Note mathématique

Déterminants sphérique et hyperbolique de Cayley-Menger

DANIEL AUDET,
COLLÈGE DE BOIS-DE-BOULOGNE

1 Introduction

Il n'existe pas de formule qui établit une relation entre les longueurs des côtés d'un triangle. Autrement dit, elles peuvent prendre à peu près n'importe quelles valeurs, en autant que la plus grande des trois soit inférieure à la somme des deux autres. Un triangle étant formé par trois points, on peut se demander s'il en est de même pour quatre points dans un plan. Autrement dit, les 6 distances formées par quatre points dans un plan sont-elles indépendantes ? La réponse est non car ces 6 distances d_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ sont liées par une relation donnée par un déterminant de Cayley-Menger.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.1}$$

On peut démontrer cette relation en factorisant la matrice de la façon suivante, où (x_i, y_i) sont les coordonnées du point i.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 0 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ 0 & -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & -2y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant des facteurs étant zéro, il en va de même pour le déterminant de Cayley-Menger. Ce déterminant est intéressant parce qu'il ne fait pas référence à un système de coordonnées pour décrire le plan et, de plus, parce qu'on peut montrer qu'il est caractéristique des espaces plats de dimension 2 [1].

Dans cette note, nous donnons des versions du déterminant de Cayley-Menger pour la géométrie sphérique et pour la géométrie hyperbolique. Ces déterminants sont donnés en dimension 2 mais il est facile de les généraliser en dimension quelconque. Puis, on montre que ces trois résultats sont trois cas particuliers d'un quatrième. Ce dernier est utilisé pour démontrer simultanément les versions planaire, hyperbolique et sphérique d'un théorème de Descartes.

2 Version sphérique

Il y a une relation triviale entre les trois angles formés par trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. Leur somme est 2π radians si la somme des deux plus petits est supérieure à π radians, sinon le plus grand angle est égal à la somme des deux plus petits. Il n'existe pas de formule qui établit une relation entre les trois angles formés par trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, ils peuvent prendre à peu près n'importe quelles valeurs, en autant que leur somme soit inférieure à 2π radians. Cependant, il y a une relation entre les 6 angles formés par quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette relation, donnée dans le théorème suivant, constitue une version sphérique du déterminant de Cayley-Menger.

Théorème 1 *Soit θ_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ les 6 angles formés par quatre vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Alors,*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) & \cos(\theta_{14}) \\ \cos(\theta_{12}) & 1 & \cos(\theta_{23}) & \cos(\theta_{24}) \\ \cos(\theta_{13}) & \cos(\theta_{23}) & 1 & \cos(\theta_{34}) \\ \cos(\theta_{14}) & \cos(\theta_{24}) & \cos(\theta_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1}$$

Démonstration Soit $\overrightarrow{v_i} = (x_i, y_i, z_i)$, où $1 \leq i \leq 4$, les quatre vecteurs en question. On peut supposer sans affecter les angles que ces quatre vecteurs sont unitaires. Alors $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \cos(\theta_{ij})$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) & \cos(\theta_{14}) \\ \cos(\theta_{12}) & 1 & \cos(\theta_{23}) & \cos(\theta_{24}) \\ \cos(\theta_{13}) & \cos(\theta_{23}) & 1 & \cos(\theta_{34}) \\ \cos(\theta_{14}) & \cos(\theta_{24}) & \cos(\theta_{34}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant des matrices du membre de droite de l'équation étant nul, il en va de même pour le déterminant de la matrice du membre de gauche de l'équation. □

L'équation (2.1) peut être facilement écrite en fonction des six distances d_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ formées par quatre points P_i $(1 \leq i \leq 4)$ à la surface d'une sphère de rayon r. Comme d_{ij} est l'arc de grand cercle passant par les points P_i et P_j, la mesure en radian de l'angle entre OP_i et OP_j est $\theta_{ij} = d_{ij}/r$ ou, pour la courbure $\kappa = 1/r$, $\theta_{ij} = \kappa d_{ij}$. D'où la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\kappa d_{12}) & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{14}) \\ \cos(\kappa d_{12}) & 1 & \cos(\kappa d_{23}) & \cos(\kappa d_{24}) \\ \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{23}) & 1 & \cos(\kappa d_{34}) \\ \cos(\kappa d_{14}) & \cos(\kappa d_{24}) & \cos(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2}$$

Le théorème suivant montre que si on ajoute le facteur $1/\kappa^6$ à la relation (2.2), alors on peut la prolonger continument en $\kappa = 0$ et ainsi unifier (1.1) et (2.2).

Théorème 2

$$\lim_{\kappa\to 0}\left(\frac{8}{\kappa^6}\begin{vmatrix} 1 & \cos(\kappa d_{12}) & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{14}) \\ \cos(\kappa d_{12}) & 1 & \cos(\kappa d_{23}) & \cos(\kappa d_{24}) \\ \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{23}) & 1 & \cos(\kappa d_{34}) \\ \cos(\kappa d_{14}) & \cos(\kappa d_{24}) & \cos(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Démonstration

$$\lim_{\kappa\to 0}\left(\frac{8}{\kappa^6}\begin{vmatrix} 1 & \cos(\kappa d_{12}) & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{14}) \\ \cos(\kappa d_{12}) & 1 & \cos(\kappa d_{23}) & \cos(\kappa d_{24}) \\ \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{23}) & 1 & \cos(\kappa d_{34}) \\ \cos(\kappa d_{14}) & \cos(\kappa d_{24}) & \cos(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lim_{\kappa\to 0}\left(\frac{8}{\kappa^6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cos(\kappa d_{12}) & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{14}) \\ 1 & \cos(\kappa d_{12}) & 1 & \cos(\kappa d_{23}) & \cos(\kappa d_{24}) \\ 1 & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{23}) & 1 & \cos(\kappa d_{34}) \\ 1 & \cos(\kappa d_{14}) & \cos(\kappa d_{24}) & \cos(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lim_{\kappa\to 0}\left(\frac{8}{\kappa^6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\cos(\kappa d_{12}) & 1-\cos(\kappa d_{13}) & 1-\cos(\kappa d_{14}) \\ 1 & 1-\cos(\kappa d_{12}) & 0 & 1-\cos(\kappa d_{23}) & 1-\cos(\kappa d_{24}) \\ 1 & 1-\cos(\kappa d_{13}) & 1-\cos(\kappa d_{23}) & 0 & 1-\cos(\kappa d_{34}) \\ 1 & 1-\cos(\kappa d_{14}) & 1-\cos(\kappa d_{24}) & 1-\cos(\kappa d_{34}) & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lim_{\kappa\to 0}\begin{vmatrix} \frac{\kappa^2}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{12})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{13})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{14})}{\kappa^2} \\ 1 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{12})}{\kappa^2} & 0 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{23})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{24})}{\kappa^2} \\ 1 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{13})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{23})}{\kappa^2} & 0 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{34})}{\kappa^2} \\ 1 & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{14})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{24})}{\kappa^2} & 2\frac{1-\cos(\kappa d_{34})}{\kappa^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

□

Maintenant, considérons un tétraèdre quelconque dont les vecteurs normaux unitaires sortants aux faces sont $\overrightarrow{v_i} = (x_i, y_i, z_i)$, où $1 \leq i \leq 4$. Alors les 6 angles θ_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ entre les vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ sont liés par la relation (2.1). Soit α_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ les 6 angles entre les quatre faces du tétraèdre. Alors $\theta_{ij} = \pi - \alpha_{ij}$ et la relation (2.1) devient

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{14}) \\ \cos(\alpha_{12}) & -1 & \cos(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{24}) \\ \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{23}) & -1 & \cos(\alpha_{34}) \\ \cos(\alpha_{14}) & \cos(\alpha_{24}) & \cos(\alpha_{34}) & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation fait écho à la relation entre les angles dans un triangle du plan. On en déduit que si le tétraèdre est rectangle $(\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \pi/2)$, alors

$$\cos^2(\alpha_{14}) + \cos^2(\alpha_{24}) + \cos^2(\alpha_{34}) = 1.$$

3 Version hyperbolique

La géométrie hyperbolique est, comme la géométrie sphérique, un exemple de géométrie non euclidienne qui vérifie les quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne, sauf le cinquième qui est remplacé par « *par un point extérieur à une droite donnée passe plus d'une droite parallèle* ».

Il y a plusieurs représentations du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ dont : le disque de Poincaré, le demi-plan de Poincaré et la représentation hyperboloïde (voir Beardon [2]), aussi appelée représentation de Lorentz. Les deux premières sont plongées dans $\mathbb{R}^2$, avec une métrique appropriée, alors que la dernière est plongée dans $\mathbb{R}^3$. C'est avec cette dernière qu'on trouvera une version hyperbolique du déterminant de Cayley-Menger.

1 Les points de $\mathbb{H}^2$ dans la représentation hyperboloïde sont les points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x > 0$ et

$$x^2 = 1 + y^2 + z^2.$$

2 Autrement dit, les points se trouvent sur la nappe $x > 0$ d'un hyperboloïde à deux nappes. La
3 métrique est donnée par la métrique de Minkowski

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

4 La distance hyperbolique $d(P_1, P_2)$ entre les points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ est donnée par

$$\cosh(d(P_1, P_2)) = x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \text{ (voir Beardon [2] p. 49).}$$

Il n'existe pas de formule qui établit une relation entre les trois distances formées par trois points dans $\mathbb{H}^2$, en autant que la plus grande des trois soit inférieure à la somme des deux autres. Autrement dit, ces distances peuvent prendre à peu près n'importe quelles valeurs. Cependant, il y a une relation entre les 6 distances formées par quatre points dans $\mathbb{H}^2$. Cette relation, donnée dans le théorème suivant, constitue une version hyperbolique du déterminant de Cayley-Menger.

Théorème 3 *Soit* d_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ *les 6 distances formées par quatre points dans* $\mathbb{H}^2$. *Alors,*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(d_{12}) & \cosh(d_{13}) & \cosh(d_{14}) \\ \cosh(d_{12}) & 1 & \cosh(d_{23}) & \cosh(d_{24}) \\ \cosh(d_{13}) & \cosh(d_{23}) & 1 & \cosh(d_{34}) \\ \cosh(d_{14}) & \cosh(d_{24}) & \cosh(d_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1}$$

Démonstration Soit (x_i, y_i, z_i), où $1 \leq i \leq 4$, les quatre points en question de $\mathbb{H}^2$ écrits dans la représentation hyperboloïde de $\mathbb{H}^2$. Donc $x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 = 1$ et $x_ix_j - y_iy_j - z_iz_j = \cosh(d_{ij})$, où d_{ij} est la distance hyperbolique entre le point i et le point j.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(d_{12}) & \cosh(d_{13}) & \cosh(d_{14}) \\ \cosh(d_{12}) & 1 & \cosh(d_{23}) & \cosh(d_{24}) \\ \cosh(d_{13}) & \cosh(d_{23}) & 1 & \cosh(d_{34}) \\ \cosh(d_{14}) & \cosh(d_{24}) & \cosh(d_{34}) & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant des matrices du membre de droite de l'équation étant nul, il en va de même pour le déterminant de la matrice du membre de gauche de l'équation. □

Remarquez que même si la preuve est faite dans la représentation hyperboloïde de $\mathbb{H}^2$, l'équation (3.2) est valide peu importe la représentation utilisée de $\mathbb{H}^2$.

Le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ est une variété riemannienne de dimension 2 dont la courbure est constante et égale à -1. Si on multiplie par un facteur $-1/\kappa$, où $\kappa < 0$, la longueur de l'étalon avec lequel on mesure les distances, alors on obtient une variété riemannienne dont la courbure est constante et égale à κ. Or, comme $\cosh(-\kappa d) = \cosh(\kappa d)$, la relation (3.1) devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(\kappa d_{12}) & \cosh(\kappa d_{13}) & \cosh(\kappa d_{14}) \\ \cosh(\kappa d_{12}) & 1 & \cosh(\kappa d_{23}) & \cosh(\kappa d_{24}) \\ \cosh(\kappa d_{13}) & \cosh(\kappa d_{23}) & 1 & \cosh(\kappa d_{34}) \\ \cosh(\kappa d_{14}) & \cosh(\kappa d_{24}) & \cosh(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

4 Déterminant unifié de Cayley-Menger

Les relations (1.1), (2.2) et (3.2) étant établies pour la géométrie plane, la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique respectivement, on est tenté de se demander si elles sont trois cas particuliers d'une seule relation unificatrice. Cette unification est possible si on admet que dans la géométrie hyperbolique, les distances sont multipliées par le nombre imaginaire i. Ainsi le cosinus hyperbolique dans la relation (3.2) devient un cosinus. Alors, on trouve la relation suivante entre les 6 distances formées par quatre points dans une variété riemannienne de dimension 2 dont la courbure est constante et égale à κ.

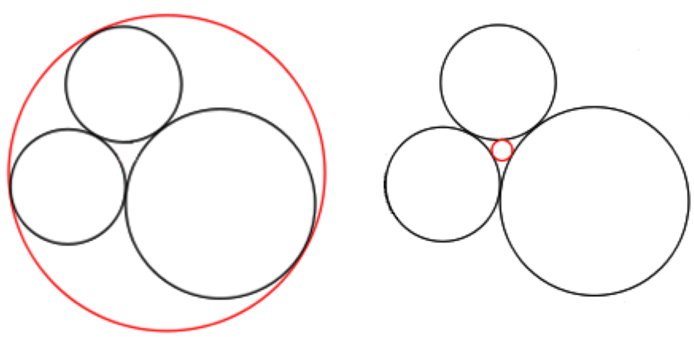
$$\frac{1}{\kappa^6}\begin{vmatrix} 1 & \cos(\kappa d_{12}) & \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{14}) \\ \cos(\kappa d_{12}) & 1 & \cos(\kappa d_{23}) & \cos(\kappa d_{24}) \\ \cos(\kappa d_{13}) & \cos(\kappa d_{23}) & 1 & \cos(\kappa d_{34}) \\ \cos(\kappa d_{14}) & \cos(\kappa d_{24}) & \cos(\kappa d_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.1}$$

On retrouve 1.1 en remplaçant κ par 0 (par prolongement continu) dans (4.1), on retrouve (2.2) lorsque $\kappa > 0$ et on retrouve (3.2) lorsque $\kappa < 0$ et qu'on mesure la distance avec un nombre imaginaire pur. À la lumière de la relation (4.1), cette façon de mesurer la distance dans les espaces hyperboliques mérite qu'on s'y attarde pour en peser les pours et les contres et voir s'il est possible et intéressant de développer un système axiomatique pour les métriques à valeurs complexes qui permettrait d'unifier l'étude de la géométrie plane, la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique.

On conclut cette note par un aperçu de ce que cette unification pourrait donner : une preuve unifiée du théorème de Descartes pour les géométries sphérique, planaire et hyperbolique.

5 Théorème de Descartes unifié

En géométrie, le théorème de Descartes, découvert par René Descartes, établit une relation entre les rayons de quatre cercles tangents deux à deux. La figure 1 présente les deux configurations possibles (a) et (b).



(a) (b)

Figure 1

Dans cette section, on travaille dans une variété riemannienne de dimension 2 dont la courbure est constante et égale à κ. De plus, on utilise la convention cohérente avec la relation (4.1), c'est-à-dire que les distances sont mesurées par un nombre imaginaire pur lorsque $\kappa < 0$. Dans ce contexte, un cercle est une courbe fermée constituée des points situés à égale distance, relativement à la métrique, d'un point nommé centre.

Théorème 4 *Dans une variété riemannienne de dimension 2 dont la courbure est constante et égale à κ si quatre cercles sont tangents deux à deux et ont pour rayon $r_i (i = 1...4)$, alors*

$$\begin{aligned}\left(\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_1)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_2)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_3)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_4)}\right)^2 &= \\ 2\left(\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_1)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_2)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_3)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_4)}-2\kappa^2\right)&.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Démonstration Posons d_{ij} comme étant la distance entre le centre du cercle i et le centre du cercle j. Ainsi, les valeurs d_{ij} satisfont à la relation (4.1). Posons r_i comme étant le rayon du cercle i affecté d'un signe positif ou négatif de telle sorte que si les cercles i et j sont tangents extérieurement, alors r_i et r_j sont de même signe et si les cercles i et j sont tangents intérieurement, alors r_i et r_j sont de signes opposés. De cette façon, on obtient $d_{ij} = \pm(r_i + r_j)$ indistinctement de la configuration (a) ou (b). Donc $\cos(d_{ij}) = \cos(r_i\kappa)\cos(r_j\kappa) - \sin(r_i\kappa)\sin(r_j\kappa)$. Or, quand $\kappa > 0$, les rayons r_i et r_j sont bornées strictement par π/κ et donc $\sin(r_i\kappa)\sin(r_j\kappa) \neq 0$; et quand $\kappa < 0$ les rayons r_i et r_j sont des nombres imaginaires purs et donc $\sin(r_i\kappa)\sin(r_j\kappa) \neq 0$. Ce qui nous permet de mettre en évidence $\sin(r_i\kappa)$ à la ligne i du déterminant de (4.1) et $\sin(r_j\kappa)$ à la colonne j du déterminant de (4.1). Puis comme $\sin(r_i\kappa)$ et $\sin(r_j\kappa)$ sont asymptotiquement proportionnels à κ lorsque κ tend vers zéro, la relation (4.1) devient

$$\frac{\kappa^8}{\kappa^6}\begin{vmatrix} \csc^2(\kappa r_1) & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_2)-1 & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_2)-1 & \csc^2(\kappa r_2) & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_3)-1 & \csc^2(\kappa r_3) & \cot(\kappa r_3)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_4)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_4)-1 & \cot(\kappa r_3)\cot(\kappa r_4)-1 & \csc^2(\kappa r_4) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \kappa^2\begin{vmatrix} 1+\cot^2(\kappa r_1) & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_2)-1 & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_2)-1 & 1+\cot^2(\kappa r_2) & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_3)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_3)-1 & 1+\cot^2(\kappa r_3) & \cot(\kappa r_3)\cot(\kappa r_4)-1 \\ \cot(\kappa r_1)\cot(\kappa r_4)-1 & \cot(\kappa r_2)\cot(\kappa r_4)-1 & \cot(\kappa r_3)\cot(\kappa r_4)-1 & 1+\cot^2(\kappa r_4) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_1)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_2)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_3)}+\frac{\kappa}{\tan(\kappa r_4)}\right)^2 &= \\ 2\left(\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_1)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_2)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_3)}+\frac{\kappa^2}{\tan^2(\kappa r_4)}-2\kappa^2\right)&.\end{aligned}$$

□

En remplaçant κ par 0 (par prolongement continu) dans (5.1), on obtient le théorème classique de Descartes en géométrie plane

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right).$$

En remplaçant κ par 1 dans (5.1), on obtient le théorème de Descartes en géométrie sphérique. Ce dernier est un cas particulier d'un théorème de Mauldon [3] publié en 1962 :

$$(\cot(r_1)+\cot(r_2)+\cot(r_3)+\cot(r_4))^2 = 2\left(\cot^2(r_1)+\cot^2(r_2)+\cot^2(r_3)+\cot^2(r_4)-2\right).$$

En remplaçant κ par -1, on obtient le théorème de Descartes en géométrie hyperbolique, où r_i est un nombre imaginaire pur et $|r_i|$ est le module de r_i. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème de Mauldon [3] publié en 1962 :

$$(\coth|r_1|+\coth|r_2|+\coth|r_3|+\coth|r_4|)^2 = 2\left(\coth^2|r_1|+\coth^2|r_2|+\coth^2|r_3|+\coth^2|r_4|+2\right).$$

Références

[1] Blumenthal, L. M. (1953). *Theory and Applications of Distance Geometry.* Oxford : the Clarenton Press.

[2] Beardon, A. F. (1983). *The Geometry of Discrete Groups.* New York : Springer-Verlag.

[3] Mauldon, J. G. (1962). Sets of Equally Inclined Spheres. *Canadian J. Math,* 14 , 509–516.