2}{9a^2}z + \frac{b}{a}z^2 - \frac{2b^2}{3a^2}z + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}z - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$z^3 + \left(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)z + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} - \frac{b}{27a^3} + \frac{d}{a} = 0$$

On pose :

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

L'équation (1) revient à :

$z^3 + pz + q = 0$ équation (2)

Si on pose **$z = u + v$** on a alors **:**

$z^3 = - pz - q = (3uv)(u + v) + u^3 + v^3$

On arrive au système :

$$\begin{cases} 3\,uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \qquad \begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

D'après le théorème des fonctions symétriques des racines, **u** et **v** sont solutions de l'équation :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4\,p^3}{27}$$

Finalement on aura :

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

On aboutit à la formule dite de Cardan :

$$z = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

L'équation (2) admettra donc 3 solutions suivant les valeurs de **u** et **v**. Il en découle les 3 solutions de l'équation (1) en se rappelant que :

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

Discussion

$\underline{1° \text{ Cas :}}$ $q^2 + \frac{4p}{27} > 0$

L'équation (2) admet une solution réelle :

$\mathbf{z_1 = u + v}$

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Elle admet aussi deux solutions imaginaires :

$$z_2 = ju + j_2 v \quad \text{aber} \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = j_2 u + jv$$

$$\underline{2^o \text{ Cas :}} \quad q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 \iff q^2 = -\frac{4p^3}{27}$$

Dans ce cas $\mathbf{u}^3 = \mathbf{v}^3$

L'équation (2) admet une solution réelle :

$$z_1 = 2u = 2v = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

Elle admet aussi une solution réelle double :

$$\begin{aligned} z_2 = z_3 &= ju + j_2 u \\ &= u(j + j_2) \\ &= -u \\ &= -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} \end{aligned}$$

<u>3° Cas :</u> $q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$

Le discriminant sera négatif

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(-1) - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(-1) - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Les nombres **u** et **v** sont des complexes conjugués. Leur somme sera donc réelle. L'équation (2) admet 3 solutions réelles :

$$\mathbf{z_1 = u + v}$$

$$\mathbf{z_2 = ju + j_2v}$$

$$\mathbf{z_3 = j_2u + jv}$$

<u>Applications</u>

<u>**1°Cas :**</u> 1 solution réelle

$\mathbf{x^3 + 6x = 20}$

Si on pose **x = u + v** on a alors :

$\mathbf{x^3 = -6x + 20 = (3uv)(u + v) + u^3 + v^3}$

On arrive au système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 20 \\ 3uv = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3 + v^3 = 20 \\ uv = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3 + v^3 = 20 \\ u^3 v^3 = -8 \end{cases}$$

$\mathbf{u^3}$ et $\mathbf{v^3}$ sont solutions de l'équation : $\mathbf{X^2 - 20X - 8 = 0}$

Le discriminant est :

$$\Delta = 400 - 4\,(-8) = 400 + 32 = 432$$

Finalement, on aura :

$$u^3 = \frac{2(10) - 2(6\sqrt{3})}{2} = 10 - 6\sqrt{3} \iff u = \sqrt[3]{u^3} = 1 + \sqrt{}$$

$$v^3 = \frac{2(10) + 2(6\sqrt{3})}{2} = 10 + 6\sqrt{3} \iff v = \sqrt[3]{v^3} = 1 - \sqrt{}$$

L'équation admet une solution réelle :

$$x_1 = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = +2$$

Elle admet aussi deux solutions imaginaires :

$$x_2 = ju + j^2v = (1+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} - \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{2}i$$

$$= -1 + 3i$$

$$x_3 = j^2u + jv = (1+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} + \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2}i$$

$$= -1 - 3i$$

<u>Conclusion :</u>

1 solution réelle : $\mathbf{x_1 = +2}$

2 solutions complexes :

$\mathbf{x_2 = -1 - i}$

$\mathbf{x_3 = -1 - i}$

<u>2°Cas :</u> 2 solutions réelles

$\mathbf{x^3 - 3x + 2 = 0}$

Si on pose $\mathbf{x = u + v}$ on a alors :

$\mathbf{x^3 = 3x - 2 = (3uv)(u + v) + u^3 + v^3}$

On arrive donc au système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -2 \\ 3uv \quad = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -2 \\ uv \quad = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3 + v^3 = -2 \\ u^3 \ v^3 \quad = 1 \end{cases}$$

u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $\mathbf{X^2 + 2X + 1 = 0}$

Le discriminant est nul

$$\Delta = 0$$

Finalement, on aura :

$$u^3 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt[3]{u^3} = -1$$

$$v^3 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt[3]{v^3} = -1$$

L'équation admet une solution réelle :

$$x_1 = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3} = -1 - 1 = -2$$

Elle admet aussi une solution réelle double :

$$x_2 = x_3 = ju + j^2v = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)$$

$$= \frac{1}{2} - i\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} + i\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= +1$$

<u>Conclusion :</u>

1 solution réelle simple : $\mathbf{x_1 = -2}$

1 solutions réelle double : $\mathbf{x_2 = x_3 = +1}$

3°Cas : 3 solutions réelles

$\mathbf{x^3 - 7x + 6 = 0}$

Si on pose $\mathbf{x = u + v}$ on a alors :

$\mathbf{x^3 = 7x - 6 = (3uv)(u + v) + u^3 + v^3}$

On arrive au système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -6 \\ 3uv = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -6 \\ uv = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -6 \\ u^3 \; v^3 = \frac{343}{27} \end{cases}$$

$\mathbf{u^3}$ et $\mathbf{v^3}$ sont solutions de l'équation :

$$X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 4\left(\frac{343}{27}\right) = \frac{36 \times 27 - 1372}{27} = \frac{972 - 1372}{27} = -\frac{400}{27}$$

Finalement, on aura :

$$u^3 = \frac{-2(3) + 2\left(\frac{10}{3}\right)\frac{\sqrt{-3}}{3}}{2} = -\,\frac{3 + 10\sqrt{-3}}{9} = -\,\frac{3 + 10\,i\sqrt{3}}{9}$$

$$v^3 = \frac{-2(3) - 2\left(\frac{10}{3}\right)\frac{\sqrt{-3}}{3}}{2} = -\,\frac{3 - 10\sqrt{-3}}{9} = -\,\frac{3 + 10\,i\sqrt{3}}{9}$$

L'équation admet 3 solutions réelles :

$$x_1 = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3} = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6} = -3$$

$$x_2 = ju + j^2v = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \cancel{\frac{i3\sqrt{3}}{4}} - \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{12}} - \frac{3}{12} + \frac{3}{4} + \cancel{\frac{i3\sqrt{3}}{4}} + \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{12}} - \frac{3}{12}$$

$$= +2$$

$$x_3 = j^2u + jv = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \cancel{\frac{i3\sqrt{3}}{4}} - \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{12}} + \frac{3}{12} + \frac{3}{4} - \cancel{\frac{i3\sqrt{3}}{4}} + \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{12}} + \frac{3}{12}$$

$$= +1$$

Conclusion :

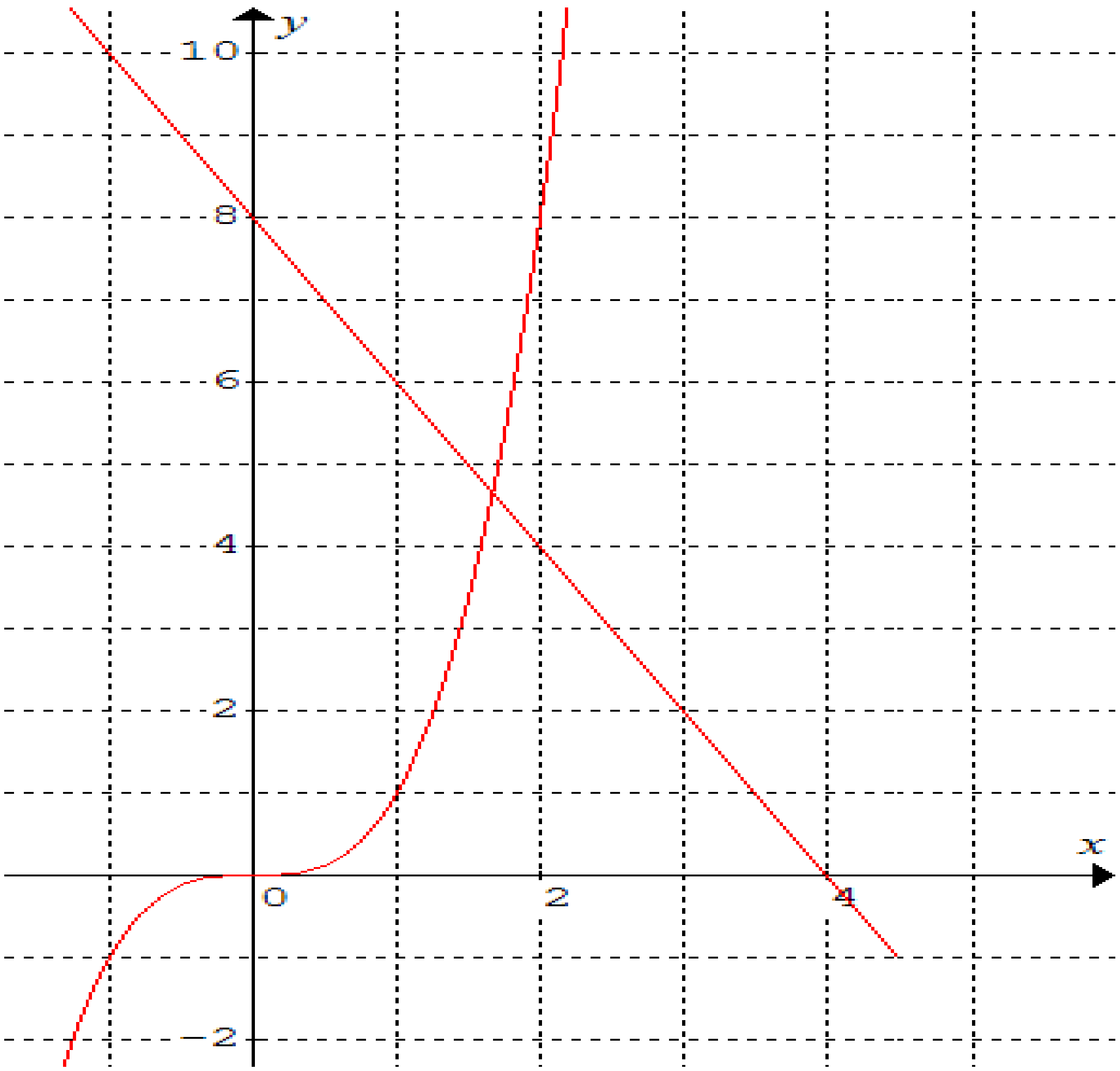
3 solutions réelles :

$\mathbf{x_1 = -3}$

$\mathbf{x_2 = +2}$

$\mathbf{x_3 = +1}$

Selon Viéte :



-

François Viète résolut les équations du troisième degré de la forme $x^3 + ax = b$ où a et b sont des nombres positifs.

Les solutions cherchées sont positives. D'ailleurs, eu égard à la positivité de a et b, comme on le constate à gauche dans le cas a = 2 et b = -8, il n'existe, pour ce type d'équation, qu'une seule solution positive : on a $x^3 = - ax + b$: la cubique $y = x^3$ rencontre la droite $y = -ax + b$ en un unique point d'abscisse positive.

En posant :

$$x = \frac{a}{3X} - X$$

l'équation se ramène à :

$$X^6 + bX^3 - a^3/27 = 0$$

Posons $Y = X^3$. On se ramène à l'équation du second degré en Y :

$$Y^2 + bY - a^3/27= 0$$

Le discriminant est $\Delta = b^2 + 4a^3/27 > 0$. Le produit des racines $-a^3/27$ étant négatif, une des deux racines en Y est négative, on la rejette car elle exprimerait une solution X négative qu'on se refuse d'admettre à cette époque. La valeur positive de Y fournit X^3, donc X et enfin x.

Remarque : en évinçant la racine négative parmi les deux valeurs de X, ne risque-t-on pas de "passer à côté" de notre solution x cherchée ? Autrement dit, cette racine négative peut-elle fournir *la* solution ?

On trouve en fait la même valeur ! en effet, la résolution proposée montre que Y'Y" = -a^3/27, donc X'X" = -a/3, c'est à dire tout aussi bien X" = -a/3X' que X' = -a/3X". Par suite si x = a/3X' - X', on a : x = -X" - (-a/3X") = a/3X" - X".

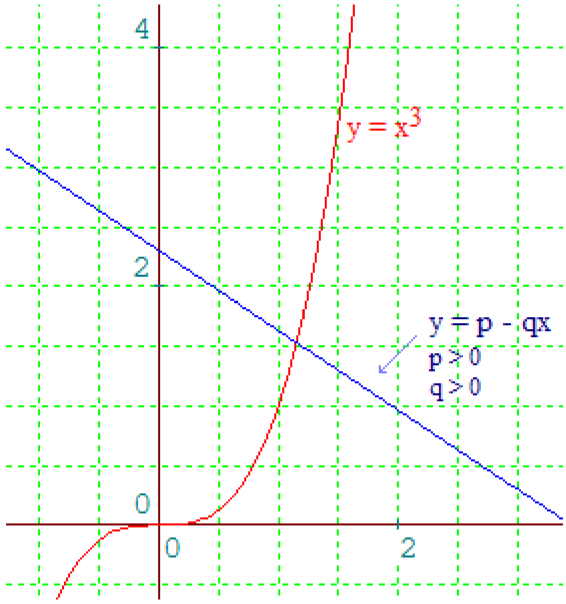
-Selon Del Ferro

Mathématicien à Bologne, il fut le premier algébriste de la Renaissance à s'intéresser à une méthode fournissant la solution, sous forme de radicaux, de la racine réelle de l'équation du troisième degré. La découverte de cette formule est un immense événement dans l'histoire des équations (les premières recherches remontent à l'Antiquité) faisant preuve d'une grande maîtrise en calcul algébrique : il ne faut pas oublier que les écritures algébriques de l'époque sont encore très "lourdes". Des raffinements notables dans l'écriture apparaîtront avec Bombelli et principalement Descartes.

Les travaux de del Ferro portent essentiellement sur l'équation de la forme $x^3 + px = q$ où p et q sont des entiers naturels. Ses résultats seront repris et ses calculs améliorés par Tartaglia, puis Cardan, Ferrari et Bombelli. Lorsque l'équation est donnée sous la forme précédente, la solution de l'équation est donnée par la formule dite de Cardan :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Il s'agit dans ce cas du calcul de l'unique solution de l'équation $x^3 + px = q$. Une interprétation graphique montre immédiatement que si p et q sont positifs, la cubique x^3 rencontre la droite d'équation $y = q - px$ en un unique point d'abscisse positive.



- **Méthode de Sotta** :

La **méthode de Sotta**, imaginée et mise au point par Bernard Sotta, permet de résoudre toutes les équations du troisième degré et peut se généraliser à certaines équations de degré supérieur ou égal à 4 si les coefficients de ces équations vérifient certaines conditions.

Ces équations fournissent des exemples d'équations qui, bien qu'ayant un degré supérieur ou égal à 5, ont un groupe de Galois résoluble. Nous savons en effet que les équations de degré supérieur ou égal à 5 n'ont pas forcément un groupe de Galois résoluble. Ce qui permet d'affirmer qu'il n'existe pas de méthode générale pour les résoudre.

- Principe de la méthode:

Dans tout cet article n est un nombre entier représentant le degré de l'équation à résoudre.

Toutes les autres lettres représentent des nombres complexes.

Par convention $\sqrt[n]{a}$ désigne n'importe laquelle des n racines $n^{\text{ème}}$ de a, il en est de même de $\sqrt[n]{f}$

Considérons une équation de degré n avec n > 2 :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Nous appellerons équation résolvante de Sotta associée à l'équation précédente, l'équation du second degré suivante :

$$(n-1)(n-2)[2na_na_{n-2}-(n-1)a_{n-1}^2]X^2+2(n-1)[3na_na_{n-3}-(n-2)a_{n-1}a_{n-2}]X+6(n$$

Nous avons alors le théorème suivant (théorème de Sotta) :

Si l'équation :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

admet des racines sous la forme :

$$\frac{b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{f}}{d\sqrt[n]{a} + e\sqrt[n]{f}}$$

(d et e non nul).

alors $\frac{b}{d}$ et $\frac{c}{e}$ sont les deux racines de l'équation résolvante.

a et f sont alors donné par les deux relations :

- $f = (-1)^n \dfrac{da_{n-1} + nba_n}{ne^{n-1}(dc - be)}$
- $a = \dfrac{a_n + (-1)^n f e^n}{d^n}$

Les n racines de l'équation proposée seront alors :

$x_k = \dfrac{be^{\frac{2ki\pi}{n}}\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{f}}{de^{\frac{2ki\pi}{n}}\sqrt[n]{a} + e\sqrt[n]{f}}$ avec k prenant successivement toutes les valeurs entières de 0 à n-1

- Application à la résolution des équations de degré 3 :

Toutes les équations de degré 3 admettent des racines sous la forme :

$$\frac{b\sqrt[3]{a} + c\sqrt[3]{f}}{d\sqrt[3]{a} + e\sqrt[3]{f}}$$

par conséquent, la méthode de Sotta permet de résoudre toutes les équations de degré 3.

Soit donc l'équation suivante :

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Premier cas : Si $(3a_3a_1 - a_2^2) \neq 0$ et $(3a_0a_2 - a_1^2) \neq 0$ (condition pour que la résolvante soit du second degré avec des racines non nulles).

La résolvante de Sotta associée sera :

$(3a_3a_1 - a_2^2)X^2 + (9a_3a_0 - a_2a_1)X + 3a_2a_0 - a_1^2 = 0$

Il suffit donc de choisir b, c, d, e tel que $\frac{b}{d}$ et $\frac{c}{e}$ soit les racines de la résolvante. On calcule ensuite a et f à l'aide des formules :

- $f = \dfrac{da_2 + 3ba_3}{3e^2(be - dc)}$
- $a = \dfrac{a_3 - fe^3}{d^3}$

Les trois racines de l'équation à résoudre seront alors :

$$x_1 = \frac{b\sqrt[3]{a} + c\sqrt[3]{f}}{d\sqrt[3]{a} + e\sqrt[3]{f}}$$

$$x_2 = \frac{bj\sqrt[3]{a} + c\sqrt[3]{f}}{dj\sqrt[3]{a} + e\sqrt[3]{f}}$$

$$x_3 = \frac{bj^2\sqrt[3]{a} + c\sqrt[3]{f}}{dj^2\sqrt[3]{a} + e\sqrt[3]{f}}$$

Deuxième cas : Si $(3a_3a_1 - a_2^2) = 0$ (On est dans le cas: d ou e nul)

On multiplie par $3a_1a_2$ tous les termes de l'équation :

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

On obtient :

$3a_1a_2a_3x^3 + 3a_1a_2^2x^2 + 3a_1^2a_2x + 3a_1a_2a_0 = 0$

Comme :

$3a_3a_1 = a_2^2$

L'équation devient :

$$a_2^3x^3 + 3a_1a_2^2x^2 + 3a_1^2a_2x + 3a_0a_1a_2 = 0$$

Qui se met sous la forme :

$$(a_2x + a_1)^3 = a_1^3 - 3a_0a_1a_2$$

On en déduit les trois racines de l'équation à résoudre :

$$x_1 = \frac{1}{a_2}\left(\sqrt[3]{a_1^3 - 3a_0a_1a_2} - a_1\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_2}\left(j\sqrt[3]{a_1^3 - 3a_0a_1a_2} - a_1\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_2}\left(j^2\sqrt[3]{a_1^3 - 3a_0a_1a_2} - a_1\right)$$

Troisième cas : Si $(3a_0a_2 - a_1^2) = 0$(On est dans le cas: b ou c nul)

On multiplie par $3a_1a_2$ tous les termes de l'équation :

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

On obtient :

$$3a_1a_2a_3x^3 + 3a_1a_2^2x^2 + 3a_1^2a_2x + 3a_0a_1a_2 = 0$$

Comme :

$$3a_0a_2 = a_1^2$$

L'équation devient :

$$3a_1a_2a_3x^3 + 3a_1a_2^2x^2 + 3a_1^2a_2x + a_1^3 = 0$$

Divisons maintenant chaque terme par x^3, on obtient :

$$3a_1a_2a_3 + 3\left(\frac{a_1}{x}\right)a_2^2 + 3\left(\frac{a_1}{x}\right)^2a_2 + \left(\frac{a_1}{x}\right)^3 = 0$$

Qui se met sous la forme :

$$\left(\frac{a_1}{x} + a_2\right)^3 = a_2^3 - 3a_1a_2a_3$$

On en déduit les trois racines de l'équation à résoudre :

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_2^3 - 3a_1a_2a_3} - a_2}$$

$$x_2 = \frac{a_1}{j\sqrt[3]{a_2^3 - 3a_1a_2a_3} - a_2}$$

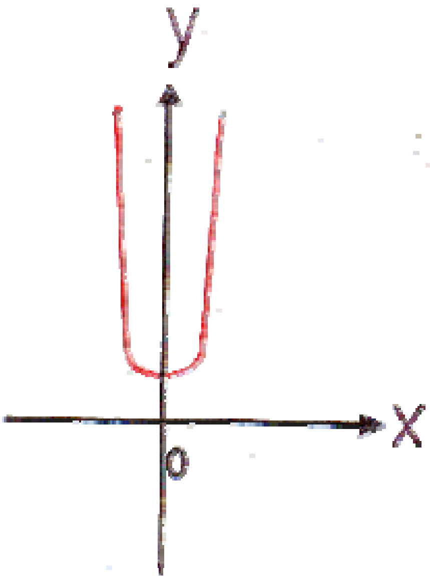
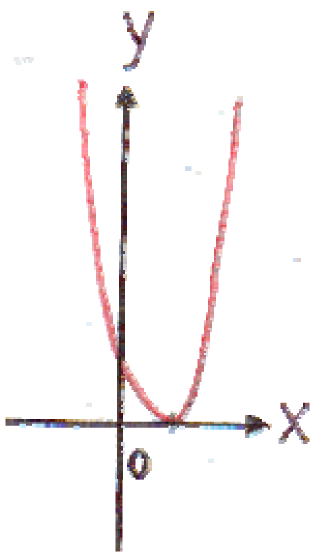
$$x_3 = \frac{a_1}{j^2\sqrt[3]{a_2^3 - 3a_1a_2a_3} - a_2}$$

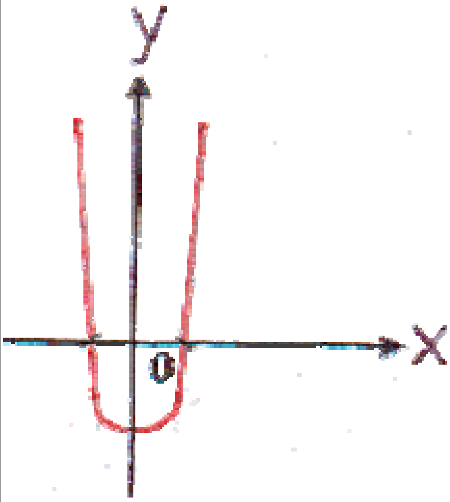
-4éme degré

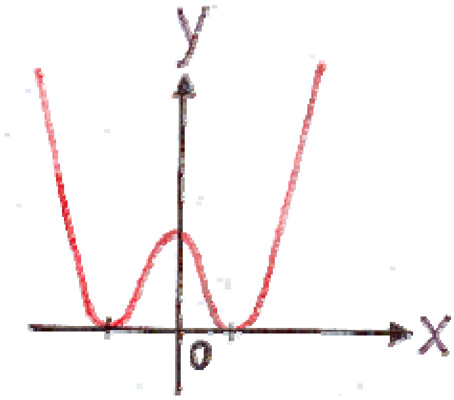
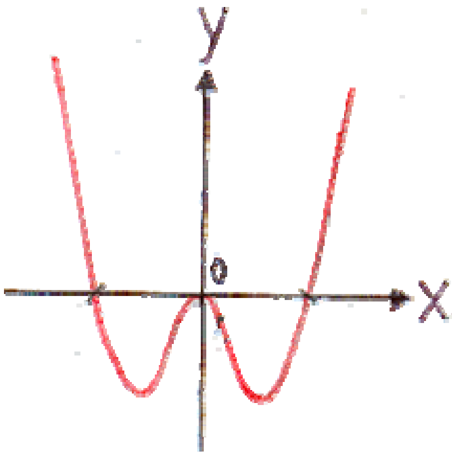
- Méthode Analytique

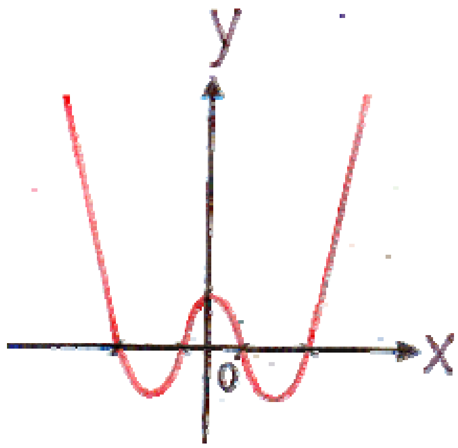
On étudie les variations de la fonction i(x),puis combien de fois sa courbe représentative coupe l'axe Ox ;

$$\mathbf{i(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

	Pas de solution réelle
	1 solution réelle
	2 solutions réelles

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>3 solutions réelles</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>



4 solutions réelles

- Méthode Algébrique

Réduction

Soit l'équation générale (1):

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad \times \frac{1}{a}$$

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

Si on pose :

$$x = z - \frac{b}{4a}$$

On aura donc :

$$\left(z-\frac{b}{4a}\right)^4+\frac{b}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)^3+\frac{c}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)^2+\frac{d}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)+\frac{e}{a}=0$$

On sait que :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b$

Calculons à part chaque terme de l'équation

$$\cdot \quad \left(z-\frac{b}{4a}\right)^4 = z^4-\frac{\cancel{4}b}{\cancel{4}a}z^3+\frac{6b^2}{16a^2}z^2-\frac{4b^3}{64a^3}z+\frac{b^4}{256a^4}$$

$$\cdot \quad \frac{b}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)^3=\frac{b}{a}\left(z^3-\frac{3b}{4a}z^2+\frac{3b^2}{16a^2}z-\frac{b^3}{64a^3}\right)$$

$$=\frac{b}{a}z^3-\frac{3b^2}{4a^2}z^2+\frac{3b^3}{16a^3}z-\frac{b^4}{64a^4}$$

$$\cdot \quad \frac{c}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)^2=\frac{c}{a}\left(z^2-\frac{2b}{4a}z+\frac{b^2}{16a^2}\right)$$

$$=\frac{c}{a}z^2-\frac{bc}{2a}z+\frac{b^2c}{16a^3}$$

$$\cdot \quad \frac{d}{a}\left(z-\frac{b}{4a}\right)=\frac{d}{a}z-\frac{bd}{4a^2}$$

$$\cdot \quad \frac{e}{a}$$

Finalement l'équation (1) revient à :

$$z^4 - \cancel{\frac{4b}{4a}} z^3 + \frac{6b^2}{16a^2} z^2 - \frac{4b^3}{64a^3} z + \frac{b^4}{256a^4} + \cancel{\frac{b}{a}} z^3 - \frac{3b^2}{4a^2} z^2 + \frac{3b^3}{16a^3} z - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{c}{a} z^2 - \frac{bc}{2a} z + \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{d}{a} z - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

$$z^4 + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) z^2 + \left(\frac{3b^3}{16a^2} - \frac{b^3}{16a^2} - \frac{bc}{2a} + \frac{d}{a}\right) z + \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

$$z^4 + \left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right) z^2 + \left(\frac{b^3}{8a^2} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a}\right) z + \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

Pour simplifier on pose :

$$A = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}$$

$$B = \frac{b^3}{8a^2} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a}$$

$$C = \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

On ramène le cas général à la forme réduite :

$\mathbf{z^4 + Az^2 + Bz + C = 0}$

Démonstration avec Discussion

Soit l'équation (2):

$\mathbf{z^4 + Az^2 + Bz + C = 0}$

1° cas : $B = 0$

On se ramène au second degré en posant : $\mathbf{z^2 = t}$

On aura alors :

$$\mathbf{t^2 + At + C = 0} \qquad \text{Equation (3)}$$

Le discriminant est :

$$\Delta = A^2 - 4C$$

Les deux solutions de l'équation (3) sont :

$$t_1 = \frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Finalement les quatre solutions de l'équation (2) sont :

$$z_1 = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2}} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{\frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$z_3 = -\sqrt{\frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2}} \quad ; \quad z_4 = -\sqrt{\frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Pour trouver les solutions à l'équation (1), il suffit de se rappeler que :

$$x = z - \frac{b}{4a}$$

<u>2° cas</u> : $B \neq 0$

Soit l'équation (2):

$\mathbf{z^4 + Az^2 + Bz + C = 0}$

$\mathbf{z^4 = - Az^2 - Bz - C}$

Introduisons une inconnue auxiliaire t et nous obtenons l'équation (4)

$$\left(z^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = z^4 + tz^2 + \frac{t^2}{4}$$

Eliminons z^4 en mettant (2) dans (4)

$$\left(z^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = -Az^2 - Bz - C + tz^2 + \frac{t^2}{4}$$

$$= (t - A)z^2 - Bz + \frac{t^2}{4} - C$$

On choisit t de telle façon que le membre de droite soit de la forme **$(z + D)^2$** avec D racine double de l'équation (5).

$$D = \frac{B}{2(t - A)}$$

On peut donc écrire que le discriminant est nul :

$$B^2 - 4(t - A)\left(\frac{t^2}{4} - C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow B^2 - 4\ \frac{t^3}{4} - C\,t - A\frac{t^2}{4} + AC = 0$$

$$\Leftrightarrow B^2 - t^3 + 4C\,t + At^2 - 4AC = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + At^2 + 4C\,t + B^2 - 4AC = 0$$

On aboutit à une équation du 3° degré que l'on appelle équation résolvante.

On obtient une de ses racines t par la méthode de Cardan.

On arrive finalement à :

$$\left(z^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{B}{2(A-t)}\right)^2$$

D'où les quatre solutions de l'équation (2)

<u>1° Cas</u> :

$$z^2 = z - \frac{B}{2(A-t)} - \frac{t}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{z - \frac{B}{2(A-t)} - \frac{t}{2}} \ ; \ z_2 = -\sqrt{z - \frac{B}{2(A-t)} - \frac{t}{2}}$$

<u>2° Cas</u> :

$$z^2 = -\left(z - \frac{B}{2(A-t)} - \frac{t}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{-z + \frac{B}{2(A-t)} + \frac{t}{2}} \; ; \; z_4 = -\sqrt{-z + \frac{B}{2(A-t)} + \frac{t}{2}}$$

L'équation (1) admet comme solution x tel que :

$$x = z - \frac{b}{4a}$$

L'équation du 4ème degré selon Ferrari :

Soit l'équation d'inconnue x, à coefficients réels, a non nul :

$$(e) : \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Divisons par a et posons $x = X - b/4a$. Le terme en x^3 disparaît et (e) se ramène alors à la forme équivalente :

$$(e1) : \quad x = X - b/4a \quad \text{et} : \quad X^4 + AX^2 + BX + C = 0$$

avec $A = -3b^2/8a^2 + c/a$, $B = (b/2)^3/a^3 - ½bc/a^2 + d/a$, $C = -3(ab/4)^4 + c(b/4)^2/a^3 - ¼bd/a^2 + e/a$.

- Si B = 0, on se ramène au second degré en posant $X^2 = Y$ (forme $X^4 + AX^2 + C = 0$: équation *bicarrée*).
- Supposons B non nul. On peut avoir l'idée de faire apparaître un carré en considérant $X^4 + AX^2$ comme le début du carré de $X^2 + A/2$, mais cela ne conduit à rien. Maintenons cependant cette idée en introduisant une inconnue auxiliaire u en calculant $(X^2 + u/2)^2 = X^4 + uX^2 + u^2/4$, ce qui permet d'écrire :

$$(e2) : \quad (X^2 + u/2)^2 = (u - A)X^2 - BX + u^2/4 - C$$

équivalente à (e1) pour toute valeur de u.

- On impose les conditions $u \neq A$ et on force D = 0, où D est le discriminant de l'équation en X du second membre, ce qui conduit à une équation du 3ème degré, dite équation *résolvante* :

$$(e3) : \quad u^3 - Au^2 - 4Cu + 4AC - B^2 = 0$$

équation du 3e degré que l'on sait résoudre selon la formule de Cardan.

on note que l'égalité u = A ne peut avoir lieu car cela impliquerait, dans (e3), B = 0 : ce qui n'est pas le cas.

- (e2) devient équivalente à :

$$(X^2 + u/2)^2 = (u - A)(X - z)^2$$

où z désigne la solution double du second membre de (e2) correspondant à une racine réelle

u > A de (e3), à savoir :

$$z = \frac{B}{2(u - A)}$$

Il existe au moins une racine u de la sorte car d'une part, l'image de A par le polynôme p du premier membre de (e3) est $p(A) = -B^2 < 0$, d'autre part la limite de p pour u infini est infinie, ce qui prouve que p s'annule sur $]A,+\infty[$.

Dans ces conditions, la résolution se ramène à deux équations du second degré. On voit que, dans **R**, l'équation du quatrième degré possède 0, 2 ou 4 solutions (éventuellement multiples).

Un exemple de résolution :

$$(e) : \quad x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 10 = 0$$

En posant x = X + 1/2, on se ramène à : $X^4 + 3X^2/2 + 6X - 119/16 = 0$, ce qui peut s'écrire :

$$(X^2 + 3/2)^2 = 3X^2/2 - 6X + 155/16$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire u et réordonnons : $(3/2+ 2u)X^2 - 6X + u^2 + 3u + 155/16 = 0$

Le discriminant de cette équation du second degré en X est : $8u^3 + 30u^2 + 191u/2 + 177/8$. On divise par 8, on pose u = t - 5/4, ce qui nous ramène à :

$$t^3 + 7{,}25t - 8{,}25 = 0$$

On remarque, sans utiliser la formule de Cardan que t = 1 est une solution évidente. Par suite u = -1/4 annule notre discriminant. Remplaçons u par cette valeur, on obtient :

$$(X^2 + 5/4)^2 = (X - 3)^2$$

D'où :

$$X = -1/2 \pm \sqrt{2}$$

Mais x = X + 1/2, donc deux solutions de l'équation sont $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$. L'équation (e) est donc divisible par $x^2 - 2$. On obtient :

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - 2)$$

Le premier facteur est du second degré, son discriminant est négatif. (e) ne possède que les deux solutions $x = \pm \sqrt{2}$.

L'équation initiale a donc été résolue algébriquement. Cela est satisfaisant pour l'esprit. Mais sur le plan pratique, une bonne résolution par la méthode des tangentes de Newton, en ayant préalablement séparé les racines, est plus rapide et sans doute aussi efficace...

De plus, la méthode compliquera souvent les calculs alors que l'observation calme et sereine de l'équation conduira à une solution simple... Par exemple : $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$!

- Selon Sotta :

C'est le même principe de Sotta que l'on va appliquer pour les équations de 4éme degré.

Application:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

admettent des racines sous la forme :

$$\frac{b\sqrt[4]{a} + c\sqrt[4]{f}}{d\sqrt[4]{a} + e\sqrt[4]{f}}$$

seulement si :

- $$27a_4a_1^2 - 72a_4a_2a_0 + 2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0 = 0$$

Par conséquent, la méthode de Sotta ne permet de résoudre que les équations de degré 4 vérifiant cette condition de résolubilité.

Soit donc l'équation suivante :

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Premier cas : Si $(8a_4a_2 - 3a_3^2) \neq 0$ (condition pour que la résolvante soit du second degré).

La résolvante de Sotta associée sera :

$$(24a_4a_2 - 9a_3^2)X^2 + (36a_4a_1 - 6a_3a_2)X + 9a_3a_1 - 4a_2^2 = 0$$

Il suffit donc de choisir b, c, d, e tel que $\frac{b}{d}$ et $\frac{c}{e}$ soit les racines de la résolvante. On calcule ensuite a et f à l'aide des formules :

- $$f = \frac{da_3 + 4ba_4}{4e^3(dc - be)}$$
- $$a = \frac{a_4 - fe^4}{d^4}$$

Les quatre racines de l'équation à résoudre seront :

$x_k = \dfrac{be^{\frac{2ki\pi}{4}}\sqrt[4]{a} + c\sqrt[4]{f}}{de^{\frac{2ki\pi}{4}}\sqrt[4]{a} + e\sqrt[4]{f}}$ avec k prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, 3.

Deuxième cas : Si $(8a_4a_2 - 3a_3^2) = 0$ (On est dans le cas: d ou e nul).

- **Conclusion** :

Soit *p* un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres complexes, l'équation suivante (où *i* représente l'unité imaginaire):

$$(z - i)^4 + p(z^2 + 1)^2 = 0$$

Donner les solutions sous la forme *a*+*bi* (avec *a* et *b* réels).