Przedłużenie analityczne
Powierzchnia Riemanna

Marcin Wójcik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH

Kraków, 25 stycznia 2010

PLAN PREZENTACJI

Definicja:

Przedłużeniem analitycznym funkcji $\mathfrak{f}_0$ określonej początkowo na pewnym zbiorze $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$, rozumiemy rozszerzenie jej do funkcji $\mathfrak{f}$, określonej na pewnym obszarze $\mathcal{D} \supset \mathcal{M}$, takie, że $\mathfrak{f}$ jest holomorficzna na $\mathcal{D}$, a jej obcięcie do zbioru $\mathcal{M}$
jest identyczne z $\mathfrak{f}_0$: $\mathfrak{f}|_{\mathcal{M}} = \mathfrak{f}_0$

Prosty przykład:

$\frac{\sin z}{z}$: funkcja określona na obszarze $\mathbb{C} \backslash \{0\}$
zapiszmy jednak rozkład tej funkcji na szereg według potęg z:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Otrzymaliśmy w ten sposób przedłużenie funkcji na całą płaszczyznę $\mathbb{C}$

Kolejny przykład:

Weźmy sumę szeregu:

$$\mathfrak{f}_0(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$

Jest ona określona (i holomorficzna) tylko na kole: $\{z : |z| < 1\}$
Dla $|z| \geqslant 1$ szereg jest rozbieżny
Jednak zapisując:

$$\mathfrak{f}_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

Otrzymujemy przedłużenie analityczne na obszar $\mathbb{C}\backslash\{1\}$

Element analityczny

[lub krócej element] jest to para $\mathfrak{F} = (\mathcal{D}, \mathfrak{f})$ złożona z obszaru $\mathcal{D} \supset \mathbb{C}$ i holomorficznej na nim funkcji $\mathfrak{f}$

Wzajemne bezpośrednie przedłużenie analityczne na obszar

Dwa elementy $\mathfrak{F}_1 = (\mathcal{D}_1, \mathfrak{f}_1)$ i $\mathfrak{F}_2 = (\mathcal{D}_2, \mathfrak{f}_2)$, których obszary mają niepustą część wspólną, są wzajemnym bezpośrednim przedłużeniem analitycznym na obszar Δ, jeśli wszędzie na $\Delta : \mathfrak{f}_1(z) \equiv \mathfrak{f}_2(z)$

Przedłużenie analityczne danej funkcji nie zawsze jest oczywiste. Istnieją jednak metody, dzięki którym bardzo często można je znaleźć.
Zacznijmy od małego obszaru, w którym lokalnie znamy rozwinięcie funkcji holomorficznej $\mathfrak{f}(z)$ na szereg.

Przykładowa metoda

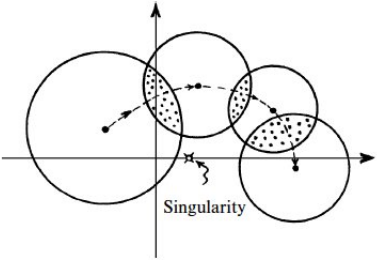


Fig. 7.6 A holomorphic function can be analytically continued, using a succession of power series expressions about a sequence of points. This proceeds uniquely along the connecting path, assuming successive circles of convergence overlap.

Zajmijmy się przez chwilę funkcją $\log(z)$
Rozwińmy ją w następujący szereg:

$$\log(z) = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \dots$$

Spróbujmy dokonać przedłużenia analitycznego wokół środka układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
Wybieramy 3 punkty: 1, $\omega = e^{2i\pi/3}$ oraz $\omega^2 = e^{4i\pi/3}$

Przykładowa metoda

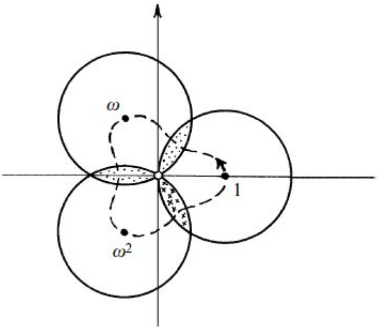


Fig. 7.7 Start at $z = 1$, analytically continuing $f(z) = \log z$ along a path circling the origin anticlockwise (expanding about successive points $1, \omega, \omega^2, 1$; $\omega = e^{2\pi i/3}$). We find $2\pi i$ gets added to f.

There is a way of understanding what is going on with this analytic continuation of the logarithm function - or of any other 'many-valued function' - in terms what are called *Riemann surfaces*.

Riemann wymyślił, aby takie funkcje ('many-valued functions' - 'funkcje wielowartościowe') traktować jako określone na obszarze, który nie jest poprostu podzbiorem płaszczyzny zespolonej, ale wilelowarstwowym obszarem.

Ogólna idea

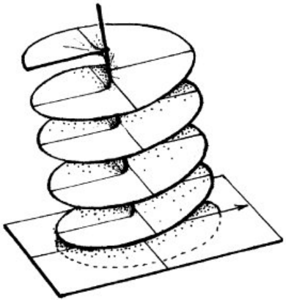


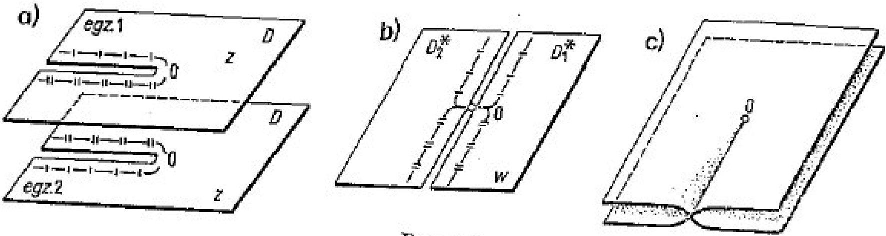
Fig. 8.1 The Riemann surface for $\log z$, pictured as a spiral ramp flattened down vertically.

Rozpatrzmy na obszarze $\mathcal{D}$, który jest płaszczyzną $\mathbb{C}$ z rozcięciem wzdłuż ujemnej półosi, dwie gałęzie $\mathfrak{f}_1$ i $\mathfrak{f}_2$ funkcji analitycznej:

$$\mathfrak{w} = \sqrt{z}$$

Niech $\mathfrak{f}_1$ będzie określone warunkiem: $\mathfrak{f}_1(1) = 1$ natomiast $\mathfrak{f}_2$ warunkiem: $\mathfrak{f}_2(1) = -1$
Zatem dla każdego z $\in \mathcal{D}$ otrzymujemy: $\mathfrak{f}_1(z) = -\mathfrak{f}_2(z)$

Najprostszy przykład



Rys. 55

- B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*
- V. I. Smirnov, *Matematyka Wyższa. T.3, cz.2*
- S. Ponnusamy, H. Silverman, *Complex Variables with Applications*
- R. Penrose, *The Road to Reality*