



BOYAMA VE KATI CİSİM ÜRETİMİ

BEZİER EĞRİLERİ

Bilgisayar grafiklerinin önemli bir uygulaması olan bezier eğrileri 1970 yılında, Fransız bir mühendis olan Pierre Bézier tarafından, renault arabaların tasarımında kullanılmak için geliştirilmiştir. Bezier eğrileri günümüzde fontların üretiminde, modelleme çalışmalarında, ve daha birçok alanda kullanılmaktadır.

Bezier eğrisi, kendini tanımlayacak olan poligonun köşeleri ile birebir ilişkilidir. Poligonun yalnızca ilk ve son köşeleri eğri üzerinde bulunmaktadır. Diğer köşeler ise eğrinin derecesini ve dolayısıyla şeklini tanımlamada katkıda bulunurlar. Bezier eğrisi açık veya kapalı bir poligon tarafından tanımlanabilir. Poligonun vertexleri üzerinde yaptığımız değişiklikler doğrudan eğrinin üzerinde oluşacak olan değişikliğe karşı düşecektir. Böylelikle köşelerin kullanımı sayesinde kullanıcı görsel olarak ulaşabileceği sonuçları önceden kestirebilmektedir. Bezier eğrileri, yerel denetime izin vermekle beraber istenilen düzeye erişememiştir. Bezier eğrisinin oluşumuna belirli oranlarda katkıda bulunan kontrol noktalarından herhangi birinde yapılan değişiklik, eğrinin geneli üzerinde etkiye sahiptir.

n. dereceden bir polinom n+1 adet köşe ile tanımlanmaktadır. Bezier parametrik eğri fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$B(u) = \sum_{k=0}^n p_k \frac{n!}{k! (n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \quad 0 \leq u \leq 1$$
$$= \sum_{k=0}^n p_k N_{i,k}(u) \quad (1)$$

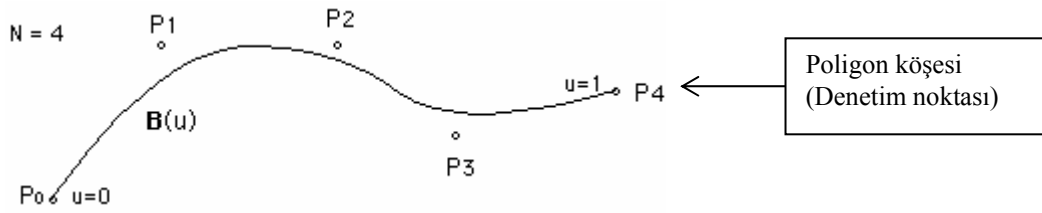
k değeri n+1 adet köşeyi indekslemede kullanılmaktadır. 0 dan n ye kadar numaralandırılmış olan köşeler k indeksi ile referanslanmaktadır.

P_k , herbir kontrol noktasını temsil etmektedir.

u, 0 ile 1 arasında değer alabilen bir parametredir. u=0 eğrinin başını işaret ederken, u=1 değeri ise eğrinin sonunu göstermektedir. $0 < u < 1$ arasındaki değerler eğrinin ara noktalarını belirler. u parametresindeki değişim aralığı eğrinin kalitesini belirler.

n, köşe sayısının bir eksiği olup çizilecek eğrinin derecesini belirler.

$N_{i,k}(u)$ fonksiyonu, n+1 ayrık kontrol noktasının (P_k değerleri) eğrinin şekillenmesine katkısını gösteren sürekli bir ağırlıklandırma fonksiyonudur. Aşağıdaki örnekte 5 adet kontrol noktası ile tanımlanan 4. dereceden bir bezier eğrisi verilmiştir.

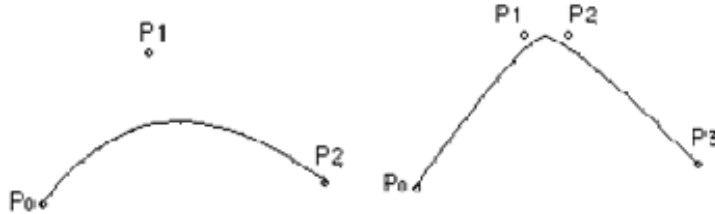


- Bezier eğrisi, ilk ve son kontrol noktaları hariç herhangi bir kontrol noktasından geçmez. Formülden $B(0) = P_0$ and $B(1) = P_n$ olduğu görülmektedir.
- Eğrinin salınımı kontrol noktalarının sınırladığı aralıktadır. Başka bir deyişle eğri en çok poligonun kendisine ulaşabilir.
- Eğer bir kontrol noktası varsa, polinomun derecesi 0 olur. Dolayısıyla bütün u değerleri için $B(u)$ değeri P_0 'a eşit olacaktır.
-

$$\frac{n!}{k! (n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} = N_{i,k}(u)$$

Matematiksel eşitliği ağırlıklandırma fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

- Ağırlıklandırma fonksiyonunun derecesi her zaman kontrol noktaları sayısının bir eksiğine eşittir. Yani 4 kontrol noktası varsa ağırlıklandırma fonksiyonu kübik bir eğri tanımlarken, 3 kontrol noktası bir parabol yani ikinci dereceden bir denklem tanımlar.
- Kapalı bir eğri oluşturmak için, yapılması gereken, ilk ve son kontrol noktalarının çakıştırılması olacaktır.
- Belirli bir nokta etrafına birden fazla kontrol noktası yerleştirmek, eğrinin bu noktaya doğru çekilmesini sağlayacaktır.



- Bir Bezier eğrisine paralel olan başka bir Bezier eğrisini üretmek genelde mümkün değildir. (tabiki iki kontrol noktasından oluşan ve düz bir çizgiyi temsil eden bezier eğrileri hariç)
- 3 kontrol noktası için (1) denklemi aşağıdaki eğri bağıntısını (2) verir.

$$B(u) = P_0 * (1-u)^2 + P_1 * 2 * u * (1-u) + P_2 * u^2 \quad (2)$$

Şekil (1) de örnek bezier eğrileri verilmektedir.



Şekil (1)

BEZIER YÜZEYLERİ

Bezier yüzeyleri iki Bezier eğrisinin ağırlıklandırma fonksiyonlarının kartezyen çarpımıyla üretilebilir. Yüzey üretimi için gerekli olan matematiksel denklem aşağıdaki şekilde verilmektedir.

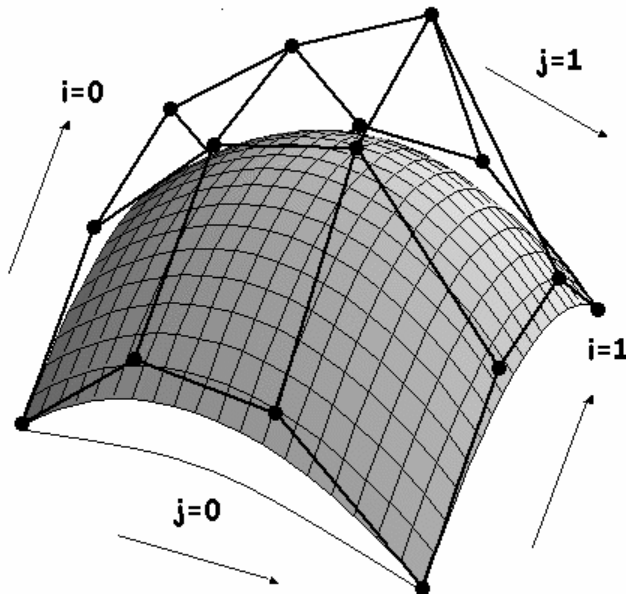
$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} P_{i,j} \frac{n_i!}{i!(n_i-i)!} u^i (1-u)^{n_i-i} \frac{n_j!}{j!(n_j-j)!} v^j (1-v)^{n_j-j}$$

$0 \leq u \leq 1$
 $0 \leq v \leq 1$

$P_{i,j} \rightarrow (i,j)$. kontrol noktasını temsil etmektedir.

i doğrultusunda n_{i+1} adet ve j doğrultusunda n_{j+1} adet kontrol noktası vardır.

Bezier yüzeyi, aynı bezier eğrilerinde olduğu gibi köşe noktaları hariç kontrol noktalarından geçmezler. Bezier yüzeyi kontrol noktalarının sınırladığı aralık içerisindedir. (yani teknik tabiri ile convex hull içerisinde bulunmaktadır) Eğer kapalı bir yüzey oluşturmak istiyorsak o zamanda başlangıç ve bitiş kontrol noktalarının aynı olmasına dikkat etmemiz gerekir. Bezier eğrileri ile oluşturulmuş örnek bir yüzey aşağıdaki şekildedir.



AYDINLATMA TEKNİKLERİ

Yüzey üzerine bir ışık düştüğü zaman yutulabilir, yansıtılabilir veya geçirilebilir. Yüzeze gelen ışık enerjisinin bir kısmı yutulurak ısıya dönüşür. Geriye kalan ya yansıtılır veya geçirilir. Bir cisim görünür yapan, yansıtılan veya geçirilen ışıktır. Eğer gelen tüm ışık enerjisi yutulursa cisim görünmez. O zaman cisme siyah yapılı denir. Yansıyan veya geçirilen ışık enerjisi bir cisim görünür yapar. Yutulan, yansıyan veya geçirilen enerji miktarı ışığın dalga boyuna bağlıdır. Eğer gelen ışığın çok küçük bir kısmı yutuluyorsa, cisim beyaz görülür. Eğer bazı dalga boyları yutuluyorsa, cisim terk eden ışık farklı bir enerji dağılımına sahip olacaktır. Dolayısıyla cisim renkli görünecektir.

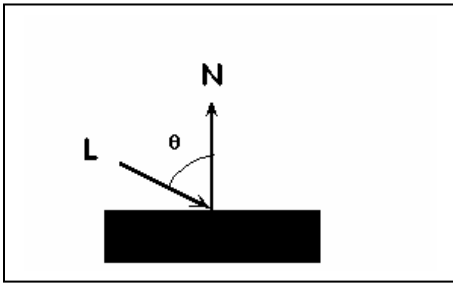
Bir cismin yüzeyinden yansıyan ışık, yaygın (diffusely) yansıyan ışık yada başka bir yansımış ışık türü olan aynasal (specularly) yansımış ışık olarak karakterize edilebilir.

DIFFUSELY YANSIYAN IŞIK ve DIFFUSE AYDINLATMA

Diffusely yansıyan ışık, cismin içine nüfuz eden, yutulan ve daha sonra yeniden dışarı çıkarılan bir ışık olarak düşünülebilir. Yaygın (diffusely) yansımada, ışık kaynağından çıkan ışık cisim üzerindeki bir noktaya vurduktan sonra tüm doğrultularda eşit olarak saçılır. Mükemmel yaygın yansıtıcı, ışığı Lambert'in cosinüs kanununa göre yansıtır. Lambert kanununa göre, mükemmel bir yansıtıcıdan yansıyan ışığın parlaklığı gelen ışığın doğrultusu ile yüzeyin normali arasındaki açının cosinüsü ile orantılıdır. Lambert kanunu yüzeye çarpan ışığın ne kadarının yansıtılacağını belirler. Yaygın (diffusely) yansımada kullanılan yaygın (diffuse) aydınlatma modelinde her doğrultuda yayılan enerji miktarı aynıdır. Başka bir deyişle yansıtılan ışık, gözlemcinin bulunduğu yerden bağımsızdır. Fakat ışık kaynağının yüzeye olan doğrultusu (yani θ açısı ile) ile doğrudan ilişkilidir.

$$I = k_d * I_{light} * \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq 90$$

Burada yüzeyin yapısal özelliklerini karakterize eden k_d katsayısı, yüzeyin yaygın yansımamasını (diffuse reflectivity) temsil eder ve "0" ile "1" arasında değişir. $k_d=0$ iken $I=0$ olduğundan gelen ışık tamamiyle yutulur, $k_d=1$ iken $I = I_{light} * \cos\theta$ olduğundan yüzeyin mükemmel bir yansıtıcı olduğu anlaşılır.



N: yüzey normali
L: gelen ışık

Şimdi ışık yüzeye, yüzeyin normali ile 0° açı yaparak geldiği varsayalım. Bu durumda yüzeyin de mükemmel bir yansıtıcı olduğu varsayıldığından $I=I_{light}$ olur ve enerji kaybı yoktur. Aradaki θ açısı 90° olsaydı o zaman, $I=0$ olacağından herhangi bir yansımaya gözlemlenemez. Burada θ açısı 0° ile 90° arasındadır, daha büyük açılar için ışık kaynağı cismin arkasına düşecektir.

Yalnız yaygın (diffuse) yansımaya aydınlatma modeli ile aydınlatılan cisimlerin, donuk bir yüzeye sahip oldukları görülür. Işık kaynağı noktasal kabul edildiğinden,

kaynaktan doğrudan ışık almayan cisimler siyah görülür. Halbuki gerçek bir manzarada çevredeki cisimlerden, örneğin odanın duvarından saçılan ışıkları da cisimler almaktadır. İşte bu ortam (ambient) ışığı dağılmış bir ışık kaynağını temsil eder.

ORTAM (AMBIENT) AYDINLATMA

Belkide en basit aydınlatma modelidir. Sahnedeki bir cisim renk ve parlaklık değerleri kullanılarak görüntülenir. Cismin bütün pikselleri aynı renge ve parlaklığa sahiptir. Dolayısıyla bu aydınlatma modelinin sonucu, hiç de gerçekçi olmayan bir görüntüdür. Bu yüzden bu model diğer aydınlatma modelleri ile birlikte kullanılır.

$$I = I_a * k_a$$

I_a , ortamdaki ışığın parlaklığını gösterir ve sahnedeki tüm cisimler için sabittir. k_a ise ortam nüfuz yansıtma sabiti olup materyalin özelliklerini yansıtır. Örneğin metalik bir görüntüye sahip bir cisim için bu değer 1 veya 1'e yakın olmalıdır. (Çünkü bu durumda $I \approx I_a$ olmakta ve metalik maddelerin yansıtıcılık özelliği ortaya çıkmaktadır.)

YAYGIN (DIFFUSE) ve ORTAM (AMBIENT) AYDINLATMANIN BİRLEŞTİRİLMESİ

Her iki aydınlatma modelinin birleştirilmesiyle elde edilen matematiksel model aşağıdaki şekilde olur.

$$I = I_a * k_a + k_d * I_{light} * \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq 90$$

Yalnız yaygın (diffuse) aydınlatma modeli ile aydınlatılan cisimler tuhaf renklerde olmakta ve doğallık içermemektedir. Bu yüzden cisimlere doğallığının katılması amacı ile ortam (ambient) aydınlatma ,yaygın (diffuse) aydınlatma ile birlikte kullanılmaktadır.

Bilindiği gibi yansıyan ışığın parlaklığı kaynaktan olan uzaklığın karesi ile orantılı olarak azalır, yani uzak cisimler daha az parlak görünür. Aydınlatma modelinde dağıtma terimi uzaklığın karesi ile orantılı yapırsa bu terimin katkısı ortadan kalkar. Tersine , bakış noktası cisme çok yakın olduğu zaman $1/d^2$ çok hızlı olarak değişir. Deneyler göstermiştir ki en gerçekçi sonuçlar lineer bölme kuralı kullanılarak elde edilir. Bu durumda aydınlatma modeli

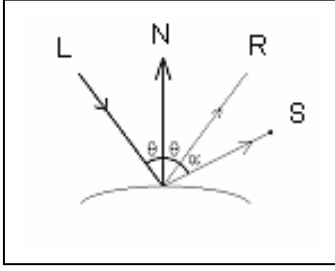
$$I = I_a K_a + \frac{I_l K_d \cos\theta}{d + k}$$

olur . Burada “k” keyfi bir sabittir. Bakış noktasının sonsuzda olduğu kabul edildiği zaman “d” uzaklığı bakış noktasına en yakın cismin konumundan belirlenir.

AYNASAL (SPECULAR) YANSIYAN IŞIK ve PHONG AYDINLATMA MODELİ

Aynasal (specularly) yansımış ışığın parlaklığı, ışığın geliş açısına, gelen ışığın dalga boyuna, ve materyalin özelliklerine bağlıdır. Olaya ışık tutan Fresnel denklemidir. Işığın aynasal (specular) yansımalarının bir doğrultusu vardır. Mükemmel yansıyan bir yüzey için (ayna gibi), yansıtma açısı gelme açısına eşittir. Bu yüzden yalnız tam bu açıda duran bir gözlemci, aynasal (specularly) yansımış ışığı görebilir. (Oysa diffusely yansıyan ışık, herhangi bir doğrultuda yansımakta, dolayısıyla gözlemcinin konumu önemsiz kalmaktaydı.) Bunun anlamı, R yansıtma vektörünün S bakış vektörü ile çakışmasıdır. Yani “ α ” açısının “0” olmasıdır. α açısının artımı ile göze gelen specular yansımış ışık miktarı gittikçe düşecektir. α açısı gözlemciye ulaşan ışık miktarını doğrudan etkileyecektir. Pürüzsüz ve parlak yüzeyler için uzaysal dağılım dar veya odaklanmışır

(α açısı 0'a yakın), halbuki pürüzlü yüzeyler için bu uzaysal dağılım yaygınlaşmış veya genişlemiştir (α açısı artmış).

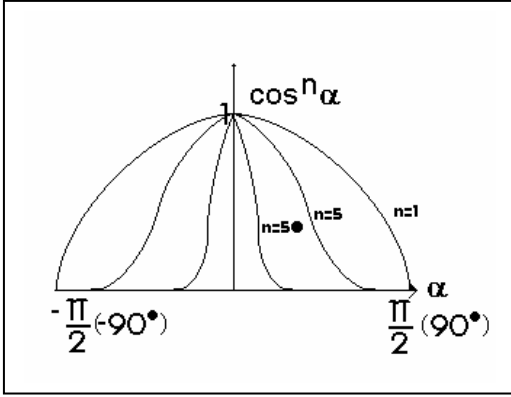


Parlak cisimler üzerindeki highlightlar specular yansımadan kaynaklanır. Specular yansımış ışık, yansıma vektörü boyunca odaklanmış olduğundan, gözlemci hareket ettiği zaman highlightlarda hareket eder. Ayrıca ışık cismin dış yüzeyinden yansıdığından, metaller ve bazı katı boyalar hariç yüzey ile etkileşime geçmeyecek ve yansıyan ışığın özellikleri gelen ışığın özellikleri ile aynı olacaktır. Mesela, beyaz ışıkla aydınlatılmış parlak maviye boyanmış bir yüzey üzerindeki highlightlar maviden ziyade beyaz görünür.

Specular yansımış ışık için aydınlatma modeli olarak, Bui-Tuong Phong yöntemi kullanılmaktadır.

$$I_s = I_{\text{light}} * W(i, \lambda) \cos^n \alpha \quad -90 \leq \alpha \leq 90$$

Burada $W(i, \lambda)$ yansıma eğrisi λ dalgaboyu ve i geliş açısının fonksiyonu olarak specular yansımış ışığın gelen ışığa oranını verir. Burada n , specular yansımış bir ışığın uzaysal dağılımını yaklaşımlandıran bir kuvvettir. n 'nin çeşitli değerleri için $\cos^n \alpha$ nın değişimi şekil(2) de verilmiştir.



Şekil (2)

Eğer cisim metalik bir özelliğe sahipse büyük n değerleri seçilmelidir. Böylelikle $\cos^n \alpha$ nın 1'e yaklaşımı hızlandırılacak ve yansıyan ışık miktarı artırılmış olacaktır. Yani cisime parlak bir yüzey etkisi kazandırılmış olunacaktır.

Tüm bu sonuçlar diğer iki model ile birleştirilirse aşağıdaki aydınlatma modelini elde edilir.

$$I = I_a K_a + \frac{I_l}{d+k} (K_d \cos \theta + K_s \cos^n \alpha)$$

Eğer çok sayıda ışık kaynağı varsa, etkiler doğrusal olarak toplanır. O zaman aydınlatma modeli

$$I = I_a K_a + \sum_{j=1}^m \frac{I_{lj}}{d+k} (K_d \cos \theta_j + K_s \cos^n \alpha_j)$$

olur. Burada m ışık kaynaklarının sayısıdır.

İki vektörün skaler çarpımından aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\cos \theta = \frac{n \cdot L}{|n| |L|} = \hat{n} \cdot \hat{L}$$

Burada n ve L sırasıyla yüzey normali ve ışık kaynağı doğrultusundaki birim vektörlerdir. Benzer şekilde

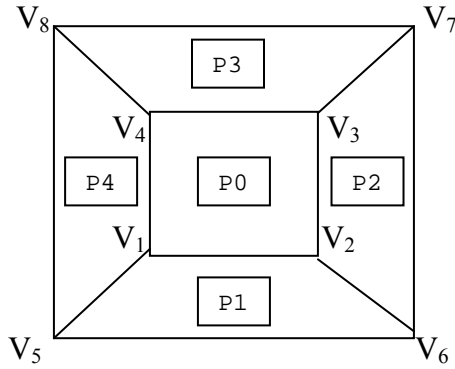
$$\cos \alpha = \frac{R \cdot S}{|R| |S|} = \hat{R} \cdot \hat{S}$$

yazılabilir. Burada R ve S sırasıyla yansımış ışının ve bakış doğrultusunun birim vektörlerdir. Böylece tek ışık kaynağı için aydınlatma modeli:

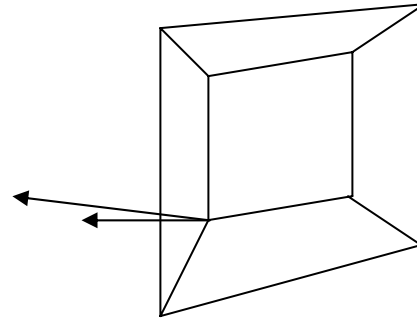
$$I = I_a K_a + \frac{I_l}{d + k} [K_d (\hat{n} \cdot \hat{L}) + K_s (\hat{R} \cdot \hat{S})]$$

YÜZEY NORMALİNİN BELİRLENMESİ

Specular yansımanın doğrultusu yüzey normali tarafından belirlenir. Eğer yüzeyin analitik ifadesi biliniyorsa, yüzey normalinin hesaplanması kolaydır. Ama birçok yüzeyin yalnız poligonal yaklaşımı bilinir. Eğer herbir poligonal gözün düzlem denklemi biliniyorsa, o zaman herbir gözün normali düzlem denkleminin katsayılarından elde edilebilir.



Şekil (3.1)



Şekil (3.2)

Şekil (3) Poligonal yüzey normali yaklaşımları

Eğer poligonal gözlerin düzlem denklemleri varsa o zaman bir köşedeki normal bu köşeyi kuşatan poligonların normallerinin ortalaması alınarak yaklaşımlandırılmalıdır. Mesala Şekil (3.1) de, V1 'deki normalin yaklaşık doğrultusu aşağıdaki ifade ile verilir.

$$n_{V_1} = (a_0 + a_1 + a_4)i + (b_0 + b_1 + b_4)j + (c_0 + c_1 + c_4)k$$

Burada $a_0, a_1, a_4, b_0, b_1, b_4, c_0, c_1, c_4$ katsayıları V_1 'i kuşatan P_0, P_1, P_4 poligonlarının düzlem denklemlerinin katsayılarıdır.

Alternatif olarak, düzlem denklemleri yoksa, köşedeki normal, bu köşede sonlanan tüm kenarların vektörel çarpımlarının ortalaması alınarak yaklaşımlandırılabilir.

$$n_{V_1} = V_1 V_2 \otimes V_1 V_4 + V_1 V_5 \otimes V_1 V_2 + V_1 V_4 \otimes V_1 V_5$$

Yalnız dışarıya doğru olan normallerin ortalamasının alınmasına dikkat edilmelidir.

Normalizesiz yüzey normallerinin genliği ve yönü bu iki yaklaşım tekniği için farklıdır; Şekil b . Sonuç olarak bir aydınlatma modeli, yüzey normalini yaklaşımlandırmak için kullanılan tekniğe bağlı olarak farklı sonuçlar verecektir. Eğer parlaklığı belirlemek için yüzey normali kullanılacak ve cismi veya manzarayı görüntülemek için bir perspektif transformasyon kullanılacaksa , perspektif transformasyon uygulanmadan önce normal belirlenmelidir. Aksi takdirde, normalin doğrultusu bozulacaktır ve aydınlatma modeli tarafından bulunan parlaklık yanlış olacaktır.

YANSIMA VEKTÖRÜNÜN BELİRLENMESİ

Yansıma vektörünün doğrultusunun belirlenmesi bir aydınlatma modelinde çok önemlidir. Işık vektörü, yüzey normali ve yansımış ışık vektörünün aynı düzlemde kaldığını ve bu düzlemde gelen ışığın açısının yansıyanın açısına eşit olduğu unutulmamalıdır. Işık doğrultusu z eksenini boyunca ilerlediği zaman Phong basit bir çözüm elde etmek için bu koşulları kullanmıştır. Eğer koordinat sisteminin orijini yüzey üzerindeki bir nokta olarak alınırsa , o zaman normal ve yansımış vektörün xy düzlemi üzerine projeksiyonu doğrusal bir çizgi üzerine düşer.

Bu yüzden,

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\hat{n}_x}{\hat{n}_y}$$

olur. Burada $\hat{R}_x, \hat{R}_y, \hat{n}_x, \hat{n}_y$ sırasıyla yansımış ve normal doğrultularındaki birim vektörlerinin x ve y bileşenleridir.

Birim normal vektörü ile z eksenini arasındaki açı θ dir. Bu yüzden z yönündeki bileşen

$$\hat{n}_z = \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Benzer şekilde , birim yansıma vektörü ile z eksenini arasındaki açı 2θ dir . bundan dolayı

$$\hat{R}_z = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2\hat{n}_z^2 - 1$$

ve

$$\hat{R}_x^2 + \hat{R}_y^2 + \hat{R}_z^2 = 1 \quad \text{ve} \quad \hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2 + \hat{n}_z^2 = 1$$

olduğu hatırlanırsa

$$\hat{R}_y = 2\hat{n}_x\hat{n}_y \quad \text{ve} \quad \hat{R}_x = 2\hat{n}_z\hat{n}_x$$

elde edilir.

Diğer bir teknik birim normal ile birim ışık ve yansıma vektörlerinin üçünde aynı düzlemde kalmasını sağlayan bu vektörlerin vektörel çarpımını kullanır. Birim normal ile birim ışık ve birim normal ile birim yansıma vektörlerinin skaler çarpımı , gelen ve yansıyan açıların eşitliğini sağlamak için kullanılır.

Bu koşullar $n \otimes L = R \otimes n$ verir ve buradan

$$-n_z R_y + n_y R_z = n_z L_y - n_y L_z$$

$$n_z R_x - n_x R_z = n_x L_z - n_z L_x$$

$$-n_y R_x + R_x R_y = n_y L_x - n_x L_y$$

elde edilir. Maalesef her özel durum için bu üç denklem bağımsız değildir.
Gelen ve yansıyan açıların eşit olmasından

$$n.L = n.R$$

veya

$$n_x R_x + n_y R_y + n_z R_z = n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z$$

yazılabilir. Bu denklem gerekli olan ilave koşulu verir ve buradan R_x, R_y, R_z elde edilebilir.