

制限三体問題とサロス周期

井本正介*

Saros Cycle viewed from Circular Restricted Three-body Problem

Shosuke IMOTO

In the framework of circular restricted two-dimensional three-body problem the Sun-Moon-Earth system is studied by computer calculation. A periodicity with period of about 411 days, which corresponds to rotation of the line of apsides, has been found to play an important role in description of the lunar motion. This periodicity is a kind of prechaotic oscillation which arises from the nonlinear character of the three-body dynamical system. The Saros cycle, a period of a solar/lunar eclipse of similar kind, is explained as the modulation of that periodicity with the solar cycle, and some of commensurabilities related with the Saros are deduced from this concept.

サロス周期とはよく似た日食または月食の循環期で、すでに2500年前にバビロニア人に知られていた。その周期(単にサロスという), T_s , は6585.3日で18年プラスほぼ10日となる。日食で皆既最大継続時間の最も長いものは7分であるが、近年のものを拾ってみると、

1937年6月8日 (7分4秒)

1955年6月20日 (7分8秒)

1973年6月30日 (7分4秒)

1991年7月11日 (6分58秒)

で、その間隔は順に6586日, 6585日, 6585日となっており、平均は6585.3日である。サロスはさらに月の公転周期と次のような尽数関係にあることが古くより知られている。

$$T_s = 223T_1 = 239T_2 = 242T_3 \dots\dots\dots(1)$$

ここに T_1 , T_2 , T_3 はそれぞれ朔望月, 近点月, 交点月とよばれる月の公転周期である。この関係はかなり正確で、最短の $223T_1$ と最長の $239T_2$ との間の差は0.216日に過ぎない。そしてこの偶然の整数関係がサロスという循環期を成立させているものと考えられてきた。

しかし最近、日月食に限らず月の運動一般がサロスに等しい周期で循環することが知られるに至った。Perozzi らは、任意の日時とその1サロス後との日時とについて月の地心黄径, 地心黄

* 教養部

緯、及びそれらの時間変化を比較した所、いずれの日時を選んでも両者がよく一致することを見出し、またサロスという現象は基本的には太陽-地球-月の三体間の現象であると述べている¹⁾。

本論文は Perozzi らの考えを一步進め、制限三体問題を通してサロスの起因を説明しようとするものである。

1. 制限三体問題の計算

ここでは円・平面制限三体問題を取上げた。すなわち、太陽を重心にとり、地球はそのまわりを一様に円運動すると近似し、月は同じ平面内を運動すると仮定した。この力学系のハミルトニアンは次の通りである。

$$H = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \omega^2 R^2) / 2 - GE/r - GS/R \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに r は月と地球との距離、 R は月と太陽との距離、 θ は太陽-地球軸からの月の地心偏角、 ω は地球の平均公転角速度である。地球と太陽との距離を R_0 (一定) とすると、

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0 r \cos\theta + r^2$$

の関係がある。GE, GS はそれぞれ地心及び日心の重力定数である。このハミルトニアンから r, θ を変数とする二個の微分方程式が得られ、これが月の運動方程式となる。本研究では r 及び θ を求めるに当り何らの解析的処理も行わず、直接に逐次積分をコンピュータにより行なった。 r の二次導関数の積分にはノイメロフの方法を用い、一次導関数の積分にはアダムス・バッシュフォース法またはアダムス・モルトン法を場合により使い分けて用いた。時間きざみ巾は 0.01d とした。 ω の値は 0.0172021/d とし、積分は $\theta = \pi/2$ からはじめた。離心率, e , の初期値は 0.059 で、 r の初期値, r_0 , は平均の T_1 が観測値に合うように選んだ。 $r_0 = 0.3754035 \times 10^6 \text{ km}$ とした時、 T_1 の平均値として 29.5306d が得られた。なお、 T_1 としては満月から満月までの期間をとった。

図 1 はその計算結果を示したものである。先ず T_1 は 29.36d から 29.72d までの間を周期的に変化するのが見られた。次に e はちょうどその半分の周期で 0.042 から 0.065 までの範囲を振動している。図 1 の下段の図は月の軌道の長軸方向の変化を示したもので、この方向が T_1 の振動と全く同じ周期で回転しているのが分かる。この周期をここでは仮に回転周期と呼び、 T_r であらわすことにする。 T_r は 412.35d で、朔望月をほぼ 14 個含んでいる。出差として知られて

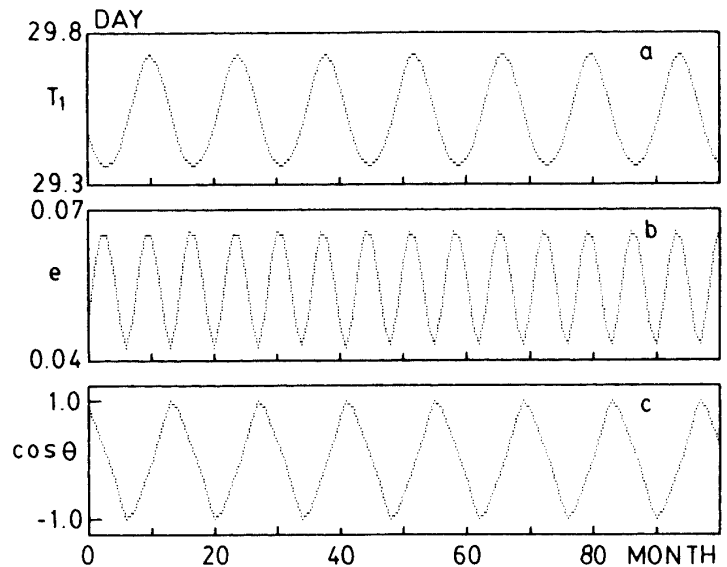


図 1 円・平面制限三体モデルによる計算結果。(a)朔望月, (b)離心率, (c)軌道長軸方向の周期的変化を示す。

いる周期の一つに 205.84d のものがあるが、 T_r はそのほぼ2倍となっている。

図1(c)に見る長軸の回転は月の近地点の移動，すなわち近地点が地球のまわりを T_r の周期で回転していることを意味する。近地点と近地点との時差が近点月 T_2 であり，一回転の間での近点月の数は朔望月の数よりも1だけ多いため，

$$T_r/T_2 = T_r/T_1 + 1,$$

$$\text{または } \omega_2 = \omega_1 + \omega_r \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。ここに $\omega_1 = 2\pi/T_1$ である。

T_1, T_2 の観測値(平均), 29.530589d, 27.554551d を式(3)に入れると、 T_r として 411.78d が得られ、上記の計算値に近く、その半分は出差の値とさらに近い。

式(3)の関係はまた ω_1 の振動数を持つ振動が ω_r の振動によって変調されていると見ることができ、別な変調

$$\omega_e = \omega_1 - \omega_r$$

の可能性を示唆している。実際 ω_e の周期 T_e は出差そのものである。 T_r として 411.78d を用いると、 $T_e = 31.81d$ が得られる。出差は離心率の振動周期と近地点の振動周期との同調とも見られているが、上記の関係から

$$\omega_e = \omega_2 - 2\omega_r$$

が得られ、このことを裏付けている。図1に見るように、 $2\omega_r$ はちょうど離心率の振動数であり、 ω_2 は近地点の振動数、すなわち近点月に対応しているからである。

2. 回転周期

前節において、制限三体問題に回転周期という一つの特有の周期が存在し、各種の周期に重要な役割を演じていることを述べたが、本節ではその性質をさぐってみよう。

その一つの方法としてこの力学系のポアンカレ断面を調べる。式(1)の変数は r と θ とであり、これらとその時間微分とを指定すれば、系の状態は一義的に定まる。しかしハミルトニアンは第一積分となるから、いま $\theta = 0$ の断面をとれば、 r と \dot{r} とから作られる位相空間の一点は個々の状態に完全に対応する。前節の計算で得られた5000点の代表点をプロットすると円に近い一つの閉曲線が得られる。図2はその一部を拡大したもので、代表点はほぼ一線

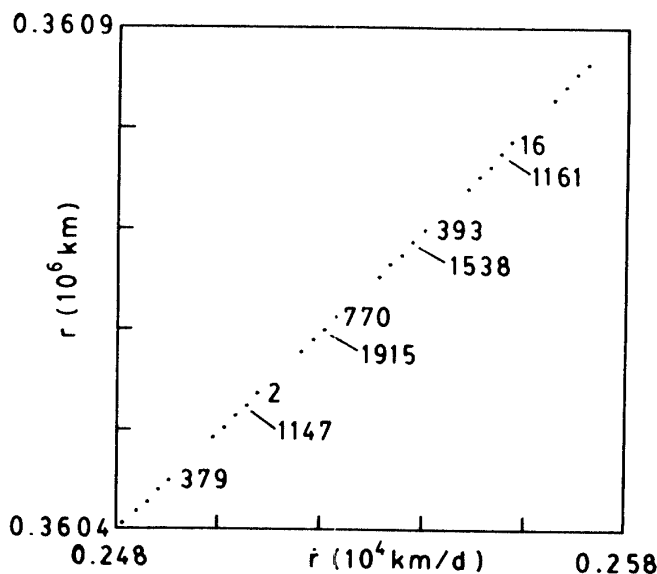


図2 位相空間の $\theta = 0$ におけるポアンカレ断面の拡大図。代表点に付された数字は $\theta = 0$ への回帰の順序数。代表点数は5000。

上に並んでいる。代表点に付された数字は $\theta = 0$ ，すなわち満月の順序をあらわす数である。 $T_r \approx 14$ (month)に対応して，大きくは14周期ごとにもとの代表点の近くに戻ってきているのが見られる。さらに詳細に見れば，391 ($=14 \times 28 - 1$)，768 ($=14 \times 55 - 2$)，1145 ($=14 \times 82 - 3$)の各周期ごとにより近い位置に戻ってくるのが読みとれる。

次に，地球と月との距離の初期値 r_0 を実際のものから変化させた場合を調べてみる。図3は r_0 に対する回転周期 T_r の変化をプロットしたものである。 T_r の単位として，この図では「年」とした。 r_0 が小さい時には T_r の値はほぼ1年であるが，大きくなるにつれて急激に大きくなる。図4

は $r_0 = 0.60 \times 10^6$ km (以下単位省略)の場合の T_1 ， e ，及び長軸方向の各変化を示したものである。 T_1 は70dから100dの間を大きく振動し，一周の間に二つのピークを持っている。離心率の振巾も大きく，長軸方向には逆回転の部分が見えている。図1と比較すれば，周期増があらわれているといえよう。図5は $r_0 = 0.550, 0.600, 0.615$ に対するポアンカレ断面である。いずれも1000点の代表点から成っている。図5(a)，(b)はまだ閉曲線を保っているが， $r_0 = 0.615$ では閉曲線がこわれて11個の島を形成している。なおこの時の T_r は11 monthに非常に近い値である。それぞれの島はさらに13個の点から成っているのを見ることが出来る。図6はこの点の一つを大きく拡大したものである。全体で5000の代表点がとられているが，ここには順序数としては $3 + 429n, 146 + 429n, 289 + 429n$ ($n = 0, 1, \dots$)であらわされる35個の点があられ，これらは一つの閉曲線を描くように見える。このように $r_0 = 0.615$ のポアンカ

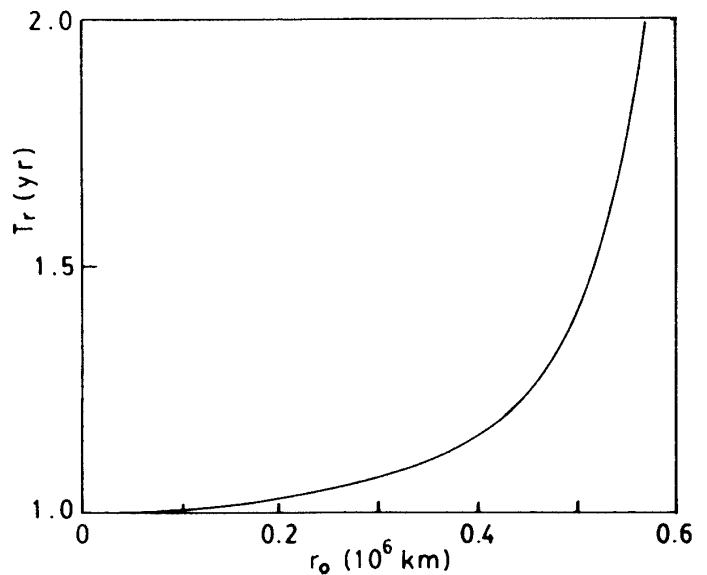


図3 回転周期 T_r [年] と地球-月距離の初期値 r_0 との関係。

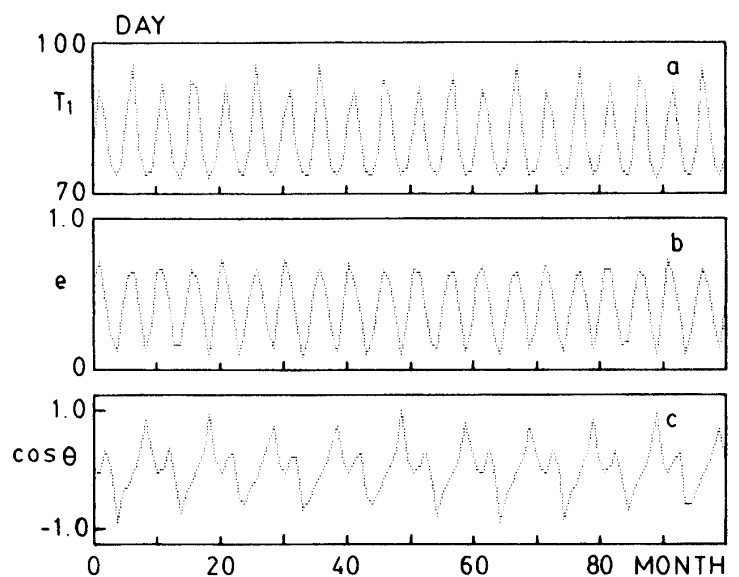


図4 図1と同じ。ただし初期値 $r_0 = 0.600 \times 10^6$ km。(図1では 0.3754035×10^6 km)。

レ断面にはフラクタル構造が見られる。図7は $r_0=0.620$ のときの断面であるが、カオスと見ることができよう。 $r_0=0.630$ を越えると、その衛星は地球から逃げ去ってしまうが、これはすでに Hénon が示した通りである²⁾。

このように、回転周期振動は力学系の非線型性から来る一種のカオスである。 r_0 をパラメータにとると、その値が小さい間は振巾も小さく、周期は1年であるが、大きくなるにつれて周期は長くなり、周期増大が起こり、ソフトカオスを経て最後は完全なカオスに至る。回転周期をもたらすのは、この前カオス振動である。

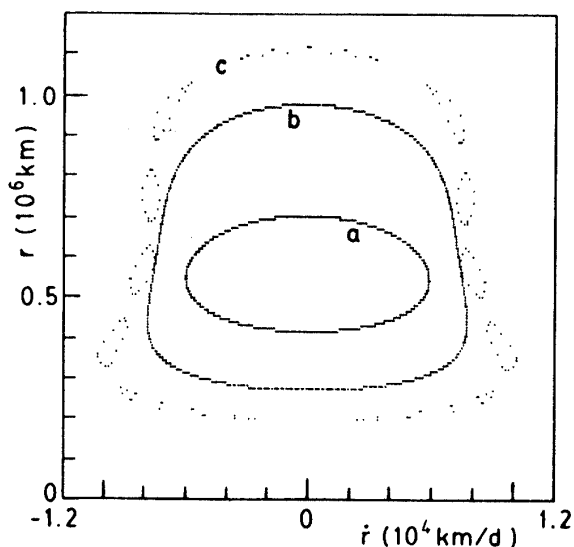


図5 位相空間の $\theta=0$ におけるポアンカレ断面。(a) $r_0=0.550$, (b) $r_0=0.600$, (c) $r_0=0.615$ (単位は 10^6 km)。代表点数はいずれも1000。

3. サロ ス

以上のモデルでは地球は太陽のまわりを円運動していると仮定した。しかし実際には離心率0.0167で円運動をしていることは周知の事実である。離心率の値は小さくても、太陽からの距離の最大と最小との差は 5×10^6 km もあり、月の軌道半径の10倍以上である。月の運動に対する攝動としてはかなり大きいといえよう。この攝動をとり入れる最も簡単な方法として、ここでは回転周期振動に周期1年の正弦振動を加えてみた。1年の周期を T_0 とすると、周期 T_r の振動と周期 T_0 の振動とを重ね合わせて喰りを作ることになる。図

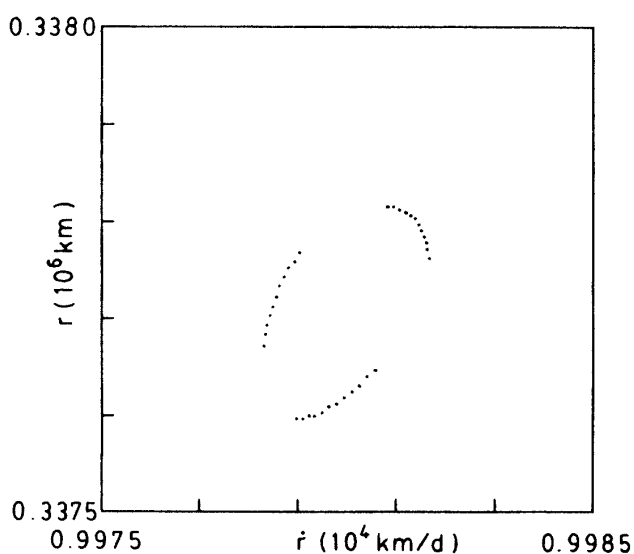


図6 図5(c)の一部の拡大図。代表点総数は5000。

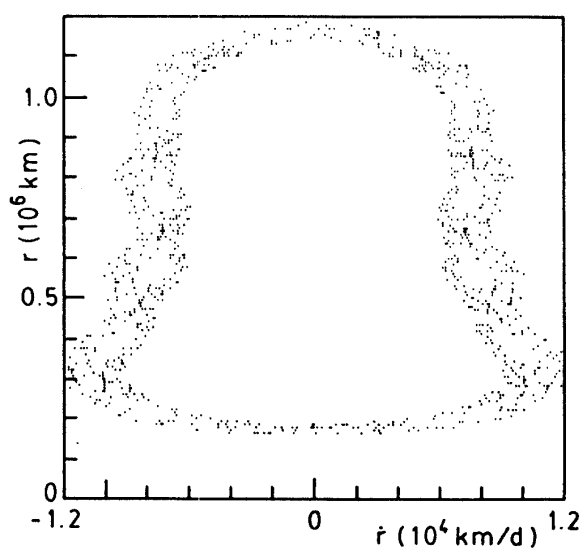


図7 図5と同様のポアンカレ断面図。 $r_0=0.620 \times 10^6$ km。代表点数は1000。

8は朔望月 T_1 に対して得られたその結果である。図1では T_1 はほぼ正弦曲線状に振動していたが、図8には唸りがあらわれている。図8は2本の線から構成されている。一本は上記の計算結果であり、他の一本は観測値を連ねたものである。観測値は理科年表から満月の日時を求め、これから満月と満月との間の日数を計算したもので、図8に示す期間は1971年1月11日より1995年3月17日までである。図8はこの2本の線がほとんど重なっていることを示している。図中に+印で示した2個の点は1973年6月30日の日食(a)と1991年7月11日の日食(b)とをあらわしている。日食は朔に起るから、満月と満月との間隔を示す朔望月のプロットに重ねてある。図はこの2点

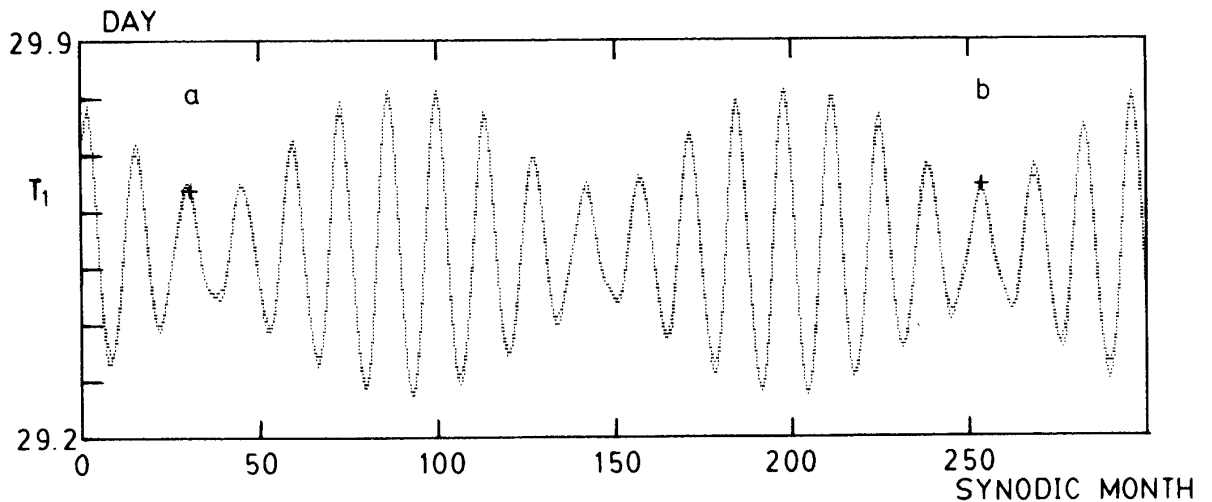


図8 図1(a)の回転周期振動に太陽周期を合成して得られた朔望月 T_1 の変化(計算)と観測値との比較。図は2本の線から成っているが、ほとんど重なっている。
a点：1973年6月30日、b点：1991年7月11日の各日食。a-b間がサロス周期。

が曲線のほぼ同等の位置にあることを示し、曲線がサロスの周期で繰返されていることをあらわしている。そしてこの周期は T_r の振動と T_0 の振動との重ね合わせから作られる唸りの周期に外ならない。すなわち、

$$T_s = 2T_0 \cdot T_r / (T_r - T_0)$$

または、 $\omega_s = (\omega_0 - \omega_r) / 2$ (4)

である。いま T_r として計算で得られた412.35dを用いると $T_s = 6395.36d$ となり、実際の値とかなり異なるようであるが、式(4)は T_r の値に敏感であり、逆に $T_s = 6585.3$ から T_r を求めると410.82dとなり、計算値との差は0.3%に過ぎない。

図8は一つのサロスが16個の回転周期を含んでいることを示している。すなわち、

$$T_s = 16T_r$$
(5)

である。 T_s はまた $223T_1$ であるから、これらと式(3)の関係とを組み合わせると、

$$T_s = 239T_2$$

が容易に求められる。同様に

$$T_s = 207T_e \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。今まで全く偶然のように思われてきた $223T_1 = 239T_2$ という関係は実は偶然ではなく、回転周期を通じて結ばれる関係である。 T_r は最長出差周期の 2 倍であるからサロスはこの周期を 32 個含む。このことと式(6)とは、最近 Perozzi らが長い間見過されてきた事実として述べた所であった¹⁾。このようにサロスは、回転周期と太陽周期とから作られる唸りの周期と理解することができ、太陽-地球-月の三体問題における最も基本的な周期の一つであるといえよう。

4. ま と め

円・平面制限三体問題の枠の中で、月の軌道計算をコンピュータを用いて行った。その結果、月の公転周期の約 14 倍の周期をもつ軌道が公転に重なっていることが見出された。この一周期の間に月の近地点が地球のまわりを一回転するため、仮にこれを回転周期を名付けた。長さはほぼ 411 日である。地球と月(衛星)との距離を一つのパラメータにとると、それが小さい間は回転周期振動の振巾は小さく、また周期は 1 年であるが、大きくなるにつれて振巾と周期とが大きくなり、やがて周期倍増を生じ、ソフトカオスを経てカオスに至る。したがって回転周期振動は前カオス振動であると解することができる。サロス周期はこの回転周期と太陽周期 (= 1 年) との合成による基本的な周期であることが分った。計算から得られた朔望月の長さの変化はよく観測値と一致するのが見られた。また回転周期を媒介として、今まで偶然と見られていたいくつかの尽数関係が説明された。

参 考 文 献

- 1) E. Perozzi, A. Roy, B.A.Steves and G.B. Valsecchi : *Celest. Mech. & Dynam. Astron.* 52 (1991) 241.
- 2) M. Hénon : *Astron. & Astrophys.* 9 (1970) 24.

(平成 6 年 10 月 13 日受理)