ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СССР: АНАЛИЗ ФЕНОМЕНА

Б.Т. Поляк

Институт проблем управления, Москва
e-mail: boris@ipu.rssi.ru

Аннотация. Я не историк; перед вами лишь воспоминания человека, вовлеченного в развитие теории и методов оптимизации в бывшем СССР. Я понимаю, что моя точка зрения может быть очень субъективной; однако я постараюсь представить возможно наиболее широкую и беспристрастную картину.

Ключевые слова: ...

1. Математика в СССР

Позвольте мне начать с описания общей ситуации в математике и естественных науках в СССР. Для молодого читателя, который живет теперь в совершенно других условиях, эти заметки представляют интерес, поскольку сегодня трудно вообразить себе довольно специфические условия жизни в стране в 1950-60е годы. Царила коммунистическая тоталитарная система, население пребывало в бедности, а промышленность – в упадке. Попирались права человека, не соблюдались основные свободы, такие как свобода слова. При этом некоторые отрасли науки (в том числе математика), процветали, и достижения в исследованиях были сравнимы или даже превосходили успехи остального мира. В чем были причины такого прогресса?

Во-первых, исследования в таких областях как физика и математика пользовались мощной государственной поддержкой. Главным образом это объясняется военно-промышленными мотивами. Власть была убеждена, что успех в получении атомной бомбы, в соревновании за освоение космоса и т.п. может быть достигнут только при условии развития основополагающих научных дисциплин. Поэтому получали поддержку фундаментальные, равно как и прикладные исследования. Обычно математики и физики не имели проблем с финансированием работ. Существовало много научных институтов, не связанных с обучением студентов, в которых сотрудники могли сконцентрироваться на чисто теоретических исследованиях, почти не имея ограничений на длительность работ и строгих обязательств добиться того или иного результата. Такая свобода творческого поиска в комбинации с гарантированным пребыванием в должности для ученых всех уровней, порой приводили к выдающимся достижениям.

Во-вторых, в СССР существовала хорошая традиция преподавания математики. Зачастую уровень преподавания математики в советских школах был выше, чем в школах США. Более того, для талантливых школьников существовала специальная система математических кружков, которые вели студенты и профессора университетов. Каждый год проводились олимпиады всевозможных уровней. Я с восторгом вспоминаю один такой кружок (в Московском государственном университете) и Московские математические олимпиады. Они определили мое професиональное будущее. Математические факультеты некоторых университетов были в высшей степени поразительны. Например, концентрация выдающихся математиков XX века на математическом факультете МГУ в 1960х годах не имеет аналогов в мире: А. Колмогоров, И. Гельфанд, Л. Понтрягин, П. Александров, А. Тихонов, Л. Люстерник, В. Арнольдь, Ю. Манин, С. Новиков, Я. Синай, Р. Добрушин и многие другие. Эти ученые руководили постоянными семинарами, в которых участвовали многие старшекурсники, что давало им необыкновенную возможность общаться со столь легендарными фигурами, а также рано включаться в исследовательскую работу.

В-третьих, обучение в университетах было бесплатным, и в принципе студент со скромными средствами из провинциального городка поступал учиться в лучший, Московский университет, если только успешно сдавал вступительные экзамены. Учебники и книги были предельно дешевы и публиковались большими тиражами. Например, цена на учебник “Математическое программирование” В. Карманова была 44 копейки (около 70 центов), а тираж только одного издания составлял 60 000 экземпляров. Популярная книга В. Тихомирова “Рассказы о максимумах и минимумах” стоила 35 копеек при тираже 160 000 экземпляров [1, 2].

Еще одна причина: для честолюбивых молодых людей было не так много возможностей сделать карьеру. Вспомните, что не было тогда таких профессий как бизнесмен, менеджер, банкир или программист. Было невозможно стать политиком, судьей или дипломатом, не будучи членом Коммунистической парии. Более того, не было надежды честно заниматься исследованиями в большинстве гуманитарных наук, почти все они были политизированы и наполнены марксисткой терминологией. Таким образом, карьера математика была одной из немногих свободных от идеологического давления.

Однако у этой идиллической картины была и темная сторона. “Железный занавес" - не одна только метафора, это было реальное препятствие к международным контактам. Академик Н.Н. Лузин был подвергнут унизительной травле после публикации его статей в западных жупналах в 1936 г. [3]. Когда в конце 1940х гг. профессор Я.З. Цыпкин получил письмо от американского читателя его статьи, он был вызван в КГБ, было устроено длительное расследование по этому поводу, и дело едва не дошло до ареста. Конечно, в 1950-60х гг. ситуация была не столь драматична, но оставалось еще много трудностей. Даже если ученый был приглашен для участия в конференции за рубежом, с покрытием всех соответствующих расходов, это еще ничего не означало. Во-первых, существовал "черный список" ученых, которых не выпускали за рубеж ни при каких обстоятельствах. Причиной могла быть диссидентская деятельность ученого (например, если он подписал протест против насильственного помещения математика А. Есенина-Волпина в психиатрическую клинику; детали, касающиеся этого письма, изложены в [4]), его национальность, его несанкционированные контакты с иностранцами. Но даже если ученый не состоял в этом списке, он обязан был пройти длинную и унизительную процедуру, и без всякой гарантии успеха. Он должен был получить рекомендацию от своего местного комитета партии и от ректора университета (характеристику), затем кандидатура утверждалось специальной "выездной комиссией" регионального комитета партии, затем требовалось разрешение КГБ, и наконец, он должен был пройти проверку ЦК КПСС. В качестве иллюстрации, позвольте мне рассказать одну забавную историю, случившуюся со мной. Я был в "черном списке" и не имел шансов поехать за рубеж. Однако в 1970 г. Я сделал попытку. Речь шла о IX Международном симпозиуме по математическому программированию в Будапеште, где я был приглашен сделать пленарный доклад. Мне повезло, и я получил разрешение (возможно, в том случае это было проще, потому что Венгрия входила в Восточный блок). К несчастью, гуляя в горах перед поездкой, я сломал ногу. Однако желание участвовать в симпозиуме было настолько сильным, что я был готов ехать, невзирая на проблемы со здоровьем. Итак, я прибыл для получения последних инструкций и паспорта. Однако бдительный сотрудник взглянул на мои костыли и сказал: "Предоставьте мне разрешение врача, что вы можете ехать за границу." Хорошо, я получил такое разрешение и принес его бюрократу. "Нет, я вам отказываю," - объявил он. "Почему?" - прошептал я. "Какое впечатление вы произведете на иностранных ученых? Что советская наука стоит на костылях?" И я вынужден был остаться в Москве...

Однако визиты за рубеж были не единственной стороной научной жизни, которая сильно зависела от решений представителей власти. Продвижение в должности, защиты кандидатских и докторских диссертаций, выборы в Академию Наук, получение различных наград – все было под партийным контролем, и не было никакого шанса добиться успеха без соответствующего одобрения. Во многих случаях отказ в одобрении объяснялся не личными и профессиональными качествами, а данными анкеты (при поступлении на работу каждый должен был заполнить детальную стандартную анкету). Например, знаменитым стал "пятый пункт" анкеты, о национальности. Если вам выпало несчастье быть евреем, то ваша карьера была существенно ограничена. Конечно, я не могу осветить эту важную тему во всех деталях, заинтересованный читатель может найти больше информации в [5-7]. И многие блестящие ученые, в частности в области математического программирования, были вынуждены эмигрировать из-за этих оскорбительных ограничений.

Еще одним источником трудностей для исследователей была мания секретности. Никто не мог опубликовать статью без специального разрешения, подтверждающего, что публикация не противоречит многочисленным ограничениям, связанным с безопасностью. Все письма за границу (а также и из-за границы) вскрывались, и их содержимое проверялось. Каждый, кто отправлялся на международную конференцию, должен был иметь специальное разрешение, и полный текст его доклада должен был быть утвержден. А работа в закрытом институте (что случалось со многими специалистами в области математического программирования), радикально усложняла ситуацию.

Список невзгод советской науки выглядит слишком длинным... Чтобы закончить, позвольте мне упомянуть последнюю (но, возможно, не наименьшую) трудность. Большинство областей науки имели строгую иерархическую структуру. Некий "большой шеф" держал в своих руках все важные решения (поездки за рубеж, выборы, награды, продвижения на высокие должности, и т.д.). Например, таким главой в области численного анализа был академик А.Н. Тихомиров. За ним следовали "местные шефы", принимавшие решения на локальном уровне (назначения на должности среднего уровня, защиты кандидатских диссертаций, и т.п.). К счастью, в области математического программирования не было такой сильной монополизации. Может быть, отсутствие единого всевластного лидера сделало советское математическое программирование более конкурентоспособным и привело к значительным успехам в этой области.

Излишне говорить, что все упомянутые ограничения и трудности имели свою динамику. Ситуация в 1940х - середине 1950х гг. была наихудшей. Злая воля представителя власти могла привести ученого в ГУЛАГ. Период 1955-

1970 гг. был наименее тягостным, это был “золотой век” советской математики [8], и в том числе для математического программирования это было лучшее время. Годы с 1970 по 1985 были периодом застоя в политической, социальной, экономической и научной жизни. Все невзгоды, упомянутые мною выше, играли все более и более заметную роль в развитии советской науки и привели ее, таким образом, к деградации.

Теперь, после этих вводных замечаний, ориентированных на западного или молодого читателя (российские читатели моего поколения слишком хорошо знакомы со всеми этими особенностями советской научной жизни и могут многое добавить к моему описанию, пользуясь своим собственным опытом), мы можем перейти к исторической перспективе развития математического программирования в СССР. Корни этого развития лежат в предшествующих столетиях, и мы можем повторить за Ньютоном: “Мы стоим на плечах гигантов”.

2. Предыстория

Первый ученый, занимавшийся оптимизацией в России, был истинный гигант.

Леонард Эйлер, 1707-1783, жил в Росси в 1727-1741 и в 1766-1783 гг. (в целом более 30 лет), и опубликовал около 850 статей и книг. Его биография и описание его работ изложены в [9]. Эйлер понимал роль задач оптимизации; он писал: *«Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи методов максимума и минимума...”* ([10], Приложение 1). Он внес важный вклад в развитие различных областей теории и методов оптимизации. Во-первых, он получил необходимые и достаточные условия оптимальности высших порядков в задаче без ограничений. Во-вторых, он был одним из основателей *вариационного исчисления*. В этом направлении он получил несколько фундаментальных результатов, таких как необходимое условие экстремума (называемое теперь *уравнением Эйлера*). Кроме того, он предложил применять *дискретные аппроксимации* к решению задач вариационного исчисления, что можно рассматривать как первый численный метод решения оптимизационных задач. Наконец, Эйлер рассмотрел *изопериметрические задачи вариационного исчисления*, трактуя их в очень широком смысле, что представляет собой первое исследование в области оптимизации с ограничениями. В XIX веке неформальным продолжателем работ Эйлера стал один из выдающихся российских математиков.

П.Л. Чебышев, 1821-1894. В области оптимизации он ввел то, что теперь называется *Чебышевская аппроксимация.* В простейшей форме, это задача

$$\min_x \max_{t \in T} |a(t) - \sum_i x_i f_i(t)|.$$

Сегодня мы можем сказать, что это пример задачи *выпуклой негладкой оптимизации*, а точнее, *полубесконечного программирования.* Чебышев нашел аналитическое решение для некоторых частных случаев (для $a(t) = 1$, $f_i(t) = t^i$, $T = [0, 1]$, решение - *полином Чебышева*) и дал общую характеристику оптимальной аппроксимации. Он также исследовал множество других задач оптимизации, возникших частью из практических нужд (например построение наименее искаженной географической карты, оптимальный раскрой, наилучший выбор параметров механических устройств для черчения кривых). Как и Эйлер, Чебышев понимал важность и разнообразие экстремальных задач. В частности, он утверждал: "та же задача является общей для всей практической деятельности человека: как распределить наши ресурсы так, чтобы получить наибольшую возможную прибыль? Решение таких задач составляет предмет так называемой теории максимальных и минимальных количеств. Эти задачи, являясь чисто практическими, имеют особое значений и для теории: все законы управляющие движением взвешенного и невесомого вещества, являются решениями задач такого рода. Мы не должны не заметить их плодотворного влияния на развитие математических наук".

Исследования Чебышева в области экстремальных задач продолжили два его великих последователя.

А.А. Марков, 1856-1922, известен своими работами в области теории чисел и теории вероятностей (*Марковские цепи, Марковские процессы*). В то же время, он внес вклад и в развитие некоторых областей оптимизации. Например, он рассмотрел так называемую *проблему моментов*

$$\min \int_a^b t^n f(t) dt,$$

$$0 \le f(t) \le L, \;\; \int_a^b t^i f(t) dt = c_i, \;\; i = 1, ..., n-1.$$

Это нестандартная задача оптимизации с интегральными функционалами цели и ограничений (не содержащая производных, в отличие от задачи вариационного исчисления). Он также является автором *неравенства Маркова*, представляющего собой решение следующей задачи:

$$\max_{P(x)\in\Pi}\max_{a\le x\le b}|P'(x)|$$
$$|P(x)|\le M,\ \ a\le x\le b,$$

где Π - множество всех полиномов степени не более n.

Ф.М. Ляпунов, 1857-1918. На первый взгляд, его работы не имели отношения к оптимизации. На самом деле это не совсем так. Ляпунов разработал теорию устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений; ее простейшее утверждение состоит в следующем: решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}=f(x)$$

устойчиво, если существует функция $V(x)$ (*функция Ляпунова*) такая, что

$$(\nabla V(x), f(x))<0.$$

Мы можем взглянуть на это иначе. Вышеприведенное дифференциальное уравнение – это непрерывный по времени метод минимизации $V(x)$. Таким образом, перед нами систематический инструмент для проверки сходимости численных методов оптимизации.

3. Пионер

Л.В. Канторович, 1912-1986. Он закончил Ленинградский Университет в возрасте 18 лет и стал профессором в 22 года, свою первую работу он опубликовал, когда ему было 16. Он удостоился необычной комбинации наград: Сталинская премия (1949 г.), Ленинская премия (1965 г.) и Нобелевская премия (1975 г.). Биографические данные о Канторовиче, включая его автобиографию *"Мой путь в науке"*, можно найти в томе [13], опубликованном на английском языке, а также в [14-16]. Канторович внес значительный вклад в численные области функционального анализа, он стал одним из основателей численного анализа в нашей стране, он был одним из первых, кто признал информатику как новую ветвь математики. Однако для всякого, кто занимается математическим программированием, он несомненно отец новой науки *ОПТИМИЗАЦИИ*, которая включает стандартное математическое программирование. Именно с его именем связаны следующие три прорыва в оптимизации:

- линейное программирование, 1939 г.;

- общие условия оптимальности, 1940 г.;
- техника функционального анализа, 1939–1948 гг.

Рассмотрим кратко каждый из них.

3.1. Линейное программирование

В 1939 г. Л.В. Канторович опубликовал маленькую книжку (всего 67 страниц) [17], в которой рассматривался новый тип оптимизационных задач. Формы записи этих задач были иными, чем стандартная формулировка задачи линейного программирования. Гораздо позже, в [20] Канторович утверждает, что модель, рассматриваемая в западной литературе, есть частный случай его модели; эквивалентность различных формулировок задачи линейного программирования не всем была понятна в то время. Книга эта появилась в ответ на вопросы инженеров и экономистов и не была основана на предыдущих исследованиях автора или других математиков. В книге приведено много практических приложений, а также изложены идеи численных методов, основанных на двойственных переменных (называемых "разрешающими множителями").

Однако революционная книга не получила заметного отклика среди экономистов и математиков! Тому было несколько причин. Во-первых, при тоталитарной системе, существовавшей в Советском Союзе, не возникало спроса на математические методы. В противоположность первой фразе из [20]: "Планирование национальной экономики или ее отдельных отраслей в масштабе государства возможно только при условии, что частная (капиталистическая) собственность на средства производства будет заменена на народную (социалистическую) собственность," социалистическая система была основана на волюнтаристских, административных методах. Идеи "высшей рациональности" (то есть то, что выгодно лидерам страны в данный момент) превалировали над здравым смыслом и разумными рассуждениями (см. раздел 5.1.7 ниже). Во-вторых, книга не была написана как математический текст, и поэтому математики не обратили на нее внимания. Это был просто набор примеров, объяснений терминов и несложных вычислений. Первая строгая математическая статья по общей задаче линейного программирования была опубликована Канторовичем только в 1957 г. Его вторая книга по линейному программированию [20] вышла в свет в 1961 г. Она содержала два математических приложения (написанных в соавторстве с Г. Рубинштейном), в которых давалась математическая формулировка задачи линейного программирования и приводились численные методы ее решения; однако основное усилие было направлено на обеспечение совместимости с марксистской догмой. Например, двойственные переменные назывались "*объективно обусловленными оценками*" (о.о.о.), а не "ценами".

3.2. Общие условия оптимальности

В [18] Канторович рассмотрел самую общую задачу условной оптимизации в топологическом пространстве:

$$\min_{x \in Q} f(x).$$

Здесь $f(x)$ – дифференцируемый функционал в топологическом пространстве X, $Q \subset X$ – множество, которое допускает выпуклую коническую аппроксимацию K в точке $x^* \in Q$. Для такой задачи Канторович получил следующее необходимое условие экстремума.

Теорема. *Если x^* - точка минимума, то $f'(x^*) \in K^*$.*

В этой теореме $f'(x)$ обозначает градиент функции $f(x)$, а K^* - конус, сопряженный к K. Удивительно, но эта блистательная статья также не встретила отклика. Возможно, потому, что она опередила свое время.

3.3. Техника функционального анализа

Первая статья о сходимости итеративного метода минимизации квадратичного функционала была опубликована Канторовичем в 1939 году. Позднее (1944, 1945, 1947гг.) он продолжил это исследование. Результаты были обобщены в большой статье [19], опубликованной в 1948 г. в ведущем советском математическом журнале "*Успехи математических наук*". Среди многих других результатов, связанных с численным анализом, статья содержала доказательства сходимости (и оценки скорости сходимости) метода наискорейшего спуска для квадратичного функционала и метода Ньютона для функциональных уравнений. Помимо этих практических результатов, статья демонстрировала успешное применение приемов функционального анализа к задачам оптимизации. Эта работа установила высокий уровень стандартов к обоснованию численных методов в оптимизации.

4. Пятидесятые: появление новой науки

К началу 1950х годов в области экстремальных задач появилось несколько направлений исследований.

Несколько работ были посвящены *линейным неравенствам, Чебышевским аппроксимациям несовместных систем линейных уравнений* и связанным вопросам. С.Н. Черников исследовал теорию *линейных неравенств* ("принцип граничных решений", описывающий вершины множества решений). Двое украинских ученых, Е.Я. Ремец и С.И. Зуховицкий предложили *конечные методы нахождения наилучшей Чебышевской аппроксимации*; фактически эти методы были алгоритмами, подобными симплекс-методу, для решения соответствующих задач линейного программирования (прямых или двойственных). Это исследование обобщено в монографиях [21-23], опубликованных гораздо позже, чем оригинальные работы. Например, первая книга (на украинском языке) по численным методам Чебышевских аппроксимаций была написана в 1935 г.

В это же время, благодаря научным школам Н.И. Ахиезера и М.Г. Крейна, был достигнут значительный прогресс в исследовании оптимизационных задач, связанных с *проблемой моментов Маркова* [24,25].

Одновременно были начаты интенсивные исследования в области *линейного программирования*. Г.Ш Рубинштейн, бывший студент Л. Канторовича опубликовал первую строгую математическую формулировку задач линейного программирования и их анализ на русском языке в 1955 [26]. В Советском Союзе стали известны результаты западных ученых (Дж. Данцига, Х. Куна, А. Таккера, Д. Гейла и др.) по линейному программированию. Важную роль в этом процессе сыграли переводы оригинальных работ на русский язык, первым из которых был перевод [27]. Появились русские учебники по линейному программированию и смежным вопросам. Первыми публикациями по матричным играм были работы Н.Н. Воробьева и Е.С. Вентцель [29], а первый русский учебник по линейному программирования был написан Д.Б. Юдиным и Е.Г. Гольштейном [28].

Важные события происходили в области автоматического управления. В 1956 г. Л.С. Понтрягин с соавторами дали новую формулировку задачи *оптимального управления* и получили новое необходимое условие оптимальности, так называемый *принцип максимума*. Это было далеко идущее продолжение результатов в области вариационного исчисления [30].

Как читатель может заключить, это было время высокой активности. Однако полученные результаты были разрознены и не рассматривались как части единой научной дисциплины. Есть ли какая-либо связь между линейным программированием и оптимальным управлением, между проблемой моментов и Чебышевской аппроксимацией или между численными методами безусловной оптимизации и методами решения линейных неравенств? В 50х годах типичный ответ был отрицательный.

5. Шестидесятые: золотой век

К началу 1960х годов ситуация коренным образом изменилась. Время пришло; все части головоломки были готовы сложиться в прекрасную целостную картину и немедленно привлечь в нее калейдоскоп новых деталей.

5.1. Основные направления исследований

5.1.1. Общая теория экстремальных задач. Первым прорывом в это время стало понимание общей природы различных оптимизационных задач. В статье Канторовича [18] впервые формулируется схема анализа экстремальных задач, однако в ней не содержится никаких методов определения общих условий оптимальности для отдельных задач. Этот недостаток восполнил *формализм Дубовицкого-Милютина* [31]: теорема о конусе, сопряженном к пересечению нескольких конусов, стала эффективным инструментом для формулировки необходимых условий экстремума в единообразной манере. Этот подход хорошо работал для широкого класса оптимзационных задач, упомянутых выше: задач линейного программирования, оптимального управления, теории аппроксимаций и многих других. Более того, он дал возможность получить новые условия оптимальности для некоторых трудных задач (например для задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные). Данная техника стала широко использоваться советскими исследователями, и в ее популяризации большую роль сыграла книга [33] И. Гирсанова. Позднее В. Болтянский [32] расширил подход и назвал его *методом шатров*.

Другой подход, разработанный Б. Пшеничным в середине 60х годов (и представленный в его книгах [34, 35]), основан на методах *выпуклого анализа*. Он также использовал инструменты функционального анализа для получения необходимых и достаточных условий оптимальности. Эту линию исследований продолжила фундаментальная монография А. Иоффе и В. Тихомирова [37]. Аналогичные исследования на западе выполняли Р.Т. Рокафеллар, Л. Нейштадт, Х. Халкин, Л. Берковитц, И. Варга и другие.

Общая *теория двойственности* для задач выпуклой оптимизации была разработана Е. Гольштейном [36].

5.1.2. Численные методы для общих экстремальных задач. Параллельно с разработкой общей теории экстремальных задач возникло понимание, что численные методы их решения также могут рассматриваться в единой системе. В публикациях [38, 39] приводятся численные градиентные методы безусловной оптимизации и их расширения для оптимизации с ограничениями: *методы проекции градиента, условного градиента, метод Ньютона для задачи с ограничениями, методы отсекающих плоскостей, штрафной функции* и некоторые другие. Доказываются общие теоремы о сходимости и о скорости сходимости этих методов на задачах конечной и бесконечной размерностей, рассматриваются многочисленные приложения (к стандартной задаче математического программирования, задачам оптимального управления, полубесконечного программирования, и т.д.). Это направление исследований оставалось некоторое время очень активным (см. например монографии [40-42]).

5.1.3. Негладкая оптимизация. Методы оптимизации традиционно разрабатывались для дифференцируемых функций и основывались на градиентных аппроксимациях. Н. Шор первым использовал этот подход в негладкой выпуклой оптимизации. В своей кандидатской диссертации (1964) он предложил субградиентный метод для оптимизации недифференцируемых функций и применил его к численному решению задачи, двойственной к транспортной задаче линейного программирования. Позднее этот подход был расширен и обоснован Н. Шором, Ю. Ермольевым и Б. Поляком [44-46]. Монография [47] обобщает эти исследования, см. также [43].

Другой метод, так называемый *метод центров тяжести* был предложен А. Левиным [48] (и независимо Ньюманом в США). Позднее было доказано, что он является оптимальным относительно порядка сходимости среди всех методов негладкой выпуклой оптимизации, которые используют только значения субградиента, однако он включал трудоемкую операцию нахождения центра тяжести многогранника.

В. Демьянов разработал многочисленные методы для отдельных классов задач негладкой оптимизации, преимущественно для *минимаксных задач* [49,50].

5.1.4. Стохастическая оптимизация. Зачастую значения функций и их градиентов искажены случайным шумом. В таких ситуациях требуется модифицировать эффективные методы оптимизации, чтобы сохранить их сходимость. Это можно добиться путем усреднения или путем регулирования шага в итеративных методах, аналогично тому, как это делается в методах *стохастической аппроксимации* в статистике. Такой пересмотр методов минимизации при случайном шуме был предпринят Ю. Ермольевым [51]. Многочисленные приложения итеративных стохастических алгоритмов к задачам идентификации, оценки, распознавания образов и т.д. приведены в книге Я. Цыпкина [52].

Иногда случайность специально включается в процесс минимизации, как, например, в методах *случайного поиска*. Активным сторонником таких методов был Л. Растригин [53].

В области *стохастического программирования* (в том смысле, как этот термин понимается в западной литературе) происходило не так уж много событий, и тем не менее появился учебник, написанный Д. Юдиным [54].

5.1.5. Линейное программирование и связанные вопросы. После долгого перерыва в СССР возобновились исследования в этой области. Они были сосредоточены на разработке *программного обеспечения* для реализации *симплекс-метода* и его вариантов (И. Романовский, У. Малков, К. Ким, А. Черкасский, В. Скоков, А. Станевичус и др.), численных методов решения специальных классов задач линейного программирования (*транспортная задача, методы декомпозиции, Чебышевские аппроксимации*) [55] и *итеративных методов* линейного программирования [56-58]. Судьба статьи [56] была особенно интересной. И. Дикин был учеником Канторовича, и в своей кандидатской диссертации он строго сформулировал эвристические правила, которые его руководитель предложил для численного решения задач линейного программирования. Дикин доказал сходимость итеративного алгоритма, но не смог оценить скорость его сходимости. Статья (как и ранние работы Канторовича, о которых мы говорили выше) не привлекла никакого внимания и была забыта до конца 1980х годов, когда было признано, что реализованная версия знаменитого алгоритма Кармаркара [65] очень близка оригинальному методу Дикина.

5.1.6. Дискретная оптимизация. Первая монография по дискретному программированию на русском языке была опубликована в 1969 году [59]. Усилия исследователей в этой области (Ю. Финкельштейн, А. Корбут, А. Фридман, Е. Левнер, И. Сигал, И. Сергиенко, В. Емеличев, А. Карзанов, Е

Диниц, С. Лебедев и др.) были направлены в основном на решение специальных классов комбинаторных задач.

5.1.6. Приложения. В начале 1960х гг. существовала весьма оптимистическая вера в практическую применимость идей оптимального планирования социалистических экономики и общества. Многие математики были убеждены, что с использованием моделей линейного программирования можно рассчитать оптимальные планы и цены. Однако реальные попытки применить этот подход провалились. Много историй об этом можно найти в [16]. Вот только одна из них. Используя работы Канторовича по оптимальному раскрою кусков заданной формы из прямоугольного листа, инженеры и экономисты фабрики, производившей стальные изделия, смогли значительно увеличить выпуск продукции. Однако они столкнулись с неожиданными неприятными последствиями. Во-первых, как результат, план на следующий год увеличился (для системы социалистического планирования было обычно требовать некоторого прироста производства продукции автоматически каждый год), но теперь у фабрики уже не было резервов, чтобы выполнить новый увеличенный план. Во-вторых, у каждого предприятия был план сбора металлолома. Очевидно, что в результате применения оптимальной стратегии раскроя, количество отходов стали уменьшилось, и этот план выполнить не удалось. Руководство фабрики получило партийный выговор и, как следствие, отказалось от дальнейшего сотрудничества с математиками. Гораздо позднее Канторович организовал и руководил работой специальной комиссии, чтобы исследовать возможности применения оптимизационных моделей в советской экономике. Основной целью было найти примеры их успешного использования и распространить этот опыт на другие отрасли производства и обслуживания. После обширного исследования, комиссия констатировала, что такой положительный опыт совершенно отсутствует.

5.2. Главные научные центры

В отличие от США, где огромное число научных сообществ распределены по многим университетам, государственным и промышленным исследовательским институтам, работы по математическому программирования в СССР были сконцентрированы лишь в нескольких научных центрах.

Москва: Московский государственный университет (И. Гирсанов, В. Тихомиров, Б. Поляк, Ф. Васильев), лаборатория Юдина в закрытом исследовательском институте (Д. Юдин, Е. Гольштейн, позднее А. Иоффе, А. Немировский), Центральный экономико-математический институт (Е. Гольштейн, позднее В. Скоков, Н. Третьяков, Ю. Нестеров), Вычислительный центр АН СССР (Н. Моисеев, Ю. Евтушенко, позднее Л. Хачиян, А. Антипин), другие институты (А. Дубовицкий, А. Милютин);

Киев: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова (Ю. Ермольев, Б. Пшеничный, Н. Шор, В. Михалевич, Е. Нупминский), другие институты (С. Зуховицкий, Р. Поляк, М. Примак);

Новосибирск: Институт математики и Новосибирский государственный университет (Л. Канторович, Г. Рубинштейн, И. Дикин, В. Булавский, А. Рубинов, А. Каплан);

Ленинград: Ленинградский государственный университет (В. Демьянов, И. Романовский, А. Вершик).

Кроме этих четырех центров, исследования велись в некоторых провинциальных городах, таких как Харьков (Ю. Любич, Г. Майстровский), Свердловск (И. Еремин), Иркутск (В. Булатов), Минск (Р. Габасов, Ф. Кириллова, позднее Б. Мордухович), Воронеж (М. Красносельский, А. Левин), и пр.

5.3. Основные журналы

Публикации по математическому программирования появлялись в различных журналах. Ниже приводится список основных журналов.

- Журнал вычислительной математики и математической физики, Москва; журнал по численному анализу.
- Кибернетика, Киев; журнал по информатике, теории систем и оптимизации.
- Экономика и математические методы, Москва; журнал по математической экономике.
- Автоматика и телемеханика, Москва; журнал по управлению.
- Доклады АН СССР, Москва; все области науки.

Однако у нас никогда не было специального журнала по математическому программированию!

5.4. Главные события

Жизнь оптимизационного сообщества в 1960х гг. была насыщена профессиональными событиями. Назовем лишь несколько важнейших.

- Семинары и курсы лекций по оптимизации в МГУ, с 1961 г. , И. Гирсанов, В. Тихомиров, Б. Поляк;
- Семинары и лекции в Киеве, с 1960 г., С. Зуховицкий, Б. Пшеничный, Н. Шор;
- Международный конгресс математиков, Москва, 1966 г. В то время это был первый случай общения с западными специалистами, и он сыграл важную роль в нашем вовлечении в международное сообщество;
- Зимние школы по математическому программированию и смежным вопросам в Дрогобыче. Проводились ежегодно с 1968 г. под председательством С. Зуховицкого. В некоторые годы они собирали до 500 (!) участников;
- Летние школы по оптимизации, проводились с 1966 г. под председательством Н.Н. Моисеева;
- All-Union Symposia on Optimal Programming Software, проводились с 1970 г. под председательством Е. Гольштейна;
- Всесоюзные конференции по математическому программированию;
- Всесоюзные симпозиумы по экстремальным задачам, с 1963 г.;
- Всесоюзная конференция по численному анализу, 1965, Москва, многие сессии были посвящены оптимизацтонным задачам.

6. 1970-80е годы: новые направления

Как я отмечал ранее, период после 1970х годов характеризовался постепенным сокращением многих исследовательских областей в СССР, коснулось это и математического программирования. К тому было много внутренних причин (специфика развития любой науки), а также и общая атмосфера застоя советского общества сыграла свою неизбежную роль. Как бы то ни было, жизнь сообщества стала менее активной (проводилось меньше конференций по оптимизации, они собирали меньше участников, появлялось меньше новых идей, и т.д.). Тем не менее, в это время произошло несколько прорывов, и я назову некоторые из них.

6.1. Сложность оптимизационных задач и эффективные методы оптимизации

В серии публикаций 1976-1979 гг. (обобщенных в монографии [60]) А. Немировский и Д. Юдин ввели новое понятие *сложности оптимизационных задач.* Их подход заключался в следующем. Рассмотрим семейство оптимизационных задач, снабженных *оракулом*, т.е. некоторым источником информации о том или ином отдельном элементе семейства. Например, мы рассматриваем класс задач безусловной минимизации гладкой строго выпуклой функции. Тогда оракул дает значение минимизируемой функции и ее градиента в любой точке. Каковы потенциальные возможности произвольного метода, использующего эту информацию? Немировский и Юдин установили нижние границы для различных классов оптимизационных задач. Например, они обнаружили, что для упомянутого класса задач безусловной минимизации гладкой строго выпуклой функции не существует метода, который дает решение с относительной погрешностью ν за менее, чем $O(\sqrt{Q}\ln 1/\nu)$ вычислений градиента, где Q – отношение константы Липшица градиента к константе строгой выпуклости. Аналогичные результаты были получены для классов липшицевых непрерывных (многоэкстремальных) задач, общих выпуклых задач, задач стохастической оптимизации (где оракул дает значение градиента, искаженное случайным шумом), и др.

Таким образом, авторам удалось найти *эффективные методы* минимизации. Действительно, если метод имеет сложность, совпадающую по порядку с нижней оценкой, то он оптимален, т.е. не существует других методов, которые решают все задачи класса быстрее (в отношении порядка). Заметим, что понятие сложности в [60] отличается от стандартной асимптотической скорости сходимости – это не асимптотическое свойство. Серьезный вклад в теорию эффективных методов был сделан Ю. Нестеровым [61]. Так, он нашел оптимальный метод минимизации гладких выпуклых (не обязательно строго выпуклых) функций.

6.2. Метод эллипсоидов и полиномиальная сложность задач линейного программирования

Выше я упоминал метод “центров тяжести” А. Левина [48] для минимизации недифференцируемых выпуклых функций. В 1976 г. Юдиным и Немировским [62], а год спустя независимо Н. Шором [63] была предложена реализуемая версия этого метода (в которой вспомогательная задача нахождения центра тяжести многогранника заменена тривиальной задачей нахождения центра описанного эллипсоида). На основе этого метода эллипсоидов Л. Хачиян построил итеративный метод решения задач линейного программирования, для которого была доказана *полиномиальная сложность* [64]. Таким образом, вопрос: является ли задача линейного программирования NP-сложной или нет, остававшийся долгое время открытым, был решен.

6.3. Полиномиальные методы внутренних точек и полуопределенное программирование

Несмотря на свою надежность с точки зрения сложности, метод эллипсоидов для задач линейного программирования не стал соперником симплекс-методу. Истинный вычислительный прогресс связан с методом Кармаркара [65]. Продолжая эту линию исследований, Ю. Нестеров и А. Немировский значительно расширили подход в серии статей, опубликованных в 1987-1989 гг. и обобщенных позднее в монографии [66]. Они построили *полиномиальные методы внутренних точек* для различных классов задач выпуклого программирования. Более того, они разработали общие понятия и приемы (*самосогласованные функции, барьеры*) для такого расширенного подхода. Одним из значительных вкладов этих математиков стало исследование задач *полуопределенного программирования*, т.е. задач оптимизации, в которых в качестве ограничения фигурирует требование неотрицательной определенности некоторых матриц. Они получили полиномиальный алгоритм решения таких задач, основанный на методах внутренних точек с самосогласованными барьерными функциями. Эти работы открыли новую эру в математическом программировании. Более того, один из классов задач полуопределенного программирования, так называемые *линейные матричные неравенства*, нашел многочисленные применения в управлении [68].

6.4. Развитие невыпуклого и негладкого анализа

Приемы общего анализа, появившиеся в 1960х гг. для задач оптимизации, были разработаны на основе или классического исчисления (для гладких задач), или выпуклого анализа (для негладких выпуклых задач). Новые типы приложений требовали развития более сложных инструментов, которые получили название “*невыпуклый анализ*”. Один из наиболее успешных подходов в невыпуклом анализе был предложен Б. Мордуховичем [69], он основан на *методе метрических аппроксимаций*. А. Иоффе (например, см. [70]) избрал другой путь, он использовал расширение понятия *субдифференциал* на недифференцируемые отображения. Ю. Нестеров [61] разработал теорию *лексикографического дифференцирования*, которая позволила получить исчисление для негладких функций. Е. Левитин систематически исследовал *теорию возмущений* для задач гладкой и негладкой оптимизации [71].

7. Заключение

Я пишу эту статью после многих драматических событий в нашей стране, таких как развал СССР и конец коммунистической системы. Конечно, политические и экономические изменения сильно повлияли на ситуацию с наукой в России. Организация фундаментальных исследований не претерпела никаких изменений и, по-видимому, устарела. Недостаток государственного финансирования и отсутствие поддержки со стороны производства и бизнеса неизбежно ведет к медленному, но неуклонному сокращению исследовательских институтов. Поскольку нет больше прежних препятствий к отъезду за рубеж, многие специалисты предпочитают эмиграцию как способ решить свои личные проблемы. Сегодня лишь небольшая часть ученых, занимающихся математическим программированием, остается в стране. В России проводится очень мало семинаров и конференций, и математикам затруднительно посещать подобные мероприятия за рубежом, по причине недостаточного финансирования. Наконец, и это тоже немаловажно, – научная работа больше не привлекает молодых людей, и сообщество стареет.

Тем не менее, мне бы не хотелось заканчивать на столь пессимистической ноте. Я верю, что великие традиции математических исследований в России смогут преодолеть сегодняшние трудности, и наука возродится...

Автор благодарит многочисленных коллег и друзей за полезные обсуждения по теме данной статьи. Автор признателен П. Щербакову и А. Конн за помощь в подготовке текста.

Список литературы

[1] В.Г. Карманов *Математическое программирование.* М.: Наука, 1975, 272 с.

[2] В.М. Тихомиров *Рассказы о максимумах и минимумах.* М.: Наука, 1986, 190 с.

[3] *Дело академика Н.Н. Лузина.* Отв. ред. С.С. Демидов, В.В. Левшин, СПб: РХГИ, 1999, 310 с.

[4] А.С. Есенин-Волпин *Философия, логика, поэзия, защита прав человека.* М.: РГГУ, 1999, 450 с.

[5] G. Freiman *It Seems, I am a Jew.* South. Illinois Univ. Press, Feffer & Simons, Inc., 1980, 97 pp.

[6] A. Vershik *Admission to the mathematical faculty in Russia in the 1970s and 1980s.* - Math. Intelligencer, 1994, V. 16, N 4, p. 4-5.

[7] A. Shen *Entrance examinations to the Mekh-mat.* - Math. Intelligencer, 1994, V. 16, N 4, p. 6-10.

[8] S. Zdravkovska, P.L. Duren, eds. *Golden years of Moscow Mathematics.* Amer. Math. Soc. And London Math. Soc., 1993.

[9] А.П. Юшкевич *История математики в России до 1917 года.* М.: Наука, 1968, 592 с.

[10] L. Euler (1744): *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausannae et Genevae, 1744 (in Latin). Перевод с лат. Л. Эйлер *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле.* М-Л.: АН СССР, 1934.

[11] *Математика в СССР за сорок лет. 1917-1957.* М.: Физматгиз, 1959, т. 1, 1002 с., т.2, 819 с.

[12] *Математика в СССР. 1917-1957.* М.: Физматгиз, 1969, т. 1-2, 1579 с.

[13] L.J. Leifman, ed. *Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics: Acollection of Papers Dedicated to the Memory of Leonid Vital'evich Kantorovich.* Oxford University Press, 1990.

[14] I.V. Romanovskii *L.V. Kantorovich's works in mathematical programming.* In: M. Iri, K. Tanabe, eds., Mathematical Programming: Recent Developments and Applications. Tokyo, Kluwer, 1989, pp. 365-382.

[15] Л.В. Канторович *Мой путь в науке.* - Успехи мат. наук, 1987, т. 42, вып. 2, сс. 183-213.

[16] А. Каценелибойген *Л.В. Канторович: Политическая дилемма в научной деятельности.* - Экономика и математические методы, 1997, т.33, вып. 3, сс. 30-42.

[17] Л.В. Канторович *Математические методы организации и планирования производства.*, Л.: Изд.-во Ленинградского университета, 1939, 64 с.

[18] Л.В. Канторович *Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем.* - ДАН СССР, 1940, N 28, сс.212-215.

[19] Л.В. Канторович *Функциональный анализ и прикладная математика.* - Успехи мат. наук, 1948, т. 3, вып.6, сс. 89-185.

[20] Л.В. Канторович *Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов.* М.: Изд-во АН СССР, 1960, 347 с.

[21] С.Н. Черников *Линейные неравенства.* М.: Наука, 1968, 488 с.

[22] Е.Я. Ремез *Основы численных методов чебышевского приближения.* Киев: Наук.думка, 1969, 623 с.

[23] С.И. Зуховицкий *О приближении действительных функций в смысле П.Л. Чебышева.* - Успехи мат. наук, 1956, т.11, вып.2, сс.125-129.

[24] Н.И. Ахиезер *Классическая проблема моментов.* М.: Физматгиз, 1961, 310 с.

[25] М.Г. Крейн, А.А. Нудельман *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М.: Наука, 1973, 551 с.

[26] Г.Ш. Рубинштейн *Задача об экстремальной точке пересечения оси и многогранника.* - ДАН СССР, 1955, т. 115, N 3, с. 627-630

[27] *Linear Inequalities and Related Systems.* Kuhn, H., Tucker, A., eds., Ann. Math. Studies, No. 38, Princeton, Princeton Univ. Press, 1956. Перевод с англ. *Линейные неравенства и смежные вопросы* Г. Кун, А. Таккер, ред. М.: ИЛ, 1959.

[28] Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн *Задачи и методы линейного программирования.* М.: Сов. радио, 1964, 491 с.

[29] Е.С. Вентцель *Элементы теории игр.* М.: Физматгиз, 1959.

[30] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, З.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Физматгиз, 1961.

[31] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин *Задачи на экстремум при наличии ограничений.* - ДАН СССР, т. 149, N 4, 1963, с. 759-762.

[32] В.Г. Болтянский *Метод шатров в теории экстремальных задач.* - Успехи мат. наук, т. 30, вып. 3, 1975, с. 3-55.

[33] И.В. Гирсанов *Лекции по математической теории экстремальных задач.* М.: Изд-во МГУ, 1970, 118 с.

[34] Б.Н. Пшеничный *Необходимые условия экстремума.* М.: Наука, 1969, 152 с.

[35] Б.Н. Пшеничный *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* М.: Наука, 1980, 320 с.

[36] Е.Г. Гольштейн *Теория двойственности в математическом программировании и ее применения.* М.: Наука, 1971, 352 с.

[37] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров *Теория экстремальных задач.* М.: Наука, 1974, 479 с.

[38] Е.С. Левитин, Б.Т. Поляк *Методы минимизации при наличии ограничений.* - ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, N 5, с. 787-823.

[39] В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов *Приближенные методы решения экстремальных задач.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, 180 с.

[40] Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин *Численные методы в экстремальных задачах.* М.: Наука, 1975, 320 с.

[41] Ф.П. Васильев *Лекции по методам решения экстремальных задач.* М.: Изд-во МГУ, 1974, 374 с.

[42] Б.Т. Поляк *Введение в оптимизацию.* М.: Наука, 1983, 384 с.

[43] N.Z. Shor (1991): *The development of numerical methods for nonsmooth optimization in the USSR.* In: Lenstra, J.K., RinnoyKan,A.H.G., Shrijver,A., eds., History of Mathematical Programming, Amsterdam, CWI, North-Holland, pp. 135-139.

[44] Ю.М. Ермольев *Методы решения нелинейных экстремальных задач.* - Кибернетика, N 4, 1966, с. 1-17.

[45] Б.Т. Поляк *Один общий метод решения экстремальных задач.* - ДАН СССР, т.174, N 1, 1967, с. 33-36.

[46] Б.Т. Поляк *Минимизация негладких функционалов.* - ЖВМ и МФ, т. 9, N 3, 1969, с. 509-521.

[47] Н.З. Шор *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1979, 200 с.

[48] А.Ю. Левин *Об алгоритме минимизации выпуклых функций.* - ДАН СССР, 1985, т. 160, N 6, с. 1244-1247.

[49] В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972, 368 с.

[50] В.Ф.Демьянов, Л.В.Васильев *Недифференцируемая оптимизация.* М.: Наука, 1981, 384 с.

[51] Ю.М. Ермольев *Методы стохастического программирования.* М.: Наука, 1976, 240 с.

[52] Я.З Цыпкин *Адаптация и обучение в автоматических системах.* М.: Наука, 1968, 400 с.

[53] Л.А. Растригин *Статистические методы поиска.* М.: Наука, 1968, 376 с.

[54] Д.Б. Юдин *Задачи и методы стохастического программирования.* М.: Сов. Радио, 1979.

[55] Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин *Новые направления в линейном программировании.* М.: Сов. Радио, 1966, 524 с.

[56] И.И. Дикин *Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования.* - ДАН СССР, 1967, т. 174, N 4, с.747-748.

[57] Б.Т. Поляк, Н. В. Третьяков *Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации.* - Экономика и мат. методы, 1972, т.8, N 5, с. 740-751.

[58] В.З. Беленький, В.А. Волконский и др. *Итеративные методы в теории игр и программировании.* М.: Наука, 1974, 240 с.

[59] А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. *Дискретное программирование.* М.: Наука 1969, 368 с.

[60] А.С. Немировский, Д.Б. Юдин. *Сложность задач и эффективность методов оптимизации.* М.: Наука, 383 с.

[61] Ю.Е. Нестеров *Эффективные методы в нелинейном программировании.* М.: Радио и связь, 1989, 301 с.

[62] Д.Б. Юдин, А.С. Немировский *Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач.* - Экономика и мат. методы, 1976, т. 12, N 2, с. 357-369.

[63] Н.З. Шор *Методы отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования.* - Кибернетика, 1977, N 1, с.42-50.

[64] Л.Г. Хачиян *Полиномиальный алгоритм в линейном программировании.* - ДАН СССР, 1979, т. 244, N 5, с. 1093-1096.

[65] N. Karmarkar *A new polynomial-time algorithm for linear programming.* Combinatorica, 1984, N 4, pp. 373-395.

[66] Yu.E. Nesterov, A.S. Nemirovskii *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming.* Philadelphia, SIAM, 1994, 405 pp.

[67] R. Saigal, L. Vanderberghe, H. Wolkowitz, eds. *Handbook of Semidefinite Programming.* Waterloo, Kluwer, 2000.

[68] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* Philadelphia, SIAM, 1994, 193 pp.

[69] Б.Ш. Мордухович *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988, 359 с.

[70] A.D. Ioffe *Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mapping.* - Trans. Amer. Math. Soc., 1981, V. 266, N 1, pp. 1-56.

[71] Е.С. Левитин *Теория возмущений в математическом программировании и приложения.* М.: Наука, 1992, 360 с.