L'endoscopie tordue n'est pas si tordue : intégrales orbitales

J.-L. Waldspurger

15 mai 2006

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Soient G un groupe algébrique défini sur F, réductif et connexe, θ un automorphisme de G défini sur F et quasi-semi-simple, et $\boldsymbol{\omega}$ un caractère de $G(F)$, c'est-à-dire un homomorphisme continu de $G(F)$ dans $\mathbb{C}^\times$. La théorie de l'endoscopie tordue étudie les distributions D sur $G(F)$ qui vérifient la condition de transformation ci-dessous. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$, c'est-à-dire que f est une fonction sur $G(F)$, à valeurs complexes, localement constante et à support compact, et soit $g \in G(F)$. Notons ${}^g f$ la fonction sur $G(F)$ définie par ${}^g f(x) = f(g^{-1}x\theta(g))$. On demande que, pour tous f, g, on ait l'égalité $D({}^g f) = \boldsymbol{\omega}(g)^{-1}D(f)$. En suivant Labesse, on peut plutôt introduire un espace tordu $\tilde{G} = G\theta$, qui est une variété algébrique sur F isomorphe à G, sur laquelle G agit à droite et à gauche d'une façon que la notation rend transparente (cf. 1.2 pour plus de précisions). Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $g \in G(F)$, on note $Int(g)(f)$ la fonction sur $\tilde{G}(F)$ définie par $(Int(g)(f))(x) = f(g^{-1}xg)$. On peut alors aussi bien étudier les distributions D sur $\tilde{G}(F)$ telles que, pour tous f, g, on ait l'égalité $D(Int(g)(f)) = \boldsymbol{\omega}(g)^{-1}D(f)$.

La théorie de l'endoscopie tordue généralise la théorie plus ordinaire correspondant au cas où $\theta = 1$ et $\boldsymbol{\omega} = 1$. On définit ainsi des groupes endoscopiques, ou plus exactement des données endoscopiques $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ de $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$, cf.1.3. Fixons une telle donnée. Le cas le plus général est assez compliqué : on doit introduire une z-extension H_1 de H et une variété $H_{1,z}$ sur F qui est égale à H_1 comme ensemble, mais avec une structure sur F tordue. Pour cette introduction, on va ignorer ces difficultés techniques et supposer $H_{1,z} = H$. Il y a une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$ et classes de conjugaison stable dans $H(F)$ (limitons-nous aux classes d'éléments semi-simples suffisamment réguliers). Kottwitz et Shelstad ont défini un facteur de transfert sur les couples $(\gamma, \delta) \in H(F) \times \tilde{G}(F)$ formés d'éléments dont les classes de conjugaison stable se correspondent, cf. [KS]. On peut alors définir la notion de transfert entre fonctions. Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $f^H \in C_c^\infty(H(F))$. On dit que f^H est un transfert de f si les intégrales orbitales "stables" de f^H sont égales à certaines intégrales orbitales "endoscopiques" de f. La conjecture de transfert est l'énoncé suivant.

Conjecture 1. *Pour toute $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ qui est un transfert de f.*

Supposons $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$ et $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ non ramifiés. On dira en 4.4 ce que l'on entend précisément par là. Les conditions essentielles sont que la caractéristique résiduelle de F est grande et que G et H sont quasi-déployés sur F et déployés sur une extension non ramifiée. Dans cette situation, on peut énoncer un lemme fondamental. Nous ne considérons qu'un cas particulier, celui des unités des algèbres de Hecke. Fixons un sous-groupe compact hyperspécial K de $G(F)$, que l'on suppose invariant par θ (l'existence d'un tel sous-groupe fait partie des hypothèses). Notons $f_{\tilde{K}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $K\theta$ dans $\tilde{G}(F)$. Fixons un sous-groupe compact hyperspécial K_H de $H(F)$ et notons f_{K_H} la fonction caractéristique de l'ensemble K_H dans $H(F)$. Dans notre situation non ramifiée, il y a des normalisations naturelles des mesures de Haar qui interviennent, ainsi que des facteurs de transfert. On utilise ces objets normalisés. Le cas particulier du lemme fondamental que l'on considérera est l'énoncé suivant.

Conjecture 2. *La fonction f_{K_H} est un transfert de $f_{\tilde{K}}$*

Dans le cas de l'endoscopie ordinaire ($\theta = 1$, $\boldsymbol{\omega} = 1$), une série de travaux ont ramené les deux conjectures ci-dessus à des énoncés similaires concernant des algèbres de Lie (cf. [LS2], [H]). Ainsi, notons $\mathfrak{g}$, resp. $\mathfrak{h}$, l'algèbre de Lie de G, resp. H. En supposant $\theta = 1$ et $\boldsymbol{\omega} = 1$, on définit une notion de transfert entre éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et éléments de $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$. On peut ensuite poser des conjectures similaires aux deux conjectures ci-dessus (cf. 1.6 et 4.8). Le résultat est alors qu'il existe un nombre fini de couples $(G_i, H_i)_{i=1,\dots,N}$, vérifiant les mêmes hypothèses que le couple (G, H) et tels que les dimensions des G_i soient inférieures ou égales à celle de G, de sorte que si l'analogue de la conjecture 1 est vraie pour chaque couple $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$, alors la conjecture 1 est vraie. On a une réduction analogue pour la conjecture 2.

Le but de cet article est de démontrer un résultat similaire dans le cas général. On impose toutefois à θ une hypothèse restrictive : la restriction de θ au centre de G est d'ordre fini (cf. 1.2 pour une autre formulation). Cette hypothèse n'est pas véritablement nécessaire mais elle simplifie agréablement la description de certains centralisateurs et nous ne connaissons pas d'exemple utile d'endoscopie tordue où elle ne soit pas vérifiée.

Le procédé de réduction est le même que dans le cas ordinaire. On généralise la notion de correspondance aux éléments semi-simples singuliers. On effectue ensuite une étude locale au voisinage de tels éléments. Ainsi, soient $\eta \in \tilde{G}(F)$ et $\epsilon \in H(F)$ deux éléments semi-simples qui se correspondent. Notons G_η la composante neutre du commutant de η dans G et H_ϵ la composante neutre du commutant de ϵ dans H. Dans le cas ordinaire, et sous certaines hypothèses techniques, H_ϵ est un groupe endoscopique de G_η. La méthode de descente de Harish-Chandra et le théorème de comparaison des facteurs de transfert de Langlands et Shelstad ([LS2] théorème 1.6.A) permettent de ramener le problème du transfert dans des voisinages des points η et ϵ au problème du transfert pour les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\eta$ et $\mathfrak{h}_\epsilon$. Un procédé analogue vaut pour le lemme fondamental. Un phénomène nouveau apparaît dans le cas tordu : H_ϵ n'est pas en général un groupe endoscopique de G_η. Mais on montre que l'on peut introduire un troisième groupe $\bar{H}$ tel que, d'une part $\bar{H}$ soit un groupe endoscopique de G_η (il s'agit d'endoscopie ordinaire), d'autre part H_ϵ et $\bar{H}$ font partie de ce que l'on peut appeler un triplet endoscopique non standard. La définition de tels triplets sera donnée en 1.7. Décrivons grosso modo ce qu'est un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j). Les données G_1 et G_2 sont des groupes réductifs connexes sur F, quasi-déployés. Pour $i = 1, 2$, fixons un tore maximal T_i défini sur F d'un sous-groupe de Borel défini sur F de G_i. Notons Ω_i le groupe de Weyl de G_i relativement à T_i. La donnée j est essentiellement une isogénie $j : T_1 \to T_2$, définie sur F. On demande de plus qu'il existe un isomorphisme $j_\Omega : \Omega_1 \to \Omega_2$ qui soit compatible avec j en ce sens que $j(\omega(t)) = j_\Omega(\omega)(j(t))$ pour tous $\omega \in \Omega_1$, $t \in T_1$. En passant aux algèbres de Lie, l'isogénie devient un isomorphisme et on voit qu'il y a une bijection, définie sur F, entre classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_1(F)$ et classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_2(F)$. On peut alors définir une notion de transfert entre les espaces $C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g}_2(F))$ (les facteurs de transfert sont égaux à 1), puis poser une conjecture de transfert et, sous des hypothèses de non-ramification, énoncer un lemme fondamental (cf. 1.7 et 4.9). Signalons que les triplets (G_1, G_2, j) possibles se classifient aisément, cf. 1.7. Le cas le plus frappant est celui où G_1 est le groupe symplectique $Sp(2n)$ et G_2 est le groupe spécial orthogonal $SO(2n+1)$.

Enonçons les résultats obtenus. Pour éviter d'induire les lecteurs en erreur, on rétablit dans les énoncés ci-dessous la technicité nécessaire que l'on a précédemment escamotée. Pour tout groupe réductif connexe M, on note M_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de M.

Théorème. *Considérons toutes les données* $(\eta, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}}, j_*)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) η *est un élément semi-simple de* $\tilde{G}(F)$ *et* ϵ *est un élément semi-simple de* $H_z(F)$ *;*

(b) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *est une donnée endoscopique de* $G_{\eta,SC}$ *;*

(c) $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ *est un triplet endoscopique non standard.*

Pour chacune de ces données, on suppose que :

(d) la conjecture de transfert pour les algèbres de Lie est vérifiée pour le couple $(\mathfrak{g}_{\eta,SC}, \bar{\mathfrak{h}})$ *;*

(e) la conjecture de transfert non standard est vérifiée pour le couple $(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}, \bar{\mathfrak{h}}_{SC})$.

Alors la conjecture 1 est vérifiée.

Cf. 1.8. Sous les hypothèses de non-ramification de 4.4, on a le résultat similaire suivant.

Théorème. *Considérons toutes les données* $(\eta, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}}, j_*)$ *vérifiant :*

(a) η *est un élément semi-simple de* $\tilde{G}(F)$ *et* ϵ *est un élément semi-simple de* $H_z(F)$ *;* G_η *et* H_ϵ *sont non ramifiés ;*

(b) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *est une donnée endoscopique non ramifiée de* $G_{\eta,SC}$ *;*

(c) $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ *est un triplet endoscopique non standard non ramifié.*

Pour chacune de ces données, on suppose que :

(d) le lemme fondamental pour les algèbres de Lie est vérifié pour le couple $(\mathfrak{g}_{\eta,SC}, \bar{\mathfrak{h}})$ *;*

(e) le lemme fondamental non standard est vérifié pour le couple $(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}, \bar{\mathfrak{h}}_{SC})$.

Alors la conjecture 2 est vérifiée.

Cf. 4.10. La démonstration est constructive : on construit explicitement les groupes $\bar{H}$. On peut alors préciser quels triplets endoscopiques non standard peuvent intervenir, cf. 1.8. Cela conduit à un meilleur résultat dans le cas du changement de base. Dans ce cas, les données de base sont un groupe réductif connexe G_0 défini sur F et une extension galoisienne finie E de F, cyclique. On prend pour G le groupe $G = Res_{E/F}(G_0)$ obtenu par restrictions des scalaires, cf. 1.9, autrement dit le groupe sur F tel que $G(F) = G_0(E)$. On prend pour θ un générateur du groupe de Galois $Gal(E/F)$, qui agit naturellement sur G. Le caractère $\boldsymbol{\omega}$ est égal à 1. Dans cette situation, les triplets endoscopiques non standard qui interviennent sont "tautologiques" (avec les notations utilisées plus haut,

$G_1 = G_2$ et j est l'identité). On a alors les résultats suivants. On fixe une forme intérieure quasi-déployée G_0^* de G_0.

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, considérons toutes les données* $(\eta_0^*, G'_{\eta_0^*}, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *telles que :*

(a) η_0^* *est un élément semi-simple de* $G_0^*(F)$ *et* ϵ *est un élément semi-simple de* $H(F)$ *;*

(b) $G'_{\eta_0^*}$ *est une forme intérieure de* G^*_{0,η_0^*} *;*

(c) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *est une donnée endoscopique de* $G'_{\eta_0^*}$ *et* $\bar{H} = H_\epsilon$.

Supposons que pour chacune de ces données, la conjecture de transfert pour les algèbres de Lie soit vérifiée pour le couple $(\mathfrak{g}'_{\eta_0^*}, \bar{\mathfrak{h}})$. *Alors la conjecture 1 est vérifiée.*

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, que l'on suppose non ramifiée, considérons toutes les données* $(\eta_0, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *telles que :*

(a) η_0 *est un élément semi-simple de* $G_0(F)$ *et* ϵ *est un élément semi-simple de* $H(F)$ *;*

(b) G_{0,η_0} *et* H_ϵ *sont non ramifiés ;*

(c) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *est une donnée endoscopique de* G_{0,η_0} *et* $\bar{H} = H_\epsilon$.

Supposons que pour chacune de ces données, le lemme fondamental pour les algèbres de Lie soit vérifié pour le couple $(\mathfrak{g}_{0,\eta_0}, \bar{\mathfrak{h}})$. *Alors la conjecture 2 est vérifiée.*

Cf. 1.9 et 4.11. Dans le cas particulier où $H = G_0$, on retrouve le résultat bien connu de Kottwitz ([Ko3] corollaire du paragraphe 1) souvent appelé lemme fondamental pour le changement de base stable. Dans le cas où G_0 est un groupe spécial linéaire ou un groupe unitaire, on connaît maintenant les lemmes fondamentaux et les conjectures de transfert requis ([LN]). D'où le résultat suivant.

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, supposons de plus* $G_0 = SL(n)$ *ou* $G_0 = U(n)$. *Alors la conjecture 1 est vérifiée (pour toute donnée endoscopique* $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ *de* $(G, \theta, 1)$*). Sous les hypothèses de non ramification de 4.4, la conjecture 2 est elle aussi vérifiée.*

Remarque. Ce corollaire résulte probablement aussi de la proposition 1 de [Ko3] et d'un calcul de facteurs de transfert.

Il y a deux types d'ingrédients dans notre démonstration : d'une part de l'analyse harmonique ; d'autre part des calculs de facteurs de transfert. On a divisé notre travail en deux parties, en rejetant dans une seconde partie ([W2]) tout ce qui concernait les facteurs de transfert. L'article présent contient toute la partie "analyse harmonique" des démonstrations. On se borne à énoncer les propriétés des facteurs de transfert dont nous avons besoin, en particulier le théorème 3.9, qui est l'analogue du théorème 1.6.A de [LS2] et qui est la clé de la démonstration. Comme on vient de le dire, ces propriétés seront démontrées en [W2].

Table des matières

1 La conjecture de transfert

1.1 Notations

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Si Y est un sous-ensemble de X, on note $Z_G(Y)$ le sous-groupe des éléments $g \in G$ tels que $g(y) = y$ pour tout $y \in Y$ et $N_G(Y)$ celui des $g \in G$ tels que $g(Y) = Y$. Si $Y = \{y\}$ est réduit à un élément, on note simplement $Z_G(y) = Z_G(\{y\}) = N_G(\{y\})$. On note X^G le sous-ensemble des éléments de X invariants par G. Supposons que X soit un groupe abélien et que l'action de G soit compatible avec cette structure. On note X_G le groupe des coinvariants, c'est-à-dire le quotient de X par le sous-groupe engendré par les $g(x) - x$ pour $g \in G$ et $x \in X$.

Soient k un corps commutatif algébriquement clos et G un groupe algébrique réductif défini sur k. On note G^0 sa composante neutre et Z_G le centre de G. Supposons G connexe. On note G_{AD} le groupe adjoint G/Z_G, G_{der} le groupe dérivé de G et G_{SC} son revêtement simplement connexe. Pour simplifier, on notera de la même façon un élément de $G_{SC}(k)$ et son image dans $G(k)$. Pour tout sous-groupe algébrique $H \subset G$, on note H_{sc} son image réciproque dans G_{SC} et H_{ad} son image dans G_{AD} (H_{sc} n'a aucune raison d'être simplement connexe ni H_{ad} d'être adjoint). Tout automorphisme θ de G se relève en un unique automorphisme de G_{SC}, resp. se descend en un unique automorphisme de G_{AD}, que l'on note encore θ. On appelle paire de Borel un couple (B, T) où B est un sous-groupe de Borel de G et T est un sous-tore maximal de B. Pour $g \in G(k)$, on note $Int(g)$ l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$. Soit T un tore défini sur k. On note $X^*(T)$ son groupe des caractères et $X_*(T)$ celui des cocaractères. Ce sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini en dualité. Si T est un sous-tore maximal de G, on dispose des ensembles de racines $\Sigma \subset X^*(T)$ et de coracines $\check{\Sigma} \subset X_*(T)$ et d'une bijection naturelle $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ entre ces deux ensembles. Si (B, T) est une paire de Borel, on dispose de plus de sous-ensembles de racines et coracines positives et d'ensembles Δ et $\check{\Delta}$ de racines et coracines simples. On dispose aussi du groupe de Weyl $\Omega_G = N_G(T)/T$ qui agit sur T, $X^*(T)$ et $X_*(T)$.

Supposons que G agisse algébriquement sur une variété algébrique X définie sur k. Pour $x \in X(k)$, on pose $G^x = Z_G(x)$, $G_x = Z_G(x)^0$.

Remarque. *On prendra garde à cette notation. Par exemple, il interviendra dans l'article un groupe $T^*_{\theta^*}$. Kottwitz et Shelstad notent ainsi un groupe de coinvariants. Pour nous, il ne s'agira pas de ce groupe de coinvariants, mais de la composante neutre du commutant de θ^* dans T^*.*

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On appelle "conjugaison" l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ et, pour $g \in G(k)$, on note encore $Int(g)$ ou $X \mapsto gXg^{-1}$ cette action adjointe. Plus généralement, si $\varphi : G \to G'$ est un homomorphisme entre groupes algébriques réductifs, on note encore $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ l'homomorphisme dérivé. Soient (B, T) une paire de Borel de G, Σ l'ensemble associé des racines et Δ celui des racines simples. A tout $\alpha \in \Sigma$ est associée une droite radicielle $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$. Un épinglage est une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, où X_α est un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha(k)$.

Soient maintenant k un corps commutatif parfait, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et G un groupe algébrique réductif connexe défini sur k. Il y a des variantes "sur k" des définitions ci-dessus. Soulignons les points suivants : on parlera de paire de Borel pour désigner une paire (B,T) de groupes définis sur $\bar{k}$, et on dira que la paire est définie sur k si ces deux groupes le sont ; si T est un tore défini sur k, $X^*(T)$ et $X_*(T)$ désigneront toujours les groupes de caractères et cocaractères de T vu comme groupe sur $\bar{k}$; on récupère bien entendu une action sur ces groupes du groupe de Galois $Gal(\bar{k}/k)$; un épinglage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ relatif à une paire de Borel définie sur k sera dit défini sur k si on a l'égalité $X_{\sigma(\alpha)} = \sigma(X_\alpha)$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{k}/k)$. Pour simplifier les notations, on identifiera G à son ensemble de points $G(\bar{k})$, une relation $g \in G$ signifiant donc $g \in G(\bar{k})$.

On fixe pour tout l'article un corps local F non archimédien de caractéristique nulle. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$, on note Γ_F le groupe de Galois et W_F le groupe de Weil de l'extension $\bar{F}/F$. On peut identifier W_F à un sous-groupe de Γ_F, mais la topologie de W_F est plus fine que la topologie induite. Supposons que Γ_F agisse sur un ensemble X et soit $\sigma \in \Gamma_F$. Il correspond donc à σ une bijection de X dans lui-même que, la plupart du temps, on notera simplement σ. Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. On lui associe un groupe dual $\hat{G}$ qui est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{C}$, muni d'une action de Γ_F. Soit $(\hat{B},\hat{T})$ une paire de Borel de $\hat{G}$. On dit qu'elle est définie sur F si elle est stable par l'action de Γ_F. Si de plus $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage relatif à cette paire, on dit de même que cet épinglage est défini sur F s'il est stable par l'action de Γ_F. Par définition du groupe dual, il existe une paire de Borel et un épinglage définis sur F. Supposons G quasi-déployé sur F, fixons des paires de Borel (B,T) de G et $(\hat{B},\hat{T})$ de $\hat{G}$ toutes deux définies sur F. On dispose alors d'isomorphismes $X_*(T) \simeq X^*(\hat{T})$ et $X^*(T) \simeq X_*(\hat{T})$ compatibles aux dualités entre ces $\mathbb{Z}$-modules et aux actions de Γ_F. Via ces isomorphismes, on identifie l'ensemble des racines, resp. le groupe de Weyl, de T dans G avec l'ensemble des coracines, resp. le groupe de Weyl, de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. L'action de Γ_F sur $\hat{G}$ se restreint en une action de W_F. On appelle L-groupe le produit semi-direct ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$, muni de la topologie produit.

Si E est une extension finie de F, on utilisera pour E des notations similaires à celles introduites pour F : Γ_E, W_E etc...

1.2 Espaces tordus

On fixe pour tout l'article un groupe algébrique G défini sur F, réductif et connexe, un automorphisme θ de G défini sur F et un caractère $\boldsymbol{\omega}$ de $G(F)$ (c'est-à-dire, comme on l'a dit dans l'introduction, que $\boldsymbol{\omega}$ est un homomorphisme continu de $G(F)$ dans $\mathbb{C}^\times$). On suppose θ quasi-semi-simple, c'est-à-dire qu'il préserve une paire de Borel. A la suite de Labesse, on introduit l'espace tordu $\tilde{G} = G\theta$. Il s'agit d'une variété algébrique sur F, isomorphe à G par un isomorphisme noté $g \mapsto g\theta$, munie d'actions de G à droite et à gauche vérifiant l'égalité $g_1(g\theta)g_2 = (g_1 g\theta(g_2))\theta$, et tout élément $\delta = g\theta \in \tilde{G}$ agit sur G par un automorphisme noté $Int(\delta)$, égal à $Int(g)\circ\theta$. Pour $g \in G$, on notera encore $Int(g)$ l'automorphisme $x \mapsto gxg^{-1}$ de $\tilde{G}$ et on utilisera les notations introduites dans le paragraphe précédent, en considérant que G agit sur $\tilde{G}$ par conjugaison (par exemple, pour $x \in \tilde{G}$, on note $Z_G(x)$ ou G^x le sous-groupe des $g \in G$ tels que $gxg^{-1} = x$).

On fixe un groupe réductif connexe G^* quasi-déployé sur F et un torseur intérieur $\psi : G \to G^*$. C'est-à-dire que ψ est un isomorphisme sur $\bar{F}$ et que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $\psi\sigma(\psi)^{-1}$ est un automorphisme intérieur de G^*, où $\sigma(\psi) = \sigma\psi\sigma^{-1}$ (le premier σ est ici l'action sur G^*, le second celle sur G). On fixe une application :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_F & \to & G^*_{SC} \\ \sigma & \mapsto & u(\sigma) \end{array}$$

de sorte que $\psi\sigma(\psi)^{-1} = Int(u(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On fixe une paire de Borel (B^*, T^*) de G^*, définie sur F, on note Σ l'ensemble des racines de T^* dans G^*, Δ le sous-ensemble de racines simples défini par B^* et on fixe un épinglage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, défini sur F. Il existe un unique automorphisme θ^* de G^* (vu comme groupe sur $\bar{F}$), conservant B^*, T^* et l'épinglage, et égal au composé de $\psi\theta\psi^{-1}$ et d'un automorphisme intérieur. Il est défini sur F. On note Θ^* le groupe d'automorphismes de G^* engendré par θ^*.

Hypothèse. *On suppose dans tout l'article que Θ^* est fini.*

Cette hypothèse entraîne que les éléments quasi-semi-simples de $\tilde{G}$ sont vraiment semi-simples. Remarquons que l'hypothèse n'entraîne rien sur l'ordre de θ lui-même.

On fixe $g_\theta \in G^*_{SC}$ de sorte que $\theta^* = Int(g_\theta)\psi\theta\psi^{-1}$. On introduit l'espace tordu $\tilde{G}^* = G^*\theta^*$ et l'isomorphisme sur $\bar{F}$:

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\psi}: & \tilde{G} & \to & \tilde{G}^* \\ & g\theta & \mapsto & \psi(g)g_\theta^{-1}\theta^*. \end{array}$$

Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons :

$$z(\sigma) = g_\theta u(\sigma)\sigma(g_\theta)^{-1}\theta^*(u(\sigma))^{-1}.$$

C'est un élément de G^*_{SC}. On vérifie qu'il appartient au centre $Z_{G^*_{SC}}$ ([KS] lemme 3.1.A) et que l'on a l'égalité :

$$\tilde{\psi}\sigma(\tilde{\psi})^{-1}(x) = z(\sigma)^{-1}u(\sigma)xu(\sigma)^{-1}$$

pour tous $x \in \tilde{G}^*$ et $\sigma \in \Gamma_F$.

1.3 Données endoscopiques

On introduit le groupe dual ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ et on fixe une paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ et un épinglage, ces données étant définies sur F. Il y a des isomorphismes en dualité $j : X_*(T^*) \simeq X^*(\hat{T})$, $\hat{j} : X_*(\hat{T}) \simeq X^*(T^*)$. Il sont équivariants pour les actions de Γ_F. Il existe un unique automorphisme de $\hat{G}$, que l'on note $\hat{\theta}$, qui conserve $\hat{B}$, $\hat{T}$ et l'épinglage et vérifie la propriété suivante : pour tous $x_* \in X_*(T^*)$ et $y_* \in X_*(\hat{T})$, on a les égalités :

$$j(\theta^* \circ x_*) = j(x_*) \circ \hat{\theta},\ \hat{j}(\hat{\theta} \circ y_*) = \hat{j}(y_*) \circ \theta^*.$$

Cet automorphisme commute à l'action de W_F. On l'étend en l'automorphisme ${}^L\theta$ de ${}^LG$ défini par ${}^L\theta(x, w) = (\hat{\theta}(x), w)$ pour tous $x \in \hat{G}$, $w \in W_F$. On introduit l'espace tordu ${}^L\tilde{G} = {}^LG{}^L\theta$.

Rappelons que le groupe des caractères de $G(F)$ est naturellement isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ ([Lan1] page 123). Le caractère $\boldsymbol{\omega}$ correspond à un élément de ce groupe que l'on note $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$.

On appelle donnée endoscopique pour $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$ un quadruplet $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) H est un groupe réductif connexe et quasi-déployé sur F ;

(2) $\mathcal{H}$ est une extension scindée de W_F par le groupe dual $\hat{H}$, de sorte que l'action de W_F sur $\hat{H}$ qui s'en déduit est la même que celle déduite de la structure de H comme groupe défini sur F, modulo automorphismes intérieurs ;

(3) $s \in \hat{G}$ est tel que l'automorphisme $Int(s) \circ \hat{\theta}$ de $\hat{G}$ soit semi-simple ;

(4) $\hat{\xi} : \mathcal{H} \to^L G$ est un homomorphisme injectif et continu, commutant aux projections sur W_F et vérifiant les deux conditions :

(4)(a) il existe un cocycle $a : W_F \to Z_{\hat{G}}$, dont la classe est $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$, tel que l'on ait l'égalité dans ${}^L\tilde{G}$:

$$s^L\theta\hat{\xi}(h) = a(h)\hat{\xi}(h)s^L\theta$$

pour tout $h \in \mathcal{H}$, où on a simplement noté $a(h)$ l'image par a de la projection de h dans W_F ;

(4)(b) $\hat{\xi}$ se restreint en un isomorphisme de $\hat{H}$ sur $Z_{\hat{G}}(s^L\theta)^0$.

Un isomorphisme entre des données endoscopiques $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ et $(H', \mathcal{H}', s', \hat{\xi}')$ est un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\hat{\xi}(\mathcal{H})x^{-1} = \hat{\xi}'(\mathcal{H}')$ et $xs^L\theta x^{-1} \in Z_{\hat{G}}s'^L\theta$.

On fixe pour tout l'article une donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ pour $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$. A équivalence près, on peut supposer que s appartient à $\hat{T}$ et que, en posant $\hat{B}_H = \hat{\xi}^{-1}(\hat{B})$, $\hat{T}_H = \hat{\xi}^{-1}(\hat{T})$, $(\hat{B}_H, \hat{T}_H)$ est une paire de Borel de $\hat{H}$ définie sur F. Alors $\hat{\xi}$ se restreint en un isomorphisme de $\hat{T}_H$ sur $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ (rappelons que $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ est la composante neutre du commutant $\hat{T}^{\hat{\theta}}$). Fixons une paire de Borel (B_H, T_H) de H, définie sur F. On obtient dualement un isomorphisme $\xi : T^*_{\Theta^*} \to T_H$ (rappelons que $T^*_{\Theta^*}$ est le groupe des coinvariants de T^* pour l'action du groupe Θ^*). On note encore ξ l'application composée $T^* \to T^*_{\Theta^*} \to T_H$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons $z_H(\sigma) = \xi(z(\sigma))$. On vérifie que z_H est un cocycle à valeurs dans le centre Z_H.

Notons Ω le groupe de Weyl de T^* dans G^* et Ω_H celui de T_H dans H. Le plongement $\hat{\xi}$ identifie Ω_H à un sous-groupe de Ω, plus précisément de Ω^{Θ^*}. L'homomorphisme ξ^{-1} se quotiente en une application :

$$(5) \qquad T_H/\Omega_H \to T^*_{\Theta^*}/\Omega^{\Theta^*}.$$

L'ensemble de gauche paramètre les classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans H. Celui de droite paramètre les classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}$: à un tel élément x, on associe d'abord $t \in T^*$ tel que $t\theta^*$ soit conjugué à $\tilde{\psi}(x)$, puis l'image de t dans $T^*_{\Theta^*}/\Omega^{\Theta^*}$. Si x est un élément semi-simple de $\tilde{G}$, on dit que x est fortement régulier si $Z_G(x)$ est un groupe abélien. On note $\tilde{G}_{reg}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples et fortement réguliers de $\tilde{G}$. Si h est un élément semi-simple de H, on dit que h est $\tilde{G}$-fortement régulier si l'image par l'application (5) de la classe de conjugaison de h est une classe de conjugaison dans $\tilde{G}$ formée d'éléments fortement réguliers. Cela entraîne que h est fortement régulier ([KS] lemme 3.3.C). On note $H_{\tilde{G}-reg}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples et $\tilde{G}$-fortement réguliers dans H.

L'application (5) est équivariante pour les actions naturelles de Γ_F mais il faut prendre garde au fait que cette action naturelle sur $T^*_{\Theta^*}/\Omega^{\Theta^*}$ n'est pas compatible au paramétrage des classes de conjugaison d'éléments quasi-semi-simples de $\tilde{G}$. On est conduit à tordre l'action sur H de la façon suivante. Notons H_z la variété H munie de l'action de Γ_F définie par $h \mapsto z_H(\sigma)^{-1}\sigma(h)$ pour $\sigma \in \Gamma_F$, et $H_{z,\tilde{G}-reg}$ la sous-variété $H_{\tilde{G}-reg}$ munie de la même action. Evidemment, cette action ne respecte pas la structure de groupe. L'ensemble $H_z(F)$ peut être vide. Sinon, c'est un espace principal homogène sous $H(F)$, c'est-à-dire que pour tout $h_0 \in H_z(F)$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} H(F) & \rightarrow & H_z(F) \\ h & \mapsto & hh_0 \end{array}$$

est bijective. Remarquons que H agit par conjugaison sur H_z et $H_{z,\tilde{G}-reg}$, de façon compatible aux actions de Γ_F.

Deux éléments de $\tilde{G}_{reg}(F)$ sont dits stablement conjugués s'ils sont conjugués par un élément de G. Deux éléments de $H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ sont dits stablement conjugués s'ils sont conjugués par un élément de H. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(\gamma,\delta) \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F) \times \tilde{G}_{reg}(F)$ tels que l'image de la classe de conjugaison de γ par l'application (1) soit la classe de conjugaison de δ.

Remarque. On peut construire un groupe réductif connexe H' quasi-déployé sur F et un plongement $i : H \rightarrow H'$ défini sur F de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(6) $i(H)$ est un sous-groupe distingué et le quotient $D = H'/i(H)$ est un tore ;

(7) le centre de H' est connexe et est un tore "induit", c'est-à-dire que $X^*(Z_{H'})$ possède une base sur $\mathbb{Z}$ conservée par l'action de Γ_F.

Rappelons comment on construit un tel groupe. Notons ici $f : H_{SC} \rightarrow H$ l'homomorphisme naturel, Z_{sc} le centre de H_{SC}, Z'_{sc} le sous-groupe des $z \in Z_{sc}$ tels que $f(z) \in Z^0_H$ et $C = \{(z, f(z)^{-1}); z \in Z'_{sc}\}$. On peut identifier H à $(H_{SC} \times Z^0_H)/C$. Posons $Z^D_{sc} = Hom(Z_{sc}, \bar{F}^\times)$ et $T_1 = \mathbb{Z}[Z^D_{sc}] \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times$. Cet ensemble T_1 est un tore muni naturellement d'une action de Γ_F et il y a un plongement équivariant :

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & Z_{sc} & \rightarrow & T_1 \\ & z & \mapsto & \sum_{\chi \in Z^D_{sc}} \chi \otimes \chi(z) \end{array}.$$

Notons :

- T_2 le quotient de $Z^0_H \times T_1$ par le sous-groupe des $(f(z), f_1(z))$ pour $z \in Z'_{sc}$;

- $f_2 : Z_{sc} \rightarrow T_2$ la composée de l'application $z \mapsto (1, f_1(z))$ et de la projection de $Z^0_H \times T_1$ sur T_2 ;

- $C_2 = \{(z, f_2(z)); z \in Z_{sc}\}$.

La suite d'homomorphismes :

$$H_{SC} \times Z^0_H \rightarrow H_{SC} \times Z^0_H \times T_1 \rightarrow H_{SC} \times T_2 \rightarrow (H_{SC} \times T_2)/C_2$$

se quotiente en un homomorphisme injectif :

$$H = (H_{SC} \times Z^0_H)/C \rightarrow (H_{SC} \times T_2)/C_2.$$

Soit E une extension galoisienne finie telle que T_2 soit déployé sur E. Considérons le groupe $X_*(T_2)^{\Gamma_F/\Gamma_E}$ des fonctions de Γ_F/Γ_E dans $X_*(T_2)$. Le groupe Γ_F agit sur ce groupe par la formule $(\sigma\varphi)(\gamma) = \varphi(\sigma^{-1}\gamma)$ pour $\varphi \in X_*(T_2)^{\Gamma_F/\Gamma_E}$, $\sigma \in \Gamma_F$ et $\gamma \in \Gamma_F/\Gamma_E$. Soit T_3 le tore sur F dont le groupe des cocaractères soit $X_*(T_2)^{\Gamma_F/\Gamma_E}$ muni de cette action de Γ_F. Il y a un plongement naturel $j : T_2 \rightarrow T_3$ qui est équivariant pour les actions de Γ_F. On pose $f_3 = j \circ f_2$, $C_3 = \{(z, f_3(z)); z \in Z_{sc}\}$ et $H' = (H_{SC} \times T_3)/C_3$. De j_2 se déduit un plongement $(H_{SC} \times T_2)/C_2 \rightarrow H'$, d'où un plongement composé $i : H \rightarrow H'$. Ce plongement vérifie les propriétés requises. $\square$

La propriété (7) entraîne que $H^1(\Gamma_F, Z_{H'}) = \{0\}$. On peut donc fixer $z \in Z_{H'}$ de sorte que $\sigma(z)^{-1}z = i(z_H(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors l'application :

$$\begin{array}{cccc} i_z : & H_z & \rightarrow & H' \\ & h & \mapsto & i(h)z \end{array}$$

entrelace les actions de Γ_F et identifie H_z au sous-ensemble $i(H)z$ de H'.

1.4 Facteurs de transfert

Appelons z-paire pour nos données endoscopiques un triplet $(H_1, \xi_1, \hat{\xi}_1)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) H_1 est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F, de groupe dérivé simplement connexe ;

(2) $\xi_1 : H_1 \to H$ est un homomorphisme surjectif dont le noyau Z_1 est un sous-tore central dans H_1 et est "induit" ;

(3) $\hat{\xi}_1 : \mathcal{H} \to {}^L H_1$ est un homomorphisme injectif commutant aux projections sur W_F et dont la restriction à $\hat{H}$ est un homomorphisme de $\hat{H}$ dans $\hat{H}_1$ dual à l'homomorphisme ξ_1.

Rappelons que, parce que Z_1 est induit, l'homomorphisme $H_1(F) \to H(F)$ est surjectif. D'après [KS] paragraphe 2.2, il existe une z-paire. Nous en fixons une. Soit $c : W_F \to \mathcal{H}$ un homomorphisme continu, section de la projection de $\mathcal{H}$ sur W_F. L'application composée :

$$W_F \stackrel{c}{\to} \mathcal{H} \stackrel{\hat{\xi}_1}{\to} {}^L H_1 \to {}^L Z_1 \to \hat{Z}_1$$

est un cocycle. Sa classe ne dépend pas du choix de c. Ce cocycle détermine un caractère continu de $Z_1(F)$, que l'on note λ_1.

Si $H_z(F)$ est vide, on pose $\mathcal{D}_1 = \emptyset$. Supposons $H_z(F)$ non vide, fixons un élément $\gamma_0 \in H_1$ dont l'image dans H appartienne à $H_z(F)$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons $z_{H_1}(\sigma) = \gamma_0^{-1}\sigma(\gamma_0)$. Alors z_{H_1} est un cocycle à valeurs dans Z_{H_1} qui relève z_H. On note $H_{1,z}$ la variété H_1 munie de l'action de Γ_F définie par $h_1 \mapsto z_{H_1}(\sigma)^{-1}\sigma(h_1)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. L'application évidente $H_{1,z} \to H_z$ est équivariante pour les actions de Γ_F. L'application déduite $H_{1,z}(F) \to H_z(F)$ est surjective. Remarquons d'autre part que H agit par conjugaison sur H_1, donc aussi sur $H_{1,z}$. Cette action est compatible aux actions de Γ_F. On note $H_{1,z,\tilde{G}-reg}$ l'image réciproque de $H_{z,\tilde{G}-reg}$ dans $H_{1,z}$. Deux éléments de $H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$ sont dits stablement conjugués s'ils sont conjugués par un élément de H. On note $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des couples $(\gamma_1, \delta) \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F) \times \tilde{G}_{reg}(F)$ tels que, en notant γ l'image de γ_1 dans $H_z(F)$, on ait $(\gamma, \delta) \in \mathcal{D}$.

Kottwitz et Shelstad ont défini un facteur de transfert :

$$\Delta : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}^\times.$$

Dans le cas où $\mathcal{D}_1$ est non vide, on fixe une fonction de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathbb{C}^\times$, que l'on note aussi Δ, de sorte que, pour tous $(\gamma_1, \delta), (\bar{\gamma}_1, \bar{\delta}) \in \mathcal{D}_1$, on ait l'égalité :

$$\Delta(\gamma_1, \delta)\Delta(\bar{\gamma}_1, \bar{\delta})^{-1} = \Delta(\gamma_1, \delta; \bar{\gamma}_1, \bar{\delta}).$$

1.5 Enoncé de la conjecture de transfert

Rappelons que, pour $x \in \tilde{G}$, on pose $G^x = Z_G(x)$, $G_x = Z_G(x)^0$. De même, pour $x \in H_z$ ou $x \in H_{1,z}$, on pose $H^x = Z_H(x)$, $H_x = Z_H(x)^0$, H agissant sur H_z ou $H_{1,z}$ par conjugaison (il y a un conflit de notations, que l'on espère surmontable, avec les notations H_1 et H_z qui ne sont évidemment pas des cas particuliers de H_x pour $x = 1$ ou z).

Pour tout espace topologique X, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions sur X, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. On fixe des mesures de Haar sur $G(F)$ et $H(F)$.

Soit $\gamma_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$. Le groupe H_{γ_1} est un sous-tore maximal de H, on fixe une mesure de Haar sur $H_{\gamma_1}(F)$. Soit $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que (γ_1, δ) appartienne à $\mathcal{D}_1$. On montre d'une part que le caractère $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $G_\delta(F)$; d'autre part que la mesure que l'on vient de choisir détermine une mesure de Haar sur ce groupe $G_\delta(F)$ ([KS] paragraphe 5.5 ; en fait, nous modifierons la définition de Kottwitz et Shelstad, de façon inessentielle, cf. 3.10). Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on pose :

$$O_\delta^{\boldsymbol{\omega}}(f) = [G^\delta(F) : G_\delta(F)]^{-1} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta g)\boldsymbol{\omega}(g)\, dg,$$

puis :

$$O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_\delta \Delta(\gamma_1, \delta) O_\delta^{\boldsymbol{\omega}}(f),$$

où on somme sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des $\delta \in \tilde{G}(F)$ tels que $(\gamma_1, \delta) \in \mathcal{D}_1$.

Notons $C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ l'espace des fonctions f sur $H_{1,z}(F)$, à valeurs complexes, localement constantes et de support d'image compacte dans $H_z(F)$, et vérifiant l'égalité $f(zx) = \lambda_1(z)^{-1} f(x)$ pour tous $z \in Z_1(F)$, $x \in H_{1,z}(F)$. Pour γ_1 comme ci-dessus et $\gamma_1' \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$ stablement conjugué à γ_1, les groupes H_{γ_1} et $H_{\gamma_1'}$ sont canoniquement isomorphes et on munit $H_{\gamma_1'}(F)$ de la mesure de Haar correspondant à celle que l'on a fixée sur $H_{\gamma_1}(F)$. Pour $f \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$, on pose :

$$O_{\gamma_1'}(f) = \int_{H_{\gamma_1'}(F)\backslash H(F)} f(h^{-1}\gamma_1' h)\, dh.$$

puis :

$$SO_{\gamma_1}(f) = \sum_{\gamma_1'} O_{\gamma_1'}(f),$$

où on somme sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ_1.

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $f_1 \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$. On dit que f_1 est un transfert de f si l'on a l'égalité $SO_{\gamma_1}(f_1) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$ pour tout $\gamma_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$.

Conjecture de transfert. *Pour toute $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $f_1 \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ qui soit un transfert de f.*

1.6 Transfert pour les algèbres de Lie

Considérons un groupe réductif connexe G' quasi-déployé sur F et une donnée endoscopique $(H', \mathcal{H}', s', \hat{\xi}')$ pour G', c'est-à-dire pour le triplet formé de G', de son automorphisme identité et du caractère trivial de $G'(F)$. On sait que toute une partie de la théorie se descend aux algèbres de Lie : on peut définir des classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}'(F)$ et $\mathfrak{g}'(F)$, une correspondance entre les classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}'(F)$ et celles dans $\mathfrak{g}'(F)$, un facteur de transfert sur un sous-ensemble de $\mathfrak{h}'_{G'-reg}(F) \times \mathfrak{g}'_{reg}(F)$ et une notion de transfert entre fonctions sur $\mathfrak{g}'(F)$ et fonctions sur $\mathfrak{h}'(F)$. Remarquons que l'on n'a plus besoin d'introduire de z-paire. On a alors la conjecture :

Conjecture de transfert pour les algèbres de Lie. *Pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}'(F))$, il existe $f_{\mathfrak{h}'} \in C_c^\infty(\mathfrak{h}'(F))$ qui soit un transfert de f.*

1.7 Transfert non standard

Considérons deux groupes connexes semi-simples et simplement connexes G_1 et G_2, quasi-déployés sur F. Pour $i = 1, 2$, on fixe un sous-tore T_i de G_i faisant partie d'une paire de Borel définie sur F, on note $X_{i,*} = X_*(T_i)$, $X_i^* = X^*(T_i)$, Σ_i et $\check{\Sigma}_i$ les ensembles de racines et coracines de T_i dans G_i et $\Omega_i = N_{G_i}(T_i)/T_i$ le groupe de Weyl. On note $\alpha \leftrightarrow \check{\alpha}$ la bijection habituelle entre Σ_i et $\check{\Sigma}_i$ pour $i = 1, 2$. On note aussi $X_{i,*,\mathbb{Q}} = X_{i,*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $X_{i,\mathbb{Q}}^* = X_i^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Considérons un isomorphisme :

$$j_* : X_{1,*,\mathbb{Q}} \to X_{2,*,\mathbb{Q}}.$$

Notons $j^* : X_{2,\mathbb{Q}}^* \to X_{1,\mathbb{Q}}^*$ son isomorphisme transposé. On impose les conditions suivantes :

(1) il existe des bijections $\check{\tau} : \check{\Sigma}_1 \to \check{\Sigma}_2$ et $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ et des applications $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \to \mathbb{Q}_{>0}$ et $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$ vérifiant les propriétés :

(1) (a) via les bijections naturelles entre $\check{\Sigma}_i$ et Σ_i pour $i = 1, 2$, τ s'identifie à l'inverse de $\check{\tau}$;

(1) (b) pour tout $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$ et pour tout $\alpha_2 \in \Sigma_2$, on a les égalités $j_*(\check{\alpha}_1) = \check{b}(\check{\alpha}_1)\check{\tau}(\check{\alpha}_1)$ et $j^*(\alpha_2) = b(\alpha_2)\tau(\alpha_2)$;

(2) j_* et j^* sont équivariants pour les actions de Γ_F.

Fixons un sous-groupe de Borel B_1 de G_1 tel que (B_1, T_1) soit une paire de Borel définie sur F. On note $\check{\Sigma}_1^+$ et $\check{\Delta}_1$ les sous-ensembles de coracines positives, resp. simples relativement à ce sous-groupe. Dans l'énoncé qui suit, on adopte des notations similaires relatives à un sous-groupe de Borel B_2 de G_2 dont l'énoncé affirme l'existence.

Lemme. *(i) Il existe un sous-groupe de Borel B_2 de G_2 tel que (B_2, T_2) soit une paire de Borel définie sur F et que l'on ait les égalités $\check{\tau}(\check{\Sigma}_1^+) = \check{\Sigma}_2^+$, $\check{\tau}(\check{\Delta}_1) = \check{\Delta}_2$. Deux éléments de $\check{\Delta}_1$ sont dans la même composante connexe du diagramme de Young associé à $\check{\Delta}_1$ si et seulement si leurs images par $\check{\tau}$ sont dans la même composante connexe du diagramme de Young associé à $\check{\Delta}_2$.*

(ii) Soient $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$, $\alpha_2 \in \Sigma_2$ tels que $\check{\tau}(\check{\alpha}_1) = \check{\alpha}_2$. Alors on a l'égalité $\check{b}(\check{\alpha}_1) = b(\alpha_2)$.

(iii) L'application qui, à la symétrie relative à une coracine $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$, associe la symétrie relative à la coracine $\check{\tau}(\check{\alpha}_1)$, se prolonge en un isomorphisme $j_\Omega : \Omega_1 \to \Omega_2$. Pour $\omega \in \Omega_1$, on a l'égalité $j_* \circ \omega = j_\Omega(\omega) \circ j_*$.

Ce lemme est élémentaire, on laisse sa démonstration au lecteur.

Des données (G_1, G_2, j_*) et (G_1', G_2', j_*') sont dites F-équivalentes s'il existe des isomorphismes $\theta_i : G_i \to G_i'$, pour $i = 1, 2$, et un rationnel $b \neq 0$ tels que :

(3) pour $i = 1, 2$, θ_i est défini sur F et envoie T_i sur T_i' (pour alléger les notations, on ne fait pas figurer les tores parmi les données, mais ils sont sous-entendus) ;

(4) le diagramme suivant est commutatif, où on note encore θ_i les applications qui se

déduisent naturellement de cet isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} X_{1,*,\mathbb{Q}} & \stackrel{j_*}{\to} & X_{2,*,\mathbb{Q}} \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \theta_2 \\ X'_{1,*,\mathbb{Q}} & \stackrel{bj'_*}{\to} & X'_{2,*,\mathbb{Q}} \end{array}$$

On peut facilement décrire toutes les données (G_1, G_2, j_*) possibles. Oublions un instant les actions de Γ_F et considérons le même problème sur $\bar{F}$. On peut décomposer G_1 et G_2 en produit de composantes quasi-simples. D'après le (i) du lemme, un isomorphisme j_* détermine (et est déterminé par) une bijection entre les familles de composantes simples de G_1 et G_2 et, pour tout couple (G'_1, G'_2) de composantes simples qui se correspondent par cette bijection, un isomorphisme analogue relatif à ce couple. Cela nous ramène au cas où G_1 et G_2 sont quasi-simples. En examinant cas par cas chaque système de racines, on montre que seuls les cas suivants peuvent se produire, à $\bar{F}$-équivalence près :

(tautologique) $G_1 = G_2$ et j_* est l'identité ;

(B_n, C_n) Σ_1 est de type B_n et Σ_2 de type C_n ; pour $i = 1, 2$, on note $\check{\alpha}_{i,j}$, pour $j = 1, ..., n$, les éléments de $\check{\Delta}_i$ numérotés comme dans [B] p.252 et suivantes (des notations analogues sont utilisées dans la suite) ; on a $j_*(\check{\alpha}_{1,j}) = \check{\alpha}_{2,j}$ pour $j = 1, ..., n-1$, $j_*(\check{\alpha}_{1,n}) = 2\check{\alpha}_{2,n}$;

(C_n, B_n) c'est le cas précédent, en inversant des rôles de G_1 et G_2 ; Σ_1 est de type C_n et Σ_2 de type B_n ; on a les égalités $j_*(\check{\alpha}_{1,j}) = \check{\alpha}_{2,j}$ pour $j = 1, ..., n-1$, $j_*(\check{\alpha}_{1,n}) = \frac{1}{2}\check{\alpha}_{2,n}$;

(F_4) $\Sigma_1 = \Sigma_2$ est de type F_4 ; on a $j_*(\check{\alpha}_{1,1}) = 2\check{\alpha}_{2,4}$, $j_*(\check{\alpha}_{1,2}) = 2\check{\alpha}_{2,3}$, $j_*(\check{\alpha}_{1,3}) = \check{\alpha}_{2,2}$, $j_*(\check{\alpha}_{1,4}) = \check{\alpha}_{2,1}$;

(G_2) $\Sigma_1 = \Sigma_2$ est de type G_2 ; on a $j_*(\check{\alpha}_{1,1}) = \check{\alpha}_{2,2}$, $j_*(\check{\alpha}_{1,2}) = 3\check{\alpha}_{2,1}$.

On peut maintenant réintroduire les actions de Γ_F. A partir des cas ci-dessus, on construit des données sur F : le premier cas se décrit sans changement, mais les égalités de groupes sont maintenant des égalités de groupes définis sur F ; dans les quatre autres cas, on fixe une extension finie E de F, on considère les données décrites ci-dessus, où G_1 et G_2 sont considérés comme des groupes définis et déployés sur E, puis on prend l'image de ces données par le foncteur de restriction des scalaires de E à F. Revenons au cas général. Puisque les actions de Γ_F doivent être compatibles à l'isomorphisme j_*, il n'y a guère le choix et on obtient la description suivante à F-équivalence près : les données (G_1, G_2, j_*) sont produits, en un sens évident de données qui sont toutes de l'un des cinq types élémentaires décrits ci-dessus.

Considérons des données (G_1, G_2, j_*). Pour $i = 1, 2$, on a les égalités $\mathfrak{t}_i = X_{i,*} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F} = X_{i,*,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{F}$. De j_* se déduit un isomorphisme de $\mathfrak{t}_1$ sur $\mathfrak{t}_2$. Grâce au (iii) du lemme et à l'équivariance de nos applications pour les actions de Γ_F, on obtient une bijection :

$$(\mathfrak{t}_1/\Omega_1)^{\Gamma_F} \simeq (\mathfrak{t}_2/\Omega_2)^{\Gamma_F}.$$

Or ces ensembles paramètrent les classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_1(F)$ et $\mathfrak{g}_2(F)$: à un élément semi-simple X, disons de $\mathfrak{g}_1(F)$, on associe l'image dans $\mathfrak{t}_1/\Omega_1$ d'un élément $X' \in \mathfrak{t}_1$ conjugué à X par un élément de G_1. On obtient donc une correspondance bijective entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_1(F)$ et classes analogues dans $\mathfrak{g}_2(F)$. Cette correspondance envoie une classe régulière sur une classe régulière. Pour $i = 1, 2$, soit $f_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_i(F))$. Disons que f_1 est un transfert de f_2 (ou vice-versa...) si on a l'égalité :

$$SO_{X_1}(f_1) = SO_{X_2}(f_2)$$

pour tous $X_1 \in \mathfrak{g}_{1,reg}(F)$, $X_2 \in \mathfrak{g}_{2,reg}(F)$, dont les classes de conjugaison stables se correspondent par la bijection ci-dessus.

Remarque. Ici encore, on doit normaliser convenablement les mesures. On y reviendra en 3.10.

Conjecture de transfert non standard. *Dans la situation ci-dessus, pour toute $f_2 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_2(F))$, il existe $f_1 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$ qui soit un transfert de f_2.*

Remarque. La conjecture se ramène immédiatement à la même conjecture pour chacun des cas élémentaires (sur F) décrits ci-dessus. Dans le premier cas, la conjecture est tautologique. Dans les quatre autres cas, quite à changer de corps de base, on est ramené au cas d'une paire de groupes déployés de l'un des types (B_n, C_n), (C_n, B_n), (F_4), (G_2).

1.8 Le premier théorème

Théorème. *Considérons toutes les données $(\eta, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}}, j_*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(a) η est un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ et ϵ est un élément semi-simple de $H_z(F)$;

(b) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique de $G_{\eta,SC}$ (rappelons que $G_{\eta,SC}$ est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de la composante neutre G_η du commutant de η dans G) ;

(c) le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ vérifie les hypothèses "non standard" du paragraphe 1.7.

Pour chacune de ces données, on suppose que :

(d) la conjecture de transfert pour les algèbres de Lie du paragraphe 1.6 est vérifiée pour le couple $(\mathfrak{g}_{\eta,SC}, \bar{\mathfrak{h}})$;

(e) la conjecture de transfert non standard du paragraphe 1.7 est vérifiée pour le couple $(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}, \bar{\mathfrak{h}}_{SC})$.

Alors la conjecture de transfert du paragraphe 1.5 est vérifiée pour le triplet $(\tilde{G}, \theta, \boldsymbol{\omega})$ et sa donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.

Ce théorème sera démontré en 3.11. En fait, la démonstration est constructive : on construit une famille de données telle que la conclusion de l'énoncé soit vraie pourvu que chaque donnée de la famille vérifie les conditions (d) et (e). Cela permet de préciser l'énoncé dans certaines situations. Plaçons-nous sur $\bar{F}$ et décomposons G_{SC}^* en produit de composantes quasi-simples. L'automorphisme θ^* permute ces composantes. Pour chaque composante G_0^*, soit $m(G_0^*)$ le plus petit entier > 0 tel que $\theta^{m(G_0^*)}$ conserve G_0^* et soit $\theta_{G_0^*}$ la restriction de $\theta^{m(G_0^*)}$ à G_0^*. On sait classifier les couples $(G_0^*, \theta_{G_0^*})$ possibles : ou bien $\theta_{G_0^*}$ est l'identité ; ou bien $\theta_{G_0^*}$ est d'ordre 2 et G_0^* est de l'un des types A_n, D_n ou E_6 ; ou bien $\theta_{G_0^*}$ est d'ordre 3 et G_0^* est de type D_4.

Précisions sur le théorème. *(1) Supposons que pour chaque composante quasi-simple G_0^*, $\theta_{G_0^*}$ soit l'identité. Alors, dans l'énoncé du théorème, on peut se limiter aux données pour lesquelles le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est tautologique, et on peut supprimer l'hypothèse (e) qui est automatiquement vérifiée.*

(2) Supposons que parmi les couples $(G_0^*, \theta_{G_0^*})$ ne figurent ni le couple formé d'un groupe de type E_6 avec son automorphisme non trivial, ni celui formé d'un groupe de type D_4 muni d'un automorphisme d'ordre 3. Alors, dans l'énoncé du théorème, on peut se limiter aux données pour lesquelles le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est produit de triplets élémentaires qui sont soit tautologiques, soit obtenus par restriction des scalaires à partir d'un triplet de type (B_n, C_n) ou (C_n, B_n).

(3) Supposons $\boldsymbol{\omega} = 1$. Alors, dans l'énoncé du théorème, on peut se limiter aux données pour lesquelles $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ provient, par un relèvement usuel, d'une donnée endoscopique pour G_η.

1.9 Le cas du changement de base

Soient G_0 un groupe réductif connexe défini sur F et E une extension galoisienne finie de F, cyclique, c'est-à-dire que le groupe de Galois $Gal(E/F) = \Gamma_E \backslash \Gamma_F$ est cyclique. Supposons que G soit la restriction des scalaires à la Weil de G_0 relativement à l'extension E/F, ce que l'on note $G = Res_{E/F}(G_0)$. On a :

$$G = G_0^{\Gamma_E \backslash \Gamma_F},$$

autrement dit un élément $g \in G$ est une fonction de $\Gamma_E \backslash \Gamma_F$ dans G_0. L'action de Γ_F se décrit ainsi : pour $g \in G$, $\sigma \in \Gamma_F$ et $\gamma \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F$, on a $(\sigma g)(\gamma) = \sigma(g(\gamma\sigma))$. Fixons un générateur θ de $\Gamma_E \backslash \Gamma_F$. Alors θ agit sur G par $(\theta g)(\gamma) = g(\theta^{-1}\gamma)$ pour tous $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F$. Le triplet $(G, \theta, \boldsymbol{\omega} = 1)$ vérifie les hypothèses de 1.2.

Pour un tel triplet, le théorème 1.8 se simplifie. D'abord, la fonction z de 1.2 est égale à 1. Ensuite, on est à la fois dans les situations (1) et (3) des précisions qui suivent le théorème. Enfin, fixons une forme intérieure quasi-déployée G_0^* de G_0. Pour tout élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(F)$, on sait qu'il existe un élément semi-simple $\eta_0^* \in G_0^*(F)$ tel que G_{0,η_0*}^* soit quasi-déployé et G_η soit une forme intérieure de G_{0,η_0*}^* ([Lab1] lemme 2.4.4). Pour une donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ de $(G, \theta, 1)$, on obtient :

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, considérons toutes les données $(\eta_0^*, G'_{\eta_0^*}, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ telles que :*

(a) η_0^* est un élément semi-simple de $G_0^*(F)$, $G_{0,\eta_0^*}^*$ est quasi-déployé et ϵ est un élément semi-simple de $H(F)$;

(b) $G'_{\eta_0^*}$ est une forme intérieure de $G_{0,\eta_0^*}^*$;

(c) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique de $G'_{\eta_0^*}$ et $\bar{H} = H_\epsilon$.

Supposons que pour chacune de ces données, la conjecture de transfert pour les algèbres de Lie du paragraphe 1.6 soit vérifiée pour le couple $(\mathfrak{g}'_{\eta_0^*}, \bar{\mathfrak{h}})$. Alors la conjecture de transfert du paragraphe 1.5 est vérifiée pour le triplet $(\tilde{G}, \theta, 1)$ et sa donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.

Dans le cas particulier où $H = G_0^*$ est le groupe endoscopique principal, on a nécessairement $\bar{H} = G_{0,\eta_0^*}^*$ et la conjecture de transfert est connue pour le couple $(\mathfrak{g}'_{\eta_0^*}, \bar{\mathfrak{h}})$. On retrouve alors le théorème 3.3.1 de [Lab1]. D'autre part, si $G_0^* = SL(n)$ ou si $G_0^* = U(n)$ (groupe unitaire), un commutant $G_{0,\eta_0^*}^*$ est produit de groupes qui sont ou bien unitaires, ou bien ont pour revêtement simplement connexe un groupe $Res_{F'/F}(SL(n))$, où F' est une extension finie de F. La conjecture de transfert est connue pour toute forme intérieure $G'_{\eta_0^*}$ d'un tel groupe et toute donnée endoscopique $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ (grâce à [LN] dans le cas unitaire). Alors :

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, supposons $G_0^* = SL(n)$ ou $G_0^* = U(n)$. Alors la conjecture de tranfert est vérifiée pour le triplet $(\tilde{G}, \theta, 1)$ et toute donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.*

2 Analyse harmonique

2.1 Voisinages d'un élément semi-simple

Notons (B_1, T_1) la paire de Borel de H_1, image réciproque de (B_H, T_H). Remarquons que le groupe de Weyl de H_1 relatif à T_1 est le même groupe Ω_H que celui de H relatif à T_H. posons $E_1 = T_1/\Omega_H$. Cet ensemble paramètre les classes de conjugaison semi-simples dans H_1. On note $\pi_1 : H_1 \to E_1$ l'application qui, à un élément de H_1, associe le paramètre de sa partie semi-simple. On sait que E_1 est naturellement munie d'une structure de variété algébrique lisse sur F et que π_1 est une application régulière. On doit tordre l'action naturelle de Γ_F sur E_1. Pour cela, on remarque que Z_{H_1} agit naturellement sur E_1 (par multiplication). On note $E_{1,z}$ la variété E_1, munie de l'action de Γ_F :

$$e \mapsto z_{H_1}(\sigma)^{-1}\sigma(e)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors $\pi_{1,z} : H_{1,z} \to E_{1,z}$ est équivariante pour les actions de Γ_F et se restreint en une application $\pi_F : H_{1,z}(F) \to E_{1,z}(F)$.

Remarque. Reprenons la remarque de 1.3, en l'appliquant au groupe H_1. On fixe donc un plongement $i : H_1 \to H_1'$ ayant les mêmes propriétés que dans cette remarque, on fixe $z_1 \in Z_{H_1'}$ tel que $\sigma(z_1)^{-1}z_1 = i(z_{H_1}(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ et on définit $i_{z_1} : H_{1,z} \to H_1'$ par $i_{z_1}(x) = i(x)z_1$. Notons T_1' l'unique sous-tore maximal de H_1' contenant $i(T_1)$. De nouveau, le groupe de Weyl de H_1' relatif à T_1' est le même que celui de H_1 relatif à T_1. On introduit la variété $E_1' = T_1'/\Omega_H$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \to & T_1' \\ x & \mapsto & i(x)z_1 \end{array}$$

se descend en un plongement $i_E : E_{1,z} \to E'$, qui est équivariant pour les actions de Γ_F. Notons $D = H_1'/i(H_1)$. La projection $j : H_1' \to D$ se descend en une projection $j_E : E' \to D$. L'image du plongement précédent est la fibre de j_E au-dessus de $j(z_1)$. Alors π_1 s'interprète comme l'application rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H_{1,z} & \stackrel{\pi_1}{\to} & E_{1,z} \\ i_{z_1} \downarrow & & \downarrow i_E \\ H_1' & \stackrel{\pi_1'}{\to} & E_1' \end{array}$$

où π_1' est l'analogue de π_1. $\square$

La torsion de l'action galoisienne est inessentielle : on montre que $E_{1,z}(F)$ est une variété analytique lisse sur F et que π_F est un morphisme de variétés analytiques.

Cela résulte de la remarque précédente en se rappelant que H'_1 et E'_1 sont des variétés algébriques lisses et que π'_1 est régulière. En particulier, π_F est continue. Elle est surjective. Plus précisément, notons $H_{1,\sharp}(F)$ le sous-ensemble des $x \in H_{1,z}(F)$ qui sont semi-simples et dont le commutant connexe $H_{1,x}$ est quasi-déployé sur F. Alors :

(1) on a l'égalité $\pi_F(H_{1,\sharp}(F)) = E_{1,z}(F)$.

En effet, soit $e \in E_{1,z}(F)$, choisissons $y \in T_1$ tel que $\pi_1(y) = e$, posons $B_{1,y} = B_1 \cap H_{1,y}$ et fixons un épinglage de $H_{1,y}$ relatif à la paire de Borel $(B_{1,y}, T_1)$ de $H_{1,y}$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Puisque e appartient à $E_{1,z}(F)$, il existe un élément $n_\sigma \in N_{H_1}(T_1)$ tel que $z_{H_1}(\sigma)^{-1}\sigma(y) = n_\sigma y n_\sigma^{-1}$. Cet élément normalise $H_{1,y}$. Puisque $H_{1,der}$ est simplement connexe, le centralisateur H_1^y est connexe, égal à $H_{1,y}$ et la classe $n_\sigma N_{H_{1,y}}(T_1)$ est uniquement déterminée. Quitte à changer n_σ dans cette classe, on peut supposer que $Int(n_\sigma)$ conserve $B_{1,y}$ et l'épinglage. Alors n_σ est uniquement déterminé modulo le centre de $H_{1,y}$. On définit une structure galoisienne sur $H_{1,y}$ en faisant agir tout $\sigma \in \Gamma_F$ par $x \mapsto n_\sigma \sigma(x) n_\sigma^{-1}$. Par restriction, on obtient une nouvelle structure sur T_1. Parce que H_1 est quasi-déployé, le tore T_1 muni de cette structure est justiciable de [Ko1] corollaire 2.2. D'où l'existence de $h \in H_1$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $\sigma(h)^{-1}h \in n_\sigma T_1$. Posons $\epsilon = hyh^{-1}$. Alors $\sigma(\epsilon) = z_{H_1}(\sigma)\epsilon$ pour tout σ, i.e. $\epsilon \in H_{1,z}(F)$. Evidemment, ϵ est semi-simple et $\pi_F(\epsilon) = \pi_1(y) = e$. Enfin $H_{1,\epsilon} = Int(h)(H_{1,y})$ et on vérifie que la paire $(Int(h)(B_{1,y}), Int(h)(T_1))$ est définie sur F. Donc $H_{1,\epsilon}$ est quasi-déployé sur F et ϵ appartient à $H_{1,\sharp}(F)$. $\square$

On note $|.|$ la valeur absolue usuelle de F, que l'on prolonge à $\bar{F}$ en une valeur absolue à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Pour tout tore T et tout réel $r > 0$, notons $T^{<r}$ l'ensemble des $t \in T$ tels que $|1 - x^*(t)| < r$ pour tout $x^* \in X^*(T)$. Soit $\epsilon \in H_{1,\sharp}(F)$, choisissons $y \in T_1$ qui soit conjugué à ϵ par un élément de H_1 et posons :

$$V^{<r}(\epsilon) = \pi_F^{-1}(\pi_1(T_1^{<r}y) \cap E_{1,z}(F)).$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de y car $\pi_1(T_1^{<r}y)$ n'en dépend pas. On a :

(2) $V^{<r}(\epsilon)$ est un voisinage ouvert et fermé de x.

Il est clair que $\pi_1(T_1^{<r}y) \cap E_{1,z}(F)$ est un voisinage ouvert et fermé de $\pi_F(\epsilon)$. L'assertion résulte de la continuité de π_F.

On a aussi :

(3) soit V un voisinage de ϵ dans $H_{1,z}(F)$. Alors il existe $r > 0$ tel que, pour tout élément semi-simple $x \in V^{<r}(\epsilon)$, il existe $h \in H_1$ et $x' \in V$ tels que $hxh^{-1} = x'$.

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ des classes de conjugaison par $H_{1,\epsilon}(F)$ dans l'ensemble des tores maximaux de $H_{1,\epsilon}$ définis sur F. Soit y comme ci-dessus. On choisit r assez petit pour que les conditions suivantes soient vérifiées :

- si $\omega \in \Omega_H$ vérifie $\omega(T_1^{<r}y) \cap T_1^{<r}y \neq \emptyset$, alors $\omega(y) = y$;

- pour tout $T \in \mathcal{T}$, on a l'inclusion $(T^{<r} \cap T(F))\epsilon \subset V$.

Soit x un élément semi-simple de $V^{<r}(\epsilon)$, fixons un sous-tore maximal T_x de $H_{1,x}$, défini sur F. Soit $h_1 \in H_1$ tel que $T_x = Int(h_1)(T_1)$, posons $y_1 = Int(h_1^{-1})(x)$. Remarquons que x appartient à T_x, donc y_1 appartient à T_1. Quitte à multiplier h_1 par un élément de $N_{H_1}(T_1)$, on peut supposer que y_1 appartient à $T_1^{<r}y$: cela résulte de l'hypothèse $x \in V^{<r}(\epsilon)$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Parce que T_x et T_1 sont tous deux définis sur F, on a $\sigma(h_1)^{-1}h_1 \in N_{H_1}(T_1)$. Notons m_σ l'image de cet élément dans Ω_H. On a l'égalité $m_\sigma(y_1) = z_{H_1}(\sigma)^{-1}\sigma(y_1)$. Puisque $\pi_1(y) = \pi_F(\epsilon)$ appartient à $E_{1,z}(F)$, il existe aussi $n_\sigma \in \Omega_H$ tel que $n_\sigma(y) = z_{H_1}(\sigma)^{-1}\sigma(y)$. Ecrivons $y_1 = ty$, avec $t \in T_1^{<r}$. Alors $n_\sigma^{-1}m_\sigma(ty) = n_\sigma^{-1}(\sigma(t))y$. Puisque ty et $n_\sigma^{-1}(\sigma(t))y$ appartiennent tous deux à $T_1^{<r}$, $n_\sigma^{-1}m_\sigma$ fixe y, d'où résulte l'égalité $m_\sigma(y) = z_{H_1}(\sigma)\sigma(y)$. Posons $\epsilon' = h_1 y h_1^{-1}$. De l'égalité précédente résulte que ϵ' appartient à $H_{1,z}(F)$. Cet élément ϵ' est conjugué à ϵ par un

élément de H_1. Fixons $h \in H_1$ tel que $h\epsilon' h^{-1} = \epsilon$. Alors $Int(h)$ se restreint en un torseur intérieur de $H_{1,\epsilon'}$ dans $H_{1,\epsilon}$. Remarquons que ϵ' appartient à T_x donc T_x est un sous-tore maximal de $H_{1,\epsilon'}$ défini sur F. Puisque $H_{1,\epsilon}$ est quasi-déployé, on peut appliquer [Ko1] corollaire 2.2 : quitte à multiplier h par un élément de $H_{1,\epsilon}$, on peut supposer que le tore $T' = Int(h)(T_x)$ est défini sur F et que la restriction de $Int(h)$ est un isomorphisme défini sur F de T_x sur T'. Quitte à multiplier encore h par un élément de $H_{1,\epsilon}(F)$, on peut supposer que T' appartient à $\mathcal{T}$. Posons $x' = hxh^{-1}$. Puisque la restriction de $Int(h)$ est définie sur F, x' appartient à $T' \cap H_{1,z}(F)$, c'est-à-dire à $T'(F)\epsilon$. Enfin, le couple (x', ϵ) est conjugué par hh_1 à (y_1, y) donc $x'\epsilon^{-1}$ appartient à $T'^{<r}$. Alors $x' \in (T'^{<r} \cap T'(F))\epsilon$, a fortiori $x' \in V^{<r}(\epsilon)$. $\square$

2.2 Transfert local

Le lemme suivant reprend le lemme 2.2.A de [LS1].

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Supposons que pour tout $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$, il existe un voisinage V de ϵ_1 dans $H_{1,z}(F)$ et une fonction $f_V \in C_c^\infty(H_{1,z}(F))$ telle que $SO_{\gamma_1}(f_V) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$ pour tout élément $\gamma_1 \in V \cap H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$. Alors il existe $f_1 \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ qui soit un transfert de f.*

Preuve. On montre d'abord :

(1) pour tout $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$, il existe $r > 0$ et $f_{\epsilon_1} \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ tels que l'on ait l'égalité :

$$SO_{\gamma_1}(f_{\epsilon_1}) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$$

pour tout $\gamma_1 \in (Z_1(F)V^{<r}(\epsilon_1)) \cap H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$.

On fixe $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$. Soient V le voisinage de ϵ_1 et f_V la fonction fournis par l'hypothèse de l'énoncé. Choisissons r de sorte que la propriété 2.1(3) soit vérifiée pour ce voisinage. Pour $\gamma_1 \in V^{<r}(\epsilon_1) \cap H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$, $SO_{\gamma_1}(f_V)$ ne dépend que de la restriction de f_V à $V^{<r}(\epsilon_1)$. En se rappelant que $V^{<r}(\epsilon_1)$ est ouvert et fermé (cf. 2.1(2)), on peut remplacer V par $V \cap V^{<r}(\epsilon_1)$ et f_V par son produit avec la fonction caractéristique de $V^{<r}(\epsilon_1)$.

Pour $x \in H_{1,z}(F)$, considérons l'ensemble $\{z \in Z_1(F); zx \in V^{<r}(\epsilon_1)\}$. Il est ouvert car $V^{<r}(\epsilon_1)$ l'est. Il est aussi compact. En effet, notons $P : H_1 \to H_1/H_{1,der}$ la projection naturelle. L'image $P(V^{<r}(\epsilon_1))$ est relativement compacte et la restriction de P à $Z_1(F)$ est propre. Il en résulte que notre ensemble est relativement compact. Il est de plus fermé puisque $V^{<r}(\epsilon_1)$ l'est. L'assertion en résulte. Fixons une mesure de Haar sur $Z_1(F)$ et notons $m(x)$ la mesure de $\{z \in Z_1(F); zx \in V^{<r}(\epsilon_1)\}$. La fonction m ainsi définie est localement constante. Pour tout $\gamma_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$, elle est constante sur la classe de conjugaison stable de γ_1. Définissons f_{ϵ_1} par :

$$f_{\epsilon_1}(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \notin Z_1(F)V^{<r}(\epsilon_1), \\ m(x)^{-1} \int_{Z_1(F)} f_V(zx)\lambda_1(z)\, dz, & si\ x \in Z_1(F)V^{<r}(\epsilon_1). \end{cases}$$

Cette fonction appartient à l'espace $C_1^\infty(H_{1,z}(F))$. Soit $\gamma_1 \in (Z_1(F)V^{<r}(\epsilon_1)) \cap H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$. On a l'égalité :

$$SO_{\gamma_1}(f_{\epsilon_1}) = m(\gamma_1)^{-1} \int_{Z_1(F)} SO_{z\gamma_1}(f_V)\lambda_1(z)\, dz.$$

Soit $z \in Z_1(F)$. Si $z\gamma_1 \notin V^{<r}(\epsilon_1)$, f_V s'annule sur la classe de conjugaison stable de $z\gamma_1$ et $SO_{z\gamma_1}(f_V) = 0$. Supposons $z\gamma_1 \in V^{<r}(\epsilon_1)$, choisissons $\gamma_1' \in V$ stablement conjugué à $z\gamma_1$. Parce que les intégrales orbitales stables et le facteur de transfert sont invariants par conjugaison stable, on a :

$$SO_{z\gamma_1}(f_V) = SO_{\gamma_1'}(f_V) = O_{\gamma_1'}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = O_{z\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f).$$

Grâce à [KS] lemme 5.1.C, on a aussi :

$$O_{z\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = \lambda_1(z)^{-1} O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f).$$

Alors :

$$SO_{\gamma_1}(f_{\epsilon_1}) = m(\gamma_1)^{-1} O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) \int_{z \in Z_1(F), z\gamma_1 \in V^{<r}(\epsilon_1)} dz \;=\; O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f),$$

ce qui prouve (1).

Considérons l'ensemble $E_{1,z}(F)/Z_1(F)$ muni de la topologie quotient. C'est un espace topologique séparé et localement compact. Notons $\pi_F' : H_{1,z}(F) \to E_{1,z}(F)/Z_1(F)$ la composée de π_F et de la projection naturelle de $E_{1,z}(F)$ sur son quotient. Parce que f est à support compact, il existe un sous-ensemble compact C de $E_{1,z}(F)/Z_1(F)$ tel que, pour tout $\gamma_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$, on ait l'implication :

$$O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) \neq 0 \Rightarrow \pi_F'(\gamma_1) \in C.$$

Fixons un tel C, que l'on peut supposer ouvert. Pour tout $e \in C$, fixons $\epsilon_e \in H_{1,\sharp}(F)$ tel que $\pi_F'(\epsilon_e) = e$. C'est possible d'après 2.1(1). Fixons un réel $r_e > 0$ et une fonction $f_e \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ qui vérifient la conclusion de (1) relativement au point ϵ_e. L'ensemble $\pi_F'(V^{<r_e}(\epsilon_e))$ est un voisinage ouvert de e dans $E_{1,z}(F)/Z_1(F)$. Quand e parcourt C, on obtient un recouvrement ouvert de C dont on peut extraire un recouvrement fini. Plus précisément, on fixe un ensemble fini $\mathcal{E} \subset C$ tel que $(C \cap \pi_F'(V^{<r_e}(\epsilon_e)))_{e \in \mathcal{E}}$ soit un recouvrement de C. Fixons une partition de l'unité $(\alpha_e)_{e \in \mathcal{E}}$ adaptée à ce recouvrement. On définit une fonction f_1 sur $H_{1,z}(F)$ par :

$$f_1(x) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \alpha_e \circ \pi_F'(x) f_e(x)$$

pour tout $x \in H_{1,z}(F)$. Cette fonction appartient à $C_1^\infty(H_{1,z}(F))$. Pour $\gamma_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$, on a l'égalité :

$$SO_{\gamma_1}(f_1) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \alpha_e \circ \pi_F'(\gamma_1) SO_{\gamma_1}(f_e).$$

Si $e \in \mathcal{E}$ est tel que $\alpha_e \circ \pi_F'(\gamma_1) \neq 0$, l'élément γ_1 appartient nécessairement à $Z_1(F)V^{<r_e}(\epsilon_e)$, et la propriété (1) entraîne l'égalité $SO_{\gamma_1}(f_e) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$. Alors :

$$SO_{\gamma_1}(f_1) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) \sum_{e \in \mathcal{E}} \alpha_e \circ \pi_F'(\gamma_1).$$

Si $\pi_F'(\gamma_1)$ appartient à C, la somme vaut 1 et l'expression ci-dessus vaut $O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$. Si $\pi_F'(\gamma_1) \notin C$, la somme est nulle mais $O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$ aussi d'après le choix de C. En tout cas, on a l'égalité :

$$SO_{\gamma_1}(f_1) = O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f).$$

□

2.3 Descente aux algèbres de Lie

Commençons par quelques rappels généraux. Soit M un groupe réductif connexe défini sur F. Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(F)$, la conjugaison stable n'est autre que la conjugaison par M. C'est-à-dire que deux éléments $X, Y \in \mathfrak{m}(F)$ sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $m \in M$ tel que $Y = m^{-1}Xm$. Disons que deux éléments $x, y \in M(F)$ sont géométriquement conjugués s'il existe $m \in M$ tel que $y = m^{-1}xm$. Il existe des voisinages ouverts $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}(F)$ et V de 1 dans $M(F)$ tels que l'on puisse définir l'application exponentielle habituelle $exp : \mathfrak{V} \to V$. On peut supposer de plus les conditions suivantes :

(1) $\mathfrak{V}$ est invariant par conjugaison stable et V l'est par conjugaison géométrique ;

(2) exp est un homéomorphisme ;

(3) exp transporte la conjugaison stable en la conjugaison géométrique. Précisément, soient $X \in \mathfrak{V}$ et $m \in M$. Alors $m^{-1}Xm \in \mathfrak{m}(F) \Leftrightarrow m^{-1}exp(X)m \in M(F)$. Si $m^{-1}Xm \in \mathfrak{m}(F)$, on a l'égalité $exp(m^{-1}Xm) = m^{-1}exp(X)m$;

Quand on parlera d'exponentielle, il sera implicite que l'on a fixé de tels voisinages et que l'on ne considère que des éléments qui leur appartiennent.

Soit $m \in M(F)$ un élément semi-simple. La théorie de la descente de Harish-Chandra affirme l'existence d'un voisinage $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{m}_m(F)$ ($\mathfrak{m}_m$ est l'algèbre de Lie du centralisateur connexe M_m de m) vérifiant les propriétés suivantes :

(4) $\mathfrak{U}$ est invariant par conjugaison par $M^m(F)$; pour $X \in \mathfrak{U}$, X est semi-simple régulier dans $\mathfrak{m}_m(F)$ si et seulement si $exp(X)m$ est semi-simple régulier dans $M(F)$;

(5) soient $X, Y \in \mathfrak{U}$ et $x \in M$ tels que $x^{-1}exp(X)mx = exp(Y)m$. Alors $x \in M^m$;

(6) soit $f \in C_c^\infty(M(F))$; alors il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_m(F))$ telle que $O_X^{M_m}(\varphi) = O^M_{exp(X)m}(f)$ pour tout $X \in \mathfrak{U}$ tel que $exp(X)m \in M_{reg}(F)$. On a précisé les notations en indiquant en exposant le groupe ambiant : $O_X^{M_m}(\varphi)$ est l'intégrale de φ sur l'orbite de X pour la conjugaison par $M_m(F)$, $O^M_{exp(X)m}(f)$ est l'intégrale de f sur l'orbite de $exp(X)m$ pour la conjugaison par $M(F)$;

(7) soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_m(F))$. Supposons que l'on ait l'égalité $O_X^{M_m}(\varphi) = O^{M_m}_{x^{-1}Xx}(\varphi)$ pour tout $X \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{m}_{m,reg}(F)$ et tout $x \in M^m(F)$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(M(F))$ telle que :

(7)(a) $O_x^M(f) = 0$ pour tout élément $x \in M_{reg}(F)$ qui n'est conjugué par $M(F)$ à aucun élément de $exp(\mathfrak{U})m$;

(7)(b) $O^M_{exp(X)m}(f) = O_X^{M_m}(\varphi)$ pour tout $X \in \mathfrak{U}$ tel que $exp(X)m \in M_{reg}(F)$.

On peut de plus supposer :

(8) $\mathfrak{U}$ est invariant par conjugaison stable.

La situation que l'on vient de considérer est celle où $M(F)$ agit par conjugaison sur lui-même. Nous avons à considérer la situation où $H_1(F)$ agit par conjugaison sur l'espace "tordu" $H_{1,z}(F)$. En utilisant la remarque 1.3, on voit que la torsion de l'action galoisienne est inessentielle et que les résultats restent valables dans cette situation tordue.

Lemme. *Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Supposons que pour tout élément $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$, il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F))$ telle que l'on ait l'égalité :*

$$SO_X^{H_{1,\epsilon_1}}(\varphi) = O^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}_{exp(X)\epsilon_1}(f)$$

pour tout $X \in \mathfrak{V}$ tel que $exp(X)\epsilon_1 \in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$. Alors il existe $f_1 \in C_1^\infty(H_{1,z}(F))$ qui soit un transfert de f.

Preuve. On va montrer que l'hypothèse du lemme 2.2 est vérifiée. Soit $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$. Fixons $\mathfrak{V}$ et φ vérifiant les hypothèses de l'énoncé ci-dessus. Fixons aussi un voisinage $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$ vérifiant les propriétés (4) à (8) ci-dessus (appliquées à $M = H_1$ et $m = \epsilon_1 \in H_{1,z}(F)$). On peut supposer $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$. Posons :

$$V = \{x^{-1}exp(X)\epsilon_1 x; x \in H_1(F), X \in \mathfrak{V}\}.$$

Grâce à (5), l'application :

$$\begin{array}{ccc} H_1(F) \times \mathfrak{U} & \to & H_{1,z}(F) \\ (x, Y) & \mapsto & x^{-1}exp(Y)\epsilon_1 x \end{array}$$

est partout submersive. Cela entraîne que V est un voisinage ouvert de ϵ_1 dans $H_{1,z}(F)$. Puisque $H_{1,der}$ est simplement connexe, $H_1^{\epsilon_1}$ est connexe, égal à H_{1,ϵ_1}. L'hypothèse de (7) est automatiquement vérifiée. On peut donc fixer une fonction $f_V \in C_c^\infty(H_{1,z}(F))$ telle que :

(9) $O_{\gamma_1}^{H_1}(f_V) = 0$ pour tout $\gamma_1 \in H_{1,z,reg}(F)$ qui n'est conjugué à aucun élément de $exp(\mathfrak{U})\epsilon_1$;

(10) $O_{exp(X)\epsilon_1}^{H_1}(f_V) = O_X^{H_{1,\epsilon_1}}(\varphi)$ pour tout $X \in \mathfrak{U}$ tel que $exp(X)\epsilon_1 \in H_{1,z,reg}(F)$..

Soit $\gamma_1 \in V \cap H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}$ des classes de conjugaison par $H_1(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ_1. On peut supposer que, pour tout $e \in \mathcal{E}$, ou bien la classe de conjugaison de e par $H_1(F)$ ne coupe pas $exp(\mathfrak{U})\epsilon_1$, ou bien $e \in exp(\mathfrak{U})\epsilon_1$. On note $\mathcal{E}_0$ le sous-ensemble des $e \in \mathcal{E}$ qui vérifient cette dernière condition et, pour $e \in \mathcal{E}_0$, on note X_e l'élément de $\mathfrak{U}$ tel que $e = exp(X_e)\epsilon_1$. On peut supposer que $\gamma_1 \in \mathcal{E}$ et l'hypothèse $\gamma_1 \in V$ entraîne alors que $\gamma_1 \in \mathcal{E}_0$. Posons simplement $X = X_{\gamma_1}$. Montrons que :

(11) l'ensemble $\{X_e; e \in \mathcal{E}_0\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H_{1,\epsilon_1}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X.

Soit $e \in \mathcal{E}_0$. Il existe $x \in H_1$ tel que $e = x^{-1}\gamma_1 x$. Puisque e et γ_1 appartiennent tous deux à $exp(\mathfrak{U})\epsilon_1$, la propriété (5) et la connexité de $H_1^{\epsilon_1}$ entraînent que x appartient à H_{1,ϵ_1}. Alors $X_e = x^{-1}Xx$, donc X_e appartient à la classe de conjugaison stable de X. Inversement, soit Y dans cette classe de conjugaison stable. posons $y = exp(Y)\epsilon_1$. Alors y est stablement conjugué à γ_1 et il existe un unique $e \in \mathcal{E}$ tel que y soit conjugué à e par un élément de $H_1(F)$. On considère cet élément e, soit $x \in H_1(F)$ tel que $y = x^{-1}ex$. Rappelons que Y est stablement conjugué à X qui appartient à $\mathfrak{U}$. Grâce à (8), Y appartient lui-aussi à $\mathfrak{U}$, donc e appartient à $\mathcal{E}_0$. De nouveau, la propriété (5) et la connexité de $H_1^{\epsilon_1}$ entraînent que $x \in H_{1,\epsilon_1}(F)$. Puis $Y = x^{-1}X_e x$. Cela montre que tout élément de la classe de conjugaison stable de X est conjugué par $H_{1,\epsilon_1}(F)$ à l'un des X_e. Enfin, pour deux éléments distincts $e, e' \in \mathcal{E}_0$, X_e et $X_{e'}$ ne peuvent pas être conjugués par un élément de $H_{1,\epsilon_1}(F)$, sinon e et e' le seraient par le même élément. Cela prouve (11).

Il en résulte que :

$$SO_X^{H_{1,\epsilon_1}}(\varphi) = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} O_{X_e}^{H_{1,\epsilon_1}}(\varphi).$$

En utilisant (10), on obtient :

$$SO_X^{H_{1,\epsilon_1}}(\varphi) = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} O_e^{H_1}(f_V).$$

D'après (9) et la définition de $\mathcal{E}_0$, on a $O_e^{H_1}(f_V)=0$ pour tout $e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_0$. D'où l'égalité :

$$SO_X^{H_1,\epsilon_1}(\varphi)=\sum_{e\in\mathcal{E}}O_e^{H_1}(f_V).$$

Le membre de droite ci-dessus est $SO_{\gamma_1}^{H_1}(f_V)$. Puisque γ_1 appartient à V, on peut supposer que X appartient à $\mathfrak{V}$. Le membre de gauche ci-dessus est égal à $O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)$ par l'hypothèse de l'énoncé. Mais alors V et f_V vérifient l'hypothèse du lemme 2.2. $\square$

2.4 Descente pour l'espace tordu

Soit η un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$. Les propriétés énoncées au paragraphe précédent s'étendent sans difficulté au cadre des espaces tordus. Ainsi, il existe un voisinage $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\mathfrak{U}$ est invariant par conjugaison stable ; pour $X\in\mathfrak{U}$, X est semi-simple régulier dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ si et seulement si $exp(X)\eta$ est semi-simple régulier dans $\tilde{G}(F)$;

(2) soient $X,Y\in\mathfrak{U}$ et $x\in G$ tels que $x^{-1}exp(X)\eta x=exp(Y)\eta$; alors $x\in G^\eta$; a fortiori, si $X\in\mathfrak{U}$ est semi-simple régulier, on a l'inclusion $G_{exp(X)\eta}\subset G_\eta$.

On peut de plus supposer $\mathfrak{U}$ ouvert et fermé. Nous aurons besoin d'une version un peu plus sophistiquée de 2.3(6), que nous allons démontrer. Pour cela, on peut imposer de plus à $\mathfrak{U}$ de vérifier la propriété :

(3) soit $C\subset\tilde{G}(F)$ un sous-ensemble compact ; alors l'ensemble des $x\in G(F)$ tels que $x^{-1}exp(\mathfrak{U})\eta x\cap C\neq\emptyset$ a pour image dans $G_\eta(F)\backslash G(F)$ un ensemble relativement compact.

Cette propriété est prouvée par Harish-Chandra dans le cas des groupes connexes ([HC] lemme 19) et s'étend au cadre des espaces tordus ([A] lemme 2.1).

On a déjà fixé une mesure de Haar sur $G(F)$. Dans le lemme ci-dessous, on fixe des mesures de Haar sur les groupes $G_\eta(F)$ et $G_{exp(X)\eta}(F)$ qui figurent dans l'énoncé, et on munit les espaces quotients des mesures quotients.

Lemme. *Soit η un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$. Il existe un voisinage $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$, invariant par conjugaison par $G_\eta(F)$, qui vérifie la propriété suivante. Soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Alors il existe une fonction $\phi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\eta(F))$ telle que l'on ait l'égalité :*

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G(F)}\boldsymbol{\omega}(x)f(x^{-1}exp(X)\eta x)\,dx=\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)}\boldsymbol{\omega}(x)\phi(x^{-1}Xx)\,dx$$

pour tout élément $X\in\mathfrak{U}$ tel que $exp(X)\eta\in\tilde{G}_{reg}(F)$ et $\boldsymbol{\omega}$ soit trivial sur $G_{exp(X)\eta}(F)$.

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de Harish-Chandra. On choisit $\mathfrak{U}$ ouvert et fermé vérifiant les conditions (1), (2) et (3). Soit $S=\{x\in G(F);\exists X\in\mathfrak{U},x^{-1}exp(X)\eta x\in Supp(f)\}$. Notons $\underline{S}$ l'adhérence de l'image de S dans $G_\eta(F)\backslash G(F)$. C'est un ensemble compact. On peut fixer une fonction $\alpha\in C_c^\infty(G(F))$ telle que la fonction :

$$\begin{array}{cccc}\underline{\alpha}: & G_\eta(F)\backslash G(F) & \to & \mathbb{C}\\ & x & \mapsto & \int_{G_\eta(F)}\alpha(zx)\,dz\end{array}$$

soit la fonction caractéristique d'un ensemble compact contenant $\underline{S}$. Définissons la fonction ϕ sur $\mathfrak{U}$ par :

$$\phi(X)=\int_{G(F)}f(y^{-1}exp(X)\eta y)\alpha(y)\boldsymbol{\omega}(y)\,dy.$$

On prolonge ϕ à tout $\mathfrak{g}_\eta(F)$ par 0 hors de $\mathfrak{U}$. Alors ϕ est localement constante et à support compact. Soit $X \in \mathfrak{U}$, supposons $exp(X)\eta$ fortement régulier et $\boldsymbol{\omega}$ trivial sur $G_{exp(X)\eta}(F)$. Alors :

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \boldsymbol{\omega}(x)\phi(x^{-1}Xx)\,dx =$$

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \int_{G(F)} \boldsymbol{\omega}(x)f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)\alpha(y)\boldsymbol{\omega}(y)\,dy\,dx.$$

Cette intégrale est absolument convergente et on peut permuter les intégrales. On obtient :

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \boldsymbol{\omega}(x)\phi(x^{-1}Xx)\,dx =$$

$$\int_{G(F)} \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)\alpha(y)\boldsymbol{\omega}(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{G_\eta(F)\backslash G(F)} \int_{G_\eta(F)} \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}z^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xzy)\alpha(zy)\boldsymbol{\omega}(xzy)\,dx\,dz\,dy.$$

Par le changement de variable $x \mapsto xz^{-1}$, on obtient :

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \boldsymbol{\omega}(x)\phi(x^{-1}Xx)\,dx =$$

$$\int_{G_\eta(F)\backslash G(F)} \int_{G_\eta(F)} \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)\alpha(zy)\boldsymbol{\omega}(xy)\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_{G_\eta(F)\backslash G(F)} \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)\underline{\alpha}(y)\boldsymbol{\omega}(xy)\,dx\,dy.$$

Si $y \in G(F)$ est tel qu'il existe $x \in G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)$ pour lequel $f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)$ est non nul, on a $y \in S$ et $\underline{\alpha}(y) = 1$. On peut donc supprimer ce terme $\underline{\alpha}(y)$ dans l'expression ci-dessus et on obtient :

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \boldsymbol{\omega}(x)\phi(x^{-1}Xx)\,dx =$$

$$\int_{G_\eta(F)\backslash G(F)} \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}x^{-1}exp(X)\eta xy)\boldsymbol{\omega}(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G(F)} \boldsymbol{\omega}(x)f(x^{-1}exp(X)\eta x)\,dx,$$

ce qui est l'égalité requise. $\square$

3 Classes de conjugaison stable et correspondances endoscopiques

3.1 Conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$

Notons $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Pour $\eta \in \tilde{G}_{ss}$, on a déjà défini le centralisateur G^η et sa composante neutre G_η. On note Z_G^η le commutant de η dans le centre Z_G de G. Remarquons que ce groupe est indépendant de η et est égal par exemple à Z_G^θ. On pose :

$$I_\eta = Z_G^\eta G_\eta,$$

cf. [Lab 1] définition II.1.3. C'est évidemment un sous-groupe de G^η. Rappelons que si $T^\natural$ est un sous-tore maximal de G_η, le centralisateur $T = Z_G(T^\natural)$ est un sous-tore maximal de G conservé par $Int(\eta)$. On a la propriété suivante :

(1) pour η, $T^\natural$ et T comme ci-dessus, on a l'égalité $G_\eta T \cap G^\eta = I_\eta$.

Preuve. L'inclusion $I_\eta \subset G_\eta T \cap G^\eta$ est claire. Pour l'inclusion inverse, l'assertion étant géométrique, on peut supposer $G = G^*$. On peut aussi conjuguer la situation et supposer que $T = T^*$ et $\eta = \nu\theta^*$ où $\nu \in T^*$. Alors $G_\eta T \cap G^\eta = G^*_{\nu\theta^*} T^{*,\theta^*}$, $T^{*,\theta^*} \cap G^*_{\nu\theta^*} = T^*_{\theta^*}$ (rappelons que $T^*_{\theta*} = (T^{*,\theta*})^0$) et il s'agit de prouver l'égalité $T^{*,\theta^*} = Z_{G^*}^{\theta^*} T^*_{\theta^*}$. Introduisons le groupe adjoint G^*_{AD} et l'image T^*_{ad} de T^* dans G^*_{AD}. Considérons l'homomorphisme naturel :

$$T^{*,\theta^*} \to T_{ad}^{*,\theta^*}.$$

L'image de $T^*_{\theta^*}$ est la composante neutre de T_{ad}^{*,θ^*}. Or ce groupe est connexe ([KS] paragraphe 1.1). La restriction à $T^*_{\theta^*}$ de l'homomorphisme ci-dessus est donc surjective. Donc T^{*,θ^*} est contenu dans le produit de sa composante neutre et du noyau de l'homomorphisme, lequel n'est autre que $Z_{G^*}^{\theta^*}$. $\square$

On a aussi :

(2) si η est fortement régulier, on a l'égalité $G^\eta = I_\eta$.

Preuve. Puisque η est fortement régulier, G^η est commutatif. Alors G_η est un tore que l'on peut noter $T^\natural$ et, avec les notations ci-dessus,on a $G^\eta \subset T$. Il reste à appliquer (1) $\square$

D'après [Lab 1] définition III.1.1, pour $\eta, \eta' \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on dit que η et η' sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $y \in G$ tel que $\eta' = y\eta y^{-1}$ et $\sigma(y)^{-1} y \in I_\eta$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Pour $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on pose :

$$\mathcal{Y}_\eta = \{y \in G; \forall \sigma \in \Gamma_F, \sigma(y)^{-1} y \in I_\eta\}.$$

Pour $y \in \mathcal{Y}_\eta$, l'élément $y\eta y^{-1}$ appartient à $\tilde{G}_{ss}(F)$ et est stablement conjugué à η. L'automorphisme $Int(y)$ se restreint en un torseur intérieur de G_η sur $G_{y\eta y^{-1}}$. L'ensemble $\mathcal{Y}_\eta$ est invariant par multiplication à gauche par $G(F)$, à droite par I_η. L'ensemble des doubles classes :

$$G(F)\backslash \mathcal{Y}_\eta / I_\eta$$

est fini ([Lab 1], corollaire III.1.3). On fixe un sous-ensemble $\dot{\mathcal{Y}}_\eta \subset \mathcal{Y}_\eta$ de représentants des doubles classes.

Remarque. Tout élément de la classe de conjugaison stable de η est conjugué par $G(F)$ à $y\eta y^{-1}$ pour un $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\eta$. Mais il n'y a pas toujours unicité de cet y, c'est-à-dire que ces éléments $y\eta y^{-1}$ ne forment pas en général un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable.

3.2 Diagrammes

On note H_{ss} l'ensemble des éléments semi-simples de H et $H_{ss,z}$ le même ensemble mais vu comme sous-ensemble de H_z.

On fixe pour les paragraphes 3.2 à 3.10 inclus un élément $\epsilon \in H_{ss,z}(F)$.

On appelle diagramme issu de ϵ un octuplet $D=(T^\flat,T_0,T,T^\natural,h,g_0,g_1,\eta)$ tel que :

(1) $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$;

(2) $T^\flat$, resp. T_0, $T^\natural$, est un sous-tore maximal défini sur F de H_ϵ, resp. G^*, G_η, et $T=Z_G(T^\natural)$ (alors T est un sous-tore maximal défini sur F de G) ;

(3) $h\in H_{SC}$, $g_0\in G^*_{\theta^*,SC}$, $g_1\in G^*_{SC}$ ($G^*_{\theta^*,SC}$ est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de la composante neutre du centralisateur de θ^* dans G^* ; il est égal au commutant de θ^* dans le revêtement simplement connexe G^*_{SC} du groupe dérivé de G^*) ;

(4) $Int(h)(T^\flat)=T_H$; $Int(g_0)(T_0)=T^*$, $Int(g_1)\circ\psi(T)=T_0$;

(5) les homomorphismes :

$$Int(g_1)\circ\psi:T\to T_0 \text{ et } Int(h^{-1})\circ\xi\circ Int(g_0):T_0\to T^\flat$$

sont définis sur F ;

(6) on a $Int(g_0g_1)\circ\tilde{\psi}(\eta)\in T^*\theta^*$ et, si on note $\nu\theta^*$ cet élément, avec $\nu\in T^*$, on a l'égalité $Int(h^{-1})\circ\xi(\nu)=\epsilon$.

Un diagramme D issu de ϵ étant donné, on posera, avec les notations ci-dessus, $\eta_D=\eta$, $\nu_D=\nu$, $\mu_D=\xi(\nu_D)=Int(h)(\epsilon)$. On note $\mathbf{D}(\epsilon)$ l'ensemble des diagrammes issus de ϵ.

Lemme. *Supposons $\mathbf{D}(\epsilon)=\emptyset$. Alors il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$ vérifiant la condition : il n'existe aucun élément de $\mathcal{D}$ de la forme $(exp(Y)\epsilon,\delta)$, où $Y\in\mathfrak{V}$.*

Preuve. Fixons un voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$ tel que, pour tout $Y\in\mathfrak{V}$, on ait l'inclusion $H_{exp(Y)\epsilon}\subset H_\epsilon$, cf. 2.3(5). Supposons qu'il existe un élément $(exp(Y)\epsilon,\delta)\in\mathcal{D}$, avec $Y\in\mathfrak{V}$. D'après [KS], lemme 3.3.B, il existe un diagramme $D=(T^\flat,T_0,T,T^\natural,h,g_0,g_1,\delta)$ issu de $exp(Y)\epsilon$. Puisque $exp(Y)\epsilon$ est fortement régulier, on a $T^\flat=H_{exp(Y)\epsilon}$. Puisque $Y\in\mathfrak{V}$, $T^\flat$ est inclus dans H_ϵ. Alors $T^\flat$ commute à la fois à ϵ et à $exp(Y)\epsilon$, donc aussi à $exp(Y)$. De plus, c'est un sous-tore maximal de H, donc $\epsilon\in T^\flat$ et $Y\in\mathfrak{t}^\flat$, plus exactement $Y\in\mathfrak{t}^\flat(F)$. L'application composée de la suite d'applications :

$$\mathfrak{t}\overset{Int(g_0g_1)\circ\psi}{\to}\mathfrak{t}^*\overset{\xi}{\to}\mathfrak{t}_H\overset{Int(h)^{-1}}{\to}\mathfrak{t}^\flat$$

est définie sur F. Il en est de même de la restriction :

$$\mathfrak{t}^\natural\overset{Int(g_0g_1)\circ\psi}{\to}\mathfrak{t}^{*,\theta^*}\overset{\xi}{\to}\mathfrak{t}_H\overset{Int(h)^{-1}}{\to}\mathfrak{t}^\flat.$$

Cette dernière est bijective car, d'après notre hypothèse de finitude de l'ordre de θ^*, l'application ξ restreinte à $\mathfrak{t}^{*,\theta^*}$ est bijective. Soit X l'élément de $\mathfrak{t}^\natural(F)$ dont l'image par l'application ci-dessus est Y. Posons $\eta=exp(-X)\delta$ (à conjugaison près par $G(F)$, on peut supposer que T appartient à un ensemble fixé fini de représentants des classes de conjugaison de tores dans G ; quitte à restreindre $\mathfrak{V}$, on peut alors supposer que l'exponentielle est définie au point $-X$). Le tore $T^\natural$ est encore un sous-tore maximal de G_η. Et $(T^\flat,T_0,T,T^\natural,h,g_0,g_1,\eta)$ est un diagramme issu de ϵ. $\square$

3.3 Ensembles de racines

Posons $X^*=X^*(T^*)$, $X_*=X_*(T^*)$, $X^*_{\mathbb{Q}}=X^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, $X_{*,\mathbb{Q}}=X_*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, notons Σ et $\check{\Sigma}$ les ensembles de racines et coracines de T^* dans G^*. Posons :

$$Y^*=X^*/(X^*\cap(1-\theta^*)X^*_{\mathbb{Q}}),\ Y_*=X_*/(X_*\cap(1-\theta^*)X_{*,\mathbb{Q}}),$$

et notons $p^* : X^* \to Y^*$, $p_* : X_* \to Y_*$ les projections naturelles. Le groupe Θ^* agit naturellement sur X^* et X_*. Remarquons que Y^*, resp. Y_* est naturellement le $\mathbb{Z}$-module dual de $X_*^{\Theta^*}$, resp. X^{*,Θ^*}. Pour $\alpha \in \Sigma$, resp. $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}$, on note $N(\alpha)$, resp. $N(\check{\alpha})$, la somme des éléments de l'orbite de α, resp. $\check{\alpha}$, sous l'action de Θ^*. D'après [KS], paragraphe 1.3, on distingue trois types de racines : pour $\alpha \in \Sigma$, on dit que α est de type 1, resp. 2,3, si $2p^*(\alpha)$ et $\frac{1}{2}\alpha$ n'appartiennent pas à $p^*(\Sigma)$, resp. $2p^*(\alpha) \in p^*(\Sigma)$, resp. $\frac{1}{2}\alpha \in p^*(\Sigma)$ (on montre que ces conditions sont exclusives l'une de l'autre). Pour $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}$, on dit que $\check{\alpha}$ est de type 1, resp. 2,3, si la racine associée α est de type 1, resp. 2,3. On pourrait d'ailleurs échanger les rôles des racines et coracines dans cette définition (et changer p^* en p_*), cela conduirait au même résultat. Posons :

$$\Sigma^{res} = p^*(\Sigma) \subset Y^*,$$

$$\check{\Sigma}^{res} = \{N(\check{\alpha}); \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha} \textit{ de type } 1 \textit{ ou } 3\} \cup \{2N(\check{\alpha}); \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha} \textit{ de type } 2\} \subset X_*^{\Theta^*},$$

$$\Sigma_{res} = \{N(\alpha); \alpha \in \Sigma, \alpha \textit{ de type } 1 \textit{ ou } 3\} \cup \{2N(\alpha); \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 2\} \subset X^{*,\Theta^*},$$

$$\check{\Sigma}_{res} = p_*(\check{\Sigma}) \subset Y_*.$$

Alors Σ^{res} est un système de racines, en général non réduit, de système de coracines associé $\check{\Sigma}^{res}$. Et Σ_{res} est un système de racines, en général non réduit, de système de coracines associé $\check{\Sigma}_{res}$.

Via le plongement $\hat{\xi}$, on identifie $\hat{T}_H$ à $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ et via l'isomorphisme ξ, on identifie $T^*_{\Theta^*}$ à T_H. Modulo ces identifications, on a les égalités $X^*(T^H) = X^{*,\Theta^*}$, $X_*(T_H) = Y_*$. En utilisant [KS], paragraphe 1.3, on calcule les ensembles Σ_H et $\check{\Sigma}_H$ de racines et coracines de H :

$$\Sigma_H = \{N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 1,\ N(\check{\alpha})(s) = 1\} \cup$$

$$\{2N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 2,\ N(\check{\alpha})(s) = 1\} \cup \{N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 3,\ N(\check{\alpha})(s) = -1\},$$

$$\check{\Sigma}_H = \{p_*(\check{\alpha});\ \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ N(\check{\alpha})(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{si } \check{\alpha} \textit{ est de type } 1 \textit{ ou } 2, \\ -1, & \textit{si } \check{\alpha} \textit{ est de type } 3 \end{array} \right. \}$$

(on a noté $\alpha \leftrightarrow \check{\alpha}$ la correspondance habituelle entre Σ et $\check{\Sigma}$; on rappelle que tout élément de X_* définit un caractère de $\hat{T}$, que l'on peut évaluer au point s, ce qui donne un sens à $N(\check{\alpha})(s)$).

Soit $\bar{D} = (\bar{T}^\flat, \bar{T}_0, \bar{T}, \bar{T}^\natural, \bar{h}, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{\eta}) \in \mathbf{D}(\epsilon)$, posons $\bar{\mu} = \mu_{\bar{D}}$, $\bar{\nu} = \nu_{\bar{D}}$. Le groupe $G^*_{\bar{\nu}\theta^*}$ a pour tore maximal $T^*_{\theta^*}$, et on a les égalités $X^*(T^*_{\theta^*}) = Y^*$, $X_*(T^*_{\theta^*}) = X_*^{\Theta^*}$. Notons $\Sigma_{\bar{G}}$ et $\check{\Sigma}_{\bar{G}}$ ses ensembles de racines et coracines. On les calcule :

$$\Sigma_{\bar{G}} = \{p^*(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{si } \alpha \textit{ est de type } 1 \textit{ ou } 2, \\ -1, & \textit{si } \alpha \textit{ est de type } 3 \end{array} \right. \},$$

$$\check{\Sigma}_{\bar{G}} = \{N(\check{\alpha});\ \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha} \textit{ de type } 1,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1\} \cup$$

$$\{2N(\check{\alpha});\ \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha} \textit{ de type } 2,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1\} \cup \{N(\check{\alpha});\ \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha} \textit{ de type } 3,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = -1\}.$$

Le groupe $H_{\bar{\mu}}$ a pour tore maximal T_H. Notons Σ_1 et $\check{\Sigma}_1$ ses ensembles de racines et coracines. On calcule :

$$\Sigma_1 = \{N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 1,\ N(\check{\alpha})(s) = 1,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1\} \cup$$

$$\{2N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 2,\ N(\check{\alpha})(s) = 1,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = \pm 1\} \cup$$

$$\{N(\alpha);\ \alpha \in \Sigma,\ \alpha \textit{ de type } 3,\ N(\check{\alpha})(s) = -1,\ N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1\},$$

$$\check\Sigma_1=\{p_*(\check\alpha);\ \check\alpha\in\check\Sigma,\ (N(\alpha)(\bar\nu),N(\check\alpha)(s))=\left\{\begin{array}{ll}(1,1), & si\ \check\alpha\ est\ de\ type\ 1,\\ (\pm1,1), & si\ \check\alpha\ est\ de\ type\ 2,\\ (1,-1), & si\ \check\alpha\ est\ de\ type\ 3\end{array}\right.\}$$

(remarquons que, modulo les identifications que l'on a faites de T_H à $T^*_{\Theta^*}$ et $X^*(T_H)$ à X^{*,Θ^*}, on a l'égalité $x^*(\bar\mu)=x^*(\bar\nu)$ pour tout $x^*\in X^{*,\Theta^*}$).

Nous allons définir une application :

$$\check i:\check\Sigma_1\to\check\Sigma_{\bar G}.$$

Soit $\check\alpha\in\check\Sigma$, supposons $\check\alpha$ de type 1, $N(\check\alpha)(s)=1$ et $N(\alpha)(\bar\nu)=1$. Alors $p_*(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_1$ tandis que $N(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_{\bar G}$. On pose $\check i(p_*(\check\alpha))=N(\check\alpha)$. Cette définition est correcte car, si $\check\beta\in\check\Sigma$ est tel que $p_*(\check\beta)=p_*(\check\alpha)$, alors $\check\beta$ appartient à l'orbite de $\check\alpha$ sous l'action de Θ^* et on a l'égalité $N(\check\beta)=N(\check\alpha)$. Les définitions qui suivent seront correctes pour la même raison.

Soit $\check\alpha\in\check\Sigma$, supposons $\check\alpha$ de type 2, $N(\check\alpha)(s)=1$ et $N(\alpha)(\bar\nu)=1$. Alors $p_*(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_1$ tandis que $2N(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_{\bar G}$. On pose $\check i(p_*(\check\alpha))=2N(\check\alpha)$.

Soit $\check\alpha\in\check\Sigma$, supposons $\check\alpha$ de type 2, $N(\check\alpha)(s)=1$ et $N(\alpha)(\bar\nu)=-1$. Alors $p_*(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_1$. Notons ℓ le nombre d'éléments de l'orbite de $\check\alpha$ sous l'action de Θ^*. D'après [KS] paragraphe 1.3, parce que $\check\alpha$ est de type 2, ℓ est pair et, si l'on pose $\check\beta=\check\alpha+\theta^{*,\ell/2}(\check\alpha)$, $\check\beta$ est une coracine de type 3. Remarquons que $p_*(\check\beta)=2p_*(\check\alpha)$ et $N(\check\beta)=N(\check\alpha)$. Alors $N(\check\beta)$ appartient à $\check\Sigma_{\bar G}$. On pose $\check i(p_*(\check\alpha))=N(\check\beta)$.

Soit $\check\alpha\in\check\Sigma$, supposons $\check\alpha$ de type 3, $N(\check\alpha)(s)=-1$ et $N(\alpha)(\bar\nu)=1$. Alors $p_*(\check\alpha)$ appartient à $\check\Sigma_1$. Parce que $\check\alpha$ est de type 3, il existe $\check\beta\in\check\Sigma$ de type 2 et vérifiant les conditions suivantes. Notons ℓ le nombre d'éléments de l'orbite de $\check\beta$ sous l'action de Θ^*. Comme on l'a dit ci-dessus, ℓ est pair. On a l'égalité $\check\alpha=\check\beta+\theta^{*,\ell/2}(\check\beta)$. Alors $2N(\check\beta)$ appartient à $\check\Sigma_{\bar G}$. On pose $\check i(p_*(\check\alpha))=2N(\check\beta)$.

On a traité tous les cas possibles et cela définit l'application $\check i$. Elle est évidemment injective. Remarquons que la restriction de p_* à $X_*^{\Theta^*}$ est un homomorphisme injectif de ce $\mathbb{Z}$-module dans Y_*, de conoyau fini. Et, pour toute coracine $\check\gamma\in\check\Sigma_1\subset Y_*$, on a une égalité $p_*\circ\check i(\check\gamma)=b(\check\gamma)\check\gamma$, où $b(\check\gamma)\in\mathbb{Q}_{>0}$.

Notons $\Omega_\sharp$ le groupe de Weyl de $H_{\bar\mu}$, qui s'identifie naturellement à un sous-groupe de Ω_H. Notons $\Omega_{\bar G}$ le groupe de Weyl de $G_{\bar\nu\theta^*}$, qui s'identifie naturellement à un sous-groupe de Ω^{Θ^*}. On a identifié Ω_H à un sous-groupe de Ω^{Θ^*}. On déduit de la remarque ci-dessus :

(1) le groupe $\Omega_\sharp$ est un sous-groupe de $\Omega_{\bar G}$; en particulier, pour $\check\gamma\in\check\Sigma_1$, la symétrie associée à $\check\gamma$ (qui est un élément de $\Omega_\sharp$) est égale à la symétrie associée à $\check i(\check\gamma)$ (qui est un élément de $\Omega_{\bar G}$).

Posons :

$$\Sigma_2=\{p^*(\alpha);\alpha\in\Sigma,(N(\alpha)(\bar\nu),N(\check\alpha)(s))=\left\{\begin{array}{ll}(1,1), & si\ \alpha\ est\ de\ type\ 1,\\ (1,\pm1), & si\ \alpha\ est\ de\ type\ 2,\\ (-1,1), & ,\ si\ \alpha\ est\ de\ type\ 3\end{array}\right.,$$

$$\begin{aligned}\check\Sigma_2=&\{N(\check\alpha);\ \check\alpha\in\check\Sigma,\ \check\alpha\ de\ type\ 1,\ N(\alpha)(\bar\nu)=1,\ N(\check\alpha)(s)=1\}\\ &\cup\{2N(\check\alpha);\ \check\alpha\in\check\Sigma,\ \check\alpha\ de\ type\ 2,\ N(\alpha)(\bar\nu)=1,\ N(\check\alpha)(s)=\pm1\}\\ &\cup\{N(\check\alpha);\ \check\alpha\in\check\Sigma,\ \check\alpha\ de\ type\ 3,\ N(\alpha)(\bar\nu)=-1,\ N(\check\alpha)(s)=1\}.\end{aligned}$$

On vérifie :

(2) Σ_2 est un sous-système de racines de Σ^{res} et $\check\Sigma_2$ est son ensemble de coracines associé dans $\check\Sigma^{res}$; $\check\Sigma_2$ est l'image de $\check\Sigma_1$ par l'application $\check i$.

3.4 Diagrammes et classes de conjugaison stable

Lemme. *Ou bien l'ensemble* $\mathbf{D}(\epsilon)$ *est vide. Ou bien l'ensemble des éléments* η_D*, pour* $D \in \mathbf{D}(\epsilon)$*, est inclus dans une classe de conjugaison stable dans* $\tilde{G}_{ss}(F)$*.*

Preuve. On suppose $\mathbf{D}(\epsilon)$ non vide et on considère deux éléments $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \eta)$ et $\bar{D} = (\bar{T}^\flat, \bar{T}_0, \bar{T}, \bar{T}^\natural, \bar{h}, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{\eta})$ de $\mathbf{D}(\epsilon)$. Puisque $T^\flat$ et $\bar{T}^\flat$ sont deux sous-tores maximaux de H_ϵ, il existe $h'' \in H_{\epsilon,SC}$ tel que $Int(h'')(T^\flat) = \bar{T}^\flat$. On fixe un tel h'' et on pose $h' = \bar{h}h''$. On a l'égalité $Int(h')(T^\flat) = T_H$. L'élément $h'h^{-1}$ appartient à $N_H(T_H)$ et définit un élément de Ω_H. Puisque Ω_H est un sous-groupe de Ω^{Θ^*}, lequel n'est autre que le groupe de Weyl du groupe $G^*_{\theta^*,SC}$, on peut choisir $n \in G^*_{\theta^*,SC}$, normalisant T^*, de sorte que l'on ait l'égalité $\xi \circ Int(n)(t) = Int(h'h^{-1}) \circ \xi(t)$ pour tout $t \in T^*$. On fixe un tel n, on pose $g'_0 = ng_0$ et :

$$D' = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h', g'_0, g_1, \eta).$$

C'est encore un diagramme issu de ϵ. Il vérifie l'égalité $Int(h')(\epsilon) = Int(\bar{h})(\epsilon)$, i.e. $\mu_{D'} = \mu_{\bar{D}}$. Il existe donc $t^* \in T^*$ tel que $\nu_{D'}\theta^* = Int(t^*)(\nu_{\bar{D}}\theta^*)$. Fixons un tel t^* et posons $\bar{t} = \psi^{-1} \circ Int(\bar{g}_1^{-1}\bar{g}_0^{-1})(t^*)$. Alors $\bar{t} \in \bar{T}$. Notons x l'élément de G_{SC} tel que $g'_0g_1\psi(x) = \bar{g}_0\bar{g}_1$. On a $Int(x)(\bar{T}) = T$. Posons $y = x\bar{t}$. On vérifie l'égalité :

$$(1) \qquad Int(y)(\bar{\eta}) = \eta.$$

On va prouver que y appartient à $\mathcal{Y}_{\bar{\eta}}$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Puisque $\bar{\eta}$ et η appartiennent tous deux à $\tilde{G}(F)$, l'égalité ci-dessus entraîne :

$$(2) \qquad \sigma(y)^{-1}y \in G^{\bar{\eta}}.$$

Puisque $Int(x)(\bar{T}) = T$ et T et $\bar{T}$ sont tous deux définis sur F, $\sigma(x)^{-1}x$ normalise $\bar{T}$ et l'on voit que :

$$(3) \qquad \sigma(y)^{-1}y \in \sigma(x)^{-1}x\bar{T}.$$

Posons $u = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi(\sigma(x)^{-1}x)$. On a les égalites :

$$u = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1u(\sigma)) \circ \sigma(\psi)(\sigma(x)^{-1})Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi(x)$$

$$= Int(\bar{g}_0\bar{g}_1u(\sigma)) \circ \sigma(\psi(x)^{-1})Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi(x)$$

$$= \bar{g}_0\bar{g}_1u(\sigma)\sigma(\bar{g}_0\bar{g}_1)\sigma(g'_0g_1)u(\sigma)^{-1}(g'_0g_1)^{-1}.$$

Parce que la restriction de $Int(\bar{g}_1) \circ \psi$ à $\bar{T}$ est définie sur F, on voit que $\bar{g}_1u(\sigma)\sigma(\bar{g}_1)^{-1} \in \bar{T}_0$. De même, $\sigma(g_1)u(\sigma)^{-1}g_1^{-1} \in T_0$. En permutant ces termes respectivement avec $\bar{g}_0$ et $g_0'^{-1}$, on obtient la relation :

$$u \in T^*\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1}\sigma(g'_0)g_0'^{-1}T^*.$$

Puisque $Int(\bar{g}_0)(\bar{T}_0) = T^*$ et que ces deux tores sont définis sur F, le terme $\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1}$ appartient à $N_{G^*}(T^*)$. De même, $\sigma(g'_0)g_0'^{-1} \in N_{G^*}(T^*)$. On en déduit déjà :

$$u \in \bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1}\sigma(g'_0)g_0'^{-1}T^*.$$

Notons ω l'élément de Ω défini par $\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1}\sigma(g'_0)g_0'^{-1}$. On a l'égalité d'applications définies sur T^* :

$$\xi\circ\omega=\xi\circ Int(\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1})\circ Int(\sigma(g'_0)g_0'^{-1}).$$

Parce que $Int(\bar{h}^{-1})\circ\xi\circ Int(\bar{g}_0)$ est défini sur F, on a :

$$\xi\circ Int(\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1})=Int(\bar{h}\sigma(\bar{h})^{-1})\circ\sigma(\xi).$$

De même :

$$\sigma(\xi)\circ Int(\sigma(g'_0)g_0'^{-1})=Int(\sigma(h')h'^{-1})\circ\xi.$$

D'où :

$$\xi\circ\omega=Int(\bar{h}\sigma(\bar{h})^{-1}\sigma(h')h'^{-1})\circ\xi=Int(\bar{h}\sigma(h'')h''^{-1}\bar{h}^{-1})\circ\xi.$$

Mais $h''\in H_\epsilon$. On en déduit que $\bar{h}\sigma(h'')h''^{-1}\bar{h}^{-1}$ appartient à $H_{\bar{\mu}}$, où $\bar{\mu}=\mu_{\bar{D}}=\mu_{D'}$. Plus précisément, cet élément appartient au normalisateur de T_H dans $H_{\bar{\mu}}$. Il définit un élément du groupe noté $\Omega_\sharp$ au paragraphe 3.2. En utilisant 3.2(1), il existe donc $\omega'\in\Omega_{\bar{G}}$ tel que $\xi\circ\omega=\xi\circ\omega'$. Par construction, ω' appartient à Ω^{Θ^*}. C'est aussi le cas de ω, car g_0 et g'_0 appartiennent à $G^*_{\theta^*,SC}$. Or l'application qui, à un élément de Ω^{Θ^*} , associe son action naturelle sur $T^*_{\Theta^*}$ est injective ([KS] paragraphe 1.1). Donc $\omega=\omega'\in\Omega_{\bar{G}}$, puis $\bar{g}_0\sigma(\bar{g}_0)^{-1}\sigma(g'_0)g_0'^{-1}\in G^*_{\bar{\nu}\theta^*}T^*$ et $u\in G^*_{\bar{\nu}\theta^*}T^*$. En revenant à la définition de u, on obtient la relation :

$$\sigma(x)^{-1}x\in G_{\bar{\eta}}\bar{T}.$$

En utilisant cette relation, les relations (2), (3) et 3.1(1), on obtient $y\in\mathcal{Y}_{\bar{\eta}}$. Alors, d'après (1), η est stablement conjugué à $\bar{\eta}$. $\square$

3.5 Définition d'une donnée endoscopique

On suppose que $\mathbf{D}(\epsilon)$ n'est pas vide. On fixe $\bar{D}=(\bar{T}^\flat,\bar{T}_0,\bar{T},\bar{T}^\natural,\bar{h},\bar{g}_0,\bar{g}_1,\bar{\eta})\in\mathbf{D}(\epsilon)$.

On pose $\bar{\nu}=\nu_{\bar{D}}$, $\bar{G}=G_{\bar{\eta}}$, $\bar{G}^*=G^*_{\bar{\nu}\theta^*}$. On note $\bar{T}^*=T^*_{\theta^*}$ et $\bar{B}^*=B^*\cap\bar{G}^*$. Le couple $(\bar{T}^*,\bar{B}^*)$ est une paire de Borel de $\bar{G}^*$. On fixe un épinglage de $\bar{G}^*$ relatif à cette paire de Borel. Puique $Int(\bar{g}_0\bar{g}_1)\circ\tilde{\psi}(\bar{\eta})=\bar{\nu}\theta^*$, l'application $Int(\bar{g}_0\bar{g}_1)\circ\psi$ se restreint en un isomorphisme de $\bar{G}$ sur $\bar{G}^*$, que l'on note $\bar{\psi}$. Le groupe $\bar{G}$ est défini sur F puisque $\bar{\eta}\in\tilde{G}(F)$. Pour $\sigma\in\Gamma_F$, on peut fixer un élément $\bar{u}(\sigma)\in\bar{G}^*_{SC}$ de sorte que l'application $Int(\bar{u}(\sigma))^{-1}\circ\bar{\psi}\circ\sigma\circ\bar{\psi}^{-1}$ de $\bar{G}^*$ dans lui-même conserve la paire $(\bar{B}^*,\bar{T}^*)$ et l'épinglage. Cet élément est bien déterminé modulo $Z_{\bar{G}^*}$. On peut alors définir une action de Γ_F sur $\bar{G}^*$ de sorte que σ agisse par $Int(\bar{u}(\sigma))^{-1}\circ\bar{\psi}\circ\sigma\circ\bar{\psi}^{-1}$. Cela munit $\bar{G}^*$ d'une structure de groupe quasi-déployé sur F. L'isomorphisme $\bar{\psi}$ est un torseur intérieur : on a l'égalité $\bar{\psi}\circ\sigma(\bar{\psi})^{-1}=Int(\bar{u}(\sigma))$. Remarquons que, puisque $\bar{T}$ est défini sur F, $\bar{\psi}\circ\sigma\circ\bar{\psi}^{-1}$ conserve $\bar{T}^*$, donc $\bar{u}(\sigma)\in N_{\bar{G}^*}(\bar{T}^*)$.

Introduisons le groupe $\hat{\bar{G}}$ dual de $\bar{G}^*$, muni d'une paire de Borel $(\hat{\bar{B}},\hat{\bar{T}})$ définie sur F, et le L-groupe ${}^L\bar{G}$. Remarquons que le $X_*(\bar{T}^*_{sc})$ est le sous-$\mathbb{Z}$-module de $X_*(T^*_{\theta^*})$ engendré par les coracines de $T^*_{\theta^*}$ dans $\bar{G}^*$. Grâce au calcul fait en 3.3 et avec les notations de ce paragraphe, $X_*(\bar{T}^*_{sc})$ est donc le sous-$\mathbb{Z}$-module de X_* engendré par l'ensemble :

$$\check{\Sigma}_{\bar{G}}=\{N(\check{\alpha});\ \check{\alpha}\in\check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ \textit{de type}\ 1,\ N(\alpha)(\bar{\nu})=1\}\cup$$

$$\{2N(\check{\alpha});\ \check{\alpha}\in\check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ \textit{de type}\ 2,\ N(\alpha)(\bar{\nu})=1\}\cup\{N(\check{\alpha});\ \check{\alpha}\in\check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ \textit{de type}\ 3,\ N(\alpha)(\bar{\nu})=-1\}.$$

On obtient dualement une suite exacte :

$$1\to\hat{Z}_{\bar{\nu}}\to\hat{T}\xrightarrow{\hat{\tau}}\hat{\bar{T}}_{ad}\to 1$$

où $\hat{Z}_{\bar{\nu}}$ est le sous-groupe (en général non connexe) des $t \in \hat{T}$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} N(\check{\alpha})(t) = 1 \textit{ pour tout } \check{\alpha} \textit{ de type } 1 \textit{ tel que } N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1, \\ N(\check{\alpha})(t) = \pm 1 \textit{ pour tout } \check{\alpha} \textit{ de type } 2 \textit{ tel que } N(\alpha)(\bar{\nu}) = 1, \\ N(\check{\alpha})(t) = 1 \textit{ pour tout } \check{\alpha} \textit{ de type } 3 \textit{ tel que } N(\alpha)(\bar{\nu}) = -1. \end{cases}$$

Remarquons que $\hat{Z}_{\bar{\nu}}$ contient le centre $Z_{\hat{G}}$ ainsi que l'image $(1-\hat{\theta})(\hat{T})$ de $\hat{T}$ par l'application $1-\hat{\theta}$.

On a supposé $s \in \hat{T}$. Posons $\bar{s} = \hat{\tau}(s)$, $\hat{\bar{H}} = Z_{\hat{\bar{G}}_{AD}}(\bar{s})^0$, $\hat{B}_{\bar{H}} = \hat{\bar{H}} \cap \hat{\bar{B}}_{ad}$. Le couple $(\hat{B}_{\bar{H}}, \hat{\bar{T}}_{ad})$ est une paire de Borel de $\hat{\bar{H}}$. On fixe un épinglage relatif à cette paire. On va définir une action de Γ_F sur $\hat{\bar{H}}$ qui conserve la paire de Borel et l'épinglage. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. On a déjà dit que $\bar{u}(\sigma)$ normalisait $\bar{T}^*$. Notons $\bar{n}(\sigma)$ son image dans le groupe de Weyl de $\bar{G}^*$. Ce groupe est celui noté $\Omega_{\bar{G}}$ en 3.3. Il s'identifie au groupe de Weyl de $\hat{\bar{G}}$. Montrons que :

$$(1) \qquad \bar{n}(\sigma)(\sigma(\bar{s})) = \bar{s}.$$

Notons $\tau : \bar{T}^*_{sc} \to T^*$ la projection naturelle. Par définition de l'action galoisienne sur $\bar{G}^*$ et $\bar{G}^*_{SC}$, on a la relation :

$$\tau \circ Int(\bar{u}(\sigma)) \circ \sigma = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} \circ Int(\bar{g}_0\bar{g}_1)^{-1} \circ \tau.$$

Posons $\bar{x}(\sigma) = \bar{g}_0\bar{g}_1 u(\sigma)\sigma(\bar{g}_0\bar{g}_1)^{-1}$. Le membre de droite ci-dessus est égal à $Int(\bar{x}(\sigma)) \circ \sigma \circ \tau$. L'élément $\bar{x}(\sigma)$ normalise T^* et définit un élément de Ω que l'on note $\bar{m}(\sigma)$. En fait, cet élément appartient à Ω^{Θ^*} car $\bar{g}_1 u(\sigma)\sigma(\bar{g}_1^{-1}) \in \bar{T}_0$ et $\bar{g}_0 \in G^*_{\theta^*,SC}$. On obtient dualement la relation :

$$(2) \qquad \bar{n}(\sigma) \circ \sigma \circ \hat{\tau} = \hat{\tau} \circ \bar{m}(\sigma) \circ \sigma.$$

L'élément $\bar{h}\sigma(\bar{h})^{-1}$ de H normalise T_H. Notons $\bar{m}_H(\sigma)$ son image dans Ω_H. En utilisant le fait que l'application :

$$Int(\bar{h})^{-1} \circ \xi \circ Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi : \bar{T} \to \bar{T}^\flat$$

est définie sur F, on obtient l'égalité :

$$(3) \qquad \bar{m}_H(\sigma) \circ \sigma \circ \xi = \xi \circ \bar{m}(\sigma) \circ \sigma.$$

De nouveau, on a l'égalité duale :

$$\hat{\xi} \circ \bar{m}_H(\sigma) \circ \sigma = \bar{m}(\sigma) \circ \sigma \circ \hat{\xi}.$$

On a dit que l'on identifiait Ω_H à un sous-groupe de Ω. L'égalité précédente s'écrit alors :

$$(4) \qquad \hat{\xi} \circ \sigma = \bar{m}_H(\sigma)^{-1}\bar{m}(\sigma) \circ \sigma \circ \hat{\xi}.$$

Choisissons une extension galoisienne finie E de F telle que G^* et H soient déployés sur E. Puisque l'application $W_F \to \Gamma_F/\Gamma_E$ est surjective, on peut fixer $w \in W_F$ qui ait même image que σ dans Γ_F/Γ_E et qui agisse donc de la même façon sur $\hat{G}$ et $\hat{H}$. Choisissons $h_w \in \mathcal{H}$ dont l'image dans W_F soit w et tel que $Int(h_w)$ agisse sur $\hat{H}$ comme σ. Posons $\hat{\xi}(h_w) = (g_w, w) \in {}^LG$. Evidemment g_w normalise $\hat{T}$ et définit un élément de Ω que l'on note $\omega(\sigma)$. On a l'égalité :

$$(5) \qquad \hat{\xi} \circ \sigma = \omega(\sigma) \circ \sigma \circ \hat{\xi}.$$

L'hypothèse 1.3(4)(a) entraîne l'égalité :

$$(6) \qquad s\hat{\theta}(g_w) = a(h_w)g_w\sigma(s).$$

En particulier, g_w et $\hat{\theta}(g_w)$ ont même image dans Ω, donc $\omega(\sigma) \in \Omega^{\Theta^*}$. Deux éléments de ce groupe qui agissent de la même façon sur $\hat{\xi}(\hat{T}_H) = \hat{T}_{\hat{\theta}}$ sont égaux. Grâce à l'égalité (5), il en résulte d'abord que notre notation est justifiée : l'élément $\omega(\sigma)$ ne dépend que de σ et pas des choix de w et h_w. Ensuite, en comparant avec (4), on obtient l'égalité $\bar{m}(\sigma) = \bar{m}_H(\sigma)\omega(\sigma)$. Puisque Ω^{Θ^*} est égal au groupe de Weyl de $\hat{G}_{\hat{\theta}}$, on peut écrire $g_w = t_w g'_w$, où $t_w \in \hat{T}$ et $g'_w \in \hat{G}_{\hat{\theta}}$. L'égalité (6) entraîne :

$$s = a(h_w)t_w\hat{\theta}(t_w)^{-1}\omega(\sigma) \circ \sigma(s).$$

On a $a(h_w)t_w\hat{\theta}(t_w)^{-1} \in Z_{\hat{G}}(1-\hat{\theta})(\hat{T}) \subset \hat{Z}_{\bar{\nu}}$, donc $\omega(\sigma) \circ \sigma(s) \in \hat{Z}_{\bar{\nu}}s$. Puisque $\hat{\xi}(\hat{H})$ centralise s, on a aussi $\bar{m}_H(\sigma)(s) = s$, d'où $\bar{m}(\sigma) \circ \sigma(s) \in \hat{Z}_{\bar{\nu}}s$. Grâce à (2) et à la définition $\bar{s} = \hat{\tau}(s)$, on en déduit (1).

Relevons $\bar{n}(\sigma)$ en un élément $\bar{g}_\sigma \in N_{\hat{\bar{G}}_{AD}}(\hat{\bar{T}}_{ad})$. Grâce à (1), l'automorphisme $Int(\bar{g}_\sigma) \circ \sigma$ de $\hat{\bar{G}}_{AD}$ conserve $\hat{\bar{H}}$. Quitte à multiplier à gauche $\bar{g}_\sigma$ par un élément de $\hat{\bar{H}}$, on peut supposer qu'il conserve aussi la paire $(\hat{B}_{\bar{H}}, \hat{\bar{T}}_{ad})$ et l'épinglage. Alors $\bar{g}_\sigma$ est uniquement déterminé modulo le centre $Z_{\hat{\bar{H}}}$ et on peut définir une action galoisienne sur $\hat{\bar{H}}$ en faisant agir σ par $Int(\bar{g}_\sigma) \circ \sigma$. Il est clair que cette action se factorise par un quotient Γ_F/Γ_E, où E est une extension galoisienne finie suffisamment grande de F (il suffit que G^* et H soient déployés et que $\bar{h}$ et $\bar{g}_0$ soient définis sur E). Fixons une telle extension. Notons $\bar{\mathcal{H}}$ le sous-groupe de ${}^L\bar{G}_{AD}$ engendré par $\hat{\bar{H}}$ et les éléments $(\bar{g}_\sigma, w)$ tels que $\sigma \in \Gamma_F$ et $w \in W_F$ aient même image dans Γ_F/Γ_E, où $\bar{g}_\sigma$ est comme ci-dessus. Cette définition ne dépend pas du choix de ces éléments $\bar{g}_\sigma$. Le groupe $\bar{\mathcal{H}}$ est une extension de W_F par $\hat{\bar{H}}$. En utilisant de lemme A.1 de l'appendice A, on voit qu'elle est scindée. D'après (1), on a l'inclusion $\bar{\mathcal{H}} \subset Z_{{}^L\bar{G}_{AD}}(\bar{s})$. On note $\hat{\bar{\xi}} : \bar{\mathcal{H}} \to {}^L\bar{G}_{AD}$ l'injection naturelle. Fixons enfin un groupe réductif connexe $\bar{H}$, défini sur F et quasi-déployé, dont $\hat{\bar{H}}$ soit le groupe dual. Alors le quadruplet $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique pour le groupe $\bar{G}^*_{SC}$ (il s'agit d'endoscopie ordinaire, avec automorphisme et caractère triviaux). C'est aussi une donnée endoscopique pour le groupe $\bar{G}_{SC}$ qui est une forme intérieure de $\bar{G}^*_{SC}$.

Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$. Posons $\bar{G}[y] = G_{y\bar{\eta}y^{-1}}$. L'automorphisme $Int(y^{-1})$ est un torseur intérieur de $\bar{G}[y]$ sur $\bar{G}$. Alors $\bar{\psi} \circ Int(y^{-1}) : \bar{G}[y] \to \bar{G}^*$ est un torseur intérieur, que l'on note $\bar{\psi}[y]$. Le quadruplet $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est encore une donnée endoscopique pour $\bar{G}[y]_{SC}$.

Remarque. (7) Supposons le caractère $\boldsymbol{\omega}$ trivial. Alors le cocycle a de 1.3 (4)(a) est un cobord et on peut fixer $z \in Z_{\hat{G}}$ tel que $a(w) = z^{-1}w(z)$ pour tout $w \in W_F$. En remplaçant s par sz, on est ramené à une situation où $a = 1$. On peut alors reprendre les constructions ci-dessus en travaillant avec le groupe $\bar{G}^*$ et non plus avec le revêtement simplement connexe $\bar{G}^*_{SC}$ de son groupe dérivé : on définit une donnée endoscopique pour le groupe $\bar{G}^*$ dont $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est le relèvement usuel. Le point est que, pour assurer la condition (1), on n'a plus besoin d'envoyer s dans $\hat{\bar{T}}_{ad}$, il suffit de l'envoyer dans $\hat{\bar{T}}$, i.e. en notant $\tilde{s}$ cette image de s dans $\hat{\bar{T}}$, on a maintenant l'égalité $\bar{n}(\sigma)(\sigma(\tilde{s})) = \tilde{s}$.

3.6 Une donnée endoscopique non standard

On note $H_\sharp(F)$ l'ensemble des éléments semi-simples de $H_z(F)$ dont le commutant connexe est quasi-déployé.

On suppose dans ce paragraphe et jusqu'en 3.10 inclus que $\epsilon \in H_\sharp(F)$ et que $\mathbf{D}(\epsilon)$ n'est pas vide.

On reprend les constructions du paragraphe précédent et on fixe de plus une paire de Borel $(B^{\flat *}, T^{\flat *})$ de H_ϵ, définie sur F. Posons $\bar{B}^\flat = H_\epsilon \cap Int(\bar{h}^{-1})(B_H)$. Alors $(\bar{B}^\flat, \bar{T}^\flat)$ est une paire de Borel de H_ϵ et on peut fixer $\bar{h}_0 \in H_{\epsilon,SC}$ tel que $Int(\bar{h}_0)^{-1}$ envoie cette paire sur $(B^{\flat *}, T^{\flat *})$. On a la suite d'homomorphismes :

$$(1) \qquad T_{sc}^{\flat *} \times Z_{H_\epsilon}^0 \to T^{\flat *} \stackrel{Int(\bar{h}\bar{h}_0)}{\to} T_H$$

(on rappelle que $T_{sc}^{\flat *}$ est l'image réciproque de $T^{\flat *}$ dans le revêtement simplement connexe $H_{\epsilon,SC}$ du groupe dérivé de H_ϵ).

D'autre part, fixons une paire de Borel $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ du groupe $\bar{H}$, définie sur F. On note $\bar{\xi} : T_{\bar{H}} \to \bar{T}_{sc}^*$ l'isomorphisme dual de $\hat{\bar{\xi}}$. On a la suite d'homomorphismes :

$$(2) \qquad T_{\bar{H},sc} \times Z_{\bar{H}}^0 \times Z_{\bar{G}^*}^0 \to T_{\bar{H}} \times Z_{\bar{G}^*}^0 \stackrel{\bar{\xi}\times id}{\to} \bar{T}_{sc}^* \times Z_{\bar{G}^*}^0 \to T_{\theta^*}^*.$$

Enfin considérons l'homomorphisme :

$$(3) \qquad \xi : T_{\theta^*}^* \to T_{\Theta^*}^* \simeq T_H.$$

Notre hypothèse que θ^* est d'ordre fini entraîne que cet homomorphisme est une isogénie, c'est-à-dire qu'il est surjectif et de noyau fini. Il en est de même de chacun des homomorphismes intervenant dans les suites (1) et (2). Toute isogénie entre deux tores T_1 et T_2 détermine un couple d'isomorphismes en dualité :

$$X_{*,\mathbb{Q}}(T_1) \to X_{*,\mathbb{Q}}(T_2),\ X_{\mathbb{Q}}^*(T_2) \to X_{\mathbb{Q}}^*(T_1),$$

où on note par exemple $X_{*,\mathbb{Q}}(T_1) = X_*(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. En particulier, on déduit des suites d'applications (1), (2) et (3) un couple d'isomorphismes en dualité :

$$(4) \qquad j_* : X_{*,\mathbb{Q}}(T_{sc}^{\flat *}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{H_\epsilon}^0) \to X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{\bar{H}}^0) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{\bar{G}^*}^0),$$

$$j^* : X_{\mathbb{Q}}^*(T_{\bar{H},sc}) \oplus X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{\bar{H}}^0) \oplus X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{\bar{G}^*}^0) \to X_{\mathbb{Q}}^*(T_{sc}^{\flat *}) \oplus X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{H_\epsilon}^0).$$

Tous les $\mathbb{Z}$-modules intervenant ci-dessus sont munis d'une action de Γ_F (l'action sur $Z_{\bar{G}^*}^0$ est déduite de celle sur $\bar{G}^*$).

Lemme. *(i) L'isomorphisme j_* se restreint en des isomorphismes de $X_{*,\mathbb{Q}}(T_{sc}^{\flat *})$ sur $X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc})$ et de $X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{H_\epsilon}^0)$ sur $X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{\bar{H}}^0) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z_{\bar{G}^*}^0)$. L'isomorphisme j^* se restreint en des isomorphismes de $X_{\mathbb{Q}}^*(T_{\bar{H},sc})$ sur $X_{\mathbb{Q}}^*(T_{sc}^{\flat *})$ et de $X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{\bar{H}}^0) \oplus X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{\bar{G}^*}^0)$ sur $X_{\mathbb{Q}}^*(Z_{H_\epsilon}^0)$.*

(ii) Ces isomorphismes sont équivariants pour les actions de Γ_F.

(iii) Le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ vérifie les conditions (1) et (2) de 1.7 (ici, on a encore noté j_* l'isomorphisme de $X_{*,\mathbb{Q}}(T_{sc}^{\flat *})$ sur $X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc})$ restriction de l'homomorphisme (4)).

Preuve. Utilisons les notations de 3.3. On a $X_*(T_{\theta^*}^*) = X_*^{\Theta^*}$, $X_*(T_H) = Y_*$. On a défini des ensembles $\check{\Sigma}_1$ et $\check{\Sigma}_2$. Via le plongement $X_*(T_{sc}^{\flat *}) \to Y_*$ issu de la suite d'applications (1), $\check{\Sigma}_1$ s'identifie à l'ensemble de coracines du groupe $H_{\epsilon,SC}$. Via le plongement $X_*(T_{\bar{H},sc}) \to X_*^{\Theta^*}$ issu de la suite d'applications (2), l'ensemble $\check{\Sigma}_2$ s'identifie à l'ensemble de coracines du groupe $\bar{H}_{SC}$. D'après la remarque 3.3(2), l'application $\check{i}$ définie en 3.3 est une bijection de $\check{\Sigma}_1$ sur $\check{\Sigma}_2$. D'autre part, p_* définit un isomorphisme de $X_{*,\mathbb{Q}}^{\Theta^*}$

sur $Y_{*,\mathbb{Q}}$ et, pour $\check{\gamma} \in \check{\Sigma}_1$, $\check{i}(\check{\gamma})$ est égal à l'image inverse par cet isomorphisme de $\check{\gamma}$, multiplié par un rationnel > 0. Il en résulte que l'image par j_* de l'espace engendré par $\check{\Sigma}_1$ est l'espace engendré par $\check{\Sigma}_2$, autrement dit que $j_*(X_{*,\mathbb{Q}}(T^{\flat *}_{sc})) = X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc})$. Un même raisonnement vaut en utilisant les racines au lieu des coracines. On obtient l'égalité $j^*(X^*_{\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc})) = X^*_{\mathbb{Q}}(T^{\flat *})$. L'assertion (i) de l'énoncé résulte par dualité de ces deux égalités.

Du raisonnement ci-dessus résulte également que le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ vérifie la condition (1) de 1.7. Il reste à prouver le (ii) de l'énoncé, d'où résultera la condition (2) de 1.7.

Reprenons les calculs et notations de 3.5. On a muni $\bar{G}^*$ d'une action de Γ_F. Sur $\bar{T}^* = T^*_{\theta^*}$, c'est l'action telle que tout $\sigma \in \Gamma_F$ agisse par $\bar{n}(\sigma)^{-1}\bar{m}(\sigma) \circ \sigma$ (le dernier σ désignant l'action provenant de la structure de G^* sur F). Notons $\sigma_{\bar{G}^*}$ cette action. En reprenant les définitions, on voit que l'application naturelle $T_{\bar{H}} \to T^*_{\theta^*}$ transporte l'action de Γ_F sur $T_{\bar{H}}$ en une action sur $T^*_{\theta^*}$ de la forme $\sigma \mapsto \bar{r}_2(\sigma)\bar{n}(\sigma) \circ \sigma_{\bar{G}^*}$, où $\bar{r}_2(\sigma)$ est un élément du groupe de Weyl Ω_2 engendré par les symétries relatives aux coracines appartenant à $\check{\Sigma}_2$. Identifions $X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z^0_{\bar{H}}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z^0_{\bar{G}^*})$ à $X^{\Theta^*}_{*,\mathbb{Q}}$ par l'isomorphisme issu de la suite d'applications (2). Alors l'action naturelle de Γ_F sur le premier espace se transporte en l'action pour laquelle σ agit par $\bar{r}_2(\sigma)\bar{n}(\sigma) \circ \sigma_{\bar{G}^*}$ sur les deux premiers facteurs, et par $\sigma_{\bar{G}^*}$ sur le troisième. Puisque $\bar{r}_2(\sigma)\bar{n}(\sigma)$ appartient au groupe de Weyl de $\bar{G}^*$, il agit trivialement sur ce facteur $X_{*,\mathbb{Q}}(Z^0_{\bar{G}^*})$, et on peut aussi bien faire agir σ sur tout $X^{\Theta^*}_{*,\mathbb{Q}}$ par $\bar{r}_2(\sigma)\bar{n}(\sigma) \circ \sigma_{\bar{G}^*}$, autrement dit par $\bar{r}_2(\sigma)\bar{m}(\sigma) \circ \sigma$. D'autre part, la suite d'applications (1) transporte l'action de Γ_F sur l'espace de départ en l'action sur T_H définie par $\sigma \mapsto Int(\bar{h}\bar{h}_0\sigma(\bar{h}\bar{h}_0)^{-1}) \circ \sigma_H$, où, pour plus de précision, on note σ_H l'action provenant de la structure de H sur F. En se rappelant que $\bar{h}_0 \in H_{\epsilon,SC}$, cette action est de la forme $\sigma \mapsto \bar{r}_1(\sigma)\bar{m}_H(\sigma) \circ \sigma_H$, où $\bar{r}_1(\sigma)$ est un élément du groupe de Weyl Ω_1 engendré par les coracines appartenant à $\check{\Sigma}_1$. Identifions $X_{*,\mathbb{Q}}(T^{\flat *}_{sc}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z^0_{H_\epsilon})$ à $Y_{*,\mathbb{Q}}$ via la suite d'applications (1). Alors l'action naturelle sur l'ensemble de départ se transporte en l'action $\sigma \mapsto \bar{r}_1(\sigma)\bar{m}_H(\sigma) \circ \sigma_H$. D'après 3.5(3), l'isomorphisme de $X^{\Theta^*}_{*,\mathbb{Q}}$ sur $Y_{*,\mathbb{Q}}$ issu de (3) transporte l'action $\sigma \mapsto \bar{m}(\sigma) \circ \sigma$ en l'action $\sigma \mapsto \bar{m}_H(\sigma) \circ \sigma_H$. D'autre part, d'après 1.7(1) et ce que l'on a déjà prouvé, cet isomorphisme identifie les deux groupes Ω_1 et Ω_2. On en déduit que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $\bar{r}(\sigma)$ dans le groupe de Weyl de $\bar{H}$ (lequel s'identifie à Ω_2), de sorte que l'on ait la relation :

$$(5) \qquad j_* \circ \sigma = \bar{r}(\sigma) \circ \sigma \circ j_*.$$

On a fixé dans chacun des groupes $H_{\epsilon,SC}$ et $\bar{H}_{SC}$ des paires de Borel définies sur F. On en déduit des sous-ensembles de coracines positives. En reprenant les constructions, il est facile de les déterminer. Modulo l'identification de l'ensemble des coracines de $H_{\epsilon,SC}$ à $\check{\Sigma}_1$, resp. de $\bar{H}_{SC}$ à $\check{\Sigma}_2$, ce sont les ensembles de coracines décrits de la même façon qu'en 3.3, resp. que ci-dessus, en ajoutant la condition que les coracines $\check{\alpha}$ doivent être positives dans $\check{\Sigma}$, pour l'ordre relatif à la paire de Borel (B^*, T^*). On en déduit que j_* envoie toute coracine positive de $H_{\epsilon,SC}$ sur un multiple rationnel > 0 d'une coracine positive de $\bar{H}_{SC}$. Mais alors l'élément $\bar{r}(\sigma)$ qui intervient dans (5) est nécessairement égal à 1. Donc j_* est équivariante pour les actions de Γ_F, ce qui achève la preuve. $\square$

3.7 Contraintes sur les données endoscopiques non standard

On a classifié en 1.7 les triplets endoscopiques non standards. Etudions quels sont les triplets $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ que l'on peut obtenir. Puisqu'il s'agit de déterminer des systèmes de racines, on peut se placer sur $\bar{F}$, supposer G^* simplement connexe et décomposer G^* en produit de composantes quasi-simples permutées par Θ^*. Le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ se décompose en produit de façon telle que l'on est ramené au cas où Θ^* agit de façon transitive sur l'ensemble des composantes quasi-simples. Dans ce cas, en fixant une telle composante G_0^*, on peut identifier G^* au produit $G_0^* \times ... \times G_0^*$ de m facteurs G_0^*, m étant un entier > 0, de telle sorte que l'action de θ^* soit donnée par $\theta^*(g_1, ..., g_m) = (\theta_0^*(g_m), g_1, ..., g_{m-1})$, θ_0^* étant un certain automorphisme de G_0^*. On peut aussi fixer une paire de Borel (B_0^*, T_0^*) de G_0^*, conservée par θ_0^*, et supposer que la paire (B^*, T^*) est le produit de m facteurs (B_0^*, T_0^*). On voit que, quitte à conjuguer $\bar{\nu}\theta^*$, on peut supposer que $\bar{\nu}$ est de la forme $(\bar{\nu}_0, 1, ..., 1)$, avec $\bar{\nu}_0 \in T_0^*$. Dans ce cas, $G^*_{\bar{\nu}\theta^*}$ est isomorphe à $G^*_{0,\bar{\nu}_0\theta_0^*}$, plus précisément c'est l'ensemble des $(g, ..., g)$ pour $g \in G^*_{0,\bar{\nu}_0\theta_0^*}$.

Considérons d'abord le cas où θ_0^* est l'identité. Alors toutes les racines sont de type 1 (des racines de type 2 ou 3 n'interviennent que si G_0^* est de type A_n avec n pair et θ_0^* est d'ordre 2, cf. [KS] 1.3). Les orbites pour l'action de Θ^* dans l'ensemble de racines Σ ont toutes m éléments. En reprenant la démonstration du paragraphe précédent, on voit que la fonction $\check{b}$ qui intervient dans la condition (1) de 1.7 est constante de valeur $\frac{1}{m}$. En examinant la classification de 1.7, le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est alors nécessairement égal à un produit de triplets "tautologiques".

Supposons maintenant G_0^* de type A_n ou D_n et θ_0^* d'ordre 2. Les systèmes de racines possibles pour $G^*_{0,\bar{\nu}_0\theta_0^*}$ sont déterminés par [Kac] proposition 8.6. On voit que $G^*_{0,\bar{\nu}_0\theta_0^*,SC}$ est produit de groupes classiques, c'est-à-dire de types A_n, B_n, C_n ou D_n (ce n'est bien sûr plus le même n). Alors $\hat{\hat{G}}_{AD}$ est lui-aussi produit de groupes classiques. Puis $\hat{\hat{H}}$, qui est le commutant d'un élément semi-simple dans $\hat{\hat{G}}_{AD}$, est lui aussi "classique", c'est-à-dire que $\hat{\hat{H}}_{SC}$ est produit de groupes classiques. Enfin $\bar{H}_{SC}$ est produit de groupes classiques. Donc $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est produit de triplets qui sont tautologiques ou de type (B_n, C_n) ou de type (C_n, B_n).

Une étude analogue vaut si G_0^* est de type E_6 et θ_0^* est d'ordre 2, ou si G_0^* est de type D_4 et θ_0^* est d'ordre 3. On voit que, dans le premier cas, $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est produit de triplets qui sont tautologiques ou de type (B_n, C_n) ou de type (C_n, B_n) ou de type (F_4). Dans le second, $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est produit de triplets qui sont tautologiques ou de type (G_2).

3.8 Décomposition locale des classes de conjugaison stable

On a la décomposition :

$$\mathfrak{h}_\epsilon = \mathfrak{h}_{\epsilon,SC} \oplus \mathfrak{z}_{H_\epsilon}.$$

Soit $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$. On décompose Y en $Y = Y_{SC} + Y_Z$, avec $Y_{SC} \in \mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et $Y_Z \in \mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$. On pose $\gamma = exp(Y)\epsilon \in H_z(F)$. On suppose que γ est $\tilde{G}$-fortement régulier. Notons $\tilde{C}$ l'ensemble des $\delta \in \tilde{G}(F)$ tels que $(\gamma, \delta) \in \mathcal{D}$. On sait que $\tilde{C}$ est vide ou est une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$. On note $\tilde{C}/\sim$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans $\tilde{C}$.

On a défini un triplet endoscopique non standard $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$. En dérivant les diverses applications définies en 3.6, on obtient des applications entre les algèbres de Lie, selon le diagramme suivant :

$$(1) \qquad \mathfrak{t}_{sc}^{\flat *} \oplus \mathfrak{z}_{H_\epsilon} \to \mathfrak{t}_H \to \mathfrak{t}^{*,\Theta^*} \to \mathfrak{t}_{\bar{H}_{SC}} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{G}^*}.$$

Toutes ces applications sont des isomorphismes. On note encore j_* leur composé. Il est équivariant pour les actions de Γ. D'après le lemme 3.6, j_* se restreint en des isomorphismes de $\mathfrak{t}_{sc}^{\flat *}$ sur $\mathfrak{t}_{\bar{H}_{SC}}$ et de $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}$ sur $\mathfrak{z}_{\bar{H}}\oplus\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}$. Comme on l'a dit en 1.7, de j_* se déduit une correspondance bijective entre les classes de conjugaison stable semi-simples régulières dans $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et les classes analogues dans $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$. Remarquons que l'hypothèse que γ est $\tilde{G}$-fortement régulier entraîne que Y_{SC} est semi-simple régulier ([KS] lemme 3.3.C). Soit donc $\bar{Y}_{SC}\in\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$ un élément appartenant à la classe de conjugaison stable correspondant à celle de Y_{SC}. Posons $j_*(Y_Z)=\bar{Y}_Z+X_Z^*$, avec $\bar{Y}_Z\in\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)$ et $X_Z^*\in\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$. On a la décomposition :

$$\bar{\mathfrak{h}}=\bar{\mathfrak{h}}_{SC}\oplus\mathfrak{z}_{\bar{H}}.$$

Posons $\bar{Y}=\bar{Y}_{SC}+\bar{Y}_Z\in\bar{\mathfrak{h}}(F)$. Rappelons que, pour tout $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, on a construit un groupe $\bar{G}[y]$ tel que $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s},\hat{\bar{\xi}})$ soit une donnée endoscopique de $\bar{G}[y]_{SC}$. En reprenant les calculs de systèmes de racines effectués en 3.3, on montre que l'hypothèse que γ est $\tilde{G}$-fortement régulier entraîne que $\bar{Y}$ est $\bar{G}[y]_{SC}$-régulier. La classe de conjugaison stable de $\bar{Y}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}(F)$ peut se transférer ou non à $\bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F)$. Si oui, elle se transfère en une unique classe de conjugaison stable de $\bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F)$ que l'on note $\bar{C}[y]_{SC}$. Si non, on pose $\bar{C}[y]_{SC}=\emptyset$. Comme tout torseur intérieur, $\bar{\psi}[y]$ se restreint en un isomorphisme défini sur F entre les centres des groupes $\bar{G}[y]$ et $\bar{G}^*$. On pose $X_Z[y]=\bar{\psi}[y]^{-1}(X_Z^*)\in\mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F)$. Alors l'ensemble $\bar{C}[y]=X_Z[y]+\bar{C}[y]_{SC}$ est une classe de conjugaison stable dans $\bar{\mathfrak{g}}[y](F)$ (qui est vide si $\bar{C}[y]_{SC}$ l'est). On note $\bar{C}$ la réunion disjointe des ensembles $\bar{C}[y]$ quand y parcourt $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$. On introduit une relation d'équivalence sur cet ensemble de la façon suivante. Pour tout $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, le groupe $I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)$ agit par conjugaison sur $\bar{G}[y]$, donc aussi sur $\bar{\mathfrak{g}}[y]$, et cette action est définie sur F. On dit que deux éléments $X,X'\in\bar{C}$ sont équivalents s'il existe $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $x\in I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)$ tels que $X,X'\in\bar{C}[y]$ et $X'=xXx^{-1}$. On note $\bar{C}/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\bar{C}$.

On définit une application :

$$\varphi:\bar{C}\to\tilde{G}(F)$$

de la façon suivante : pour $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X\in\bar{C}[y]$, $\varphi(X)=exp(X)y\bar{\eta}y^{-1}$.

Remarque. Dans les constructions ci-dessus, on a supposé définis les termes $exp(Y)$ et $exp(X)$. C'est loisible si l'on suppose Y assez proche de 0.

Lemme. *On suppose Y assez proche de* 0. *Alors l'application φ prend ses valeurs dans $\tilde{C}$ et se quotiente en une bijection de $\bar{C}/\sim$ sur $\tilde{C}/\sim$.*

Preuve. Puisque $T_{sc}^{\flat *}$ est un sous-tore maximal de $H_{\epsilon,SC}$, on peut fixer un élément $Y_{SC}^*\in\mathfrak{t}_{sc}^{\flat *}$ conjugué à Y_{SC} par un élément de $H_{\epsilon,SC}$. Posons $\bar{Y}_{SC}^*=j_*(Y_{SC}^*)\in\mathfrak{t}_{\bar{H}_{SC}}$. Par définition de la correspondance entre classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$, $\bar{Y}_{SC}$ est conjugué à $\bar{Y}_{SC}^*$ par un élément de $\bar{H}_{SC}$. Notons Y_H l'élément de $\mathfrak{t}_H$ qui correspond à $Y_{SC}^*+Y_Z$ via le premier isomorphisme de la suite (1). Notons X^* l'élément de $\mathfrak{t}^{*,\Theta^*}$ qui correspond à Y_H par le deuxième isomorphisme et décomposons X^* en $X_{SC}^*+X_Z^*$ de sorte que X_{SC}^* corresponde à $\bar{Y}_{SC}^*+\bar{Y}_Z$ par le troisième isomorphisme.

Puisque Y_{SC} est conjugué à Y_{SC}^* par un élément de $H_{\epsilon,SC}$, Y l'est à $Y_{SC}^*+Y_Z$ par le même élément. On a $Y_H=Int(\bar{h}\bar{h}_0)(Y_{SC}^*+Y_Z)$ avec $\bar{h}_0\in H_{\epsilon,SC}$, donc il existe $\bar{h}_1\in H_{\epsilon,SC}$ tel que $Y_H=Int(\bar{h}\bar{h}_1)(Y)$. Alors :

$$(2)\qquad Int(\bar{h}\bar{h}_1)(\gamma)=Int(\bar{h}\bar{h}_1)(exp(Y)\epsilon)=exp(Y_H)Int(\bar{h})(\epsilon)=exp(Y_H)\bar{\mu}.$$

Soient $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X \in \bar{C}[y]$. On écrit $X = X_{SC} + X_Z[y]$, avec $X_{SC} \in \bar{C}[y]_{SC}$. Cette dernière relation signifie que $\bar{\psi}[y](X_{SC})$ est conjugué à X^*_{SC} par un élément de $\bar{G}^*_{SC}$. En revenant à la définition de $\bar{\psi}[y]$, il revient au même de dire qu'il existe $x \in G^*_{\bar{\nu}\theta^*,SC}$ tel que :

$$Int(x\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(y^{-1})(X_{SC}) = X^*_{SC}.$$

On peut aussi bien ajouter les éléments "centraux" dans cette relation, c'est-à-dire ajouter $X_Z[y]$ à X_{SC} et X^*_Z à X^*_{SC}. On obtient alors :

$$Int(x\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(y^{-1})(X) = X^*.$$

D'où :

$$Int(x\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \tilde{\psi} \circ Int(y^{-1})(\varphi(X)) = Int(x\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \tilde{\psi} \circ Int(y^{-1})(exp(X)y\bar{\eta}y^{-1})$$

$$= exp(X^*)Int(x\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \tilde{\psi}(\bar{\eta}) = exp(X^*)Int(x)(\bar{\nu}\theta^*) = exp(X^*)\bar{\nu}\theta^*.$$

Mais $\xi(\bar{\nu}) = \bar{\mu}$ et $\xi(X^*) = Y_H$. La relation ci-dessus, jointe à (2), entraîne que $\varphi(X)$ appartient à la classe de conjugaison stable de $\tilde{G}(F)$ qui correspond à γ, c'est-à-dire à $\tilde{C}$. Cela démontre la première assertion de l'énoncé.

Il est clair que φ se quotiente en une application, notons-la $\varphi_\sim$, de $\bar{C}/\sim$ dans $\tilde{C}/\sim$. Soit $\delta \in \tilde{C}$. D'après [KS], lemme 3.3.B, il existe un diagramme $D_\delta = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \delta)$ issu de γ. Dans la preuve du lemme 3.2, on a construit un élément $X \in \mathfrak{t}^\natural(F)$, on a posé $\eta = exp(-X)\delta$ et constaté que $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \eta)$ était un diagramme issu de ϵ. Dans la preuve du lemme 3.4, on a déduit de D un diagramme modifié $D' = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h', g'_0, g_1, \eta)$ et construit un élément $y \in \mathcal{Y}_{\bar{\eta}}$ tel que $Int(y)(\bar{\eta}) = \eta$. Choisissons $\dot{y} \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, $g \in G(F)$ et $\iota \in I_{\bar{\eta}}$ tels que $gy = \dot{y}\iota$. On a les égalités :

$$Int(g)(\eta) = Int(gy)(\bar{\eta}) = Int(\dot{y}\iota)(\bar{\eta}) = Int(\dot{y})(\bar{\eta}) = \dot{y}\bar{\eta}\dot{y}^{-1},$$

et $Int(g)$ se restreint en un isomorphisme défini sur F de G_η sur $\bar{G}[y]$. Posons $X' = Int(g)(X)$ et $\delta' = Int(g)(\delta) = exp(X')\dot{y}\bar{\eta}\dot{y}^{-1}$. On va prouver que δ' appartient à l'image de φ, ce qui prouvera la surjectivité de $\varphi_\sim$. Il s'agit de prouver que X' appartient à $\bar{C}[\dot{y}]$ et, d'après le même calcul que ci-dessus, il revient au même de prouver que $Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(\dot{y}^{-1})(X')$ est conjugué à X^* par un élément de $\bar{G}^*$. Posons $X_1 = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(\dot{y}^{-1})(X')$. On a :

$$X_1 = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(\iota y^{-1}g^{-1})(X').$$

Posons $X_2 = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(y^{-1}g^{-1})(X')$. Remarquons que $Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi(\iota)$ appartient à $I_{\bar{\nu}\theta^*}$. Puisque ce groupe agit sur $\bar{G}^*$ par automorphismes intérieurs, X_1 est conjugué à X_2 par un élément de $\bar{G}^*$. On a :

$$X_2 = Int(\bar{g}_0\bar{g}_1) \circ \psi \circ Int(y^{-1})(X).$$

Revenons à la définition de y donnée dans la preuve du lemme 3.4. On a $y \in x\bar{T} = Tx$. Puisque $X \in \mathfrak{t}$, on a $Int(y^{-1})(X) = Int(x^{-1})(X)$. D'autre part, $g'_0 g_1 \psi(x) = \bar{g}_0\bar{g}_1$. Alors :

$$X_2 = Int(g'_0 g_1) \circ \psi(X).$$

D'après la définition de X donnée dans la preuve du lemme 3.2, $Int(g_0 g_1) \circ \psi(X)$ est l'élément $X_3 \in \mathfrak{t}^{*,\theta^*}$ tel que $\xi(X_3) = Int(h)(Y)$. D'après la définition du diagramme D', il revient au même de dire que X_2 est l'élément de $\mathfrak{t}^{*,\Theta^*}$ tel que $\xi(X_2) = Int(h')(Y)$. On a une égalité $h' = \bar{h}h''$, avec $h'' \in H_{\epsilon,SC}$ et $Int(h'')(T^\flat) = \bar{T}^\flat$. Rappelons que l'on a fixé un élément $\bar{h}_0 \in H_{\epsilon,SC}$ tel que $Int(\bar{h}_0)(T^{\flat *}) = \bar{T}^\flat$. Posons $Y_2 = Int(\bar{h}_0^{-1}h'')(Y)$. Alors :

$$\xi(X_2) = Int(\bar{h}\bar{h}_0)(Y_2).$$

Les éléments Y_2 et $\dot{Y}_{SC} + Y_Z$ sont tous deux conjugués à Y par un élément de $H_{\epsilon,SC}$. Ils appartiennent tous deux à $\mathfrak{t}^{\flat *}$. Donc ils sont conjugués par un élément de $N_{H_\epsilon}(T^{\flat *})$. En transportant ce résultat par $Int(\bar{h}\bar{h}_0)$, on voit qu'il existe un élément ω du groupe de Weyl $\Omega_\sharp$ (cf. 3.3) tel que $Int(\bar{h}\bar{h}_0)(Y_2) = \omega(Y_H)$. D'après 3.3(1), on peut identifier ω à un élément du groupe de Weyl $\Omega_{\bar{G}}$ de sorte que $\omega \circ \xi = \xi \circ \omega$. Alors :

$$\xi(X_2) = \omega(Y_H) = \omega \circ \xi(X^*) = \xi \circ \omega(X^*).$$

Les éléments X_2 et $\omega(X^*)$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{t}^{*,\Theta^*}$ et la restriction de ξ à cet espace est injective. Donc $X_2 = \omega(X^*)$. Mais $\Omega_{\bar{G}}$ n'est autre que le groupe de Weyl de $\bar{G}^*$, donc X_2 est conjugué à X^* par un élément de ce groupe $\bar{G}^*$. Il en est de même de X_1 et X^*, ce qui achève de prouver la surjectivité de $\psi/\sim$.

Prouvons son injectivité. Soient $y_1, y_2 \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, $X_1 \in \bar{C}[y_1]$, $X_2 \in \bar{C}[y_2]$, supposons $\varphi(X_1)$ et $\varphi(X_2)$ conjugués, plus précisément fixons $g \in G(F)$ tel que $g\varphi(X_1)g^{-1} = \varphi(X_2)$. Pour $i = 1, 2$, posons $X_i' = Int(y_i^{-1})(X_i)$, $\delta_i = Int(y_i^{-1}) \circ \varphi(X_i) = exp(X_i')\bar{\eta}$. Posons $g' = y_2^{-1}gy_1$. Alors $Int(g')(\delta_1) = \delta_2$. L'hypothèse $X_i \in \bar{C}[y_i]$ pour $i = 1, 2$ entraîne que X_1' et X_2' sont conjugués par un élément de $\bar{G}_{SC}$. Soit donc $x \in \bar{G}_{SC}$ tel que $Int(x)(X_1') = X_2'$. On a aussi $Int(x)(\delta_1) = \delta_2$, donc $Int(x^{-1}g')(\delta_1) = \delta_1$, i.e. $x^{-1}g' \in G^{\delta_1}$. Mais δ_1 est fortement régulier donc $G^{\delta_1} = I_{\delta_1}$ (cf. 3.1(2)) . On peut supposer que δ_1 est conjugué par un élément de $G_{\bar{\eta}}$ à un élément assez proche de $\bar{\eta}$ (il suffit pour cela que Y soit assez proche de 0). Alors $G_{\delta_1} \subset G_{\bar{\eta}}$, donc aussi $I_{\delta_1} = Z_G^\theta G_{\delta_1} \subset Z_G^\theta G_{\bar{\eta}} = I_{\bar{\eta}}$. Alors $x^{-1}g' \in I_{\bar{\eta}}$. Puisque $x \in G_{\bar{\eta}}$, on a aussi $g' \in I_{\bar{\eta}}$, puis $y_2 = gy_1g'^{-1} \in G(F)y_1I_{\bar{\eta}}$. Puisque $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ est un ensemble de représentants du quotient $G(F)\backslash\mathcal{Y}_{\bar{\eta}}/I_{\bar{\eta}}$, cette relation entraîne $y_1 = y_2$. Alors $g = Int(y_1)(g')$ appartient à $I_{y_1\bar{\eta}y_1^{-1}}$ et, puisque $g \in G(F)$, on a même $g \in I_{y_1\bar{\eta}y_1^{-1}}(F)$. Alors $Int(g)(X_1) = X_2$ et X_1 et X_2 sont équivalents dans $\bar{C}$. Cela achève la preuve. □

3.9 Egalité de facteurs de transfert

On a rappelé en 1.4 l'existence d'un facteur de transfert $\Delta : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}^\times$. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, on a dit que le quadruplet $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ était une donnée endoscopique pour le groupe $\bar{G}[y]_{SC}$. Notons $\bar{\mathfrak{D}}[y]$ l'ensemble des couples (Y, X) tels que $Y \in \bar{\mathfrak{h}}(F)$, $X \in \bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F)$, X et Y sont semi-simples réguliers et la classe de conjugaison stable de X correspond à la classe de conjugaison stable de Y. On a alors un facteur de transfert :

$$\bar{\Delta}[y] : \bar{\mathfrak{D}}[y] \times \bar{\mathfrak{D}}[y] \to \mathbb{C}^\times.$$

Fixons un élément $\epsilon_1 \in H_{1,z}(F)$ dont l'image dans $H_z(F)$ soit ϵ. Soit $Y_1 \in \mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$, notons Y son image dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$. On suppose que Y vérifie les conditions du paragraphe précédent (il est assez proche de 0 et l'élément γ est $\tilde{G}$-fortement régulier). On construit à partir de Y tous les éléments définis dans ce paragraphe. On pose $\gamma_1 = exp(Y_1)\epsilon_1$. Considérons un autre élément $\underline{Y}_1 \in \mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$ vérifiant les mêmes hypothèses. On construit les éléments analogues, que l'on note en les soulignant : $\underline{Y}$, $\underline{\gamma}$ etc...

Théorème. *Il existe un voisinage $\mathfrak{V}_1$ de 0 dans $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$ tel que, si Y_1 et $\underline{Y}_1$ vérifient les conditions ci-dessus et appartiennent tous deux à $\mathfrak{V}_1$, la condition suivante soit vérifiée.*

Soient $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, $X \in \bar{C}[y]$ et $\underline{X} \in \underline{\bar{C}}[y]$. Ecrivons $X = X_{SC} + X_Z[y]$, $\underline{X} = \underline{X}_{SC} + \underline{X}_Z[y]$, avec $X_{SC} \in \bar{C}[y]_{SC}$ et $\underline{X}_{SC} \in \underline{\bar{C}}[y]_{SC}$. Alors on a l'égalité :

$$\Delta(\gamma_1, \varphi(X); \underline{\gamma}_1, \underline{\varphi}(\underline{X})) = \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, X_{SC}; \underline{\bar{Y}}, \underline{X}_{SC}).$$

Cela sera démontré dans [W2]. Grâce à ce théorème, on peut fixer des facteurs de transfert $\bar{\Delta}[y]$, cette fois sur $\bar{\mathfrak{D}}[y]$, de sorte que, pour tout Y, y et X comme ci-dessus, on ait l'égalité $\Delta(\gamma_1, \varphi(X)) = \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, X_{SC})$. C'est ce que l'on fait dans la suite.

3.10 Définition des mesures

Rappelons que si M est un groupe réductif connexe défini sur F, il y a une bijection naturelle entre les mesures de Haar sur $M(F)$ et celles sur $\mathfrak{m}(F)$: la mesure dx sur $M(F)$ correspond à la mesure dX sur $\mathfrak{m}(F)$ si, pour tout voisinage ouvert assez petit $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}(F)$, la mesure de $\mathfrak{V}$ pour dX est égale à la mesure de $exp(\mathfrak{V})$ pour dx.

On a déjà fixé des mesures de Haar sur $G(F)$ et $H(F)$. Pour tout $\gamma \in H_z(F)$, semi-simple et $\tilde{G}$-fortement régulier, on munit $H_\gamma(F)$ d'une mesure de Haar. On suppose que, si γ et γ' sont stablement conjugués, les mesures sur $H_\gamma(F)$ et sur $H_{\gamma'}(F)$ se correspondent par l'isomorphisme canonique que la conjugaison stable détermine entre ces deux groupes.

Soit $(\gamma, \delta) \in \mathcal{D}$. Comme on l'a dit en 3.2, il existe un diagramme $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \delta)$ issu de γ. Ce diagramme détermine un isomorphisme de $\mathfrak{t}^\natural(F)$ sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$. On vérifie que cet isomorphisme ne dépend pas du choix du diagramme (parce que nos éléments sont fortement réguliers). La mesure choisie sur $H_\gamma(F)$ détermine une mesure sur $\mathfrak{h}_\gamma(F) = \mathfrak{t}^\flat(F)$. On transporte cette mesure en une mesure sur $\mathfrak{t}^\natural(F)$ par l'isomorphisme précédent. On en déduit une mesure sur $T^\natural(F) = G_\delta(F)$. Ce sont ces mesures qui sont utilisées dans la définition des intégrales orbitales.

Remarque. La définition de [KS] est un peu différente (essentiellement parce qu'ils ne supposent pas θ^* d'ordre fini). Avec nos notations, elle se traduit ainsi : à une mesure sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$, Kottwitz et Shelstad associent la mesure sur $\mathfrak{t}^\natural(F)$ qui correspond par l'isomorphisme précedent à la mesure sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$ multipliée par $|c|^{-1}$, où $|.|$ est la valeur absolue usuelle de F et c est le déterminant de $1 - \theta^*$ agissant sur $t^*/t^{*,\Theta^*}$. Puisque ce terme est indépendant du couple (γ, δ) et puisque, si l'on envisage une situation définie sur un corps de nombres, le produit de ces termes sur toutes les places du corps sera égal à 1, on ne change pas grand'chose en supprimant ce terme $|c|$.

De la même façon, considèrons un triplet (G_1, G_2, j_*) comme en 1.7. Pour $i = 1, 2$, soit X_i un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}_i(F)$ et supposons que les classes de conjugaison stable de X_1 et de X_2 se correspondent. Alors, l'isomorphisme j_* permet de définir un isomorphisme $\mathfrak{g}_{1,X_1}(F) \simeq \mathfrak{g}_{2,X_2}(F)$. On munit ces deux espaces de mesures qui se correspondent, puis les tores $G_{1,X_1}(F)$ et $G_{2,X_2}(F)$ des mesures correspondantes. Ce sont ces mesures qui sont utilisées dans la définition des intégrales orbitales.

Considérons enfin la situation de 3.8, dont on reprend les notations. On note $T^\flat = H_{exp(Y)\epsilon} = Z_{H_\epsilon}(Y)$, $\bar{T}^\flat = \bar{H}_{\bar{Y}}$. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, on dispose d'une mesure de Haar sur $T^\flat(F)$. On fixe des mesures de Haar sur $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)$, $\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$, $H_\epsilon(F)$, $\bar{H}(F)$ et $\bar{G}^*(F)$.

Via l'isomorphisme j_*, les mesures sur $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)$ et $\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$ déterminent une mesure sur $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$. Les mesures sur les groupes déterminent des mesures sur les algèbres de Lie

$\mathfrak{h}_\epsilon(F)$, $\bar{\mathfrak{h}}(F)$, $\bar{\mathfrak{g}}^*(F)$. Grâce aux égalités :

$$\mathfrak{h}_\epsilon(F)=\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)\oplus\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F),$$

$$\bar{\mathfrak{h}}(F)=\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F),$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^*(F)=\bar{\mathfrak{g}}^*_{SC}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F),$$

on en déduit des mesures sur les espaces $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$, $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$, $\bar{\mathfrak{g}}^*_{SC}(F)$, puis sur les groupes $H_{\epsilon,SC}(F)$, $\bar{H}_{SC}(F)$, $\bar{G}^*_{SC}(F)$.

Soient $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X\in\bar{C}[y]$, que l'on écrit $X=X_{SC}+X_Z[y]$, avec $X_{SC}\in\bar{C}[y]_{SC}$. On note $T^\natural$ le commutant de X dans $\bar{G}[y]$. Puisque $\bar{G}[y]$, resp. $\bar{G}[y]_{SC}$, est une forme intérieure de $\bar{G}^*$, resp. $\bar{G}^*_{SC}$, la mesure déjà fixée sur le groupe des points sur F de ce groupe détermine une mesure sur $\bar{G}[y](F)$, resp $\bar{G}[y]_{SC}(F)$. De même, la mesure sur $\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$ se transporte en une mesure sur $\mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F)$. La mesure choisie sur $T^\flat(F)$ en détermine une sur $T^\natural(F)$. On en déduit des mesures sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$ et $\mathfrak{t}^\natural(F)$. Grâce aux égalités :

$$\mathfrak{t}^\flat(F)=\mathfrak{t}^\flat_{sc}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F),$$

$$\mathfrak{t}^\natural(F)=\mathfrak{t}^\natural_{sc}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F),$$

on obtient des mesures sur $\mathfrak{t}^\flat_{sc}(F)$ et $\mathfrak{t}^\natural_{sc}(F)$. Parce $\bar{Y}_{SC}$ correspond à Y_{SC} par la correspondance définie par le triplet endoscopique non standard $(H_{\epsilon,SC},\bar{H}_{SC},j_*)$, la mesure sur $\mathfrak{t}^\flat_{sc}(F)$ en détermine une sur $\bar{\mathfrak{t}}^\flat_{sc}(F)$. Parce que $\bar{Y}$ correspond à X_{SC} par la correspondance définie par la donnée endoscopique $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s},\hat{\bar{\xi}})$, la mesure sur $\mathfrak{t}^\natural_{sc}(F)$ en détermine une sur $\bar{\mathfrak{t}}^\flat(F)$. Il est plus ou moins clair que les mesures ainsi définies sont cohérentes pour la décomposition :

$$\bar{\mathfrak{t}}^\flat(F)=\bar{\mathfrak{t}}^\flat_{sc}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F).$$

On a aussi des mesures sur les tores $T^\flat_{sc}(F)$, $T^\natural_{sc}(F)$, etc...

Considérons les classes de conjugaison stable $\bar{C}[y]$ et $\bar{C}[y]_{SC}$. Munissons-les de mesures déduites de formes différentielles algébriques de degré maximal invariantes par conjugaison. Cela détermine ces mesures à une constante près et on les normalise de sorte que les injections :

$$\begin{array}{ccc}T^\natural(F)\backslash\bar{G}[y](F)&\to&\bar{C}[y]\\ x&\mapsto&x^{-1}Xx,\end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccc}T^\natural_{sc}(F)\backslash\bar{G}[y]_{SC}(F)&\to&\bar{C}[y]_{SC}\\ x&\mapsto&x^{-1}Xx,\end{array}$$

préservent les mesures. Alors l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}\bar{C}[y]_{SC}&\to&\bar{C}[y]\\ X'&\mapsto&X'+X_Z[y]\end{array}$$

préserve les mesures. Des considérations analogues s'appliquent aux classes de conjugaison stable de Y_{SC} dans $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et de Y dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$, ainsi qu'à celles de $\bar{Y}_{SC}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$ et de $\bar{Y}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}(F)$.

Dans le paragraphe suivant, on munit tous les groupes qui apparaissent des mesures que l'on vient de définir.

3.11 Preuve du théorème 1.8

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\epsilon_1 \in H_{1,\sharp}(F)$. On va montrer que l'hypothèse du lemme 2.3 est vérifiée. On note ϵ l'image de ϵ_1 dans $H_z(F)$, qui appartient à $H_\sharp(F)$. Si $\mathbf{D}(\epsilon) = \emptyset$, le lemme 3.2 entraîne que $O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = 0$ pour tout γ_1 dans un voisinage de ϵ_1. L'hypothèse du lemme 2.3 est satisfaite en prenant $\varphi = 0$. On suppose désormais $\mathbf{D}(\epsilon) \neq \emptyset$ et on effectue toutes les constructions des paragraphes 3.2 à 3.10 relatives à cet élément. On fixe un voisinage $\mathfrak{V}_1$ de 0 dans $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F)$ de sorte que l'hypothèse du paragraphe 3.9 soit vérifiée et que tout élément $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ dans l'image naturelle de $\mathfrak{V}_1$ soit assez proche de 0 pour qu'on puisse appliquer le lemme 3.8.

Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$. On fixe une mesure de Haar sur $\bar{G}[y](F)$. On fixe un voisinage $\mathfrak{U}[y]$ de 0 dans $\bar{\mathfrak{g}}[y](F)$ et une fonction $\phi[y] \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}}[y](F))$ qui vérifient les propriétés du lemme 2.4 relatives à la fonction f. Puisqu'on a l'égalité :

$$\bar{\mathfrak{g}}[y](F) = \bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F) \oplus \mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F),$$

on peut décomposer $\phi[y]$ en une somme :

$$\phi[y] = \sum_{j \in J[y]} \phi_j \otimes \phi_{Z,j},$$

où $J[y]$ est un ensemble fini d'indices et, pour tout $j \in J[y]$, $\phi_j \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F))$ et $\phi_{Z,j} \in C_c^\infty(\mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F))$. Quitte à restreindre $\mathfrak{V}_1$, on peut supposer que si $Y_1 \in \mathfrak{V}_1$ et $X \in \bar{\mathfrak{g}}[y](F)$ sont tels que $(exp(Y_1)\epsilon_1, exp(X)y\bar{\eta}y^{-1}) \in \mathcal{D}_1$, alors $X \in \mathfrak{U}[y]$.

On pose $c[y] = [I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F) : \bar{G}[y](F)]^{-1}$.

Lemme. *Pour tout $Y_1 \in \mathfrak{V}_1$ tel que $exp(Y_1)\epsilon_1$ soit $\tilde{G}$-fortement régulier, on a l'égalité :*

$$O_{exp(Y_1)\epsilon_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}} c[y] \sum_{j \in J[y]} \phi_{Z,j}(X_Z[y]) O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(\phi_j).$$

Remarque sur l'énoncé. On a noté Y l'image de Y_1 dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$. Les éléments $X_Z[y]$ et $\bar{Y}$ sont ceux que l'on a associés à Y en 3.8.

Preuve. On fixe $Y_1 \in \mathfrak{V}_1$, on définit Y comme ci-dessus et on adopte les notations de 3.8. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, fixons un ensemble de représentants $\Xi[y]$ des classes de conjugaison par $\bar{G}[y](F)$ dans $\bar{C}[y]$. Notons Ξ la réunion disjointe des $\Xi[y]$ et :

$$\varphi_\Xi : \Xi \to \tilde{C}/\sim$$

la composée de la restriction de φ à Ξ avec la projection naturelle de $\tilde{C}$ sur $\tilde{C}/\sim$. D'après le lemme 3.8, φ_Ξ est surjective. Elle n'est pas forcément injective car l'équivalence définie en 3.8 sur $\bar{C}$ utilisait la conjugaison par $I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)$ au lieu de $\bar{G}[y](F)$. Soient $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X \in \Xi[y]$. Grâce au lemme 3.8, la fibre de φ_Ξ au-dessus de $\varphi_\Xi(X)$ a pour nombre d'éléments le nombre de classes de conjugaison par $\bar{G}[y](F)$ contenues dans la classe de conjugaison par $I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)$ de X. C'est donc le nombre d'éléments de l'ensemble de doubles classes :

$$\bar{G}[y](F) \backslash I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)/G^{\varphi(X)}(F).$$

Mais $\bar{G}[y](F)$ est un sous-groupe distingué de $I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F)$ et le nombre d'éléments de l'ensemble ci-dessus est égal à :

$$[I_{y\bar{\eta}y^{-1}}(F) : \bar{G}[y](F)][G^{\varphi(X)}(F) : G_{\varphi(X)}(F)]^{-1}.$$

Remarquons que, si δ et δ' sont deux éléments de $\tilde{G}_{reg}(F)$ stablement conjugués, les groupes G^δ et $G^{\delta'}$ sont isomorphes et l'isomorphisme est défini sur F. Le nombre $[G^{\varphi(X)}(F) : G_{\varphi(X)}(F)]$ qui intervient ci-dessus est donc indépendant de X et y.

On pose $\gamma_1 = exp(Y_1)\epsilon_1$. D'après les définitions de 1.5, on a l'égalité :

$$O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_{\delta\in\tilde{C}/\sim} \Delta(\gamma_1,\delta)[G^\delta(F) : G_\delta(F)]^{-1} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg.$$

Grâce aux considérations qui précèdent, on obtient :

$$(1) \qquad O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}} c[y] \sum_{X\in\Xi[y]} \Delta(\gamma_1,\varphi(X)) \int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\varphi(X)g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg.$$

Fixons $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X \in \Xi[y]$. D'après le lemme 2.4 et les définitions, on a l'égalité :

$$\Delta(\gamma_1,\varphi(X)) \int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\varphi(X)g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg =$$

$$\Delta(\gamma_1,\varphi(X)) \int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash\bar{G}[y](F)} \phi[y](x^{-1}Xx)\boldsymbol{\omega}(x)\,dx$$

$$= \Delta(\gamma_1,\varphi(X)) \sum_{j\in J[y]} \phi_{Z,j}(X_Z[y]) \int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash\bar{G}[y](F)} \phi_j(x^{-1}X_{SC}x)\boldsymbol{\omega}(x)\,dx.$$

La classe de conjugaison de X_{SC} par $\bar{G}[y](F)$ se décompose en un nombre fini de classes de conjugaison par $\bar{G}[y]_{SC}(F)$. Fixons un ensemble fini $\mathcal{E}_X \subset \bar{G}[y](F)$ tel que $\{e^{-1}X_{SC}e; e \in \mathcal{E}_X\}$ soit un ensemble de représentants de ces dernières classes. Pour tout $e \in \mathcal{E}_X$, notons $T_{y,X,e}$ le commutant de $e^{-1}X_{SC}e$ dans $\bar{G}[y]_{SC}$. On a défini nos mesures de sorte que l'on ait l'égalité :

$$\int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash\bar{G}[y](F)} \phi_j(x^{-1}X_{SC}x)\boldsymbol{\omega}(x)\,dx =$$

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_X} \int_{T_{y,X,e}(F)\backslash\bar{G}[y]_{SC}(F)} \phi_j(x^{-1}e^{-1}X_{SC}ex)\boldsymbol{\omega}(ex)\,dx.$$

Puisque $\bar{G}[y]_{SC}$ est simplement connexe, $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $\bar{G}[y]_{SC}(F)$. D'autre part, d'après [KS] théorème 5.1.D(2), on a l'égalité :

$$\Delta(\gamma_1,\varphi(X))\boldsymbol{\omega}(e) = \Delta(\gamma_1,\varphi(e^{-1}Xe)),$$

donc, d'après le théorème 3.9,

$$\Delta(\gamma_1,\varphi(X))\boldsymbol{\omega}(e) = \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, e^{-1}X_{SC}e).$$

On obtient alors :

$$\Delta(\gamma_1,\varphi(X)) \int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\varphi(X)g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg =$$

$$\sum_{j\in J[y]} \phi_{Z,j}(X_Z[y]) \sum_{e\in\mathcal{E}_X} \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, e^{-1}X_{SC}e) \int_{T_{y,X,e}(F)\backslash\bar{G}[y]_{SC}(F)} \phi_j(x^{-1}e^{-1}X_{SC}ex)\,dx,$$

puis :

$$\sum_{X\in\Xi[y]}\Delta(\gamma_1,\varphi(X))\int_{G_{\varphi(X)}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\varphi(X)g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg =$$

$$\sum_{j\in J[y]}\phi_{Z,j}(X_Z[y])\sum_{X\in\Xi[y]}\sum_{e\in\mathcal{E}_X}\bar{\Delta}[y](\bar{Y},e^{-1}X_{SC}e)\int_{T_{y,X,e}(F)\backslash\bar{G}[y]_{SC}(F)}\phi_j(x^{-1}e^{-1}X_{SC}ex)\,dx.$$

Mais $\{e^{-1}Xe; X\in\Xi[y], e\in\mathcal{E}_X\}$ est un système de représentants des classes de conjugaison par $\bar{G}[y](F)$ dans la classe de conjugaison stable $\bar{C}[y]_{SC}$. Alors l'expression ci-dessus est égale à :

$$\sum_{j\in J[y]}\phi_{Z,j}(X_Z[y])O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(\phi_j).$$

La formule de l'énoncé résulte maintenant de (1). $\square$

Soient $y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $j\in J[y]$. Par l'hypothèse du théorème, on peut transférer ϕ_j en une fonction sur l'algèbre de Lie du groupe endoscopique $\bar{H}$. Soit donc $\phi'_j\in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{h}}(F))$ un transfert de ϕ_j. En utilisant la décomposition :

$$\bar{\mathfrak{h}}(F)=\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F),$$

on décompose ϕ'_j en une somme finie :

$$\phi'_j=\sum_{k\in K_j}\phi_{j,k}\otimes\phi_{Z,j,k},$$

où $\phi_{j,k}\in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F))$ et $\phi_{Z,j,k}\in C_c^\infty(\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F))$. Soit $k\in K_j$. Puisque $(H_{\epsilon,SC},\bar{H}_{SC},j_*)$ est une donnée endoscopique non standard, l'hypothèse du théorème permet de transférer la fonction $\phi_{j,k}$ en une fonction sur $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$. Soit donc $\Phi_{j,k}\in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F))$ un transfert de $\phi_{j,k}$.

Par le torseur intérieur $\bar{\psi}[y]$, la fonction $\phi_{Z,j}$ s'identifie à une fonction $\phi^*_{Z,j}$ sur $\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$. Pour $k\in K_j$, considérons la fonction $\phi_{Z,j,k}\otimes\phi^*_{Z,j}$ sur $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)\oplus\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$. Par l'isomorphisme j_*, elle s'identifie à une fonction $\Phi_{Z,j,k}$ sur $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$. Posons :

$$\Phi=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}}c[y]\sum_{j\in J[y]}\sum_{k\in K_j}\Phi_{j,k}\otimes\Phi_{Z,j,k}.$$

C'est un élément de $C_c^\infty(\mathfrak{h}_\epsilon(F))$. Via la projection naturelle de $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F))$ sur $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$, on peut la remonter en une fonction sur $\mathfrak{h}_{1,\epsilon_1}(F))$ que l'on note encore Φ. Soit alors $Y_1\in\mathfrak{V}_1$ tel que $exp(Y_1)\epsilon_1$ soit $\tilde{G}$-fortement régulier. Avec les notations ci-dessus, on a les égalités :

$$\begin{aligned}
O_{exp(Y_1)\epsilon_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f)&=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}}c[y]\sum_{j\in J[y]}\phi_{Z,j}(X_Z[y])O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(\phi_j)\\
&=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}}c[y]\sum_{j\in J[y]}\phi^*_{Z,j}(X_Z)SO_{\bar{Y}}^{\bar{H}}(\phi'_j)\\
&=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}}c[y]\sum_{j\in J[y]}\sum_{k\in K_j}\phi^*_{Z,j}(X_Z)\phi_{Z,j,k}(\bar{Y}_Z)SO_{\bar{Y}_{SC}}^{\bar{H}_{SC}}(\phi_{j,k})\\
&=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}}c[y]\sum_{j\in J[y]}\sum_{k\in K_j}\Phi_{Z,j,k}(Y_Z)SO_{Y_{SC}}^{H_{\epsilon,SC}}(\Phi_{j,k})
\end{aligned}$$

$$= SO_Y^{H_\epsilon}(\Phi)$$
$$= SO_{Y_1}^{H_{1,\epsilon_1}}(\Phi).$$

La fonction Φ satisfait donc la condition du lemme 2.3. Cela achève la démonstration. $\square$

Les précisions sur le théorème figurant au paragraphe 1.8 résultent de la preuve ci-dessus et du paragraphe 3.7 pour ce qui concerne les précisions (1) et (2), de la remarque 3.5(7) pour ce qui concerne la précision (3).

4 Le cas non ramifié

4.1 Groupes non ramifiés

Notons p la caractéristique résiduelle de F, $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F et $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Notons F^{nr} l'extension maximale non ramifiée contenue dans $\bar{F}$ et Γ^{nr} le groupe de Galois de l'extension F^{nr}/F. Ce groupe s'identifie au groupe de Galois de l'extension $\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$. Il a un générateur topologique canonique, l'élément de Frobenius. On note W^{nr} le sous-groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) engendré par cet élément. On note I_F le sous-groupe d'inertie de Γ_F. On a la suite exacte :

$$1 \to I_F \to \Gamma_F \to \Gamma^{nr} \to 1.$$

On peut aussi considérer I_F comme un sous-groupe de W_F et on a la suite exacte :

$$1 \to I_F \to W_F \to W^{nr} \to 0.$$

On appelera élément de Frobenius dans Γ_F, resp. W_F, un élément dont l'image dans Γ^{nr}, resp. W^{nr}, est l'élément de Frobenius. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{o}^{nr}$ l'anneau des entiers de F^{nr}. Pour tout groupe A, on note $A_{p'}$ le sous-groupe des éléments de A d'ordre fini premier à p. On a l'inclusion $(\bar{F}^\times)_{p'} \subset \mathfrak{o}^{nr,\times}$ car toute racine de l'unité d'ordre premier à p engendre une extension non ramifiée de F. L'application de réduction définit des isomorphismes de groupes de $(\mathfrak{o}^\times)_{p'}$ sur $\mathbb{F}_q^\times$ et de $(\mathfrak{o}^{nr,\times})_{p'}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$.

Soit T un tore défini sur F. On dit qu'il est non ramifié s'il se déploie sur F^{nr}. Il revient au même de dire que l'action de Γ_F sur $X_*(T)$ ou $X^*(T)$ se factorise par une action de Γ^{nr}. Supposons T non ramifié. Alors T a une structure naturelle de schéma en groupes lisse sur $\mathfrak{o}$, pour laquelle :

$$T(\mathfrak{o}^{nr}) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^{nr,\times} \subset X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} F^{nr,\times} = T(F^{nr}),$$

$$T(\mathfrak{o}) = T(\mathfrak{o}^{nr})^{\Gamma^{nr}} \subset T(F^{nr})^{\Gamma^{nr}} = T(F).$$

La fibre spéciale $\mathbf{T} = T \times_{\mathfrak{o}} \mathbb{F}_q$ est le tore sur $\mathbb{F}_q$ dont le groupe des cocaractères est $X_*(T)$ muni de son action de Γ^{nr}. Par similarité avec les conventions que l'on adoptées pour les groupes définis sur F, on identifiera les groupes définis sur $\mathbb{F}_q$ avec leurs ensembles de points sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ (par exemple $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\bar{\mathbb{F}}_q)$). On a l'inclusion $T_{p'} \subset T(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. L'application de réduction définit des isomorphismes de groupes de $T(\mathfrak{o})_{p'}$ sur $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$ et de $T(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ sur $\mathbf{T}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ a elle-aussi une structure naturelle sur $\mathfrak{o}$, pour laquelle :

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{o}^{nr}) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^{nr} \subset X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} F^{nr} = \mathfrak{t}(F^{nr}).$$

La fibre spéciale $\mathbf{t} = \mathfrak{t} \times_{\mathfrak{o}} \mathbb{F}_q$ est l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}$.

Soit M un groupe algébrique sur F, réductif et connexe. On sait définir les immeubles Imm^{nr}, resp. Imm, de M sur F^{nr}, resp. F. Le groupe $M(F^{nr})$, resp. $M(F)$, agit sur Imm^{nr}, resp. Imm. Le groupe Γ^{nr} agit sur Imm^{nr} et Imm s'identifie à l'ensemble des points fixes $(Imm^{nr})^{\Gamma^{nr}}$ de façon compatible aux actions de $M(F)$. Soit T un sous-tore maximal de M défini sur F. Notons $T_{F^{nr}}$, resp. T_F le plus grand sous-tore de T déployé sur F^{nr}, resp. F. Supposons que T_F est un sous-tore déployé maximal de M et $T_{F^{nr}}$ est un sous-tore déployé sur F^{nr} maximal de M. Au tore $T_{F^{nr}}$, resp. T_F, est associé un appartement $A^{nr} \subset Imm^{nr}$, resp. $A \subset Imm$. On a $A = (A^{nr})^{\Gamma^{nr}}$. A tout point $a \in A$, la théorie de Bruhat-Tits associe un schéma en groupes lisse K_a sur $\mathfrak{o}$. Sa fibre générique s'identifie à M. Le groupe $K_a(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K_a(\mathfrak{o})$, est un sous-groupe parahorique de $M(F^{nr})$, resp. $M(F)$, contenu et d'indice fini dans le fixateur de a dans $M(F^{nr})$, resp. $M(F)$. On note $\mathbf{K}_a$ la fibre spéciale de K_a. C'est un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{F}_q$. On définit le plus grand sous-schéma pro-p-unipotent K_a^+ de K_a. Il est tel que la suite suivante soit exacte :

$$1 \to K_a^+(\mathfrak{o}^{nr}) \to K_a(\mathfrak{o}^{nr}) \to \mathbf{K}_{a,red}(\bar{\mathbb{F}}_q) \to 1,$$

où $\mathbf{K}_{a,red}$ est le plus grand quotient réductif de $\mathbf{K}_a$.

A K_a est associée une algèbre de Lie $\mathfrak{k}_a$ sur $\mathfrak{o}$. Sa fibre générique s'identifie à $\mathfrak{m}$. L' algèbre $\mathfrak{k}_a(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $\mathfrak{k}_a(\mathfrak{o})$ est un sous-$\mathfrak{o}^{nr}$-réseau de $\mathfrak{m}(F^{nr})$, resp. un sous-$\mathfrak{o}$-réseau de $\mathfrak{m}(F)$. On note $\boldsymbol{\mathfrak{k}}_a$ la fibre spéciale de $\mathfrak{k}_a$. C'est l'algèbre de Lie de $\mathbf{K}_a$.

On dit que M est non ramifié s'il est quasi-déployé sur F et déployé sur F^{nr}. Supposons M non ramifié. Fixons une paire de Borel (B,T) de M et un épinglage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ relatif à cette paire, le tout étant défini sur F. Notons T_F le plus grand sous-tore de T déployé sur F et introduisons comme ci-dessus les immeubles Imm^{nr}, resp. Imm, et les appartements A^{nr}, resp. A, associés à T, resp. T_F. Le choix de l'épinglage permet d'identifier A^{nr} à $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Considérons le cas du point $a = 0$, notons simplement $K = K_0$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0$. Alors $K(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K(\mathfrak{o})$, est un sous-groupe compact hyperspécial de $M(F^{nr})$, resp. $M(F)$, égal au fixateur de 0 dans $M(F^{nr})$, resp. $M(F)$. Rappelons que tous les sous-groupes compacts hyperspéciaux sont conjugués par le groupe adjoint $M_{AD}(F^{nr})$, resp. $M_{AD}(F)$. La fibre spéciale $\mathbf{K}$ de K est le groupe algébrique sur $\mathbb{F}_q$, réductif et connexe, associé aux mêmes données de racines que M, munies de l'action de Γ^{nr} quotient de celle de Γ_F. Notons K^1 le noyau de l'application de réduction de K sur $\mathbf{K}$. Il est égal au schéma en groupes K^+ défini ci-dessus et $K^1(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K^1(\mathfrak{o})$, est le plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent de $K(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K(\mathfrak{o})$. On a des suites exactes :

$$1 \to K^1(\mathfrak{o}^{nr}) \to K(\mathfrak{o}^{nr}) \to \mathbf{K} \to 1,$$

$$1 \to K^1(\mathfrak{o}) \to K(\mathfrak{o}) \to \mathbf{K}(\mathbb{F}_q) \to 1.$$

Il existe une paire de Borel $(\mathbf{B},\mathbf{T})$ de $\mathbf{K}$, définie sur $\mathbb{F}_q$, de sorte que $\mathbf{B}$, resp. $\mathbf{T}$, soit égal à l'image de $B(F^{nr}) \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $T(F^{nr}) \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$ par la projection de $K(\mathfrak{o}^{nr})$ sur $\mathbf{K}$. Le groupe $\mathbf{T}$ est celui déduit de la structure naturelle sur $\mathfrak{o}$ de T. On a l'égalité $T(\mathfrak{o}^{nr}) = T(F^{nr}) \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$. Les groupes de Weyl de M relativement à T et de $\mathbf{K}$ relativement à $\mathbf{T}$ sont naturellement isomorphes. Plus précisément, les deux homomorphismes ci-dessous sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} & N_{K(\mathfrak{o}^{nr})}(T(\mathfrak{o}^{nr}))/T(\mathfrak{o}^{nr}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N_M(T)/T & & N_{\mathbf{K}}(\mathbf{T})/\mathbf{T} \end{tikzcd}$$

Fixons une uniformisante ϖ_F de $\mathfrak{o}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^1$ de K^1 vérifie l'égalité $\mathfrak{k}^1(\mathfrak{o}^{nr}) = \varpi_F\mathfrak{k}(\mathfrak{o}^{nr})$. On a la suite exacte :

$$1 \to \varpi_F\mathfrak{k}(\mathfrak{o}^{nr}) \to \mathfrak{k}(\mathfrak{o}^{nr}) \to \mathfrak{k} \to 0$$

et une suite analogue pour les points à valeurs dans $\mathfrak{o}$. Tous les éléments X_α de l'épinglage appartiennent à $\mathfrak{k}(\mathfrak{o}^{nr})$. Notons $\mathbf{X}_\alpha$ l'image de X_α dans $\mathfrak{k}$. Alors la famille $(\mathbf{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage défini sur $\mathbb{F}_q$ de $\mathbf{K}$.

Introduisons le groupe M_{SC} muni de la paire de Borel (B_{sc}, T_{sc}) et du même épinglage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. On définit comme ci-dessus un schéma en groupes K_{SC}. Il est immédiat que $K_{SC}(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K_{SC}(\mathfrak{o})$, est l'image réciproque dans $M_{SC}(F^{nr})$, resp. $M_{SC}(F)$, du groupe $K(\mathfrak{o}^{nr})$, resp. $K(\mathfrak{o})$. D'autre part, la fibre spéciale de K_{SC} est isomorphe au revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\mathbf{K}$ (la notation $\mathbf{K}_{SC}$ sera donc sans ambiguïté).

Soit $\mathbf{b} \in H^1(W_F, Z_{\hat{M}})$. Ce cocycle définit un caractère $\boldsymbol{\chi}$ de $M(F)$. On a :

(1) supposons que $\mathbf{b}$ provient par inflation d'un élément de $H^1(W^{nr}, Z_{\hat{M}})$; alors $\boldsymbol{\chi}$ est trivial sur $K(\mathfrak{o})$.

Preuve. Le groupe $K(\mathfrak{o})$ est engendré par $T(\mathfrak{o})$ et des sous-groupes unipotents. Ces derniers sont contenus dans le sous-groupe des commutateurs de $M(F)$, donc sont dans le noyau de tout caractère. On a un homomorphisme naturel $Z_{\hat{G}} \to \hat{T}$ et la restriction à $T(F)$ du caractère $\boldsymbol{\chi}$ provient du cocycle image de $\mathbf{b}$ dans $H^1(W_F, \hat{T})$. Cela nous ramène au cas où $M = T$. On a une suite exacte :

$$1 \to T(\mathfrak{o}) \to T(F) \xrightarrow{\pi} X_*(T)^{\Gamma^{nr}} \to 1.$$

On a aussi l'égalité $H^1(W^{nr}, \hat{T}) = (X^*(T)\otimes\mathbb{C}^\times)_{\Gamma^{nr}}$, et ce groupe est le dual de $X_*(T)^{\Gamma^{nr}}$. Il résulte des constructions des différentes dualités que $\boldsymbol{\chi}$ est le composé de l'homomorphisme π et du caractère de $X_*(T)^{\Gamma^{nr}}$ défini par l'image de $\mathbf{b}$ dans $H^1(W^{nr}, \hat{T})$. Il est trivial sur $T(\mathfrak{o})$ puisque π annule ce groupe. $\square$

Ainsi qu'on l'a dit ci-dessus, tous les sous-groupes compacts hyperspéciaux de $M(F)$ sont conjugués par le groupe adjoint $M_{AD}(F)$. Pour toute mesure de Haar sur $M(F)$, ils ont donc la même mesure. On appelle mesure de Haar non ramifiée sur $M(F)$ celle pour laquelle la mesure de tout sous-groupe compact hyperspécial vaut 1.

4.2 Une variante du théorème de Lang

Soit M un groupe réductif connexe défini sur F, non ramifié. On introduit un schéma en groupes hyperspécial K comme dans le paragraphe précédent. Notons $\mathfrak{O}^{nr}$ le complété de $\mathfrak{o}^{nr}$. L'action du groupe Γ^{nr} sur $\mathfrak{o}^{nr}$ se prolonge par continuité en une action sur $\mathfrak{O}^{nr}$. Soit $\phi \in \Gamma^{nr}$ l'élément de Frobenius.Pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$, les sous-groupes de points fixes $\mathfrak{o}^{nr,\phi^N}$ et $\mathfrak{O}^{nr,\phi^N}$ sont égaux. Le lemme suivant est bien connu.

Lemme. *(i) Soit $\phi \in \Gamma^{nr}$ un élément de Frobenius. Pour tout $x \in K(\mathfrak{O}^{nr})$, il existe $y \in K(\mathfrak{O}^{nr})$ tel que $y\phi(y)^{-1} = x$.*

(ii) On a l'égalité $H^1(\Gamma^{nr}, K(\mathfrak{o}^{nr})) = \{0\}$.

Preuve de (i). Pour tout entier $n \geq 1$, on note $K^n(\mathfrak{O}^{nr})$ le noyau de l'homomorphisme :

$$K(\mathfrak{O}^{nr}) \to K(\mathfrak{O}^{nr}/\varpi_F^n\mathfrak{O}^{nr}).$$

On pose $K^0(\mathfrak{O}^{nr}) = K(\mathfrak{O}^{nr})$. On a ainsi défini une filtration du groupe $K(\mathfrak{O}^{nr})$ dont les termes tendent vers 0. Parce que $K(\mathfrak{O}^{nr})$ est un espace topologique complet, un raisonnement standard nous ramène à prouver la propriété du (i) de l'énoncé pour tous les termes du gradué associé à la filtration. Le terme de degré 0 est $\mathbf{K}$ et l'assertion n'est autre que le théorème de Lang. Les termes de degré > 0 sont isomorphes à $\mathfrak{k}$ et l'assertion résulte du théorème Hilbert 90.

Preuve de (ii). Soit ψ un cocycle de Γ^{nr} dans $K(\mathfrak{o}^{nr})$. Par définition, un tel cocycle se factorise par $\Gamma^{nr}/N\Gamma^{nr}$ pour un certain entier $N > 0$, où $N\Gamma^{nr}$ est la fermeture du sous-groupe engendré par ϕ^N. Grâce à (i), choisissons $y \in K(\mathfrak{O}^{nr})$ tel que $y\phi(y)^{-1} = \psi(\phi)$. On a les égalités :

$$\psi(\phi^N) = \psi(\phi)\phi(\psi(\phi))...\phi^{N-1}(\psi(\phi)) = y\phi^N(y)^{-1}.$$

Donc y est fixe par ϕ^N et $y \in K(\mathfrak{o}^{nr})$. L'égalité $y\phi(y)^{-1} = \psi(\phi)$ entraîne que ψ est un bord. $\square$

On utilisera diverses variantes de ce lemme. Soit $R \subset K(\mathfrak{o}^{nr})$ un sous-groupe. Supposons R invariant par l'action de Γ^{nr} et supposons que tout élément de R est d'ordre fini. Alors :

(1) pour tout $x \in R$, il existe $y \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $y\phi(y)^{-1} = x$.

Il suffit de prouver qu'il existe un cocycle $\psi : \Gamma^{nr} \to K(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $\psi(\phi) = x$. Il suffit pour cela qu'il existe un entier $N > 0$ tel que $x\phi(x)...\phi^{N-1}(x) = 1$. Puisque $x \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, on peut choisir $r \geq 1$ tel que $\phi^r(x) = x$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a l'égalité :

$$x\phi(x)...\phi^{rn-1}(x) = (x\phi(x)...\phi^{r-1}(x))^n.$$

Les hypothèses entraînent que $x\phi(x)...\phi^{r-1}(x)$ appartient à R, donc est d'ordre fini. Notons n son ordre et posons $N = rn$. Alors $x\phi(x)...\phi^{N-1}(x) = 1$, ce qui prouve (1).

On conserve les mêmes hypothèses sur R. Soit $x \in R$. Notons $\mathbf{x}$ son image dans $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{y} \in \mathbf{K}$ tel que $\mathbf{y}\phi(\mathbf{y})^{-1} = \mathbf{x}$. Alors :

(2) il existe $y \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ dont l'image dans $\mathbf{K}$ soit $\mathbf{y}$ et tel que $y\phi(y)^{-1} = x$.

En effet, choisissons un $y_0 \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ relevant $\mathbf{y}$. Considérons l'élément $x_1 = \phi(y_0)xy_0^{-1}$. On montre comme ci-dessus qu'il existe un cocycle $\psi : \Gamma^{nr} \to K^1(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $\psi(\phi) = x_1$. Une variante du lemme nous dit que $H^1(\Gamma^{nr}, K^1(\mathfrak{o}^{nr})) = \{0\}$. Cela prouve (2).

4.3 Exponentielle, éléments topologiquement unipotents, éléments topologiquement nilpotents

Soit M un groupe réductif connexe défini sur F, que l'on ne suppose plus non ramifié. Introduisons l'immeuble Imm de M sur F et un élément $a \in Imm$ dans l'intérieur d'une alcôve, posons $J = K_a$. Alors $J(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe d'Iwahori de $M(F)$. Notons $dim(M)$ la dimension de M (en tant que variété algébrique).

Soit $x \in M(F)$. On dit que x est topologiquement unipotent si $lim_{n\to\infty}x^{p^n} = 1$. On a :

(1) supposons $p > dim(M)+1$; alors x est topologiquement unipotent si et seulement s'il est conjugué par un élément de $M(F)$ à un élément de $J^+(\mathfrak{o})$.

Puisque $J^+(\mathfrak{o})$ est pro-p-unipotent, tout élément de ce groupe est topologiquement unipotent. Inversement, soit x topologiquement unipotent. Alors le sous-groupe fermé engendré par x est compact. Il est contenu dans un sous-groupe compact maximal de $M(F)$. Quitte à conjuguer x, on peut supposer qu'il existe un point b dans l'adhérence de l'alcôve contenant a tel que x appartienne au stabilisateur de b dans $M(F)$. Notons $S_b(\mathfrak{o})$ ce stabilisateur. L'ordre du quotient $S_b(\mathfrak{o})/K_b(\mathfrak{o})$ est calculable, cf. [T] 3.5.3. L'hypothèse $p > dim(M)+1$ entraîne qu'il est premier à p. Un élément topologiquement unipotent de $S_b(\mathfrak{o})$ appartient donc nécessairement à $K_b(\mathfrak{o})$, en particulier $x \in K_b(\mathfrak{o})$. Notons $\mathbf{x}$ l'image de x dans $\mathbf{K}_b(\mathbb{F}_q)$. L'élément $\mathbf{x}$ est unipotent, donc contenu dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel. Mais l'image réciproque dans $K_b(\mathfrak{o})$ d'un tel sous-groupe est conjuguée à $J^+(\mathfrak{o})$ par un élément de $K_b(\mathfrak{o})$. D'où (1).

On note $M(F)_{tu}$ le sous-ensemble des éléments topologiquement unipotents de $M(F)$.

Par analogie, on dit qu'un élément $X \in \mathfrak{m}(F)$ est topologiquement nilpotent s'il est conjugué par un élément de $M(F)$ à un élément de $\mathfrak{j}^+(\mathfrak{o})$. On note $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ le sous-ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{m}(F)$.

Soit T un sous-tore maximal de M défini sur F. Notons val_F la valuation usuelle de F, à valeurs dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, que l'on prolonge en une valuation sur $\bar{F}$, à valeurs dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Soit $x \in M(F)$, resp. $X \in \mathfrak{m}(F)$. Fixons un élément $x' \in T$ qui soit conjugué à la partie semi-simple de x par un élément de M. De même, fixons un élément $X' \in \mathfrak{t}$ qui soit conjugué à la partie semi-simple de X par un élément de M. On a :

(2) supposons $p > dim(M)+1$; alors x est topologiquement unipotent si et seulement si $val_F(x^*(x'-1)) > 0$ pour tout $x^* \in X^*(T)$; X est topologiquement nilpotent si et seulement si $val_F(x^*(X)) > 0$ pour tout $x^* \in X^*(T)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\psi(n)$ le plus grand entier $d \geq 1$ tel que $\phi(d) \leq n$, où ϕ est ici la fonction d'Euler. Notons $rang(M)$ le rang de M, c'est-à-dire la dimension d'un sous-tore maximal. Posons :

$$N(M) = sup(\psi(rang(M)), dim(M)).$$

Enfin, notons e_F l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$. On a :

(3) supposons $p > N(M)e_F+1$; alors l'exponentielle est définie sur l'ensemble $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ et définit un homéomorphisme de cet ensemble sur $M(F)_{tu}$. Si $b \in Imm$, l'exponentielle se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o})$ sur $K_b^+(\mathfrak{o})$.

C'est bien connu, mais nous n'avons pas trouvé de référence. Nous donnerons une démonstration dans l'appendice B.

4.4 Les hypothèses dans la situation non ramifiée

On considère les mêmes données G, θ, ψ, $\boldsymbol{\omega}$, $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$, $(H_1, \xi_1, \hat{\xi}_1)$ des paragraphes 1.2, 1.3 et 1.4. On leur impose dans les paragraphes 4 et 5 les hypothèses supplémentaires (H1) à (H7) ci-dessous.

(H1) $p > N(G)e_F + 1$.

Cette condition implique facilement que l'ordre de θ^* est premier à p.

(H2) G^* est non ramifié, $G = G^*$ et ψ est l'identité.

On a fixé en 1.2 une paire de Borel et un épinglage de G^*. On leur associe comme dans le paragraphe 4.1 un schéma en groupes K.

(H3) $g_\theta \in K_{SC}(\mathfrak{o}^{nr})$.

(H4) $\boldsymbol{\omega}$ est non ramifié, c'est-à-dire que le cocycle $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}} \in H^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ associé à $\boldsymbol{\omega}$ provient par inflation d'un élément de $H^1(W^{nr}, Z_{\hat{G}})$.

(H5) H est non ramifié et $\hat{\xi}(\mathcal{H})$ contient le sous-groupe $\hat{H} \rtimes I_F$ de ${}^LG$.

(H6) H_1 est non ramifié et $\hat{\xi}_1(\mathcal{H})$ contient le sous-groupe $\hat{H} \rtimes I_F$ de ${}^LH_1$.

On a fixé en 1.3 une paire de Borel de H définie sur F. On fixe aussi un épinglage relatif à cette paire, défini sur F. On associe à ces données un schéma en groupes K_H.

L'image réciproque dans H_1 de la paire de Borel est une paire de Borel de H_1 définie sur F. Les algèbres de Lie des groupes dérivés de H et H_1 étant les mêmes, l'épinglage de H est aussi un épinglage de H_1. On associe à ces données un schéma en groupes K_1. On verra ci-dessous que les hypothèses précédentes entraînent que $H_z(F) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ n'est pas vide. On a besoin de la condition analogue pour H_1 :

(H7) l'ensemble $H_{1,z}(F) \cap K_1(\mathfrak{o}^{nr})$ n'est pas vide.

Tirons quelques conséquences de ces hypothèses.Puisque ψ est l'identité, on ne perd rien à supposer que la fonction $\sigma \mapsto u(\sigma)$ est triviale. Par construction et d'après (H3), la fonction $z : \Gamma_F \to Z_{G^*_{SC}}$ est un cocycle, qui se factorise en un cocycle défini sur Γ^{nr}. Dorénavant, on identifiera G à G^* et, pour simplifier, on ne conservera que la notation G (à l'exception du paragraphe suivant). On identifiera $\tilde{G}$ à l'ensemble $G\theta^*$ muni de l'action de Γ_F pour laquelle σ agit par $x \mapsto z(\sigma)^{-1}\sigma(x)$. On pose :

$$\tilde{K}(\mathfrak{o}) = \tilde{G}(F) \cap K(\mathfrak{o}^{nr})\theta^* = K(\mathfrak{o})\theta.$$

On sait calculer le nombre d'éléments de $Z_{G_{SC}}$ en fonction du système de racines Σ : on décompose G_{SC} en produit de groupes quasi-simples (sur $\bar{F}$) ; pour un groupe quasi-simple et simplement connexe, le nombre d'éléments du centre est égal à celui du quotient du réseau des poids par celui engendré par les racines. En consultant les tables de [B], l'hypothèse $p > dim(G) + 1$ entraîne que le nombre d'éléments de $Z_{G_{SC}}$ est premier à p. Donc :

$$(1) \qquad Z_{G_{SC}} = Z_{G_{SC},p'} \subset T^*_{sc}(\mathfrak{o}^{nr})_{p'} \subset K_{SC}(\mathfrak{o}^{nr}).$$

Puisque l'automorphisme θ^* préserve l'épinglage, il normalise K. Le commutant connexe G_{θ^*} de θ^* est lui aussi non ramifié. On peut construire un épinglage de G_{θ^*}, relatif à la paire $(B^* \cap G_{\theta^*}, T_{\theta^*})$, formé de sommes (avec coefficients 1) d'éléments de l'épinglage de G, cf. [KS] 1.3. On définit alors un schéma en groupes K_{θ^*}. Il est clair que $K_{\theta^*}(\mathfrak{o}^{nr}) = K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap G_{\theta^*}(F^{nr})$. D'autre part, l'automorphisme θ^* se descend en un automorphisme de la fibre spéciale $\mathbf{K}$, noté encore θ^*. La fibre spéciale de K_{θ^*} n'est autre que la composante neutre du commutant de θ^* dans $\mathbf{K}$ (la notation $\mathbf{K}_{\theta^*}$ sera donc sans ambiguïté).

Le cocycle z_H se factorise en un cocycle défini sur Γ^{nr}. Il prend ses valeurs dans l'image dans T_H de $Z_{G_{SC}}$, qui est contenue dans $T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. En appliquant par exemple 4.2(1), il existe $h \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $z_H(\sigma) = h^{-1}\sigma(h)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. A fortiori, $H_z(F) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ n'est pas vide. L'hypothèse (H7) entraîne en sens inverse que le cocycle z_{H_1} se factorise en un cocycle défini sur Γ^{nr} et qu'il prend ses valeurs dans $K_1(\mathfrak{o}^{nr})$. On pose :

$$K_{H,z}(\mathfrak{o}) = H_z(F) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr}),$$

$$K_{1,z}(\mathfrak{o}) = H_{1,z}(F) \cap K_1(\mathfrak{o}^{nr}).$$

Ces sous-ensembles sont des espaces principaux homogènes sous $K_H(\mathfrak{o})$, resp. $K_1(\mathfrak{o})$.

4.5 Légitimité des hypothèses

Considérons des données G, θ, ψ, $\boldsymbol{\omega}$, $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$, $(H_1, \xi_1, \hat{\xi}_1)$, définies pour ce paragraphe sur un corps de nombres k (cf. [KS] pour une définition précise dans ce cas). On suppose que $H_z(k)$ n'est pas vide (sinon, les données n'ont aucun intérêt). Pour toute place v de k, ces données fournissent des données définies sur le corps complété k_v, que l'on note avec un indice v : G_v, θ_v etc... On va montrer que pour presque toute place v, ces données locales sont isomorphes à des données qui vérifient les hypothèses du paragraphe précédent, le corps F étant remplacé par k_v. On utilise ci-dessous des notations similaires à celles que l'on a introduites dans la situation locale.

L' hypothèse (H1) est vérifiée pour presque tout v. L'hypothèse (H2) l'est aussi, à isomorphisme près. L'élément g_θ appartient à $G^*(\bar{k})$. Tout élément de ce groupe appartient à $G^*(k_v^{nr})$ et même à un sous-groupe hyperspécial $K(\mathfrak{o}_v^{nr}) \subset G^*(k_v^{nr})$ pour presque tout v. Tous les sous-groupes hyperspéciaux étant conjugués par le groupe adjoint, on peut supposer à isomorphisme près que le groupe K ci-dessus est celui que l'on a défini, d'où (H3). Le cocycle $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$ appartient à $H^1(W_k, Z_{\hat{G}})$ et tout élément de ce groupe est non ramifié pour presque tout v, d'où (H4). Le groupe H est non ramifié pour presque tout v. Par hypothèse, l'extension $\mathcal{H}$ est scindée. Fixons un homomorphisme continu $c : W_k \to \mathcal{H}$ section de la projection de $\mathcal{H}$ sur W_k. Fixons une extension galoisienne finie k' de k telle que $\Gamma_{k'}$ agisse trivialement sur $\hat{G}$. Définissons $d : W_{k'} \to \hat{G}$ par $\hat{\xi} \circ c(w) = (d(w), w)$ pour tout $w \in W_{k'}$. Alors d est un homomorphisme continu. Fixons un voisinage de l'unité V dans $\hat{G}$ qui ne contienne pas de sous-groupe non trivial, et un voisinage de l'unité U dans $W_{k'}$ tel que $d(U) \subset V$. Pour presque tout v, k' est non ramifiée en v. Si on choisit une place de k' au-dessus de v, que l'on note encore v, on a l'égalité des groupes d'inertie $I_{k'_v} = I_{k_v}$. Par définition de la topologie de $W_{k'}$, on a $I_{k'_v} \subset U$ pour presque tout v. Pour une telle place, $d(I_{k'_v})$ est un sous-groupe de V, donc égal à 1. Alors $\hat{\xi}_v(\mathcal{H}_v)$ contient le sous-groupe $\{1\} \times I_{k_v}$ de ${}^LG_v$. L'hypothèse (H5) en résulte pour presque tout v. De même pour l'hypothèse (H6). Puisqu'on a supposé $H_z(k)$ non vide, $H_{1,z}(k)$ ne l'est pas non plus par construction. Fixons $h_1 \in H_{1,z}(k)$. On a $h_1 \in H_1(\bar{k})$. Le même raisonnement que l'on a fait pour traiter l'hypothèse (H3) assure qu'à isomorphisme près, on a $h_1 \in K_1(\mathfrak{o}_v^{nr})$ pour presque tout v. D'où (H7).

Remarque. Il ne serait pas légitime de supposer $g_\theta \in G^*(F)$ car dans une situation globale, elle n'est pas forcément vérifiée pour presque tout v : considérer un cas où $G = G^*$ et $\theta = Int(g_\theta) \circ \theta^*$, avec $g_\theta \in G^*_{AD}(k)$, mais g_θ n'appartient pas à l'image de $G^*(k)$ dans ce groupe adjoint.

4.6 Normalisation des facteurs de transfert

Soient $\gamma \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \delta) \in \mathbf{D}(\gamma)$. On dit que D est non ramifié si $h \in K_{H,SC}(\mathfrak{o}^{nr})$, $g_0 \in K_{\theta^*,SC}(\mathfrak{o}^{nr})$, $g_1 \in K_{SC}(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\delta \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$. Si D est non ramifié, les tores $T^\flat$, T_0, T et $T^\natural$ le sont aussi : sur F^{nr}, ils sont isomorphes respectivement à T_H, T^*, T^*, $T^*_{\theta^*}$. Puisque $\nu_D\theta^* = Int(g_0g_1)(\delta)$, l'élément ν_D appartient à $T^* \cap K(\mathfrak{o}^{nr}) = T^*(\mathfrak{o}^{nr})$. Cela entraîne que, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $N(\alpha)(\nu_D) \in F^{nr}$. A fortiori, pour $u \in \{\pm 1\}$, $val_F(N(\alpha)(\nu_D) - u) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. En supposant D non ramifié, on dit que D est pair si, pour tout $\alpha \in \Sigma$ et tout $u \in \{\pm 1\}$, $val_F(N(\alpha)(\nu_D) - u) \in 2\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Notons $\mathcal{D}_{1,nr}$ le sous-ensemble des couples $(\gamma_1, \delta) \in \mathcal{D}_1$ tels que :

- $\gamma_1 \in K_{1,z}(\mathfrak{o})$;

- en notant $\gamma \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ l'image de γ_1 dans $H_z(F)$, il existe un diagramme $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \delta) \in \mathbf{D}(\gamma)$ qui est non ramifié et pair.

Rappelons que le facteur de transfert Δ défini par Kottwitz et Shelstad est produit de différents termes. En particulier, pour $(\gamma_1, \delta) \in \mathcal{D}_1$, on définit le terme $\Delta_{IV}(\gamma_1, \delta)$, qui est un produit simple de valeurs absolues ([KS] 4.5).

Lemme. *(i) L'ensemble $\mathcal{D}_{1,nr}$ n'est pas vide.*

(ii) Soient (γ_1,δ), $(\bar{\gamma}_1,\bar{\delta})$ deux éléments de $\mathcal{D}_{1,nr}$. Alors on a l'égalité :

$$\Delta(\gamma_1,\delta;\bar{\gamma}_1,\bar{\delta}) = \Delta_{IV}(\gamma_1,\delta)\Delta_{IV}(\bar{\gamma}_1,\bar{\delta})^{-1}.$$

Nous démontrerons ce lemme dans [W2]. Grâce à lui, on peut normaliser le facteur de transfert $\Delta : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que $\Delta(\gamma_1,\delta) = \Delta_{IV}(\gamma_1,\delta)$ pour tout $(\gamma_1,\delta) \in \mathcal{D}_{1,nr}$. C'est ce facteur que nous utiliserons désormais.

Remarque. Il serait plus simple et plus naturel d'imposer aux diagrammes la condition $val_F(N(\alpha)(\nu_D)-u) \in \{0,\infty\}$ au lieu de $val_F(N(\alpha)(\nu_D)-u) \in 2\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$. La normalisation serait alors $\Delta(\gamma_1,\delta) = 1$ pour les couples vérifiant cette condition modifiée. Mais, pour démontrer l'analogue du (i) du lemme, c'est-à-dire l'existence de couples vérifiant cette condition modifiée, il faudrait imposer à p des conditions plus fortes que la simple condition $p > N(G)e_F + 1$.

4.7 Normalisation des facteurs de transfert, cas des algèbres de Lie

Considérons la situation de 1.6. Supposons G' et H' non ramifiés et fixons un sous-groupe compact hyperspécial de $G'(F)$, dont on déduit un schéma en groupes K'. Pour $X \in \mathfrak{k}'(\mathfrak{o}^{nr})$, on dit que X est de réduction régulière si son image $\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathfrak{k}}'$ est semi-simple régulière. Notons $\mathcal{D}'_{nr}$ le sous-ensemble des $(Y,X) \in \mathcal{D}'$ tels que $X \in \mathfrak{k}'(\mathfrak{o})$ et X est de réduction régulière.

Lemme. *(i) L'ensemble $\mathcal{D}'_{nr}$ n'est pas vide.*

(ii) Soient (Y,X), $(\bar{Y},\bar{X})$ deux éléments de $\mathcal{D}'_{nr}$. Alors on a l'égalité :

$$\Delta'(Y,X;\bar{Y},\bar{X}) = 1.$$

Nous démontrerons ce lemme dans [W2]. Grâce à lui, on peut normaliser le facteur de transfert $\Delta' : \mathcal{D}' \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que $\Delta'(Y,X) = 1$ pour tout $(Y,X) \in \mathcal{D}'_{nr}$.

4.8 Enoncé du lemme fondamental

On a défini en 4.4 le sous-ensemble $\tilde{K}(\mathfrak{o})$ de $\tilde{G}(F)$. On note $f_{\tilde{K}}$ sa fonction caractéristique.

On a défini en 4.4 le sous-ensemble $K_{1,z}(\mathfrak{o})$ de $H_{1,z}(F)$. L'intersection $Z_1(F)\cap K_{1,z}(\mathfrak{o})$ est le sous-groupe compact $Z_1(\mathfrak{o})$, cf. 4.1. Les hypothèses (H5) et (H6) entraînent que le caractère λ_1 défini en 1.4 est non ramifié. Sa restriction à $Z_1(\mathfrak{o})$ est donc triviale, cf. 4.1(1). On définit une fonction f_{K_1,λ_1} sur $H_{1,z}(F)$ par :

$$f_{K_{1,z},\lambda_1}(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \notin Z_1(F)K_{1,z}(\mathfrak{o}), \\ \lambda_1(z)^{-1}, & si\ x = zk,\ avec\ z \in Z_1(F),\ k \in K_{1,z}(\mathfrak{o}). \end{cases}$$

Cette fonction appartient à $C_1^\infty(H_{1,z}(F))$.

On munit $G(F)$ et $H(F)$ des mesures de Haar non ramifiées.

Conjecture. *La fonction $f_{K_{1,z},\lambda_1}$ est un transfert de $f_{\tilde{K}}$.*

4.9 Enoncé du lemme fondamental pour les algèbres de Lie

Considérons la situation de 1.6. On suppose G' et H' non ramifiés. On fixe des sous-groupes compacts hyperspéciaux de $G'(F)$ et $H'(F)$, dont on déduit des schémas en groupes K' et $K_{H'}$. On note $f_{\mathfrak{k}'}$, resp. $f_{\mathfrak{k}_{H'}}$, la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}'(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{g}'(F)$, resp. $\mathfrak{k}_{H'}(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{h}'(F)$. On normalise les facteurs de transfert comme en 4.7 et on munit $G'(F)$ et $H'(F)$ des mesures de Haar non ramifiées.

Conjecture. *La fonction $f_{\mathfrak{k}_{H'}}$ est un transfert de $f_{\mathfrak{k}'}$.*

4.10 Enoncé du lemme fondamental non standard

Considérons la situation de 1.7. On impose les deux hypothèses suivantes :

- G_1 et G_2 sont non ramifiés ;

- les fonctions b et $\check{b}$ intervenant en 1.7(1) prennent leurs valeurs dans le groupe $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ des rationnels de valuation p-adique nulle.

Pour $i = 1, 2$, on fixe un sous-groupe compact hyperspécial de $G_i(F)$, dont on déduit un schéma en groupes K_i. On note $f_{\mathfrak{k}_i}$ la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}_i(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{g}_i(F)$. On munit $G_i(F)$ de la mesure de Haar non ramifiée.

Conjecture. *La fonction $f_{\mathfrak{k}_1}$ est un transfert de $f_{\mathfrak{k}_2}$.*

4.11 Le deuxième théorème

Théorème. *Considérons toutes les données $(\eta, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}}, j_*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(a) η est un élément semi-simple de $\tilde{K}(\mathfrak{o})$ et ϵ est un élément semi-simple de $K_{H,z}(\mathfrak{o})$;

(b) ϵ est d'ordre fini premier à p dans $H(F^{nr})$;

(c) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique de $G_{\eta,SC}$; $\bar{H}$ et $G_{\eta,SC}$ sont non ramifiés ;

(d) le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ vérifie les hypothèses "non standard" du paragraphe 1.7 et les deux hypothèses de non ramification du paragraphe 4.10.

Pour chacune de ces données, on suppose que :

(e) le lemme fondamental pour les algèbres de Lie du paragraphe 4.9 est vérifié pour le couple $(\mathfrak{g}_{\eta,SC}, \bar{\mathfrak{h}})$;

(f) le lemme fondamental non standard du paragraphe 4.10 est vérifié pour le couple $(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}, \bar{\mathfrak{h}}_{SC})$.

Alors le lemme fondamental du paragraphe 4.8 est vérifié pour le triplet $(\tilde{G}, \theta, \boldsymbol{\omega})$ et sa donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.

On démontrera ce théorème en V.12. Encore une fois, la démonstration est constructive et on peut préciser les données qui peuvent effectivement intervenir. Les précisions que l'on peut apporter s'énoncent exactement de la même façon qu'en 1.8 (sauf que le (e) du théorème 1.8 devient le (f) du théorème ci-dessus).

4.12 Le cas du changement de base

Comme en 1.9, supposons que $G = Res_{E/F}(G_0)$, où E est une extension galoisienne finie cyclique de F. On suppose de plus G_0 et E non ramifiés. Le théorème du paragraphe précédent se simplifie pour les mêmes raisons qu'en 1.9. On obtient :

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, considérons toutes les données* $(\eta_0, \epsilon, \bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) $\eta_0 \in G_0(F)_{p'}$ *et* $\epsilon \in H(F)_{p'}$ *;*

(b) G_{0,η_0} *et* H_ϵ *sont non ramifiés;*

(c) $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ *est une donnée endoscopique de* G_{0,η_0} *et* $\bar{H} = H_\epsilon$.

Pour chacune de ces données, on suppose vérifié le lemme fondamental pour les algèbres de Lie du paragraphe 4.9 pour le couple $(\mathfrak{g}_{0,\eta_0}, \bar{\mathfrak{h}})$. *Alors le lemme fondamental du paragraphe 4.8 est vérifié pour le triplet* $(\tilde{G}, \theta, 1)$ *et sa donnée endoscopique* $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.

Dans le cas particulier où $H = G_0$ est le groupe endoscopique principal, on a nécessairement $\bar{H} = G_{0,\eta_0}$ et le lemme fondamental pour le couple $(\mathfrak{g}_{0,\eta_0}, \bar{\mathfrak{h}})$ est tautologique. On retrouve le résultat de [Ko3] corollaire du paragraphe 1. Dans le cas où $G_0 = SL(n)$ ou $G_0 = U(n)$, les lemmes fondamentaux nécessaires sont connus, grâce à [LN] dans le cas unitaire. On obtient :

Corollaire. *Dans la situation ci-dessus, supposons de plus* $G_0 = SL(n)$ *ou* $G_0 = U(n)$. *Alors le lemme fondamental du paragraphe 4.8 est vérifié pour le triplet* $(\tilde{G}, \theta, 1)$ *et toute donnée endoscopique* $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$.

5 Cas non ramifié : les preuves

5.1 Elimination de H_1

Soit $\phi \in W_F$ un élément de Frobenius. Pour $w \in W_F$, on note $val_F(w)$ l'entier relatif tel que l'image de w dans W^{nr} soit égale à celle de $\phi^{val_F(w)}$. Choisissons un élément $h_\phi \in \mathcal{H}$ d'image ϕ dans W_F et tel que $Int(h_\phi)$ agisse comme ϕ dans $\hat{H}$. En utilisant l'hypothèse (H5) de 4.4, on définit une application :

$$\begin{array}{rccc} c: & W_F & \to & \hat{\xi}(\mathcal{H}) \subset {}^LG \\ & w & \mapsto & \hat{\xi}(h_\phi)^{val_F(w)}(1, \phi^{-val_F(w)}w) \end{array}$$

C'est un homomorphisme continu, section de la projection sur W_F. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} {}^LH & \to & \hat{\xi}(\mathcal{H}) \\ (h,w) & \mapsto & hc(w) \end{array}$$

est un isomorphisme. Mais $\hat{\xi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur son image $\hat{\xi}(\mathcal{H})$ ([KS] paragraphe 2.2). Donc $\mathcal{H}$ est isomorphe à ${}^LH$. Identifions ces deux groupes et considérons désormais $\hat{\xi}$ comme un plongement de ${}^LH$ dans ${}^LG$. Il résulte des hypothèses (H5) et (H6) de 4.4 que $\hat{\xi}_1$ s'écrit sous la forme :

$$\hat{\xi}_1(h,w) = (a_1(w)h, w)$$

pour tout $(h,w)\in {}^LH$, où a_1 est un cocycle non ramifié de W_F dans $Z_{\hat{H}_1}$. Ce cocycle détermine un caractère Λ_1 de $H_1(F)$. En se rappelant la définition de λ_1, on voit que ce dernier n'est autre que la restriction de Λ_1 à $Z_1(F)$. Soit h_1 un élément de $K_{1,z}(\mathfrak{o})$. On définit une fonction $\Lambda_{1,z}$ sur $H_{1,z}(F)$ par $\Lambda_{1,z}(x)=\Lambda_1(xh_1^{-1})$ pour tout $x\in H_{1,z}(F)$. Cela ne dépend pas du choix de h_1.

On peut reprendre toutes les définitions en remplaçant le triplet $(H_1,\xi_1,\hat{\xi}_1)$ par (H,id,id). En particulier, on définit un facteur, que l'on note provisoirement :

$$\Delta_0:\mathcal{D}\to\mathbb{C}^\times,$$

normalisé de la même façon qu'en 4.8. Soit $(\gamma_1,\delta)\in\mathcal{D}_1$. Notons γ l'image de γ_1 dans $H_z(F)$. Nous prouverons dans [W2] l'égalité :

$$(1)\qquad \Delta(\gamma_1,\delta)=\Lambda_{1,z}(\gamma_1)^{-1}\Delta_0(\gamma,\delta).$$

On note $f_{K_{H,z}}$ la fonction caractéristique de $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ dans $H_z(F)$. On pose la même conjecture qu'en 4.8 : la fonction $f_{K_{H,z}}$ est un transfert de $f_{\tilde{K}}$. Le lemme suivant montre que cette conjecture entraîne celle de 4.8.

Lemme. *Soient $\gamma_1\in H_{1,z,\tilde{G}-reg}(F)$ et γ son image dans $H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$. Alors on a les égalités :*

$$SO_{\gamma_1}(f_{K_{1,z},\lambda_1})=\Lambda_{1,z}(\gamma_1)^{-1}SO_\gamma(f_{K_{H,z}}),$$
$$O_{\gamma_1}^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f_K)=\Lambda_{1,z}(\gamma_1)^{-1}O_\gamma^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f_K).$$

Preuve. La deuxième égalité résulte des définitions et de (1).

Parce que le support de $f_{K_{1,z},\lambda_1}$ est $Z_1(F)K_{1,z}(\mathfrak{o})$ et que ce support se projette surjectivement sur le support $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ de $f_{K_{H,z}}$, on vérifie l'égalité :

$$(2)\qquad f_{K_{1,z},\lambda_1}(x_1)=\Lambda_{1,z}(x_1)^{-1}f_{K_{H,z}}(x)$$

pour tout $x_1\in H_{1,z}(F)$, où x est l'image de x_1 dans $H_z(F)$. Montrons que :

(3) la fonction $\Lambda_{1,z}$ est constante sur les classes de conjugaison géométrique dans $H_{1,z}(F)$.

Rappelons que le groupe dérivé de H_1 est simplement connexe par hypothèse, égal à $H_{1,SC}$. Introduisons le tore quotient $D=H_1/H_{1,SC}$. Alors $Z_{\hat{H}_1}$ est le tore dual de D et on peut identifier $Z_{\hat{H}_1}$ à $Hom(X_*(D),\mathbb{C}^\times)$. Puisque $H_{1,SC}$ est simplement connexe, on a $H^1(\Gamma_{F'},H_{1,SC})=\{0\}$ pour toute extension finie F' de F. On en déduit que l'homomorphisme :

$$(4)\qquad H_1(F^{nr})\to D(F^{nr})$$

est surjectif. D'autre part, D est non ramifié et on a un isomorphisme surjectif :

$$D(F^{nr})\to X_*(D)$$

qui annule $D(\mathfrak{o}^{nr})$ et qui, pour $x_*\in X_*(D)$, envoie $x_*(\varpi_F)$ sur x_*. D'où un homomorphisme surjectif :

$$H_1(F^{nr})\to X_*(D).$$

Son noyau contient le groupe $K_1(\mathfrak{o}^{nr})$.Soit $z\in Z_{\hat{H}_1}$ la valeur que prend le cocycle a_1 sur un élément de Frobenius. Il détermine un caractère de $X_*(D)$, donc un caractère de

$H_1(F^{nr})$ via l'homomorphisme précédent. En explicitant les définitions, on voit que $\Lambda_{1,z}$ est la restriction de ce dernier caractère à $H_{1,z}(F) \subset H_1(F^{nr})$. Une classe de conjugaison géométrique dans $H_{1,z}(F)$ s'envoie sur un unique point par l'application (4). L'assertion (3) en résulte.

Notons $\mathcal{C}_1(\gamma_1)$, resp. $\mathcal{C}(\gamma)$, la classe de conjugaison stable de γ_1 dans $H_{1,z}(F)$, resp. de γ dans $H_z(F)$. Montrons que :

(5) la projection de $H_{1,z}(F)$ sur $H_z(F)$ se restreint en une bijection de $\mathcal{C}_1(\gamma_1)$ sur $\mathcal{C}(\gamma)$.

D'après [Ko1], lemme 3.1, les commutants H_γ et H_{γ_1} sont égaux. Introduisons l'ensemble :

$$\mathcal{X}_\gamma = \{x \in H; \forall \sigma \in \Gamma_F, \sigma(x)^{-1}x \in H_\gamma\}.$$

Alors $\mathcal{X}_\gamma/H_\gamma$ s'identifie à la fois à $\mathcal{C}_1(\gamma_1)$ et à $\mathcal{C}(\gamma)$, respectivement par $x \mapsto x\gamma_1x^{-1}$ et $x \mapsto x\gamma x^{-1}$. Puisque $x\gamma_1x^{-1}$ se projette sur $x\gamma x^{-1}$, cela entraîne (5).

On peut considérer $SO_{\gamma_1}(f_{K_{1,z},\lambda_1})$, resp. $SO_\gamma(f_{K_{H,z}})$, comme une intégrale sur $\mathcal{C}_1(\gamma_1)$, resp. $\mathcal{C}(\gamma)$, ces ensembles étant munis de mesures. Ces mesures se correspondent par la bijection précédente : elles se déduisent toutes deux de la même mesure sur $H_\gamma(F)\backslash H(F)$. Grâce à (2) et (3), les fonctions que l'on intègre se correspondent aussi. La première égalité de l'énoncé en résulte. $\square$

Dorénavant, nous supposerons que $(H_1, \xi_1, \hat{\xi}_1) = (H, id, id)$.

5.2 Eléments compacts

Soit M un groupe algébrique linéaire défini sur F, de composante neutre M^0 réductive. Soit $x \in M(F)$. On dit que x est compact si le groupe $x^{\mathbb{Z}} = \{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$ engendré par x est d'adhérence compacte dans $M(F)$. On a la propriété suivante :

(1) soit x un élément compact de $M(F)$; il existe d'uniques éléments $x_{p'}$, $x_{tu} \in M(F)$ tels que $x = x_{p'}x_{tu} = x_{tu}x_{p'}$, $x_{p'} \in M(F)_{p'}$ et $x_{tu} \in M(F)_{tu}$; ces éléments appartiennent à l'adhérence de $x^{\mathbb{Z}}$.

(la notion d'élément topologiquement unipotent se définit comme dans le cas où M est connexe, cf. 4.3). Rappelons la preuve bien connue. On fixe un sous-groupe ouvert $U \subset M^0(F)$ qui soit pro-p-unipotent. Notons X l'adhérence de $x^{\mathbb{Z}}$. C'est un groupe abélien compact. Donc $X/(X \cap U)$ est fini. Notons c le plus grand entier premier à p qui divise le nombre d'éléments de $X/(X \cap U)$. Il existe alors un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $x^{cp^N} \in X \cap U$. Puisque U est pro-p-unipotent, x^{cp^N} est topologiquement unipotent, donc x^c l'est aussi. Pour tout élément topologiquement unipotent y, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & M(F)_{tu} \\ n & \mapsto & y^n \end{array}$$

se prolonge en un homomorphisme continu du complété $\mathbb{Z}_p$ dans $M(F)_{tu}$. Soit c' l'inverse de c dans $\mathbb{Z}_p$. Posons $x_{tu} = (x^c)^{c'}$, $x_{p'} = xx_{tu}^{-1}$. Ces éléments vérifient les propriétés requises. Inversement, si $y_{p'}$ et y_{tu} forment un autre couple vérifiant les mêmes propriétés, on a $y_{p'}^c = x^cy_{tu}^{-c}$, donc $y_{p'}^c \in M(F)_{tu}$. Mais $y_{p'}^c$ est, comme $y_{p'}$, d'ordre fini premier à p, donc $y_{p'}^c = 1$. Donc $y_{tu}^c = x^c$. Alors $y_{tu} = (y_{tu}^c)^{c'} = (x^c)^{c'} = x_{tu}$, puis $y_{p'} = x_{p'}$. $\square$

Notons que la notion d'élément compact et la décomposition ci-dessus sont insensibles à une extension du corps de base. C'est-à-dire que, si F' est une extension finie de F et si $x \in M(F)$, x est compact en tant qu'élément de $M(F)$ si et seulement s'il l'est en tant qu'élément de $M(F')$ et la décomposition (1) est la même que l'on se place dans $M(F)$ ou dans $M(F')$. On a :

(2) soit x un élément compact de $M(F)$, soit $y\in M$, posons $x'=yxy^{-1}$; supposons $x'\in M(F)$; alors x' est compact et on a les égalités $x'_{p'}=yx_{p'}y^{-1}$, $x'_{tu}=yx_{tu}y^{-1}$. Comme on vient de le dire, on peut remplacer F par une extension finie. Cela nous permet de supposer $y\in M(F)$. Dans ce cas, les assertions sont à peu près évidentes.

On a $H_z(F)\subset H(F^{nr})$. En fait, il existe une extension finie et non ramifiée E de F telle que $H_z(F)\subset H(E)$. On dit qu'un élément $x\in H_z(F)$ est compact s'il l'est dans $H(E)$ pour une telle extension E. Soit x un élément compact de $H_z(F)$ et $x=x_{p'}x_{tu}$ sa décomposition dans $H(E)$. Alors :

(3) $x_{p'}$ appartient à $H_z(F)$ et x_{tu} appartient à $H(F)_{tu}$.

En effet, soit $\sigma\in\Gamma_F$. Puisque $x\in H_z(F)$, on a l'égalité $\sigma(x)=z_H(\sigma)x$, d'où $\sigma(x_{p'})\sigma(x_{tu})=z_H(\sigma)x_{p'}x_{tu}$. Parce que $z_H(\sigma)$ est central et d'ordre fini premier à p (cf. 4.4(1)), on a ici deux décompositions du même élément $\sigma(x)$. D'après l'unicité de la décomposition, $\sigma(x_{p'})=z_H(\sigma)x_{p'}$ et $\sigma(x_{tu})=x_{tu}$. D'où (3).

Introduisons le groupe $G^+=G\rtimes\Theta^*$. On a $\tilde{G}(F)\subset G^+(F^{nr})$ et il existe une extension finie et non ramifiée de F telle que $\tilde{G}(F)\subset G^+(E)$. On dit qu'un élément $x\in\tilde{G}(F)$ est compact s'il l'est dans $G^+(E)$. Soit x un élément compact de $\tilde{G}(F)$ et $x=x_{p'}x_{tu}$ sa décomposition dans $G^+(E)$. Alors :

(4) $x_{p'}$ appartient à $\tilde{G}(F)$ et x_{tu} appartient à $G(F)_{tu}$.

Notons $m(\theta^*)$ l'ordre de θ^*. D'après (H1), $m(\theta^*)$ est premier à p. Il en résulte que $G^+(E)_{tu}=G(E)_{tu}$. Donc $x_{tu}\in G(E)$ et $x_{p'}\in G(E)\theta^*$. Soit $\sigma\in\Gamma_F$. Comme ci-dessus, on a l'égalité $\sigma(x_{p'})\sigma(x_{tu})=z(\sigma)x_{p'}x_{tu}$. L'élément $z(\sigma)$ appartient à $Z_{G_{SC}}$ mais n'est pas forcément central dans $G^+(E)$. Toutefois, Θ^* conserve l'ensemble $Z_{G_{SC}}$, donc $(z(\sigma)x_{p'})^{m(\theta^*)}$ appartient à $Z_{G_{SC}}x_{p'}^{m(\theta^*)}$. Tous les éléments de cet ensemble sont d'ordre fini premier à p, donc $z(\sigma)x_{p'}$ l'est aussi. Alors, de nouveau, on a ci-dessus deux décompositions du même élément, et on conclut comme dans la preuve de (3).

On pose $H_z(F)_{p'}=H_z(F)\cap H(F^{nr})_{p'}$, $\tilde{G}(F)_{p'}=\tilde{G}(F)\cap G^+(F^{nr})_{p'}$. Notons $\bar{\mathfrak{o}}$ l'anneau des entiers de $\bar{F}$.

Lemme. *(i) Soit γ un élément semi-simple de $H_z(F)$. Alors γ est compact, resp. $\gamma\in H_z(F)_{p'}$, si et seulement s'il existe un élément $x\in H$ tel que $x\gamma x^{-1}\in T_H(\bar{\mathfrak{o}})$, resp. $x\gamma x^{-1}\in T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$.*

(ii) Soit δ un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$. Alors δ est compact, resp. $\delta\in\tilde{G}(F)_{p'}$, si et seulement s'il existe un élément $x\in G$ tel que $x\delta x^{-1}\in T^*(\bar{\mathfrak{o}})\theta^*$, resp. $x\delta x^{-1}\in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}\theta^*$.

Preuve de (i). Puisque γ est semi-simple, on peut fixer $x\in H$ tel que $x\gamma x^{-1}\in T_H$. Fixons une extension finie F' telle que $H_z(F)\subset H(F')$ et $x\in H(F')$. Si γ est compact, resp. $\gamma\in H_z(F)_{p'}$, alors $x\gamma x^{-1}$ est compact dans $H(F')$, resp. $H(F')_{p'}$. Evidemment un élément de $T_H(F')$ est compact, resp. appartient à $H(F')_{p'}$, si et seulement s'il appartient à $T_H(\mathfrak{o}')$, resp. à $T_H(\mathfrak{o}')_{p'}$, où $\mathfrak{o}'$ est l'anneau des entiers de F'. Si γ est compact, resp. $\gamma\in H_z(F)_{p'}$, $x\gamma x^{-1}$ appartient donc à $T_H(\mathfrak{o}')\subset T_H(\bar{\mathfrak{o}})$, resp. $T_H(\mathfrak{o}')_{p'}\subset T_H(\bar{\mathfrak{o}})_{p'}$. On remarque ensuite que $T_H(\bar{\mathfrak{o}})_{p'}=T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$, car $\bar{\mathfrak{o}}^{\times}_{p'}=\mathfrak{o}^{nr,\times}_{p'}$ (extraire des racines de l'unité d'ordre premier à p ne crée que des extensions non ramifiées). Cela prouve l'assertion "seulement si" de (i). La réciproque est évidente.

Preuve de (ii). Puisque δ est semi-simple, on peut fixer $u\in G$ tel que $u\delta u^{-1}\in T^*\theta^*$. Fixons une extension finie F' telle que $\tilde{G}(F)\subset G^+(F')$, $u\in G(F')$ et T^* soit déployé sur

F'. On peut identifier :

$$T^*(F') = X_*(T^*) \otimes_{\mathbb{Z}} F'^{\times},\ T^*(\mathfrak{o}') = X_*(T^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}'^{\times}.$$

Fixons une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F'. Tout élément de $T^*(F')$ s'écrit de façon unique comme produit $t_1 x_*(\varpi_{F'})$, où $t_1 \in T^*(\mathfrak{o}')$ et $x_* \in X_*(T^*)$. Ecrivons $u\delta u^{-1} = t\theta^*$ et $t = t_1 x_*(\varpi_{F'})$ comme on vient de le dire. On a $u\delta^{m(\theta^*)}u^{-1} = P(\theta^*)(t_1)P(\theta^*)(x_*)(\varpi_{F'})$, où P est le polynôme $P(X) = X^{m(\theta^*)-1} + ... + X + 1$. Remarquons que θ^* conserve $T^*(\mathfrak{o}')$ donc $P(\theta^*)(t_1) \in T^*(\mathfrak{o}')$. Supposons δ compact. Alors $u\delta^{m(\theta^*)}u^{-1}$ l'est aussi dans $G(F')$. Puisque cet élément appartient à $T^*(F')$, il appartient à $T^*(\mathfrak{o}')$. Donc $P(\theta^*)(x_*) = 0$. Définissons le polynôme :

$$Q(X) = X^{m(\theta^*)-2} + 2X^{m(\theta^*)-3} + ... + (m(\theta^*) - 2)X + m(\theta^*) - 1.$$

On a l'égalité :

$$P(X) - (X - 1)Q(X) = m(\theta^*).$$

Posons $y_* = Q(\theta^*)(x_*)$. Alors $m(\theta^*)x_* = (1 - \theta^*)(y_*)$. Fixons une racine $m(\theta^*)$-ième ϖ_0 de $\varpi_{F'}$ dans $\bar{F}$, posons $t_2 = y_*(\varpi_0)$. Alors $x_*(\varpi_{F'}) = (1 - \theta^*)(t_2)$. Posons $x = t_2^{-1}u$. Alors $x\delta x^{-1} = t_1\theta^* \in T^*(\bar{\mathfrak{o}})\theta^*$. Supposons maintenant $\delta \in \tilde{G}(F)_{p'}$. D'après ce que l'on vient de prouver, quitte à modifier u et F', on peut supposer $t \in T^*(\mathfrak{o}')$. Notons $\mathfrak{o}'^{\times}_1 = 1 + \varpi_{F'}\mathfrak{o}'$, posons $T^*(\mathfrak{o}'^{\times}_1) = X_*(T^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}'^{\times}_1$. Tout élément de $T^*(\mathfrak{o}')$ s'écrit de façon unique comme produit t_1t_2, où $t_1 \in T^*(\mathfrak{o}')_{p'}$ et $t_2 \in T^*(\mathfrak{o}'^{\times}_1)$. Ecrivons donc $t = t_1t_2$. Le même argument que ci-dessus montre que $P(\theta^*)(t_2) = 1$. Posons $t_3 = Q(\theta^*)(t_2)$. Alors $t_2^{m(\theta^*)} = (1 - \theta^*)(t_3)$. L'élément t_3 appartient à $T^*(\mathfrak{o}'^{\times}_1)$ qui est un pro-p-groupe. Puisque $m(\theta^*)$ est premier à p, on peut extraire une racine $m(\theta^*)$-ième $t_4 \in T^*(\mathfrak{o}'^{\times}_1)$ de t_3. Alors $t_2^{m(\theta^*)} = ((1 - \theta^*)(t_4))^{m(\theta^*)}$. L'élévation à la puissance $m(\theta^*)$ est injective dans un pro-p-groupe. Donc $t_2 = (1 - \theta^*)(t_4)$. De nouveau, posons $x = t_4^{-1}u$. Alors $x\delta x^{-1} = t_1\theta^* \in T(\mathfrak{o}')_{p'}\theta^*$. Le même argument que dans la preuve de (i) montre que $T(\mathfrak{o}')_{p'} \subset T(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Cela prouve l'assertion "seulement si" de (ii). La réciproque est évidente. □

5.3 Elements d'ordre fini premier à p dans $H_z(F)$

Rappelons que l'on a défini un sous-ensemble $H_\sharp(F) \subset H_z(F)$ en 3.6. On a aussi défini un sous-schéma en groupes K_H^1 en 4.1.

Lemme. *(i) Soient ϵ_1, $\epsilon_2 \in H_z(F)_{p'} \cap K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Supposons que ces deux éléments aient même image dans $\mathbf{K}_H$. Alors il existe $k \in K_H^1(\mathfrak{o})$ tel que $Int(k)(\epsilon_1) = \epsilon_2$.*

(ii) Soit $\epsilon \in H_z(F)_{p'} \cap K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Alors H_ϵ est non ramifié et $H_\epsilon(F) \cap K_H(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$.

(iii) Soient $\epsilon \in H_z(F)_{p'} \cap K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et $x \in H$ tel que $x^{-1}\epsilon x \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et $\sigma(x)x^{-1} \in H_\epsilon$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors $x \in H_\epsilon K_H(\mathfrak{o})$.

(iv) Soit $\epsilon \in H_\sharp(F) \cap H_z(F)_{p'}$. Alors ϵ est stablement conjugué à un élément de $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ si et seulement si H_ϵ est non ramifié.

Preuve de (i). Dans la preuve du lemme 4.2, on a défini le sous-schéma en groupes K_H^n pour tout entier $n \geq 1$. En raisonnant par récurrence, il suffit de prouver l'assertion suivante :

(1) soit n un entier ≥ 1, supposons $\epsilon_1\epsilon_2^{-1} \in K_H^n(\mathfrak{o})$; alors il existe $k \in K_H^n(\mathfrak{o})$ tel que $Int(k)(\epsilon_1)\epsilon_2^{-1} \in K_H^{n+1}(\mathfrak{o})$.

Considérons l'automorphisme $1 - Int(\epsilon_2)$ de $\mathfrak{h}$. Remarquons qu'il est défini sur F car l'image de $H_z(F)$ dans H_{AD} est contenue dans $H_{AD}(F)$. Il agit donc sur $\mathfrak{h}(F)$. Il conserve $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ parce que ϵ_2 appartient à $K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Parce que ϵ_2 est d'ordre fini premier à p, les valeurs propres de $Int(\epsilon_2)$ sont des racines de l'unité d'ordre premier à p. Aucune telle racine différente de 1 n'est congrue à 1 modulo $\varpi_F\mathfrak{o}$. Donc les valeurs propres non nulles de $1 - Int(\epsilon_2)$ sont des unités. Il en résulte que $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ se décompose en somme directe :

$$\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b},$$

où $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$, est l'intersection de $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ et du noyau, resp. de l'image, de $1 - Int(\epsilon_2)$. De plus, $1 - Int(\epsilon_2)$ se restreint en un automorphisme de $\mathfrak{b}$. Remarquons que le quotient $K_H^n(\mathfrak{o})/K_H^{n+1}(\mathfrak{o})$ s'identifie à $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$. Notons $\bar{x}$ l'image de $\epsilon_1\epsilon_2^{-1}$ dans $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ et écrivons $\bar{x} = \bar{x}_a + \bar{x}_b$ conformément à la décomposition ci-dessus. Soit $\bar{y} \in \mathfrak{b}$ tel que $1 - Int(\epsilon_2)(\bar{y}) = -\bar{x}_b$, choisissons $y \in K_H^n(\mathfrak{o})$ dont l'image dans $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ soit $\bar{y}$. Posons $u = Int(y)(\epsilon_1)\epsilon_2^{-1}$. C'est un élément de $K_H^n(\mathfrak{o})$. Un calcul simple montre que son image dans $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ est égale à $\bar{x}_a$. On a l'égalité $Int(y)(\epsilon_1) = u\epsilon_2$. Choisissons un entier e premier à p tel que $\epsilon_1^e = \epsilon_2^e = 1$. Elevons l'égalité précédente à la puissance e. On obtient :

$$uInt(\epsilon_2)(u)...Int(\epsilon_2^{e-1})(u) = 1.$$

Projetons cette égalité dans $\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$. Parce que $\bar{x}_a$ est dans le noyau de $1 - Int(\epsilon_2)$, on obtient l'égalité $e\bar{x}_a = 0$. Puisque e est premier à p, on en déduit $\bar{x}_a = 0$. Alors u appartient à $K_H^{n+1}(\mathfrak{o})$, ce qui prouve (1) et (i).

Preuve de (ii). Notons $k \mapsto \mathbf{k}$ l'application de réduction de $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ dans $\mathbf{K}_H$. L'élément $\boldsymbol{\epsilon}$ est d'ordre premier à p, donc est semi-simple et on peut fixer $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_H$ de sorte que $\boldsymbol{\mu} = Int(\mathbf{k}^{-1})(\boldsymbol{\epsilon})$ appartienne à $\mathbf{T}_H$. Notons $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\epsilon}}$, resp. $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$, la composante neutre du commutant de $\boldsymbol{\epsilon}$, resp. $\boldsymbol{\mu}$, dans $\mathbf{K}_H$. Soit ϕ un élément de Frobenius de Γ_F. On a $\phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{z}_H(\phi)\boldsymbol{\epsilon}$. L'élément $\mathbf{z}_H(\phi)$ est central donc :

$$(1) \qquad Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{z}_H(\phi)\boldsymbol{\mu}.$$

Alors $Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})$ conserve $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$. Le couple $(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{T}_H)$ est une paire de Borel de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$, il existe donc $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ tel que :

$$Int(\mathbf{x})(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{T}_H) = Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{T}_H).$$

En appliquant le théorème de Lang à $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ et au Frobenius tordu $\phi' = Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})$, on peut écrire $\mathbf{x} = \phi'^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{y}$ pour un élément $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$. Alors $Int(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{ky})$ conserve la paire de Borel $(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{T}_H)$. Quitte à remplacer $\mathbf{k}$ par $\mathbf{ky}$, on peut supposer que $Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})$ conserve cette paire. En particulier, cet automorphisme conserve $\mathbf{T}_H$. Or $Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k}) = Int(\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k})) \circ \phi$. Puisque ϕ conserve $\mathbf{T}_H$, $\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k})$ appartient au normalisateur de $\mathbf{T}_H$ dans $\mathbf{K}_H$. Notons simplement $N(\mathbf{T}_H)$ ce normalisateur. Montrons que :

(2) il existe $k \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$, dont l'image dans $\mathbf{K}_H$ soit $\mathbf{k}$, et tel que $k^{-1}\phi(k) \in N_H(T_H)$.

Springer a défini une section $n : \Omega_H \to N_H(T_H)$, cf. [LS1] paragraphe 2.1. Son image engendre un groupe fini conservé par Γ_F. D'après la définition de n et le choix de notre épinglage, ce groupe est contenu dans $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$. Notons R le groupe engendré par l'image de n et par $T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Il est inclus dans $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$, conservé par Γ_F, et s'envoie surjectivement sur $N(\mathbf{T}_H)$. On vérifie que tout élément de R est d'ordre fini. Choisissons un élément $y \in R$ tel que $\mathbf{y} = \mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k})$. Grâce à 4.2(2), il existe $k \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ dont l'image dans $\mathbf{K}_H$ soit $\mathbf{k}$ et tel que $k^{-1}\phi(k) = y$. Cela prouve (2).

Fixons k vérifiant (2) et $\mu \in T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ dont l'image dans $\mathbf{T}_H$ soit $\boldsymbol{\mu}$. Considérons les deux éléments $Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k)(\mu)$ et $z_H(\phi)\mu$. Ce sont deux éléments de $T_H(\mathfrak{o}^{nr})$: pour le premier, cela résulte du choix de k. Ils sont tous deux d'ordre fini premier à p. D'après (1), leurs images dans $\mathbf{T}_H$ sont égales. Puisque l'application de réduction est injective sur $T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$, l'égalité :

$$Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k)(\mu) = z_H(\phi)\mu$$

en résulte. Posons $\epsilon_0 = Int(k)(\mu)$. Cet élément appartient à $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et est d'ordre fini premier à p. L'égalité précédente se traduit par $\phi(\epsilon_0) = z_H(\phi)\epsilon_0$. Donc $\epsilon_0 \in H_z(F)$, et même $\epsilon_0 \in H_z(F)_{p'} \cap K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Enfin, toujours d'après le choix de k, ϵ_0 a même image que ϵ dans $\mathbf{K}_H$. En appliquant le (i) de l'énoncé, les deux éléments ϵ et ϵ_0 sont conjugués par un élément de $K_H^1(\mathfrak{o})$. Alors la conclusion de (ii) est vérifiée pour l'élément ϵ si et seulement si elle l'est pour ϵ_0. On peut donc supposer $\epsilon = \epsilon_0$.

On a déjà dit que l'ensemble des racines Σ_H de T_H dans H s'identifiait à celui des racines de $\mathbf{T}_H$ dans $\mathbf{K}_H$, cf. 4.1. Notons Σ_1 l'ensemble des racines de T_H dans H_μ et $\Sigma_{\boldsymbol{\mu}}$ celui des racines de $\mathbf{T}_H$ dans $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$. L'ensemble Σ_1 est celui des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\mu) = 0$. L'ensemble $\Sigma(\boldsymbol{\mu})$ est celui des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\boldsymbol{\mu}) = 0$. Par définition de l'identification des différents ensembles de racines, $\alpha(\boldsymbol{\mu})$ est la réduction dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\alpha(\mu) \in \mathfrak{o}^{nr}$. Parce que μ est d'ordre fini premier à p, cette réduction est nulle si et seulement si $\alpha(\mu) = 0$. On en déduit l'égalité $\Sigma_1 = \Sigma_{\boldsymbol{\mu}}$. Considérons la paire de Borel $(B_H \cap H_\mu, T_H)$ de H_μ. Elle est évidemment invariante par I_F. Je dis que :

(3) cette paire est conservée par l'automorphisme $Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k)$.

En effet, cet automorphisme conserve T_H d'après le choix de k. Donc l'automorphisme transforme notre paire en une paire (B', T_H). Tout sous-groupe de Borel de H_μ contenant T_H, resp. de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ contenant $\mathbf{T}_H$, détermine un sous-ensemble positif dans Σ_1, resp. $\Sigma_{\boldsymbol{\mu}}$. Le sous-ensemble de $\Sigma_1 = \Sigma_{\boldsymbol{\mu}}$ associé à $B_H \cap H_\mu$ est égal à celui associé à $\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$. Il est clair que le sous-ensemble associé à B' est égal à celui associé à $Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}})$. Or on a supposé que ce dernier sous-groupe de Borel était égal à $\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$. D'où $B' = B_H \cap H_\mu$, ce qui prouve (3).

Si l'on fixe un épinglage de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}$, relatif à la paire de Borel $(\mathbf{B}_H \cap \mathbf{H}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{T}_H)$, conservé par le Frobenius tordu ϕ' (cf. ci-dessus), il est facile de le relever en un épinglage de H_μ, relatif à la paire de Borel $(B_H \cap H_\mu, T_H)$, contenu dans $\mathfrak{h}_\mu(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et conservé par l'automorphisme $Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k)$. Par transport de structure, le couple $(Int(k)(B_H) \cap H_\epsilon, Int(k)(T_H))$ est une paire de Borel de H_ϵ définie sur F. Puisque $Int(k)(T_H)$ est déployé sur F^{nr} (ce tore est isomorphe sur F^{nr} à T_H), H_ϵ est non ramifié. Enfin, l'image par $Int(k)$ de l'épinglage de H_μ contruit ci-dessus est un épinglage de H_ϵ défini sur F. En reprenant les définitions, on voit que $H_\epsilon(F) \cap K_H(\mathfrak{o})$ est le sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$ associé à cet épinglage. Cela prouve (ii).

Preuve de (iii). D'après la preuve de (ii), on peut fixer $k \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\mu \in T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $Int(k)(\mu) = \epsilon$. Posons $\epsilon' = x^{-1}\epsilon x$. Cet élément vérifie les mêmes hypothèses que ϵ et on peut fixer $k' \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\mu' \in T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $\epsilon' = Int(k')(\mu')$. Puisque ϵ et ϵ' sont géométriquement conjugués, μ et μ' le sont aussi. Puisque ces deux derniers éléments appartiennent à T_H, ils sont conjugués par un élément de $N_H(T_H)$. Puisque l'application naturelle de $N_H(T_H) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ dans Ω_H est surjective, ils le sont par un élément de $N_H(T_H) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})$. Quitte à multiplier k' à droite par cet élément, on peut supposer $\mu = \mu'$. On a alors $Int(k^{-1}xk')(\mu) = \mu$, donc $k^{-1}xk' \in H^\mu$. On a les inclusions :

$$H^\mu \subset H_\mu N_H(T_H) \subset H_\mu T_H(N_H(T_H) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})) \subset H_\mu K_H(\mathfrak{o}^{nr}).$$

Donc $k^{-1}xk' \in H_\mu K_H(\mathfrak{o}^{nr})$, puis :

$$x \in kH_\mu k^{-1}kK_H(\mathfrak{o}^{nr})k'^{-1} = H_\epsilon K_H(\mathfrak{o}^{nr}).$$

Ecrivons $x = hy$, avec $h \in H_\epsilon$, $y \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$. Par hypothèse, $\phi(x)x^{-1} \in H_\epsilon$, donc aussi $\phi(y)y^{-1} \in H_\epsilon$, et même $\phi(y)y^{-1} \in H_\epsilon \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr})$. Notons K_ϵ le shéma en groupes associé au sous-groupe hyperspécial $H_\epsilon(F) \cap K_H(\mathfrak{o})$. On a $H_\epsilon \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr}) = K_\epsilon(\mathfrak{o}^{nr})$. On peut appliquer à K_ϵ le lemme 4.2(i) : il existe $u \in K_\epsilon(\mathfrak{O}^{nr})$ tel que $\phi(y)y^{-1} = \phi(u^{-1})u$. Alors $uy \in K_H(\mathfrak{O}^{nr})$ et uy est fixe par ϕ. Donc $uy \in K_H(\mathfrak{o})$, puis $u \in K_\epsilon(\mathfrak{o}^{nr}) \subset H_\epsilon$. Donc $y = u^{-1}uy \in H_\epsilon K_H(\mathfrak{o})$, puis $x = hy \in H_\epsilon K_H(\mathfrak{o})$. Cela prouve (iii).

Preuve de (iv). Supposons que ϵ soit stablement conjugué à un élément $\epsilon' \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$. On a encore $\epsilon' \in H_z(F)_{p'}$, donc $H_{\epsilon'}$ est non ramifié d'après (ii). La conjugaison stable définit un torseur intérieur entre H_ϵ et $H_{\epsilon'}$. Ces deux groupes sont quasi-déployés (le premier par hypothèse, le second puisqu'il est non ramifié). L'existence d'un torseur intérieur entre deux groupes quasi-déployés entraîne que ces deux groupes sont isomorphes. Donc H_ϵ est non ramifié, comme $H_{\epsilon'}$.

Réciproquement, supposons H_ϵ non ramifié, fixons un sous-tore maximal T_ϵ de H_ϵ, défini sur F et déployé sur F^{nr}. Puisque T_ϵ et T_H sont deux tores maximaux de H déployés sur F^{nr}, il existe $y \in H(F^{nr})$ tel que $Int(y)(T_\epsilon) = T_H$. Puisque les deux tores sont définis sur F, on a $\phi(y)y^{-1} \in N_H(T_H)$. On peut choisir $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_H$ tel que $\phi(\mathbf{k}^{-1})\mathbf{k} \in N(\mathbf{T}_H)$ et que les deux éléments $\phi(y)y^{-1}$ et $\phi(\mathbf{k}^{-1})\mathbf{k}$ aient même image dans Ω_H. Comme en (2), on peut ensuite choisir $k \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $\phi(k^{-1})k \in N_H(T_H)$ et tel que cet élément ait même image que $\phi(y)y^{-1}$ dans Ω_H, autrement dit $\phi(k^{-1})k \in \phi(y)y^{-1}T_H$. Posons $x = ky$. Alors $x \in H(F^{nr})$. On a :

$$\phi(x^{-1})x = \phi(y^{-1}k^{-1})ky \in \phi(y^{-1})\phi(y)y^{-1}T_H y = T_\epsilon \subset H_\epsilon.$$

Posons $\epsilon' = x\epsilon x^{-1}$. La relation précédente entraîne que ϵ' appartient à $H_z(F)$ et est stablement conjugué à ϵ. D'autre part, posons $\mu = Int(y)(\epsilon)$. C'est un élément de $(T_H)_{p'} = T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'} \subset K_H(\mathfrak{o}^{nr})$. Donc $\epsilon' = k\mu k^{-1} \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$, puis $\epsilon' \in H_z(F) \cap K_H(\mathfrak{o}^{nr}) = K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Cela prouve que ϵ est stablement conjugué à un élément de cet ensemble. D'où (iv). $\square$

5.4 Descente à l'algèbre de Lie d'une intégrale orbitale stable

Soit $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$. On suppose γ compact et on décompose γ en produit $\gamma = \gamma_{p'}\gamma_{tu}$, cf. 5.2(1). On pose $\epsilon = \gamma_{p'}$. On suppose $\epsilon \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$. D'après le (ii) du lemme précédent, H_ϵ est non ramifié, a fortiori quasi-déployé, c'est-à-dire que $\epsilon \in H_\sharp(F)$. Certainement, l'ordre de H^ϵ/H_ϵ divise celui de Ω_H. L'hypothèse $p > dim(G) + 1$ entraîne que cet ordre est premier à p. Donc $H^\epsilon(F)_{tu} = H_\epsilon(F)_{tu}$ et $\gamma_{tu} \in H_\epsilon(F)_{tu}$. Il existe un unique $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$ tel que $exp(Y) = \gamma_{tu}$. On décompose Y en $Y = Y_{SC} + Y_Z$, avec $Y_{SC} \in \mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et $Y_Z \in \mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$. Ces deux éléments sont encore topologiquement nilpotents.

Toujours d'après le (ii) du lemme précédent, $H_\epsilon(F) \cap K_H(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$, que l'on note $K_\epsilon(\mathfrak{o})$. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{h}_\epsilon(F) \cap \mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$. Alors $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F) \cap \mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ est encore l'algèbre de Lie d'un sous-groupe hyperspécial de $H_{\epsilon,SC}(F)$, que l'on note $K_{\epsilon,SC}(\mathfrak{o})$. On note $f_{\epsilon,SC}$ la fonction caractéristique de ce réseau dans $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$. Le tore $Z^0_{H_\epsilon}$ est non ramifié et est muni d'une structure sur $\mathfrak{o}$. On a l'égalité

$Z^0_{H_\epsilon}(\mathfrak{o})=Z^0_{H_\epsilon}(F)\cap K_H(\mathfrak{o})$. On note $f_{\epsilon,Z}$ la fonction caractéristique du réseau hyperspécial $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$.

On a déjà fixé sur $H(F)$ la mesure de Haar non ramifiée.Les groupes H_ϵ et $Z^0_{H_\epsilon}$ sont non ramifiés et on munit leurs groupes de points $H_\epsilon(F)$ et $Z^0_{H_\epsilon}(F)$ des mesures de Haar non ramifiées. Enfin, posons $T^\flat=H_\gamma$ (ce tore est aussi le commutant de Y dans H_ϵ). Munissons $T^\flat(F)$ d'une mesure de Haar. De même qu'en 3.8, les mesures sur les groupes déterminent des mesures sur les algèbres de Lie et on en déduit des mesures sur $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ et $\mathfrak{t}^\flat_{sc}(F)$, puis, en sens inverse, des mesures sur $H_{\epsilon,SC}(F)$ et $T^\flat_{sc}(F)$. On a :

(1) la mesure sur $H_{\epsilon,SC}(F)$ est non ramifiée.

Considérons par exemple la correspondance entre la mesure sur $H(F)$ et celle sur $\mathfrak{h}(F)$. Parce que l'exponentielle envoie $\varpi_F\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o})$ sur $K^1_H(\mathfrak{o})$, on a $mes(\varpi_F\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o}))=mes(K^1_H(\mathfrak{o}))$. Puisque $mes(K_H(\mathfrak{o}))=1$, on en déduit l'égalité :

$$mes(\mathfrak{k}_H(\mathfrak{o}))=q^{dim(\mathfrak{h})}|\mathbf{K}_H(\mathbb{F}_q)|^{-1},$$

où $dim(\mathfrak{h})$ est la dimension de $\mathfrak{h}$. Inversement, cette relation assure que $mes(K_H(\mathfrak{o}))=1$. Ceci s'applique à tous nos autres groupes. En se rappelant comment sont définies nos mesures, on voit que (1) est équivalent à l'égalité suivante :

$$(2)\qquad q^{dim(\mathfrak{h}_\epsilon)}|\mathbf{K}_\epsilon(\mathbb{F}_q)|^{-1}=q^{dim(\mathfrak{h}_{\epsilon,SC})}|\mathbf{K}_{\epsilon,SC}(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(\mathfrak{z}_{H_\epsilon})}|\mathbf{Z}^0_{H_\epsilon}(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

Les puissances de q se correspondent évidemment. On a une suite exacte :

$$1\to A\to\mathbf{K}_{\epsilon,SC}\times\mathbf{Z}^0_{H_\epsilon}\to\mathbf{K}_\epsilon\to 1,$$

où A est un groupe central fini. Par le théorème de Lang, $H^1(\Gamma^{nr},\mathbf{K}_\epsilon)=\{0\}$. On en déduit une suite exacte :

$$1\to A^{\Gamma^{nr}}\to\mathbf{K}_{\epsilon,SC}(\mathbb{F}_q)\times\mathbf{Z}^0_{H_\epsilon}(\mathbb{F}_q)\to\mathbf{K}_\epsilon(\mathbb{F}_q)\to H^1(\Gamma^{nr},A)\to 0.$$

Mais, si ϕ est l'élément de Frobenius de Γ^{nr}, on a aussi la suite exacte :

$$1\to A^{\Gamma^{nr}}\to A\stackrel{1-\phi}{\to}A\to H^1(\Gamma^{nr},A)\to 0.$$

Ces deux suites entrainent l'égalité des nombres d'éléments des deux groupes $\mathbf{K}_{\epsilon,SC}(\mathbb{F}_q)\times\mathbf{Z}^0_{H_\epsilon}(\mathbb{F}_q)$ et $\mathbf{K}_\epsilon(\mathbb{F}_q)$. Cela prouve (2) et (1).

Lemme. *On a l'égalité :*

$$SO^H_\gamma(f_{K_{H,z}})=f_{\epsilon,Z}(Y_Z)SO^{H_{\epsilon,SC}}_{Y_{SC}}(f_{\epsilon,SC}).$$

Preuve. Fixons un ensemble de représentants $(\gamma_j)_{j\in J}$ des classes de conjugaison par $H(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ. Soit J_0 le sous-ensemble des $j\in J$ tels que la classe de conjugaison par $H(F)$ de γ_j coupe $K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Pour $j\in J_0$, on peut supposer $\gamma_j\in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et on fixe $x_j\in H$ tel que $Int(x_j)(\gamma_j)=\gamma$. On pose $\epsilon_j=Int(x_j)^{-1}(\epsilon)$, $\gamma_{j,tu}=Int(x_j)^{-1}(\gamma_{tu})$. D'après 5.2(2), la décomposition $\gamma_j=\epsilon_j\gamma_{j,tu}$ est la décomposition de γ_j définie en 5.2(1). En particulier $\epsilon_j\in H_z(F)$ et $\gamma_{j,tu}\in H(F)_{tu}$. De plus, ces deux éléments appartiennent à la fermeture du groupe engendré par γ_j. Puisque $\gamma_j\in K_{H,z}(\mathfrak{o})$, ils appartiennent à $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$, donc $\epsilon_j\in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et $\gamma_{j,tu}\in K_H(\mathfrak{o})$. Appliquons le lemme 5.3(iii) : il entraîne que $x_j\in H_\epsilon K_H(\mathfrak{o})$. Quitte à conjuguer γ_j par un élément de $K_H(\mathfrak{o})$, on peut supposer $x_j \in H_\epsilon$, donc $\epsilon_j = \epsilon$. Alors $\gamma_{j,tu} \in K_H(\mathfrak{o}) \cap H_\epsilon(F) = K_\epsilon(\mathfrak{o})$. Posons $Y_j = Int(x_j)^{-1}(Y)$. On a $\gamma_{j,tu} = exp(Y_j)$ et $Y_j \in \mathfrak{k}_\epsilon(\mathfrak{o})_{tn}$. Montrons que :

(2) la famille $(Y_j)_{j\in J_0}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H_\epsilon(F)$ coupant $\mathfrak{k}_\epsilon(\mathfrak{o})$ dans la classe de conjugaison stable de Y.

Soit $Y' \in \mathfrak{k}_\epsilon(\mathfrak{o})$ un élément de cette classe de conjugaison stable. Fixons $y \in H_\epsilon$ tel que $Y' = Int(y)(Y)$. Posons $\gamma' = \epsilon exp(Y')$. On a $\gamma' \in H_z(F)$ et $\gamma' = Int(y)(\gamma)$. Puisque γ est fortement régulier, sa classe de conjugaison stable coïncide avec sa classe de conjugaison géométrique. Les relations précédentes entraînent que γ' est stablement conjugué à γ. On peut donc fixer $j \in J$ et $h \in H(F)$ tels que $\gamma' = Int(h^{-1})(\gamma_j)$. Puisque $Y' \in \mathfrak{k}_\epsilon(\mathfrak{o})$, on a $\gamma' \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$, donc $j \in J_0$. On a les égalités :

$$\gamma = Int(y^{-1})(\gamma') = Int(y^{-1}h^{-1})(\gamma_j) = Int(y^{-1}h^{-1}x_j^{-1})(\gamma).$$

Donc $x_jhy \in T^\flat \subset H_\epsilon$. Puisque x_j et y appartiennent aussi à H_ϵ, on a aussi $h \in H_\epsilon$. Donc $h \in H_\epsilon \cap H(F) = H_\epsilon(F)$. De plus, l'égalité $Int(h)(\gamma') = \gamma_j$ entraîne $Int(h)(Y') = Y_j$. Donc Y' est conjugué par un élément de $H_\epsilon(F)$ à l'un des éléments de la famille $(Y_j)_{j\in J_0}$. D'autre part, deux éléments Y_j, $Y_{j'}$ de cette famille, pour $j \neq j'$, ne peuvent pas être conjugués par un élément de $H_\epsilon(F)$: sinon γ_j et $\gamma_{j'}$ seraient conjugués par le même élément, ce qui contredirait la définition de J. Cela démontre (2).

Les classes de conjugaison des γ_j, pour $j \in J \setminus J_0$, ne contribuent évidemment pas à l'intégrale stable $SO^H_\gamma(f_{K_{H,z}})$. On a donc l'égalité :

$$(3) \qquad SO^H_\gamma(f_{K_{H,z}}) = \sum_{j\in J_0} \int_{T^\flat(F)\backslash H(F)} f_{K_{H,z}}(x^{-1}\gamma_j x)\, dx.$$

Notons f_ϵ la fonction caractéristique du réseau $\mathfrak{k}_\epsilon(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$. Grâce à (2), on a, pour la même raison :

$$(4) \qquad SO^{H_\epsilon}_Y(f_\epsilon) = \sum_{j\in J_0} \int_{T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)} f_\epsilon(x^{-1}Y_j x)\, dx.$$

Fixons $j \in J_0$ et posons :

$$I_j = \int_{T^\flat(F)\backslash H(F)} f_{K_{H,z}}(x^{-1}\gamma_j x)\, dx.$$

Soit $x \in H(F)$ tel que $x^{-1}\gamma_j x \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Alors $x^{-1}\epsilon x \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Grâce au lemme 5.3(iii), x appartient à $H_\epsilon K_H(\mathfrak{o})$. Puisque $x \in H(F)$, on a même $x \in H_\epsilon(F)K_H(\mathfrak{o})$. D'où l'égalité :

$$I_j = \int_{T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)K_H(\mathfrak{o})} f_{K_{H,z}}(x^{-1}\gamma_j x)\, dx.$$

Puisque $f_{K_{H,z}}$ est invariante par conjugaison par $K_H(\mathfrak{o})$, on en déduit :

$$I_j = \sum_{x\in T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)K_H(\mathfrak{o})/K_H(\mathfrak{o})} mes(T^\flat(F)\backslash T^\flat(F)xK_H(\mathfrak{o}))f_{K_{H,z}}(x^{-1}\gamma_j x).$$

L'application naturelle :

$$H_\epsilon(F) \to T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)K_H(\mathfrak{o})/K_H(\mathfrak{o})$$

se quotiente en une bijection :

$$T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)/K_\epsilon(F) \to T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)K_H(\mathfrak{o})/K_H(\mathfrak{o}).$$

Pour $x \in H_\epsilon(F)$, on a les égalités :

$$mes(T^\flat(F)\backslash T^\flat(F)xK_H(\mathfrak{o})) = mes(K_H(\mathfrak{o}))mes(T^\flat(F) \cap xK_H(\mathfrak{o})x^{-1})^{-1}$$

$$= mes(T^\flat(F) \cap xK_H(\mathfrak{o})x^{-1})^{-1} = mes(T^\flat(F) \cap xK_\epsilon(\mathfrak{o})x^{-1})^{-1}$$

$$= mes(K_\epsilon(\mathfrak{o}))mes(T^\flat(F)\backslash xK_\epsilon(\mathfrak{o})x^{-1})^{-1} = mes(T^\flat\backslash T^\flat(F)xK_\epsilon(\mathfrak{o})).$$

Grâce à 4.3(3), on a aussi :

$$f_{K_{H,z}}(x^{-1}\gamma_j x) = f_\epsilon(x^{-1}Y_j x).$$

D'où :

$$I_j = \sum_{x \in T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)/K_\epsilon(\mathfrak{o})} mes(T^\flat(F)\backslash T^\flat(F)xK_\epsilon(\mathfrak{o}))f_\epsilon(x^{-1}Y_j x)$$

$$= \int_{T^\flat(F)\backslash H_\epsilon(F)} f_\epsilon(x^{-1}Y_j x)\, dx.$$

De (3) et (4) se déduit l'égalité :

$$SO^H_\gamma(f_{K_{H,z}}) = SO^{H_\epsilon}_Y(f_\epsilon).$$

Considérons les classes de conjugaison stable $\mathcal{C}$ de Y et $\mathcal{C}_{SC}$ de Y_{SC}. On peut considérer les intégrales orbitales stables $SO^{H_\epsilon}_Y(f_\epsilon)$, resp. $SO^{H_{\epsilon,SC}}_{Y_{SC}}(f_{\epsilon,SC})$, comme des intégrales sur $\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{C}_{SC}$, ces ensembles étant munis de mesures. Comme en 3.10, on montre que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{SC} & \to & \mathcal{C} \\ Y'_{SC} & \mapsto & Y'_{SC} + Y_Z \end{array}$$

est une bijection qui préserve les mesures. De plus, pour $Y'_{SC} \in \mathcal{C}_{SC}$, on a l'égalité :

$$f_\epsilon(Y'_{SC} + Y_Z) = f_{\epsilon,Z}(Y_Z)f_{\epsilon,SC}(Y'_{SC}).$$

On en déduit l'égalité :

$$SO^{H_\epsilon}_Y(f_\epsilon) = f_{\epsilon,Z}(Y_Z)SO^{H_{\epsilon,SC}}_{Y_{SC}}(f_{\epsilon,SC}),$$

ce qui achève la démonstration. □

5.5 Eléments d'ordre fini premier à p dans $\tilde{G}(F)$

On a défini l'ensemble $\tilde{G}(F)_{p'}$ des éléments de $\tilde{G}(F)$ d'ordre fini premier à p dans $G^+(F^{nr})$, cf. 5.2.

Lemme. *Soit $\eta \in \tilde{G}(F)_{p'} \cap \tilde{K}(\mathfrak{o})$. Alors le groupe G_η est non ramifié et $G_\eta(F) \cap K(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$.*

Preuve. Introduisons le groupe $\mathbf{K} \rtimes \Theta^*$ et son sous-ensemble $\mathbf{K}\theta^*$. On définit une application :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(\mathfrak{o}) & \to & \mathbf{K}\theta^* \\ x & \mapsto & \mathbf{x} \end{array}$$

de la façon suivante : à $x = k\theta^*$, avec $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, on associe $\mathbf{x} = \mathbf{k}\theta^*$, où $\mathbf{k}$ est l'image naturelle de k dans $\mathbf{K}$. La propriété suivante se prouve comme le (i) du lemme 5.3 :

(1) soient η_1, η_2 deux éléments de $\tilde{G}(F)_{p'} \cap \tilde{K}(\mathfrak{o})$ tels que $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}_2$; alors il existe $k \in K^1(\mathfrak{o})$ tel que $Int(k)(\eta_1) = \eta_2$.

L'élément $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{K} \rtimes \Theta^*$ est d'ordre fini premier à p. Il est donc semi-simple et on peut fixer $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$ tel que $Int(\mathbf{k})^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{T}^*\theta^*$. Notons $\boldsymbol{\nu}$ l'élément de $\mathbf{T}^*$ tel que $Int(\mathbf{k})^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\nu}\theta^*$. Soit ϕ un élément de Frobenius de Γ_F. On a l'égalité $\phi(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{z}(\phi)\boldsymbol{\eta}$, d'où :

$$(2) \qquad Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})(\boldsymbol{\nu}\theta^*) = \mathbf{z}(\phi)\boldsymbol{\nu}\theta^*.$$

Alors $Int(\mathbf{k}^{-1}) \circ \phi \circ Int(\mathbf{k})$ conserve $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}\theta^*}$. De même que dans la preuve du lemme 5.3(ii), on peut supposer que cet automorphisme conserve la paire de Borel $(\mathbf{B}^* \cap \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}\theta^*}, \mathbf{T}^*_{\theta^*})$ de $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}\theta^*}$. En particulier, $Int(\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k}))$ conserve $\mathbf{T}^*_{\theta^*}$, donc $\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k}) \in N_{\mathbf{K}}(\mathbf{T}^*_{\theta^*})$. Cette relation entraîne que l'élément $\omega \in \Omega$ défini par $\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k})$ appartient en fait à Ω^{Θ^*}. Rappelons que ce dernier groupe est le groupe de Weyl de $\mathbf{K}_{\theta^*}$. En appliquant le théorème de Lang à ce groupe, on peut trouver $\mathbf{k}_1 \in \mathbf{K}_{\theta^*}$ tel que $\mathbf{k}_1^{-1}\phi(\mathbf{k}_1)$ appartienne à $N_{\mathbf{K}_{\theta^*}}(\mathbf{T}^*_{\theta^*})$ et ait pour image ω dans Ω^{Θ^*}. Alors $\mathbf{k}^{-1}\phi(\mathbf{k}) = \mathbf{t}\mathbf{k}_1^{-1}\phi(\mathbf{k}_1)$, avec $\mathbf{t} \in \mathbf{T}^*$. Appliquons le théorème de Lang à $\mathbf{T}^*$ muni de l'action de Frobenius $\omega\phi$: on peut trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{T}^*$ tel que $\mathbf{t} = \mathbf{u}^{-1}\omega\phi(\mathbf{u})$. Alors $\mathbf{k}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{k}_1^{-1}$ est fixe par ϕ, i.e. $\mathbf{k}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{k}_1^{-1} \in \mathbf{K}(\mathbb{F}_q)$. Quitte à remplacer $\mathbf{k}$ par $\mathbf{k}\mathbf{u}^{-1}$ et $\boldsymbol{\nu}$ par $\boldsymbol{\nu}\mathbf{u}\theta^*(\mathbf{u}^{-1})$, on peut supposer $\mathbf{u} = 1$ et $\mathbf{k}\mathbf{k}_1^{-1} \in \mathbf{K}(\mathbb{F}_q)$. Relevons ce terme en un élément $k_2 \in K(\mathfrak{o})$. Comme en 5.3, preuve de la relation (2), on montre que l'on peut trouver $k_1 \in K_{\theta^*}(\mathfrak{o}^{nr})$ dont l'image dans $\mathbf{K}_{\theta^*}$ soit $\mathbf{k}_1$ et qui vérifie la relation $k_1^{-1}\phi(k_1) \in N_{G_{\theta^*}}(T^*_{\theta^*})$. Posons $k = k_2k_1$. On a $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ et l'image de k dans $\mathbf{K}$ est $\mathbf{k}$.

Relevons $\boldsymbol{\nu}$ en un élément $\nu \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Définissons $x \in G$ par $Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k)(\boldsymbol{\nu}\theta^*) = x\theta^*$. Evidemment $x \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ et, grâce à (2), l'image de x dans $\mathbf{K}$ est égale à $\mathbf{z}(\phi)\boldsymbol{\nu}$. Je dis que $x \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. En effet, parce que $k_2 \in K(\mathfrak{o})$, on a $Int(k^{-1}) \circ \phi \circ Int(k) = Int(k_1^{-1}) \circ \phi \circ Int(k_1)$. Parce que $k_1 \in G_{\theta^*}$, on a alors :

$$x = Int(k_1^{-1}) \circ \phi \circ Int(k_1)(\nu) = Int(k_1^{-1}\phi(k_1)) \circ \phi(\nu).$$

Puisque $k_1^{-1}\phi(k_1) \in N_G(T^*)$, cela entraîne bien $x \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Alors x et $z(\phi)\nu$ sont deux éléments de $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ qui ont même image dans $\mathbf{T}^*$. Donc ils sont égaux. Posons $\eta' = Int(k)(\nu\theta^*)$. Evidemment $\eta' \in K(\mathfrak{o}^{nr})\theta^*$ et l'égalité précédente s'écrit $\phi(\eta') = z(\phi)\eta'$. Autrement dit, $\eta' \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$. On a aussi l'égalité $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}$. D'après (1), η et η' sont conjugués par un élément de $K^1(\mathfrak{o})$. L'assertion de l'énoncé pour η est équivalente à la même assertion pour η'. On peut donc supposer que $\eta = \eta'$. Mais on montre comme dans la preuve du lemme 5.3(ii) que la paire de Borel $(Int(k)(B^* \cap G_{\nu\theta^*}), Int(k)(T^*_{\theta^*}))$ de G_η est conservée par ϕ. Cela prouve que G_η est non ramifiée. Et de même que dans la preuve du lemme 5.3(ii), on montre que $G_\eta(F) \cap K(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe hyperspécial en construisant un épinglage auquel ce groupe est associé. □

5.6 Une remarque sur l'ordre d'un groupe de composantes

Le groupe $Z_{G,p'}$ est évidemment conservé par θ^*.

Lemme. *L'homomorphisme naturel :*

$$(T^*_{\theta^*}(\mathfrak{o}^{nr}) \cap Z^{\theta^*}_{G,p'})\backslash Z^{\theta^*}_{G,p'} \to T^*_{\theta^*}\backslash T^{\theta^*}$$

est un isomorphisme.

Preuve. On a les inclusions :

$$(1) \qquad Z_{G,p'} \subset T^*_{p'} = T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'} \subset K(\mathfrak{o}^{nr})_{p'},$$

et l'égalité $T^*_{\theta^*} \cap K(\mathfrak{o}^{nr}) = T^*_{\theta^*}(\mathfrak{o}^{nr})$. L'injectivité de l'application de l'énoncé en résulte.

On a déjà remarqué que le nombre d'éléments de $Z_{G_{SC}}$ était premier à p d'après l'hypothèse $p > dim(G) + 1$. L'ordre du quotient Z_G/Z^0_G divise le nombre précédent et est donc aussi premier à p. Montrons que :

(2) le nombre d'éléments de $(Z^0_G)^{\theta^*}/(Z^0_G)_{\theta^*}$ est premier à p.

Posons $X_* = X_*(Z^0_G)$, $X_{*,\mathbb{Q}} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On peut trouver une base $x_1, ..., x_n$ de X_* sur $\mathbb{Z}$, un entier $m \leq n$ et des entiers $e_1, ..., e_m \geq 1$ de sorte que $e_1x_1, ..., e_mx_m$ soit une base du sous-réseau $(1-\theta^*)(X_*)$. L'automorphisme $1-\theta^*$ se restreint en un automorphisme de $(1-\theta^*)(X_{*,\mathbb{Q}})$, notons d le déterminant de cet automorphisme. C'est un produit de termes $1-\zeta$, où ζ est une racine de l'unité (dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$) d'ordre premier à p, et $\zeta \neq 1$. Donc c'est un entier premier à p. Notons L le réseau engendré par $x_1, ..., x_m$. Il est égal à $X_* \cap (1-\theta^*)(X_{*,\mathbb{Q}})$. Alors d est le nombre d'éléments de $L/(1-\theta^*)(L)$. Mais $(1-\theta^*)(L) \subset (1-\theta^*)(X_*)$ et le nombre d'éléments de $L/(1-\theta^*)(X_*)$ est $e_1...e_m$. Il en résulte que tous les e_i sont premiers à p. Pour tout $i = 1, ..., m$, choisissons $y_i \in X_*$ tel que $(1-\theta^*)(y_i) = e_ix_i$. Alors $y_1, ..., y_m$ est une base d'un supplémentaire de $X^{\Theta^*}_*$ dans X_*. Choisissons une base $y_{m+1}, ..., y_n$ de $X^{\Theta^*}_*$. Alors $y_1, ..., y_n$ est une base de X_*. Soit $z \in (Z^0_G)^{\theta^*}$. Ecrivons $z = \prod_{i=1,...,n} y_i(z_i)$, où $z_i \in \bar{F}^\times$ pour tout i. On a l'égalité $(1-\theta^*)(z) = \prod_{i=1,...,m} x_i(z_i^{e_i}) = 1$. Puisque $(1-\theta^*)(z) = 1$, on a $z_i^{e_i} = 1$ pour tout $i = 1, ..., m$. Choisissons un entier $e \geq 1$, premier à p et multiple de tous les e_i. Alors $z^e = \prod_{i=m+1,...,n} y_i(z_i^e)$ et ce terme appartient à $(Z^0_G)_{\theta^*}$. D'où (2).

Il en résulte que $Z^{\theta^*}_G/(Z^0_G)_{\theta^*}$ est d'ordre premier à p. Notons r cet ordre. Soit $z \in Z^{\theta^*}_G$. Alors $z^r \in (Z^0_G)_{\theta^*}$. Ce dernier groupe est un tore, donc divisible : on peut choisir $z_0 \in (Z^0_G)_{\theta^*}$ tel que $z_0^r = z^r$. Alors $zz_0^{-1} \in Z^{\theta^*}_{G,p'}$. Cela prouve que $Z^{\theta^*}_{G,p'}$ s'envoie surjectivement sur $Z^{\theta^*}_G/(Z^0_G)_{\theta^*}$, a fortiori sur $Z^{\theta^*}_G/(T^*_{\theta^*} \cap Z^{\theta^*}_G)$. Mais on a vu dans la preuve de 3.1(1) que ce groupe s'envoyait surjectivement sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$. D'où la surjectivité de l'application de l'énoncé. □

Une conséquence du lemme et des inclusions (1) est que l'action de Γ_F sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$ se factorise en une action de Γ^{nr}.

Définition. *On note c_{T^*} le nombre d'éléments du groupe des points fixes $(T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*})^{\Gamma^{nr}}$.*

5.7 Classes de conjugaison d'éléments de $\tilde{G}(F)$ d'ordre premier à p

Pour $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on a défini en 3.1 l'ensemble $\mathcal{Y}_\eta$. On note $\mathcal{Y}^K_\eta$ le sous-ensemble des $y \in \mathcal{Y}_\eta$ tels que la classe de conjugaison par $G(F)$ de $y\eta y^{-1}$ coupe $\tilde{K}(\mathfrak{o})$.

Lemme. *Soit $\eta \in \tilde{G}(F)_{p'} \cap \tilde{K}(\mathfrak{o})$. Alors :*

(i) l'ensemble des $x \in G(F)$ tels que $x^{-1}\eta x \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$ est égal à $G_\eta(F)K(\mathfrak{o})$;
(ii) l'image dans $G(F)\backslash\mathcal{Y}_\eta/I_\eta$ de $\mathcal{Y}_\eta^K$ a c_{T^*} éléments ;
(iii) le quotient $I_\eta(F)/G_\eta(F)$ a c_{T^*} éléments.

Preuve de (i). On va d'abord prouver :

(1) soit $x \in G$ tel que $x^{-1}\eta x \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$; alors $x \in G_\eta K(\mathfrak{o}^{nr})$.

On a vu dans la preuve du lemme 5.5 qu'il existait $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\nu \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $\nu\theta^* = Int(k)(\eta)$. Soit x vérifiant l'hypothèse de (1). Il existe de même $k' \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\nu' \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $Int(k')(\nu'\theta^*) = x^{-1}\eta x$. Alors $Int(kxk')(\nu'\theta^*) = \nu\theta^*$. L'automorphisme $Int(kxk')$ envoie $G_{\nu'\theta^*}$ sur $G_{\nu\theta^*}$. Puisque $T^*_{\theta^*}$ est un tore maximal de chacun de ces deux groupes, on peut trouver $u \in G_{\nu\theta^*}$ tel que $Int(ukxk')$ conserve $T^*_{\theta^*}$. Cet automorphisme conserve aussi T^*, puisque T^* est le commutant de $T^*_{\theta^*}$ dans G, et définit un élément $\omega \in \Omega^{\Theta^*}$. Ainsi qu'on l'a déjà fait plusieurs fois, on peut choisir un élément $h \in K_{\theta^*}(\mathfrak{o}^{nr}) \cap N_G(T^*)$ dont l'image dans Ω soit ω^{-1}. Alors $ukxk'h$ appartient à T^* et on a les égalités :

$$Int(ukxk'h)(h^{-1}\nu'h\theta^*) = Int(ukxk'h)(h^{-1}\nu'\theta^*h) = Int(ukxk')(\nu'\theta^*) = \nu\theta^*.$$

Posons $\nu_1 = h^{-1}\nu'h$ et $k_1 = k'h$. On a les relations $\nu_1 \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$, $k_1 \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, $ukxk_1 \in T^*$, $Int(ukxk_1)(\nu_1\theta^*) = \nu\theta^*$. Posons $t_0 = ukxk_1$. Alors $\nu = t_0\theta^*(t_0)^{-1}\nu_1$. Puisque $\nu, \nu_1 \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$, on a aussi $t_0\theta^*(t_0^{-1}) \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Montrons que :

(2) on a l'égalité $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'} \cap (1-\theta^*)(T^*) = (1-\theta^*)(T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'})$.

Soit $t \in T^*$ tel que $t\theta^*(t)^{-1} \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Fixons une extension finie F' de F telle que T^* soit déployé sur F', $t \in T^*(F')$ et $t\theta^*(t)^{-1} \in T^*(\mathfrak{o}')$, où $\mathfrak{o}'$ est l'anneau des entiers de F'. Fixons une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F'. Tout élément de $T^*(F')$ s'écrit de façon unique comme un produit $t_c x_*(\varpi_{F'})$ où $t_c \in T^*(\mathfrak{o}')$ et $x_* \in X_*(T^*)$. Ecrivons ainsi $t = t_c x_*(\varpi_{F'})$. Alors $t\theta^*(t)^{-1} = t_c\theta^*(t_c)^{-1}(1-\theta^*)(x_*)(\varpi_{F'})$. Puisque $t\theta^*(t)^{-1} \in T^*(\mathfrak{o}')$, cette relation entraine $(1-\theta^*)(x_*) = 0$ et $t\theta^*(t)^{-1} = t_c\theta^*(t_c)^{-1}$. Choisissons $t' \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ ayant même image que t_c dans $\mathbf{T}^*$. Alors $t\theta^*(t)^{-1}$ et $t'\theta^*(t')^{-1}$ ont même image dans $\mathbf{T}^*$. Ce sont deux éléments de $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Comme l'application de réduction est injective sur ce groupe, on a l'égalité $t\theta^*(t)^{-1} = t'\theta^*(t')^{-1}$. Cela prouve (2).

Grâce à (2), écrivons $t_0\theta^*(t_0)^{-1} = t_1\theta^*(t_1)^{-1}$, avec $t_1 \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Alors $t_0 \in t_1 T^{*,\theta^*}$ et, grâce au lemme 5.6, $t_0 \in t_1 T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}T^*_{\theta^*} = T^*_{\theta^*}T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Ecrivons donc $t_0 = t_2t_3$, avec $t_2 \in T^*_{\theta^*}$ et $t_3 \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Alors $x = k^{-1}u^{-1}t_2t_3k_1^{-1} = k^{-1}u^{-1}t_2kk^{-1}t_3k_1$. Puisque $T^*_{\theta^*} \subset G_{\nu\theta^*}$, on a $u^{-1}t_2 \in G_{\nu\theta^*}$ et $k^{-1}u^{-1}t_2k \in G_\eta$. On a $k^{-1}t_3k_1 \in K(\mathfrak{o}^{nr})$. L'égalité précedente montre que $x \in G_\eta K(\mathfrak{o}^{nr})$, ce qui prouve (1).

Soit maintenant x vérifiant l'hypothèse de (i). Puisque $x \in G(F)$, la conclusion de (1) se renforce en $x \in G_\eta(F^{nr})K(\mathfrak{o}^{nr})$. Oublions les notations précédentes et écrivons $x = yk$, avec $y \in G_\eta(F^{nr})$ et $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$. Soit ϕ l'élément de Frobenius de Γ^{nr}. Puisque $x \in G(F)$, on a $\phi(x) = x$ et cela entraîne $k\phi(k)^{-1} = y^{-1}\phi(y) \in G_\eta(F^{nr}) \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$. D'après le lemme 5.5, le groupe $K_\eta(\mathfrak{o}) = G_\eta(F) \cap K(\mathfrak{o})$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. On peut lui appliquer le lemme 4.2(i) : il existe $k_1 \in K_\eta(\mathfrak{O}^{nr})$ tel que $k\phi(k)^{-1} = k_1\phi(k_1)^{-1}$. Alors l'élément $k_1^{-1}k$ de $K(\mathfrak{O}^{nr})$ est fixe par ϕ, donc appartient à $K(\mathfrak{o})$. Cela entraîne que $k_1 \in K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}) \subset G_\eta(F^{nr})$. On a $x = yk_1k_1^{-1}k \in G_\eta(F^{nr})K(\mathfrak{o})$. De nouveau, puisque $x \in G(F)$, cela force $x \in G_\eta(F)K(\mathfrak{o})$. Cela prouve (i).

Preuve de (ii). D'après la preuve du lemme 5.5, on peut trouver $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\nu \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $Int(k)(\nu\theta^*) = \eta$ et $Int(k)(T^*_{\theta^*})$ soit un sous-tore défini sur F de G_η. Notons $T^\natural$ ce tore et $T = Int(k)(T^*)$ son commutant dans G. Remarquons que :

(3) les groupes I_η/G_η et $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$ sont isomorphes en tant que groupes munis d'actions de Γ_F ; l'application naturelle :

$$(I_\eta \cap K(\mathfrak{o}^{nr}))/(G_\eta \cap K(\mathfrak{o}^{nr})) \to I_\eta/G_\eta$$

est un isomorphisme.

En effet, $Int(k^{-1})$ se quotiente en un isomorphisme de $T^\eta/T^\natural$ sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$, qui entrelace l'action naturelle de Γ_F sur $T^\eta/T^\natural$ avec l'action sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$ pour laquelle $\sigma \in \Gamma_F$ agit par $Int(k^{-1}\sigma(k)) \circ \sigma$. Mais, d'après la preuve de 3.1(1) (ou le lemme 5.6), $Z_G^{\theta^*}$ s'envoie surjectivement sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$ et $Int(k^{-1}\sigma(k))$ agit trivialement sur $Z_G^{\theta^*}$. Donc les deux groupes $T^\eta/T^\natural$ et $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$ sont isomorphes en tant que groupes munis d'actions de Γ_F. Puisque l'homomorphisme naturel :

$$T^\eta/T^\natural \to I_\eta/G_\eta$$

est un isomorphisme, la première assertion de (3) en résulte. D'après le lemme 5.6, $Z_{G,p'}^{\theta^*}$ s'envoie surjectivement sur $T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*}$. En appliquant $Int(k)$, $Z_{G,p'}^{\theta^*}$ s'envoie aussi surjectivement sur $T^\eta/T^\natural$. Puisque $Z_{G,p'}^{\theta^*} \subset K(\mathfrak{o}^{nr})$, $I_\eta \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$ s'envoie surjectivement sur I_η/G_η. D'où la seconde assertion.

On a l'égalité :

(4) $\mathcal{Y}_\eta^K = G(F)(K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta)I_\eta$.

En effet, soit $y \in \mathcal{Y}_\eta^K$. On choisit $g \in G(F)$ tel que $Int(gy)(\eta) \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$. En appliquant (1) à $y^{-1}g^{-1}$, on voit que y appartient à $G(F)K(\mathfrak{o}^{nr})G_\eta$. Puisque $\mathcal{Y}_\eta$ est invariante à droite par G_η et à gauche par $G(F)$, on a même $y \in G(F)(K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta)G_\eta$. Donc $\mathcal{Y}_\eta^K$ est inclus dans le membre de droite de (4). L'inclusion opposée est évidente.

Définissons une application :

$$\psi : K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta \to I_\eta/G_\eta$$

de la façon suivante : pour $y \in K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta$, $\psi(y)$ est l'image de $\phi(y)^{-1}y$ dans I_η/G_η. Notons $\pi : I_\eta/G_\eta \to (I_\eta/G_\eta)_{\Gamma^{nr}}$ la projection naturelle. Montrons que :

(5) pour y_1, $y_2 \in K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta$, on a l'égalité $\pi \circ \psi(y_1) = \pi \circ \psi(y_2)$ si et seulement si y_1 et y_2 ont même image dans $G(F)\backslash\mathcal{Y}_\eta/I_\eta$.

Supposons que y_1 et y_2 aient même image dans $G(F)\backslash\mathcal{Y}_\eta/I_\eta$. Ecrivons $y_1 = gy_2u$, avec $g \in G(F)$ et $u \in I_\eta$. Nécessairement, u appartient à $I_\eta(F^{nr})$. Notons $\bar{u}$ l'image de u dans I_η/G_η. On a l'égalité $\phi(y_1)^{-1}y_1 = \phi(u)^{-1}\phi(y_2)^{-1}y_2u$. Puisque I_η/G_η est commutatif, on en déduit l'égalité $\psi(y_1) = \psi(y_2)\phi(\bar{u})^{-1}\bar{u}$. En passant aux coinvariants, le terme $\phi(\bar{u})^{-1}\bar{u}$ disparaît et $\pi \circ \psi(y_1) = \pi \circ \pi(y_2)$. Inversement, supposons vérifiée cette égalité. Alors il existe $\bar{u} \in I_\eta/G_\eta$ tel que $\psi(y_1) = \psi(y_2)\phi(\bar{u})^{-1}\bar{u}$. Grâce à la deuxième assertion de (3), on peut choisir $u \in I_\eta \cap K(\mathfrak{o}^{nr})$ dont l'image dans I_η/G_η soit $\bar{u}$. En utilisant la commutativité de I_η/G_η, on voit que les deux éléments $\phi(y_1)^{-1}y_1$ et $\phi(y_2u)^{-1}y_2u$ de I_η ont même image dans I_η/G_η. Ecrivons $\phi(y_1)^{-1}y_1 = \phi(y_2u)^{-1}y_2uk$, avec $k \in G_\eta$. D'après la preuve de (3), on peut trouver $z \in Z_{G,p'}^{\theta^*}$ et $h \in G_\eta$ tels que $\phi(y_2u)^{-1}y_2u = zh$. Puisque y_1, y_2, u, $z \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, on a aussi h, $k \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, donc h, $k \in K_\eta(\mathfrak{o}^{nr})$. Appliquons le lemme 4.2(i) à ce groupe : il existe h_0, $k_0 \in K_\eta(\mathfrak{O}^{nr})$ tels que $h = \phi(h_0)h_0^{-1}$, $hk = \phi(k_0)k_0^{-1}$. Posons $v = h_0k_0^{-1}$. On a les égalités (dans $K(\mathfrak{O}^{nr})$) :

$$\phi(y_1)^{-1}y_1 = \phi(y_2u)^{-1}y_2uk = zhk = z\phi(k_0)k_0^{-1}$$
$$= z\phi(v^{-1}h_0)h_0^{-1}v = z\phi(v)^{-1}hv = \phi(v)^{-1}zhv = \phi(y_2uv)^{-1}y_2uv.$$

Posons $g = y_1(y_2uv)^{-1}$. Cet élément est fixe par ϕ et appartient donc à $K(\mathfrak{o})$. Il en résulte que v appartient à $K(\mathfrak{o}^{nr})$, donc à $K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}) \subset I_\eta$. L'égalité $y_1 = gy_2uv$ montre que y_1 et y_2 ont même image dans $G(F)\backslash\mathcal{Y}_\eta/I_\eta$. Cela prouve (5).

Montrons que ψ est surjective. D'après la preuve de (3), il suffit de prouver que tout $z \in Z_{G,p'}^{\theta^*}$ s'écrit $z = \phi(y)^{-1}y$ pour un $y \in K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \mathcal{Y}_\eta$. D'après 4.2(1), on peut choisir $y \in K(\mathfrak{o}^{nr})$ vérifiant cette égalité. Mais cette égalité elle-même entraîne que $y \in \mathcal{Y}_\eta$. D'où l'assertion. Montrons que les ensembles suivants ont tous même nombre d'éléments :

- l'image de $\mathcal{Y}_\eta^K$ dans $G(F)\backslash\mathcal{Y}_\eta/I_\eta$;
- $(I_\eta/G_\eta)_{\Gamma^{nr}}$;
- $(T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*})_{\Gamma^{nr}}$;
- $(T^{*,\theta^*}/T^*_{\theta^*})^{\Gamma^{nr}}$.

On compare les deux premiers grâce aux relations (4), (5) et à la surjectivité de ψ. On compare les deux suivants grâce à (3). Enfin, pour tout groupe abélien fini A sur lequel agit Γ^{nr}, les ensembles $A_{/\Gamma^{nr}}$ et $A^{\Gamma^{nr}}$ ont même nombre d'éléments : on a rappelé la preuve dans la démonstration de 5.4(1). Cela achève la preuve de (ii).

Preuve de (iii). Grâce à (i), on a l'inclusion $I_\eta(F) \subset K(\mathfrak{o})G_\eta(F)$, donc $I_\eta(F) \subset (K(\mathfrak{o}) \cap I_\eta(F))G_\eta(F)$. L'application naturelle :

$$(K(\mathfrak{o}) \cap I_\eta(F))/K_\eta(\mathfrak{o}) \to I_\eta(F)/G_\eta(F)$$

est donc bijective. Considérons la suite exacte :

$$1 \to K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}) \to K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap I_\eta \to (K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}) \cap I_\eta)/K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}) \to 1$$

Grâce au lemme 4.2(ii) appliqué à K_η, prendre les invariants par Γ^{nr} laisse la suite exacte. Donc l'application naturelle :

$$(K(\mathfrak{o}) \cap I_\eta(F))/K_\eta(\mathfrak{o}) \to ((K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap I_\eta)/K_\eta(\mathfrak{o}^{nr}))^{\Gamma^{nr}}$$

est bijective. Enfin il résulte de (3) que ce dernier ensemble a c_{T^*} éléments. Cela achève la preuve. $\square$

5.8 Descente d'une intégrale orbitale

Soit $\eta \in \tilde{G}(F)_{p'} \cap \tilde{K}(\mathfrak{o})$. D'après le lemme 5.5, on peut introduire comme dans la preuve précédente le schéma en groupes K_η tel que $K_\eta(\mathfrak{o}) = G_\eta(F) \cap K(\mathfrak{o})$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{k}_\eta(\mathfrak{o})$ se décompose en une somme $\mathfrak{k}_{\eta,SC}(\mathfrak{o}) \oplus \mathfrak{z}_{G_\eta}(\mathfrak{o})$, où $\mathfrak{k}_{\epsilon,SC}(\mathfrak{o})$ est une sous-algèbre hyperspéciale de $\mathfrak{g}_{\eta,SC}(F)$. Notons $f_{\eta,SC}$, resp. $f_{\eta,Z}$, les fonctions caractéristiques de $\mathfrak{k}_{\eta,SC}(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{g}_{\eta,SC}(F)$, resp. de $\mathfrak{z}_{G_\eta}(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{z}_{G_\eta}(F)$.

On a déjà fixé sur $G(F)$ la mesure de Haar non ramifiée. On munit également $G_\eta(F)$ de la mesure de Haar non ramifiée.

Corollaire. *Soit $X \in \mathfrak{g}_\eta(F)_{tn}$. Supposons que $exp(X)\eta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ et que $\boldsymbol{\omega}$ soit trivial sur $G_{exp(X)\eta}(F)$. Ecrivons $X = X_Z + X_{SC}$, où $X_Z \in \mathfrak{z}_{G_\eta}(F)$ et $X_{SC} \in \mathfrak{g}_{\eta,SC}(F)$. Alors on a l'égalité :*

$$\int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G(F)} \boldsymbol{\omega}(x) f_{\tilde{K}}(x^{-1}exp(X)\eta x)\, dx =$$

$$f_{\eta,Z}(X_Z) \int_{G_{exp(X)\eta}(F)\backslash G_\eta(F)} \boldsymbol{\omega}(x) f_{\eta,SC}(x^{-1}X_{SC}x)\, dx.$$

Dans la preuve du lemme 5.4, on a calculé un terme I_j. En utilisant le lemme 5.7(i) au lieu de 5.3(ii), et le fait que $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $K(\mathfrak{o})$ d'après 4.1(1), le même calcul conduit à l'égalité ci-dessus. $\square$

5.9 Diagrammes

Lemme. *(i) Soient $\gamma \in H_z(F)$ et $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \delta)$ un diagramme issu de γ. Alors γ est compact si et seulement si δ l'est. De même, $\gamma \in H_z(F)_{p'}$ si et seulement si $\delta \in \tilde{G}(F)_{p'}$.*

(ii) Soit $\epsilon \in K_{H,z}(\mathfrak{o}) \cap H_z(F)_{p'}$. Alors il existe un diagramme $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \eta) \in$ $\mathbf{D}(\epsilon)$ qui est non ramifié (cf. 4.6) et vérifie de plus : $g_1 = 1$, $\eta \in \tilde{K}(\mathfrak{o}) \cap \tilde{G}(F)_{p'}$ et $\nu_D \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$.

Preuve de (i). Posons $\mu = \mu_D$, $\nu = \nu_D$. Supposons δ compact. Alors il est conjugué à un élément de $T^*(\bar{\mathfrak{o}})\theta^*$, cf. lemme 5.2. Il est aussi conjugué à $\nu\theta^*$. Soient donc $\nu_0 \in T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ et $x \in G$ tels que $Int(x)(\nu_0\theta^*) = \nu\theta^*$. Le même argument que dans la preuve de 5.7(1) permet de supposer que $Int(x)$ normalise $T^*_{\theta^*}$, donc T^*, puis d'écrire $x = tn$, avec $t \in T^*$ et $n \in G_{\theta^*} \cap N_G(T^*)$. Alors $\nu = t\theta^*(t)^{-1}Int(n)(\nu_0)$. D'où $\mu = \xi(\nu) = \xi(Int(n)(\nu_0))$. Mais $Int(n)(\nu_0) \in T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ et $\xi(T^*(\bar{\mathfrak{o}})) \subset T_H(\bar{\mathfrak{o}})$. Donc $\mu \in T_H(\bar{\mathfrak{o}})$. Puisque γ est conjugué à μ, il est compact d'après le lemme 5.2.

Inversement, supposons γ compact. Alors il est conjugué à un élément de $T_H(\bar{\mathfrak{o}})$. Il est aussi conjugué à μ. Deux élément de T_H qui sont conjugués le sont par un élément de $N_H(T_H)$ et la conjugaison par un tel élément conserve $T_H(\bar{\mathfrak{o}})$. Donc $\mu \in T_H(\bar{\mathfrak{o}})$. Montrons que :

(1) la restriction de ξ à $T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ est un homomorphisme surjectif de $T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ sur $T_H(\bar{\mathfrak{o}})$.

Comme en 3.2, posons $X_* = X_*(T^*)$, $Y_* = X_*/(X_* \cap (1-\theta^*)(X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}))$. On a l'égalité $Y_* = X_*(T_H)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T^*(\bar{\mathfrak{o}}) & \stackrel{\xi}{\to} & T_H(\bar{\mathfrak{o}}) \\ \| & & \| \\ X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{o}}^\times & \to & Y_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{o}}^\times \end{array}$$

Mais la flèche horizontale du bas est évidemment surjective, d'où (1).

Soit donc $\nu_0 \in T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ tel que $\xi(\nu_0) = \mu$. Alors $\xi(\nu) = \xi(\nu_0)$, donc il existe un élément $t \in T^*$ tel que $\nu = t\theta^*(t)^{-1}\nu_0$. Alors $\nu\theta^* = Int(t)(\nu_0\theta^*)$. Puisque δ est conjugué à $\nu\theta^*$, il l'est à $\nu_0\theta^*$ et δ est compact d'après le lemme 5.2. Cela prouve la première assertion de (i). La deuxième assertion se prouve de façon analogue, en remplaçant les groupes $T^*(\bar{\mathfrak{o}})$ et $T_H(\bar{\mathfrak{o}})$ par $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ et $T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$.

Preuve de (ii). Dans la preuve du lemme 5.3(ii), on a montré qu'il existait $h \in K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\mu \in T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tels que $Int(h)(\epsilon) = \mu$ et $\phi(h)h^{-1} \in N_H(T_H)$, où ϕ est l'élément de Frobenius de Γ^{nr}. Les groupes $K_H(\mathfrak{o}^{nr})$ et $K_{H,SC}(\mathfrak{o}^{nr})$ ont même image dans H_{AD}, on peut donc supposer que $h \in K_{H,SC}(\mathfrak{o}^{nr})$. Posons $T^\flat = Int(h^{-1})(T_H)$. Ce tore contient ϵ et est défini sur F. D'après les hypothèses de 1.3 et 4.4, il existe $\omega_1 \in \Omega^{\Theta^*}$ tel que $\phi \circ \xi = \xi \circ \omega_1 \circ \phi$. D'autre part Ω_H se plonge dans Ω^{Θ^*}, il existe donc $\omega_2 \in \Omega^{\Theta^*}$ tel que $Int(\phi(h) \circ h^{-1}) \circ \xi = \xi \circ \omega_2$. Posons $\omega = \omega_2^{-1}\omega_1$. L'application $K_{\theta^*,SC}(\mathfrak{o}^{nr}) \cap N_{G_{\theta^*,SC}}(T^*_{\theta^*,sc}) \to \Omega^{\Theta^*}$ est surjective. Comme dans la preuve du lemme

5.3(ii), on peut trouver $g_0 \in K_{\theta^*,SC}(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $g_0\phi(g_0)^{-1}$ appartienne à $N_G(T^*)$ et ait pour image ω dans Ω^{Θ^*}. Posons $T_0 = Int(g_0)^{-1}(T^*)$. Alors T_0 est défini sur F et l'application :

$$(2) \qquad Int(h^{-1}) \circ \xi \circ Int(g_0) : T_0 \to T^\flat$$

est définie sur F. Remarquons que T_0, resp. $T^\flat$, sont non ramifiés puisque isomorphes sur F^{nr} à T^*, resp. T_H.

La restriction de ξ à $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ est un homomorphisme surjectif de $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ sur $T_H(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$: cela se prouve comme (1). Soit $\nu' \in T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$ tel que $\xi(\nu') = \mu$. Posons $\rho' = Int(g_0)^{-1}(\nu')$. Cet élément appartient à $T_0(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Puisque $\epsilon \in H_z(F)$, on a $\phi(\epsilon) = z_H(\phi)\epsilon$. Puisque $z_H(\phi) = \xi(z(\phi))$ et que (2) se quotiente en un isomorphisme défini sur F de T_{0,Θ^*} sur $T^\flat$ (rappelons que T_{0,Θ^*} est le groupe des coinvariants pour l'action de Θ^* dans T_0), on voit que les images de $\phi(\rho')$ et de $z(\phi)\rho'$ dans T_{0,Θ^*} sont égales. On peut fixer $t \in T_0$ tel que $\phi(\rho') = z(\phi)t\theta^*(t)^{-1}\rho'$. Puisque ρ' et $z(\phi)$ appartiennent tous deux à $T_0(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$, $t\theta^*(t)^{-1}$ appartient aussi à ce groupe. On peut appliquer 5.7(2), en y remplaçant T^* par T_0. On peut alors supposer que $t \in T_0(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Grâce à 4.2(1), on peut écrire $t = t'\phi(t')^{-1}$ avec $t' \in T_0(\mathfrak{o}^{nr})$. Décomposons t' en produit $t' = t'_{p'}t'_{tu}$. L'égalité précédente s'écrit $tt'^{-1}_{p'}\phi(t'_{p'}) = t'_{tu}\phi(t'_{tu})^{-1}$. Le membre de gauche est d'ordre fini premier à p, celui de droite est topologiquement unipotent. Ils sont donc tous deux égaux à 1. Donc $t = t'_{p'}\phi(t'_{p'})^{-1}$. Quitte à remplacer t' par $t'_{p'}$, on peut supposer $t' \in T_0(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. Posons $\eta = t'\rho'\theta^*t'^{-1}$. C'est un élément de $G(F^{nr})$. On voit que $\phi(\eta) = z(\phi)\eta$, donc $\eta \in \tilde{G}(F)$. Puisque $g_0 \in K(\mathfrak{o}^{nr})$, on a $T_0(\mathfrak{o}^{nr}) \subset K(\mathfrak{o}^{nr})$, donc aussi $\eta \in K(\mathfrak{o}^{nr})$. Donc $\eta \in K(\mathfrak{o}^{nr}) \cap \tilde{G}(F) = \tilde{K}(\mathfrak{o})$. Enfin η est conjugué à $\nu'\theta^*$, donc η est d'ordre fini premier à p. Posons $T^\natural = T_{0,\theta^*}$ $(= T_0^{\theta^*,0})$. C'est bien un sous-tore maximal de G_η. Posons enfin $g_1 = 1$. On vérifie que $D = (T^\flat, T_0, T, T^\natural, h, g_0, g_1, \eta)$ est un diagramme issu de ϵ. On calcule $\nu_D = \nu' Int(g_0)(t'\theta^*(t')^{-1})$. C'est un élément de $T^*(\mathfrak{o}^{nr})_{p'}$. $\square$

5.10 Egalité de facteurs de transfert

Soit $\epsilon \in H_\sharp(F)$ tel que $\mathbf{D}(\epsilon)$ ne soit pas vide. On fixe un diagramme $\bar{D} \in \mathbf{D}(\epsilon)$. Dans les paragraphes 3.5 à 3.7, on a effectué diverses constructions à partir de ces données. Puis, en 3.8, on a effectué des constructions supplémentaires dépendant d'un élément $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ tel que :

(1) $exp(Y)\epsilon$ est $\tilde{G}$-fortement régulier ;

(2) Y appartient à un certain voisinage $\mathfrak{V}$ de 0 dans $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$.

Supposons $\epsilon \in H_z(F)_{p'}$. La condition (1) reste inchangée. Mais, en inspectant les constructions, on voit que (2) peut être remplacée par :

(2)' $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$.

En effet les conditions sur $\mathfrak{V}$ sont que l'exponentielle y soit définie ; que tout élément $h \in H$ tel que $Int(h)(exp(\mathfrak{V})\epsilon) \cap (exp(\mathfrak{V})\epsilon) \neq \emptyset$ appartienne à H^ϵ ; et que des conditions analogues soient vérifiées par d'autres couples analogues à $(\epsilon, \mathfrak{V})$ apparaissant dans la construction. Indiquons seulement pourquoi le couple $(\epsilon, \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn})$ vérifie ces conditions. Parce que $p > N(G)e_F + 1$, l'exponentielle est définie sur $\mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$. Soient $Y, Y' \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$ et $h \in H$, supposons $Int(h)(exp(Y)\epsilon) = exp(Y')\epsilon$. Posons $\gamma = exp(Y)\epsilon$, $\gamma' = exp(Y')\epsilon'$. Ce sont des éléments compacts de $H_z(F)$, tels que $\gamma_{p'} = \gamma'_{p'} = \epsilon$. L'égalité $Int(h)(\gamma) = \gamma'$ entraîne $Int(h)(\epsilon) = \epsilon$, cf. 5.2(2). Donc $h \in H^\epsilon$.

On a alors la forme plus précise du théorème 3.9, où on utilise les mêmes notations que dans ce paragraphe.

Proposition. *On suppose que* $\epsilon \in H_z(F)_{p'}$. *Soient* $Y, \underline{Y} \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$, *posons* $\gamma = exp(Y)\epsilon$ *et* $\underline{\gamma} = exp(\underline{Y})\epsilon$. *On suppose que* γ *et* $\underline{\gamma}$ *sont* $\tilde{G}$*-fortement réguliers. Soient* $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$, $X \in \bar{C}[y]$, $\underline{X} \in \underline{\bar{C}}[y]$. *Ecrivons* $X = X_{SC} + X_Z[y]$, $\underline{X} = \underline{X}_{SC} + \underline{X}_Z[y]$, *avec* $X_{SC} \in \bar{C}[y]_{SC}$ *et* $\underline{X}_{SC} \in \underline{\bar{C}}[y]_{SC}$. *Alors on a l'égalité :*

$$\Delta(\gamma, \varphi(X); \underline{\gamma}, \underline{\varphi}(\underline{X})) = \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, X_{SC}; \underline{\bar{Y}}, \underline{X}_{SC}).$$

Cette proposition sera prouvée dans [W2].

5.11 Egalité de facteurs de transfert non ramifiés

Soit $\epsilon \in H_\sharp(F) \cap K_{H,z}(\mathfrak{o}) \cap H_z(F)_{p'}$. Alors $\mathbf{D}(\epsilon)$ n'est pas vide et on peut fixer un diagramme $\bar{D} = (\bar{T}^\flat, \bar{T}_0, \bar{T}, \bar{T}^\natural, \bar{h}, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{\eta}) \in \mathbf{D}(\epsilon)$ vérifiant les conditions du lemme 5.8(ii). En particulier, $\bar{\eta} \in \tilde{K}(\mathfrak{o}) \cap \tilde{G}(F)_{p'}$. Posons $\dot{\mathcal{Y}}^K_{\bar{\eta}} = \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}} \cap \mathcal{Y}^K_{\bar{\eta}}$. On suppose, ainsi qu'il est loisible, que $y\bar{\eta}y^{-1} \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^K_{\bar{\eta}}$. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^K_{\bar{\eta}}$, le groupe $\bar{G}[y] = G_{y\bar{\eta}y^{-1}}$ est non ramifié et $\bar{G}[y](F) \cap K(\mathfrak{o})$ en est un sous-groupe compact hyperspécial (cf. lemme 5.5). Les données endoscopiques $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ de $\bar{G}[y]_{SC}$ sont non ramifiées : d'après 3.6, le groupe $\bar{H}$ possède un sous-tore isogène à un sous-tore de $T^{\flat *}$, où on rappelle que $(B^{\flat *}, T^{\flat *})$ est une paire de Borel de H_ϵ définie sur F ; et, d'après le lemme 5.3 (ii), $T^{\flat *}$ est non ramifié. On peut alors normaliser le facteur de transfert $\bar{\Delta}[y]$ (défini sur $\bar{\mathcal{D}}[y]$) comme indiqué en 4.7, relativement au sous-groupe hyperspécial $\bar{G}[y]_{SC}(F) \cap K(\mathfrak{o})$.

Proposition. *Sous ces hypothèses, soit* $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$, *posons* $\gamma = exp(Y)\epsilon$, *supposons que* γ *est* $\tilde{G}$*-fortement régulier. Soient* $y \in \dot{\mathcal{Y}}^K_{\bar{\eta}}$ *et* $X \in \bar{C}[y]$. *Ecrivons* $X = X_{SC} + X_Z[y]$, *avec* $X_{SC} \in \bar{C}[y]_{SC}$. *Alors on a l'égalité :*

$$\Delta(\gamma, \varphi(X)) = \bar{\Delta}[y](\bar{Y}, X_{SC}).$$

Cette proposition sera prouvée dans [W2].

5.12 Preuve du théorème 4.11

Soit $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$. On veut prouver l'égalité :

$$(1) \qquad SO^H_\gamma(f_{K_{H,z}}) = O^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}_\gamma(f_{\tilde{K}}).$$

Si γ n'est pas compact, sa classe de conjugaison stable ne coupe pas $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et le membre de gauche est nul. S'il n'existe aucun élément de $\mathcal{D}$ de la forme (γ, δ), le membre de droite est nul. Sinon, tous les δ qui apparaissent ainsi sont eux aussi non compacts d'après le lemme 5.8(i), leur classe de conjugaison ne coupe pas $\tilde{K}(\mathfrak{o})$ et le membre de droite est encore nul.

On suppose γ compact, on décompose γ en produit $\gamma = \gamma_{p'}\gamma_{tu}$, on pose $\epsilon = \gamma_{p'}$ et on note Y l'élément de $\mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$ tel que $\gamma_{tu} = exp(Y)$. On note $\bar{T}^\flat = H_\gamma$, qui est aussi le commutant de Y dans H_ϵ. Les deux termes de l'égalité (1) ne dépendent que de la classe de conjugaison stable de γ, on peut donc remplacer γ par n'importe quel élément de cette classe. Montrons que :

(2) on peut supposer $\epsilon \in H_\sharp(F)$.

En effet, réintroduisons pour un instant une z-extension H_1 et relevons ϵ en $\epsilon_1 \in H_{1,z}(F)$. D'après 2.1(1), il existe un élément $\epsilon'_1 \in H_{1,\sharp}(F)$ qui soit stablement conjugué à ϵ_1. Fixons un tel élément et notons ϵ' son image dans $H_z(F)$. Alors ϵ' est stablement conjugué à ϵ, cf. [Ko1] lemme 3.1. Soit $x \in H$ tel que $\epsilon' = Int(x)(\epsilon)$ et $\sigma(x)^{-1}x \in I_\epsilon$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors $Int(x)$ est un torseur intérieur de H_ϵ sur $H_{\epsilon'}$. Puisque ce dernier groupe est quasi-déployé, on peut utiliser [Ko1] corollaire 2.2 : quitte à multiplier x à gauche par un élément de $H_{\epsilon'}$, on peut supposer que $Int(x)(\bar{T}^\flat)$ est défini sur F ainsi que l'isomorphisme de $\bar{T}^\flat$ sur $Int(x)(\bar{T}^\flat)$ obtenu par restriction de $Int(x)$. Posons alors $\gamma' = Int(x)(\gamma)$. Alors γ' est stablement conjugué à γ, on a $\gamma'_{p'} = \epsilon'$ et, par construction, cet élément appartient à $H_\sharp(F)$.

Supposons désormais $\epsilon \in H_\sharp(F)$. Si $\mathbf{D}(\epsilon) = \emptyset$, le membre de droite de (1) est nul par définition. D'après le lemme 5.9(ii), ϵ n'appartient pas à $K_{H,z}(\mathfrak{o})$. Plus généralement, aucun conjugué stable de ϵ n'appartient à $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ (puisque la condition $\mathbf{D}(\epsilon) = \emptyset$ ne dépend que de la classe de conjugaison stable de ϵ). Donc aucun conjugué stable de γ n'appartient à $K_{H,z}(\mathfrak{o})$: on a déjà dit que si $\gamma \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$, on a aussi $\epsilon \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ puisque ϵ appartient à la fermeture du groupe engendré par γ. Le membre de gauche de (1) est nul lui aussi.

On suppose désormais $\mathbf{D}(\epsilon) \neq \emptyset$, on fixe un élément $\bar{D} = (\bar{T}^\flat, \bar{T}_0, \bar{T}, \bar{T}^\natural, \bar{h}, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \eta)$. Ainsi qu'on l'a dit en 5.10, on peut effectuer les constructions des paragraphes 3.5 à 3.8 pour ϵ, $\bar{D}$ et l'élément $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$. On fixe aussi des mesures comme en 3.10. Introduisons l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K = \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}} \cap \mathcal{Y}_{\bar{\eta}}^K$. On peut supposer que $y\bar{\eta}y^{-1} \in \tilde{K}(\mathfrak{o})$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$. Dans le cas où $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$ n'est pas vide, le groupe $\bar{G}^* = G_{\bar{\nu}\theta^*}$ est non ramifié : c'est une forme intérieure quasi-déployée de $\bar{G}[y]$ pour n'importe quel $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$ et ce dernier groupe est non ramifié d'après le lemme 5.5. On suppose alors que la mesure de Haar sur $\bar{G}^*(F)$ est non ramifiée. De même, $Z_{\bar{G}^*}^0$ est un tore non ramifié et on munit $Z_{\bar{G}^*}^0(F)$ de la mesure de Haar non ramifiée. On en déduit une mesure sur $\mathfrak{z}_{\bar{G}^*}(F)$. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$, on introduit les fonctions $f_{y\bar{\eta}y^{-1},Z}$ et $f_{y\bar{\eta}y^{-1},SC}$ de 5.8. Montrons que l'on a l'égalité :

$$(3) \qquad O_\gamma^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f_{\tilde{K}}) = c_{T^*}^{-1} \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K} f_{y\bar{\eta}y^{-1},Z}(X_Z[y]) O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(f_{y\bar{\eta}y^{-1},SC}).$$

Reprenons la preuve du lemme 3.11. On arrive à l'égalité (1) de ce paragraphe, où f est cette fois la fonction $f_{\tilde{K}}$. Remarquons que, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}$ et $X \in \Xi[y]$, l'élément $\varphi(X)$ est compact et on a les égalités $\varphi(X)_{p'} = y\bar{\eta}y^{-1}$, $\varphi(X)_{tu} = exp(X)$. Il est alors clair que la contribution des $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}} \backslash \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$ à l'égalité (1) de 3.11 est nulle. On peut limiter l'ensemble de sommation à $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$. Pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$, on a $c[y] = c_{T^*}^{-1}$ d'après le lemme 5.7(iii). Les deux groupes $\bar{G}[y]$ et $\bar{G}^*$ sont isomorphes car tous deux non ramifiés et formes intérieures l'un de l'autre. Nos choix de mesures sont tels que la mesure sur $\bar{G}[y](F)$ est non ramifiée. On poursuit alors la démonstration en utilisant le corollaire 5.8 en lieu et place du lemme 2.4 et on obtient l'égalité (3).

Supposons que H_ϵ n'est pas non ramifié. D'après le lemme 5.3(iv), aucun conjugué stable de ϵ n'appartient à $K_{H,z}(\mathfrak{o})$ et, comme on l'a dit ci-dessus, le membre de gauche de (1) est nul. Si $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$ est vide, il en est de même du membre de droite d'après (3). Supposons $\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$ non vide, soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$. Par le même argument qu'en 5.11, l'hypothèse que H_ϵ n'est pas non ramifié entraîne que $\bar{H}$ ne l'est pas non plus. Donc $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ sont des données endoscopiques de $\bar{G}[y]_{SC}$ qui ne sont pas non ramifiées. La proposition 7.5

de [Ko2] implique que :

$$O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(f_{y\bar{\eta}y^{-1},SC}) = 0$$

(le résultat de Kottwitz est énoncé pour des fonctions sur le groupe $\bar{G}[y](F)$, mais le même argument s'applique pour notre fonction $f_{y\bar{\eta}y^{-1},SC}$ sur l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{g}}[y]_{SC}(F)$). L'égalité (3) entraîne que le membre de droite de (1) est nul.

On suppose enfin que H_ϵ est non ramifié. Quitte à remplacer ϵ par un conjugué stable, on peut supposer $\epsilon \in K_{H,z}(\mathfrak{o})$ d'après le lemme 5.3(iv). On peut supposer que le diagramme $\bar{D}$ vérifie les conditions du lemme 5.8(ii). Les groupes H_ϵ, $\bar{H}$ et $Z_{\bar{H}}^0$ sont non ramifiés. On munit leurs groupes de points $H_\epsilon(F)$, $\bar{H}(F)$ et $Z_{\bar{H}}^0(F)$ des mesures de Haar non ramifiées. On en déduit une mesure sur $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)$. Comme on l'a expliqué en 3.10, de ces choix se déduit une mesure sur $\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)$ (en fait parce que $\mathfrak{z}_{H_\epsilon} \simeq \mathfrak{z}_{\bar{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{G}^*}$). Un calcul analogue à celui de la preuve de 5.4(1) montre qu'elle est égale à celle déduite de la mesure de Haar non ramifiée sur $Z_{H_\epsilon}^0(F)$. Le groupe $\bar{H}$ étant non ramifié, on en fixe un sous-groupe compact hyperspécial, dont on déduit un schéma en groupes $K_{\bar{H}}$. Notons Φ la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}_{\bar{H}}(\mathfrak{o})$ dans $\bar{\mathfrak{h}}(F)$.

Le membre de droite de (1) est calculé par (3). Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$.D'après l'hypothèse du théorème, on peut appliquer le lemme fondamental pour les algèbres de Lie à $\bar{G}[y]_{SC}$ et sa donnée endoscopique $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$. Remarquons que l'on montre comme en 5.4(1) que la mesure sur $\bar{G}[y]_{SC}(F)$ qui intervient dans la formule (3) est la mesure de Haar non ramifiée. D'autre part, le facteur de transfert qui intervient dans la formule (3) est celui associé comme en 4.7 au sous-groupe hyperspécial image réciproque de $K(\mathfrak{o})$ dans $\bar{G}[y]_{SC}(F)$, cela d'après 5.11. D'où l'égalité :

$$O_{\bar{Y}}^{\bar{G}[y]_{SC}}(f_{y\bar{\eta}y^{-1},SC}) = SO_{\bar{Y}}^{\bar{H}}(\Phi).$$

Notons Φ_{SC}, resp. Φ_Z, la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}_{\bar{H},SC}(\mathfrak{o})$ dans $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$, resp. de $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(\mathfrak{o})$ dans $\mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)$. Comme dans la preuve de 5.4, on a l'égalité :

$$SO_{\bar{Y}}^{\bar{H}}(\Phi) = \Phi_Z(\bar{Y}_Z) SO_{\bar{Y}_{SC}}^{\bar{H}_{SC}}(\Phi_{SC}).$$

Le triplet $(H_{\epsilon,SC}, \bar{H}_{SC}, j_*)$ est un triplet endoscopique non standard qui vérifie les conditions de 4.10. En effet, les deux groupes sont non ramifiés. En reprenant la construction de 3.6, on voit que les fonctions b et $\check{b}$ intervenant en 1.7(1) ont pour valeurs des nombres de la forme $2^{\pm 1} m^{\pm 1}$, où m est l'ordre d'une orbite dans Σ pour l'action de Θ^*. Puisque $p \neq 2$ et p ne divise pas l'ordre de Θ^*, ces valeurs appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$. D'après l'hypothèse du théorème, on peut appliquer à ce triplet le lemme fondamental non standard, d'où l'égalité :

$$SO_{\bar{Y}_{SC}}^{\bar{H}_{SC}}(\Phi_{SC}) = SO_{Y_{SC}}^{H_{\epsilon},SC}(f_{\epsilon,SC}).$$

L'égalité (3) est maintenant transformée en :

$$O_\gamma^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f_{\tilde{K}}) = c_{T^*}^{-1} \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K} f_{y\bar{\eta}y^{-1},Z}(X_Z[y]) \Phi_Z(\bar{Y}_Z) SO_{Y_{SC}}^{H_{\epsilon},SC}(f_{\epsilon,SC}).$$

Rappelons que, pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K$, on a l'isomorphisme :

$$\mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F) \simeq \mathfrak{z}_{\bar{G}[y]}(F) \oplus \mathfrak{z}_{\bar{H}}(F).$$

Par cet isomorphisme, la fonction $f_{\epsilon,Z}$ correspond à $f_{y\bar{\eta}y^{-1},Z}\otimes\Phi_Z$ et l'élément Y_Z correspond à $X_Z[y]+\bar{Y}_Z$. Donc :

$$f_{y\bar{\eta}y^{-1},Z}(X_Z[y])\Phi_Z(\bar{Y}_Z)=f_{\epsilon,Z}(Y_Z).$$

En utilisant le lemme 5.7(ii), l'égalité ci-dessus devient :

$$O_\gamma^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f_{\tilde{K}})=c_{T^*}^{-1}f_{\epsilon,Z}(Y_Z)SO_{Y_{SC}}^{H_{\epsilon,SC}}(f_{\epsilon,SC})|\dot{\mathcal{Y}}_{\bar{\eta}}^K|$$

$$=f_{\epsilon,Z}(Y_Z)SO_{Y_{SC}}^{H_{\epsilon,SC}}(f_{\epsilon,SC}).$$

D'après le lemme 5.4, cette dernière expression est égale au membre de gauche de (1). Cela achève de prouver (1) et le théorème. □

Appendice A : sections d'extensions

On va démontrer deux lemmes qui sont bien connus des spécialistes mais ne sont peut-être pas très clairement énoncés dans la littérature. Considérons les données suivantes :

- $\hat{H}$ est un groupe réductif connexe complexe, muni d'une paire de Borel $(\hat{B},\hat{T})$, d'un épinglage relatif à cette paire et d'une action de Γ_F qui préserve la paire et l'épinglage ;

- $\mathcal{H}$ est un groupe topologique séparé et localement compact, qui contient $\hat{H}$ comme sous-groupe distingué fermé, et qui est muni d'un homomorphisme continu π de sorte que la suite suivante soit exacte :

$$1\to\hat{H}\to\mathcal{H}\xrightarrow{\pi}W_F\to 1.$$

On suppose que, pour tout $w\in W_F$, il existe $x(w)\in\mathcal{H}$ tel que $Int(x(w))$ agisse sur $\hat{H}$ comme w. On suppose aussi qu'il existe une extension finie E de F et un homomorphisme continu $c_E:W_E\to\mathcal{H}$ qui scinde la projection π.

Lemme A.1. *Sous ces hypothèses, il existe un homomorphisme continu $c:W_F\to\mathcal{H}$ qui scinde la projection π.*

On note Ω le groupe de Weyl de $\hat{H}$ relatif à $\hat{T}$. Considérons de plus un tore complexe $\hat{T}_0$ muni d'une action de Γ_F. On note ${}^LT_0$ le produit semi-direct $\hat{T}_0\rtimes W_F$. Supposons donné un isomorphisme $j:\hat{T}_0\to\hat{T}$ tel que, pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, il existe $\omega(\sigma)\in\Omega$ tel que $\omega(\sigma)\circ\sigma\circ j=j\circ\sigma$.

Lemme A.2. *Sous ces hypothèses, j se prolonge en un isomorphisme de ${}^LT_0$ sur un sous-groupe fermé de $\mathcal{H}$, qui commute aux projections sur W_F.*

Preuve. Dans les hypothèses figure une extension E. On peut évidemment la remplacer par une extension plus grande. On peut ainsi supposer que E est galoisienne sur F et que les actions de Γ_E sur $\hat{H}$ et sur $\hat{T}_0$ (sous les hypothèses du lemme A.2) sont triviales. Montrons que :

(1) il existe une extension galoisienne finie K de F contenue dans E et un homomorphisme continu $c_K:W_K\to\mathcal{H}$ scindant la projection π et tel que, pour tout $w\in W_K$, $Int(c_K(w))$ agisse trivialement sur $\hat{H}$.

Rappelons que l'on note I_F le sous-groupe d'inertie de W_F ou de Γ_F et que l'on appelle Frobenius un élément de W_F qui se projette sur le générateur canonique de $W_F/I_F\simeq\mathbb{Z}$. Pour $w\in W_F$, on note $val_F(w)$ son image dans $\mathbb{Z}$. On adopte les mêmes notation et terminologie pour les extensions de F. D'après les hypothèses, pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe $h_{AD}(x) \in \hat{H}_{AD}$ tel que $Int(x)$ coïncide avec $Int(h_{AD}(x)) \circ \pi(x)$ sur $\hat{H}$. Cet élément $h_{AD}(x)$ est évidemment unique dans le groupe adjoint et l'application $x \mapsto h_{AD}(x)$ est continue. Considérons l'application :

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} W_E & \to & \hat{H}_{AD} \\ w & \mapsto & h_{AD}(c_E(w)) \end{array}$$

Parce que c_E est un homomorphisme et Γ_E agit trivialement sur $\hat{H}$, cette application est un homomorphisme. De plus, elle est continue. Il y a un voisinage de l'unité dans $\hat{H}_{AD}$ qui ne contient pas de sous-groupe non trivial, tandis qu'au contraire W_E possède un système fondamental de voisinages de l'unité formé de sous-groupes. Donc l'application ci-dessus est constante égale à 1 sur un voisinage de l'unité dans W_E. Un tel voisinage contient I_K pour une certaine extension finie K de E, que l'on peut supposer galoisienne et que l'on fixe. Fixons un Frobenius $w_1 \in W_K$ et un élément $h_1 \in \hat{H}$ qui relève $h_{AD}(w_1)$. On définit $c_K : W_K \to \mathcal{H}$ par :

$$c_K(w) = h_1^{-val_K(w)} c_E(w).$$

C'est évidemment une section continue de la projection π. Puisque l'application (2) est un homomorphisme trivial sur I_K, pour tout $w \in W_K$, $h_{AD}(c_E(w))$ est l'image dans $\hat{H}_{AD}$ de $h_1^{val_K(w)}$. Donc $Int(c_K(w))$ agit trivialement sur $\hat{H}$. Pour $w, w' \in W_K$, on a les égalités :

$$c_K(ww') = h_1^{-val_K(w')} h_1^{-val_K(w)} c_E(w) c_E(w'),$$
$$= h_1^{-val_K(w')} c_K(w) c_E(w') = c_K(w) h_1^{-val_K(w')} c_E(w') = c_K(w) c_K(w'),$$

la troisième égalité venant du fait que $Int(c_K(w))$ agit trivialement sur $\hat{H}$. Donc c_K est un homomorphisme et (1) est démontré.

Dans la situation du lemme A.2, l'application $\sigma \mapsto \omega(\sigma)$ se factorise par le quotient $Gal(E/F) = \Gamma_F/\Gamma_E$ et, puisque ce quotient est aussi égal à W_F/W_E, on peut définir $\omega(w)$ pour $w \in W_F$. Notons $\mathcal{H}_0$ le sous-ensemble des $x \in \mathcal{H}$ tels que $Int(x)$ conserve $\hat{T}$ et agisse sur ce groupe de la même façon que $\omega(w) \circ w$, où $w = \pi(x)$. On vérifie aisément que c'est un sous-groupe, que la restriction de π à ce sous-groupe est surjective et que le noyau de cette restriction est $\hat{T}$. L'ensemble $\mathcal{H}_0$ est fermé, donc localement compact. En effet, si l'on fixe un élément fortement régulier $t \in \hat{T}$, la condition qui définit $\mathcal{H}_0$ équivaut à $xtx^{-1} = \omega(w) \circ w(t)$, et cette dernière condition est évidemment fermée. Considérons $\hat{T}_0$ comme un sous-groupe de $\mathcal{H}_0$ via les homomorphismes $\hat{T}_0 \xrightarrow{j} \hat{T} \to \mathcal{H}_0$. Alors les données $\hat{T}_0$ et $\mathcal{H}_0$ vérifient les mêmes hypothèses que $\hat{H}$ et $\mathcal{H}$. En effet, par construction, pour tout élément $x \in \mathcal{H}_0$, $Int(x)$ agit sur $\hat{T}_0$ de la même façon que $\pi(x)$. D'autre part, l'image de c_K est contenue dans $\mathcal{H}_0$ et c_K est un homomorphisme continu qui scinde π au-dessus de W_K. Supposons prouvée l'assertion du lemme A.1 pour les données $\hat{T}_0$ et $\mathcal{H}_0$, soit donc $c : W_F \to \mathcal{H}_0$ un homomorphisme continu scindant la projection π. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} {}^L T_0 & \to & \mathcal{H}_0 \\ (t, w) & \mapsto & tc(w) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques, ce qui prouve le lemme A.2. Pour ce qui est du lemme A.1, on peut toujours appliquer la construction ci-dessus au cas où $\hat{T}_0 = \hat{T}$ et j est l'identité. Si un homomorphisme c vérifie les conditions requises pour les données $\hat{T}_0$

et $\mathcal{H}_0$, il vérifie aussi les mêmes conditions pour les données $\hat{H}$ et $\mathcal{H}$. En résumé, il suffit de prouver le lemme A.1 dans le cas où $\hat{H}$ est un tore, ce que l'on suppose désormais. Remarquons que cette hypothèse implique que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $Int(x)$ agit sur $\hat{H}$ de la même façon que $\pi(x)$.

Pour $x \in \mathcal{H}$ et $w \in W_K$, considérons le terme $xc_K(w)x^{-1}$. Parce que $Int(c_K(w))$ agit trivialement sur $\hat{H}$, ce terme ne dépend que de l'image $\pi(x)$ de x dans W_F. Pour $u \in W_F$, posons $c_{K,u}(w) = xc_K(w)x^{-1}$ où x est n'importe quel élément de $\mathcal{H}$ tel que $\pi(x) = u$. Posons aussi $c'_{K,u}(w) = c_K(uwu^{-1})$ et $t_u(w) = c'_{K,u}(w)c_{K,u}(w)^{-1}$. On calcule $\pi(t_u(w)) = 1$, donc $t_u(w) \in \hat{H}$. Les applications $c_{K,u}$ et $c'_{K,u}$ sont toutes deux des homomorphismes continus et, pour $w \in W_K$, $Int(c_{K,u}(w))$ comme $Int(c'_{K,u}(w))$ agissent trivialement sur $\hat{H}$. On en déduit que t_u est un homomorphisme continu de W_K dans $\hat{H}$. Dans le cas où $u \in W_K$, on peut prendre $x = c_K(u)$ dans la construction ci-dessus. Puisque c_K est un homomorphisme, on voit que t_u est trivial. Soient $u, u' \in W_F$. Choisissons $x, x' \in \mathcal{H}$ tels que $\pi(x) = u,\ \pi(x') = u'$. Alors $\pi(xx') = uu'$ et on calcule, pour $w \in W_K$:

$$\begin{aligned}
c'_{K,uu'}(w) = c_K(uu'wu'^{-1}u^{-1}) &= c'_{K,u}(u'wu'^{-1}) = t_u(u'wu'^{-1})c_{K,u}(u'wu'^{-1}) \\
&= t_u(u'wu'^{-1})xc_K(u'wu'^{-1})x^{-1} = t_u(u'wu'^{-1})xc'_{K,u'}(w)x^{-1} \\
&= t_u(u'wu'^{-1})xt_{u'}(w)c_{K,u'}(w)x^{-1} = t_u(u'wu'^{-1})u(t_{u'}(w))xc_{K,u'}(w)x^{-1} \\
&= t_u(u'wu'^{-1})u(t_{u'}(w))xx'c_K(w)x'^{-1}x^{-1} = t_u(u'wu'^{-1})u(t_{u'}(w))c_{K,uu'}(w).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$(3) \qquad t_{uu'}(w) = t_u(u'wu'^{-1})u(t_{u'}(w)).$$

Grâce à cette relation et au fait que t_u est trivial pour $u \in W_K$, on voit que t_u ne dépend que de l'image de u dans $Gal(K/F)$. Par un raisonnement déjà fait plus haut, pour tout $u \in W_F$, t_u est trivial sur un sous-groupe I_L, pour une certaine extension finie L de K. Le résultat de finitude que l'on vient de prouver entraîne alors que, quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que t_u est trivial sur I_K pour tout $u \in W_F$. Remarquons qu'alors, l'égalité (3) se simplifie en :

$$t_{uu'}(w) = t_u(w)u(t_{u'}(w)),$$

car $u'wu'^{-1} \in I_K w$. Fixons un Frobenius $w_1 \in W_K$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{ccc} W_F & \to & \hat{H} \\ u & \mapsto & t_u(w_1). \end{array}$$

D'après la relation précédente, c'est un cocycle, qui se factorise en un cocycle défini sur $Gal(K/F)$. Un tel cocycle est nécessairement d'ordre fini. Elever le cocycle à une puissance N remplace w_1 par w_1^N qui est un Frobenius pour l'extension non ramifiée de K de degré N. Quitte à remplacer K par cette extension, on peut supposer le cocycle trivial et fixer $t \in \hat{H}$ tel que $t_u(w_1) = u(t)t^{-1}$. Définissons alors une application $c'_K : W_K \to \mathcal{H}$ par $c'_K(w) = t^{val_K(w)}c_K(w)$ pour tout $w \in W_K$.. Cette application vérifie les mêmes propriétés que c_K. Si on remplace c_K par c'_K dans les définitions, on voit que cette fois, t_u est le caractère trivial pour tout $u \in W_F$. Autrement dit, on a l'égalité :

$$(4) \qquad c'_K(uwu^{-1}) = xc'_K(w)x^{-1}$$

pour tous $u \in W_F$, $w \in W_K$, $x \in \mathcal{H}$ tels que $\pi(x) = u$.

Fixons un ensemble de représentants $U \subset W_F$ du quotient $Gal(K/F)$ et, pour tout $u \in U$, choisissons $x_u \in \mathcal{H}$ tel que $\pi(x_u) = u$. Définissons une application :

$$c' : W_F \to \mathcal{H}$$

par $c'(wu) = c'_K(w)x_u$ pour tous $w \in W_K$, $u \in U$. C'est une section continue de la projection π. Pour tout $w, w' \in W_F$, posons :

$$a(w, w') = c'(w)c'(w')c'(ww')^{-1}.$$

La fonction a est un 2-cocycle de W_F dans $\hat{T}$. En utilisant la relation (4), on vérifie qu'elle se factorise en un 2-cocycle défini sur $Gal(K/F)$. Grâce à [Lan2] lemme 4, on peut fixer une application continue $b : W_F \to \hat{T}$ telle que :

$$a(w, w') = b(w)w(b(w'))b(ww')^{-1}$$

pour tous $w, w' \in W_F$. Définissons enfin l'application $c : W_F \to \hat{H}$ par $c(w) = b(w)^{-1}c'(w)$ pour tout $w \in W_F$. C'est encore une section continue de π et on vérifie que c'est un homomorphisme. Cela achève la preuve. □

Appendice B : l'exponentielle

Conformément à nos définitions, on note $val_{\mathbb{Q}_p}$ la valuation de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ qui prolonge la valuation usuelle de $\mathbb{Q}_p$. Posons :

$$\mathfrak{u} = \{x \in \bar{\mathbb{Q}}_p; val_{\mathbb{Q}_p}(x) > \frac{1}{p-1}\},\ U = \{x \in \bar{\mathbb{Q}}_p^\times; val_{\mathbb{Q}_p}(1-x) > \frac{1}{p-1}\}.$$

Les propriétés suivantes sont bien connues :

- pour tout $x \in \mathfrak{u}$, la série $exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est normalement convergente et sa somme appartient à U ;

- pour tout $x \in U$, la série $log(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$ est normalement convergente et sa somme appartient à $\mathfrak{u}$;

- les fonctions $exp : \mathfrak{u} \to U$ et $log : U \to \mathfrak{u}$ ainsi définies sont des isomorphismes de groupes topologiques inverses l'un de l'autre ; ils sont équivariants pour les actions du groupe de galois $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$.

Remarque. La preuve de ces propriétés est immédiate, elle repose sur la simple inégalité $val_{\mathbb{Q}_p}(n!) < \frac{n}{p-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Rappelons que l'on a défini en 4.3 une fonction ψ sur l'ensemble des entiers $n \geq 1$: $\psi(n)$ est le plus grand entier d tel que $\phi(d) \leq n$, où ϕ est la fonction d'Euler.

Soit T un tore défini sur F. On note X^*, resp. X_*, son groupe des caractères, resp. des cocaractères. On pose :

$$\mathfrak{t}(F)_{tn} = \{X \in \mathfrak{t}(F); \forall x^* \in X^*, val_{\mathbb{Q}_p}(x^*(X)) > 0\},$$

$$T(F)_{tu} = \{t \in T(F); \forall x^* \in X^*, val_{\mathbb{Q}_p}(1 - x^*(t)) > 0\}.$$

Remarque. Ces définitions ne coïncident pas toujours avec celles données en 4.3, mais il y a coïncidence si p vérifie les hypothèses que l'on impose ci-dessous.

Lemme B. *Supposons $p > e_F\psi(dim(T)) + 1$. Alors :*

(i) pour tous $x^* \in X^*$, $X \in \mathfrak{t}(F)_{tn}$, $t \in T(F)_{tu}$, on a $x^*(X) \in \mathfrak{u}$ et $x^*(t) \in U$;

(ii) il existe une unique application exp : $\mathfrak{t}(F)_{tn} \to T(F)_{tu}$ *telle que, pour tous* $x^* \in X^*$ *et* $X \in \mathfrak{t}(F)_{tn}$, *on ait l'égalité* $x^*(exp(X)) = exp(x^*(X))$ *;*

(iii) cette application est un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathfrak{t}(F)_{tn}$ *sur* $T(F)_{tu}$.

Preuve. On peut énoncer un lemme analogue en remplaçant le corps F par son extension non ramifiée maximale F^{nr}. Le lemme pour le corps F résulte de celui pour le corps F^{nr} : on prend pour exponentielle sur $\mathfrak{t}(F)_{tn}$ la restriction de l'exponentielle sur $\mathfrak{t}(F^{nr})_{tn}$, les propriétés de cette application étant immédiates. Travaillons donc sur le corps de base F^{nr}. Notons F' la plus petite extension galoisienne de F^{nr} telle que T soit déployé sur F'. C'est une extension finie de F^{nr}. Montrons que :

(1) F' est une extension modérément ramifiée de F^{nr}.

Soit $\sigma \in \Gamma_{F^{nr}}$. Alors σ agit sur X^* par un opérateur d'ordre fini, et il s'agit de prouver que cet ordre est premier à p. Posons $X^*_{\bar{\mathbb{Q}}} = X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}$. Soit ζ une valeur propre de l'action de σ dans $X^*_{\bar{\mathbb{Q}}}$. C'est une racine de l'unité, notons d son ordre. Puisque l'action de σ est définie sur $\mathbb{Q}$ (σ agit dans X^*), tous les conjugués de ζ par le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ sont aussi valeurs propres. Il y a $\phi(d)$ conjugués. Donc $\phi(d) \leq dim(T)$, puis $d \leq \psi(dim(T)$. Alors $d < p$, ce qui prouve (1).

Le groupe de Galois de F'/F^{nr} est cyclique, fixons un générateur σ. On peut décomposer $X^*_{\bar{\mathbb{Q}}}$ en somme directe :

$$X^*_{\bar{\mathbb{Q}}} = \oplus_{d \geq 1} X^*_{\bar{\mathbb{Q}},d},$$

où, pour tout entier $d \geq 1$, $X^*_{\bar{\mathbb{Q}},d}$ est la somme des espaces propres pour l'action de σ associés à des valeurs propres d'ordre d. On pose $X^*_d = X^*_{\bar{\mathbb{Q}},d} \cap X^*$. Remarquons que le polynôme minimal de l'action de σ dans $X^*_{\bar{\mathbb{Q}},d}$ (pour un entier d tel que cet espace soit non nul) est le d-ième polynôme cyclotomique. On a montré que les d qui intervenaient étaient premiers à p. Alors les réductions dans $\mathbb{F}_p[X]$ des différents polynômes cyclotomiques intervenant sont des polynômes premiers deux à deux. Le lemme de Hensel entraîne l'égalité :

$$X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \oplus_{d \geq 1} X^*_d \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p.$$

Autrement dit, on peut fixer un entier $a \geq 1$ premier à p tel que :

$$aX^* \subset \oplus_{d \geq 1} X^*_d.$$

Pour tout entier $d \geq 1$ premier à p, notons F'_d l'extension modérément ramifiée de F^{nr} de degré d. Si X^*_d n'est pas nul, F'_d est contenu dans F'. Le groupe de Galois $\Gamma_{F'_d}$ agit trivialement sur X^*_d.

Soient $x^* \in X^*$ et $t \in T(F)_{tu}$. Ecrivons $ax^* = \sum_{d \geq 1} x^*_d$, où $x^*_d \in X^*_d$ pour tout d. Soit d tel que $x^*_d \neq 0$. Puisque $t \in T(F)$, on a $\gamma(x^*_d(t)) = (\gamma(x^*_d))(t)$. Puisque $\Gamma_{F'_d}$ agit trivialement sur X^*_d, cela entraîne que $x^*_d(t) \in F'^{\times}_d$. Puisque $t \in T(F)_{tu}$, on a $val_{\mathbb{Q}_p}(1 - x^*_d(t)) > 0$. Ces deux dernières conditions entraînent $val_{\mathbb{Q}_p}(1 - x^*_d(t)) \geq \frac{1}{e_{F'_d}} = \frac{1}{de_F}$. On a déjà remarque l'inégalité $d \leq \psi(dim(T))$ et l'hypothèse sur p entraînent $val_{\mathbb{Q}_p}(1-x^*_d(t)) > \frac{1}{p-1}$. On en déduit $val_{\mathbb{Q}_p}(1-(ax^*)(t)) > \frac{1}{p-1}$. Puisque $val_{\mathbb{Q}_p}(1-x^*(t)) > 0$ et a est premier à p, on a l'égalité $val_{\mathbb{Q}_p}(1 - x^*(t)) = val_{\mathbb{Q}_p}(1 - (ax^*)(t))$, donc $val_{\mathbb{Q}_p}(1 - x^*(t)) > \frac{1}{p-1}$. Cela prouve que $x^*(t)$ appartient à U, ce qui est la seconde assertion de (i). La première se prouve de façon analogue.

On a l'égalité $\mathfrak{t}(\bar{F}) = \mathfrak{t}(\bar{\mathbb{Q}}_p) = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}_p$. Fixons une base $e_1, ..., e_D$ de X_*, où $D = dim(T)$. Soit $X \in \mathfrak{t}(F)_{tn}$, écrivons $X = \sum_{i=1,...,D} x_i e_i$, avec des $x_i \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. D'après ce que l'on vient de prouver, $x_i \in \mathfrak{u}$ pour tout i. On peut poser $exp(X) = \prod_{i=1,\ldots,D} e_i(exp(x_i))$. Il est clair que l'application ainsi définie vérifie les conditions du (ii) de l'énoncé. Son unicité est immédiate. On construit son inverse de façon analogue, en utilisant l'application $log : U \to \mathfrak{u}$. L'assertion (iii) de l'énoncé s'en déduit. $\square$

On considère maintenant un groupe réductif connexe M défini sur F et on adopte les notations de 4.3.

Proposition B. *Supposons $p > N(M)e_F + 1$.*

(i) Il existe une unique application continue $exp : \mathfrak{m}(F)_{tn} \to M(F)$ telle que, pour tout sous-tore $T \subset M$ défini sur F, cette application se restreigne à $\mathfrak{t}(F)_{tn}$ en l'application du lemme B.

(ii) Cette application est un homéomorphisme de $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ sur $M(F)_{tu}$.

(iii) Soit $b \in Imm$. Alors cette application se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o})$ sur $K_b^+(\mathfrak{o})$.

Preuve. 1^{er} cas : le groupe linéaire. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension N. Supposons $M = GL(V)$. Alors $\mathfrak{m}$ est l'espace des endomorphismes linéaires de V. Appelons chaîne de réseaux une suite $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, où :

- les L_i sont des $\mathfrak{o}$-réseaux de V ;
- on a $L_{i+1} \subsetneq L_i$ pour tout i ;
- il existe $k \geq 1$ tel que $L_{i+k} = \varpi_F L_i$ pour tout i, où ϖ_F est une uniformisante de $\mathfrak{o}$.

Pour une telle chaîne, on note $\mathfrak{k}_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}(F)$ tels que X conserve chaque L_i et agisse par 0 sur chaque quotient L_i/L_{i+1}. On note $K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$ l'ensemble des $x \in M(F)$ tels que x conserve chaque L_i et agisse par l'identité sur chaque quotient L_i/L_{i+1}. Alors $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}(F)$ tels qu'il existe une chaîne de réseaux $\mathcal{L}$ pour laquelle $X \in \mathfrak{k}_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$ et $M(F)_{tu}$ est l'ensemble des $x \in M(F)$ tels qu'il existe une chaîne de réseaux $\mathcal{L}$ pour laquelle $x \in K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$. On définit l'exponentielle sur $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ par la formule évidente :

$$exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}.$$

Cette série converge pour $p > Ne_F + 1$, ce qui est beaucoup plus faible que notre hypothèse. Avec cette définition et sous cette seule hypothèse $p > Ne_F + 1$, les assertions (i) et (ii) sont faciles (remarquons que l'unicité du (i) résulte simplement de la densité des éléments semi-simples dans $\mathfrak{m}(F)_{tn}$). On voit aussi que, pour toute chaîne de réseaux $\mathcal{L}$, l'exponentielle se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$ sur $K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$. Mais pour tout $b \in Imm$, il existe une chaîne de réseaux $\mathcal{L}$ pour laquelle $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}) = \mathfrak{k}_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$ et $K_b^+(\mathfrak{o}) = K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o})$. L'assertion (iii) en résulte.

$2^{ème}$ cas : M est adjoint. Posons $G = GL(\mathfrak{m})$. L'application adjointe nous fournit un plongement fermé de M dans G grâce auquel on identifie M à un sous-groupe de G. Alors $\mathfrak{m}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Comme ci-dessus, on définit l'exponentielle $exp : \mathfrak{g}(F)_{tn} \to G(F)_{tu}$ (remarquons que la condition $p > dim(\mathfrak{m})e_F + 1$, qui nous suffisait pour le groupe linéaire, est vérifiée). On a :

(2) soit $X \in \mathfrak{g}(F)_{tn}$; alors $X \in \mathfrak{m}(F)$ si et seulement si $exp(X) \in M(F)$.

Il est bien connu qu'il existe une représentation algébrique de G dans un espace V sur $\bar{F}$ et une droite $D \subset V$ telle que M soit le stabilisateur de D dans G et $\mathfrak{m}$ soit le stabilisateur de D dans $\mathfrak{g}$. Les formules définissant l'exponentielle et sa réciproque, le logarithme, assurent que $X \in \mathfrak{m}$ si et seulement si $exp(X) \in M$. De plus $\mathfrak{m}(F) = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}(F)$ et $M(F) = M \cap G(F)$. L'assertion (2) s'ensuit.

Soit $b \in Imm$. On se propose de prouver que l'exponentielle se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o})$ sur $K_b^+(\mathfrak{o})$. Pour cela, on remarque que $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}) = \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ et $K_b^+(\mathfrak{o}) = M(F) \cap K_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$. On voit alors qu'il suffit de prouver l'assertion analogue où l'on remplace le corps de base F par F^{nr}. Travaillons donc sur le corps de base F^{nr}. On remarque que le réseau $\mathfrak{m}_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ et le groupe $K_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ ne dépendent de b que par la facette de l'immeuble qui contient b. Cela va nous permettre ci-dessous de modifier b de façon convenable. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, introduisons le réseau de Moy-Prasad $\mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})$ (cf. [MP] 3.3). L'application $r \mapsto \mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})$ est continue à gauche, localement constante en dehors d'un ensemble localement fini de sauts, et vérifie $\mathfrak{k}_{b,r+1}(\mathfrak{o}^{nr}) = \varpi_F \mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})$. En ne conservant que les sauts de la filtration, on obtient une chaîne de réseaux $\mathcal{L} = (\mathfrak{k}_{b,r_i}(\mathfrak{o}^{nr}))_{i \in \mathbb{Z}}$. On peut supposer $r_0 = 0$, d'où $\mathfrak{k}_b(\mathfrak{o}^{nr}) = \mathfrak{k}_{b,r_0}(\mathfrak{o}^{nr})$ et $\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}^{nr}) = \mathfrak{k}_{b,r_1}(\mathfrak{o}^{nr})$. En modifiant b dans sa facette, on peut supposer que tous les sauts r_i sont rationnels, de dénominateur premier à p. On a :

(3) $M(F^{nr}) \cap K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr}) = K_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$.

D'après [D] lemme 3.2.8, on a l'inclusion $K_b^+(\mathfrak{o}^{nr}) \subset K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr})$. Réciproquement, soit $x \in M(F^{nr}) \cap K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr})$. D'après [D] lemme 3.2.8, x appartient au fixateur de la facette de l'immeuble de M contenant b. Notons S_b ce fixateur dans $M(F^{nr})$. On a déjà remarqué que l'hypothèse sur p entraîne que le quotient $S_b/K_b(\mathfrak{o}^{nr})$ est d'ordre premier à p. Puisque $x \in K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr})$, x est topologiquement unipotent. Puisqu'il appartient à S_b, il appartient nécessairement à $K_b(\mathfrak{o}^{nr})$. On sait que $\mathbf{K}_b = K_b(\mathfrak{o}^{nr})/K_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ est un groupe réductif connexe sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ et $\mathfrak{k}_b = \mathfrak{k}_b(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ s'identifie à son algèbre de Lie. Plus précisément, notons $\mathbf{x}$ l'image de x dans $\mathbf{K}_b$. Alors l'action adjointe de $\mathbf{x}$ dans $\mathfrak{k}_b$ s'identifie avec l'action sur $\mathfrak{k}_b(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$ déduite de l'action adjointe de x. Or cette dernière action est l'identité puisque $x \in K_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr})$. Donc $\mathbf{x}$ agit par l'identité sur $\mathfrak{k}_b$. Remarquons que l'hypothèse sur p assure que l'on peut travailler avec notre groupe $\mathbf{K}_b$ comme si l'on était en caractéristique nulle. Alors x appartient au centre de $\mathbf{K}_b$. Mais il est aussi unipotent, puisque x est topologiquement unipotent. Donc $\mathbf{x} = 1$ et $x \in K_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$, ce qui prouve (3).

On a aussi :

(4) $\mathfrak{m}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{L}}^+(\mathfrak{o}^{nr}) = \mathfrak{k}_b^+(\mathfrak{o}^{nr})$.

On sait que, pour tous $r, s \in \mathbb{R}$, on a l'inclusion :

$$[\mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr}), \mathfrak{k}_{b,s}(\mathfrak{o}^{nr})] \subset \mathfrak{k}_{b,r+s}(\mathfrak{o}^{nr}).$$

L'inclusion du terme de droite de l'égalité (4) dans le terme de gauche s'en déduit. Pour prouver l'inclusion inverse, introduisons l'espace sur $\bar{\mathbb{F}}_q$:

$$\mathbf{m} = \oplus_{r \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} (\mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+}(\mathfrak{o}^{nr})),$$

où $\mathfrak{k}_{b,r+}(\mathfrak{o}^{nr}) = \mathfrak{k}_{b,r+\epsilon}(\mathfrak{o}^{nr})$, pour $\epsilon > 0$ assez petit. Cette définition est loisible car l'application $r \mapsto \mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+}(\mathfrak{o}^{nr})$ se quotiente en une application définie sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la multiplication par ϖ_F^n se quotiente en un isomorphisme de $\mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+}(\mathfrak{o}^{nr})$ sur $\mathfrak{k}_{b,r+n}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+n+}(\mathfrak{o}^{nr})$. On munit $\mathbf{m}$ d'une structure d'algèbre de Lie de la façon suivante. Soient $\bar{X} \in \mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+}(\mathfrak{o}^{nr})$, $\bar{Y} \in \mathfrak{k}_{b,s}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,s+}(\mathfrak{o}^{nr})$, choisissons des relèvements $X \in \mathfrak{k}_{b,r}(\mathfrak{o}^{nr})$ de $\bar{X}$ et $Y \in \mathfrak{k}_{b,s}(\mathfrak{o}^{nr})$ de $\bar{Y}$. Alors $[\bar{X}, \bar{Y}]$ est l'image de $[X, Y] \in \mathfrak{k}_{b,r+s}(\mathfrak{o}^{nr})$ dans $\mathfrak{k}_{b,r+s}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r+s+}(\mathfrak{o}^{nr})$, cf. [D] 4.2. On a montré en [W] 2.3 que cette algèbre $\mathbf{m}$ était en fait l'algèbre de Lie du groupe réductif sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ associé aux mêmes données de racines que M. C'est donc l'algèbre de Lie d'un groupe adjoint et, pour tout

$\bar{X} \in \mathfrak{m}$, $\bar{X} \neq 0$, il existe $\bar{Y} \in \mathfrak{m}$ tel que $[\bar{X}, \bar{Y}] \neq 0$. Soit alors $X \in \mathfrak{m}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}^+_{\mathcal{L}}(\mathfrak{o}^{nr})$, $X \neq 0$. Soit i le plus grand entier tel que $X \in \mathfrak{k}_{b,r_i}(\mathfrak{o}^{nr})$, notons $\bar{X}$ l'image de X dans $\mathfrak{k}_{b,r_i}(\mathfrak{o}^{nr})/\mathfrak{k}_{b,r_i+}(\mathfrak{o}^{nr}) \subset \mathfrak{m}$. On a $\bar{X} \neq 0$. En appliquant la propriété précédente, on voit qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathfrak{k}_{b,s}(\mathfrak{o}^{nr})$ tel que $[X, Y] \notin \mathfrak{k}_{b,r_i+s+}(\mathfrak{o}^{nr})$. Puisque $X \in \mathfrak{k}^+_{\mathcal{L}}(\mathfrak{o}^{nr})$, on a en tout cas $[X, Y] \in \mathfrak{k}_{b,s+}(\mathfrak{o}^{nr})$. Ces relations entraînent $r_i > 0$. Mais alors $X \in \mathfrak{k}^+_b(\mathfrak{o}^{nr})$, ce qui prouve (4).

Puisque l'exponentielle $exp : \mathfrak{g}(F^{nr})_{tn} \to G(F^{nr})_{tu}$ se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{L}}(\mathfrak{o}^{nr})$ sur $K^+_{\mathcal{L}}(\mathfrak{o}^{nr})$, les propriétés (2) (qui est aussi vrai sur F^{nr}), (3) et (4) entraînent qu'elle se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}^+_b(\mathfrak{o}^{nr})$ sur $K^+_b(\mathfrak{o}^{nr})$. Comme on l'a dit, cela entraîne aussi que l'exponentielle $exp : \mathfrak{g}(F)_{tn} \to G(F)_{tu}$ se restreint en un homéomorphisme de $\mathfrak{k}^+_b(\mathfrak{o})$ sur $K^+_b(\mathfrak{o})$. Puisque $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ est la réunion des $\mathfrak{k}^+_b(\mathfrak{o})$ quand b parcourt Imm et $M(F)_{tu}$ est la réunion des $K^+_b(\mathfrak{o})$ quand b parcourt Imm, cette exponentielle se restreint aussi en un homéomorphisme de $\mathfrak{m}(F)_{tn}$ sur $M(F)_{tu}$. Cette application restreinte hérite des propriétés de l'application de départ. On voit alors qu'elle satisfait toutes les propriétés requises.

Cas général. Le groupe M est maintenant quelconque. Considérons l'application naturelle :

$$Z^0_M \times M_{SC} \to M.$$

Montrons qu'elle se restreint en un homéomorphisme :

$$(5) \qquad Z^0_M(F)_{tu} \times M_{SC}(F)_{tu} \to M(F)_{tu}.$$

Evidemment, l'image du terme de gauche est inclus dans $M(F)_{tu}$. Soit $x \in M(F)_{tu}$, choisissons $z \in Z^0_M$ et $y \in M_{SC}$ tels que $x = zy$. On a déjà remarqué que $Z_{M_{SC}}$ était d'ordre premier à p, sous nos hypothèses sur p. Notons c cet ordre. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a $\sigma(x) = x$, donc $\sigma(y) \in Z_{M_{SC}} y$. Alors $\sigma(y^c) = y^c$, donc $y^c \in M_{SC}(F)$. De même $z^c \in Z^0_M(F)$. Puisque $lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$, y^{p^n} appartient à un voisinage aussi petit que l'on veut de $Z_{M_{SC}}$ quand n est assez grand. Cela entraîne que $lim_{n\to\infty} y^{cp^n} = 1$, autrement dit $y^c \in M_{SC}(F)_{tu}$. De même $z^c \in Z^0_M(F)_{tu}$. Soit c' l'inverse de c dans $\mathbb{Z}_p$. On a remarqué en 5.2 que, les éléments z^c et y^c étant topologiquement unipotents, on pouvait définir $(z^c)^{c'}$ et $(y^c)^{c'}$, qui sont aussi topologiquement unipotents. Alors $x = (z^c)^{c'}(y^c)^{c'}$, ce qui prouve la surjectivité de l'application (5). Son injectivité résulte immédiatement du fait que l'ordre de $Z_{M_{SC}}$ est premier à p.

On montre facilement que l'on a l'égalité :

$$\mathfrak{z}_M(F)_{tn} \oplus \mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn} = \mathfrak{m}(F)_{tn}.$$

On peut appliquer ces relations en remplaçant le groupe M par son groupe adjoint M_{AD}. On obtient que les flèches verticales du diagramme ci-dessous sont des homéomorphismes. On définit alors $exp : \mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn} \to M_{SC}(F)_{tu}$ comme l'unique application telle que ce diagramme soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn} & \stackrel{exp}{\to} & M_{SC}(F)_{tu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{m}_{AD}(F)_{tn} & \stackrel{exp}{\to} & M_{AD}(F)_{tu} \end{array}$$

On définit $exp : \mathfrak{z}_M(F)_{tn} \oplus \mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn} \to Z^0_M(F)_{tu} \times M_{SC}(F)_{tu}$ comme le produit de l'application du lemme B sur $\mathfrak{z}_M(F)_{tn}$ et de celle que l'on vient de définir sur $\mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn}$.

On définit ensuite $exp : \mathfrak{m}(F)_{tn} \to M(F)_{tu}$ comme l'application qui rend le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{z}_M(F)_{tn} \oplus \mathfrak{m}_{SC}(F)_{tn} & \stackrel{exp}{\to} & Z_M^0(F)_{tu} \times M_{SC}(F)_{tu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{m}(F)_{tn} & \stackrel{exp}{\to} & M(F)_{tu} \end{array}$$

A partir du lemme B et du cas déjà traité du groupe adjoint M_{AD}, la vérification des propriétés de cette application est aisée, on la laisse au lecteur. □

Bibliographie

[A] J. Arthur : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), 223-293

[B] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann 1968

[D] S. DeBacker : *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, Annals of Math. 156 (2002), 295-332

[H] T. Hales : *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Contemporary Math. 145 (1993), 109-134

[HC] Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, L.N. in Math. 162, Springer, 1970

[Kac] V. Kac : *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press 1990

[Ko1] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. Journal 49 (1982), 785-806

[Ko2] ———— : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Annalen 275 (1986), 365-399

[Ko3]———— : *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Compositio Math. 60 (1986), 237-250

[KS] ————, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[Lab1] J.-P. Labesse : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), 473-530

[Lab2]———— : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[Lan1] R. P. Langlands : *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in *Representation theory and harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, AMS Math. Surveys and Monographs 31 (1989), 101-170

[Lan2]————- : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. J. math. 31 (1979), 700-725

[LS1] ————, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Annalen 278 (1987), 219-271

[LS2]———————— : *Descent of transfer factors*, in *The Grothendieck Festschrift*, Birkhäuser 1991, 485-563

[LN] G. Laumon, Ngo Bao Chau : *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, prépublication (2004)

[MP] A. Moy, G. Prasad : *Unrefined minimal K-types for p-adic groups*, Invent. Math. 116 (1994), 393-408

[T] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symposia in pure Math. XXXIII, AMS 1979

[W1] J.-L. Waldspurger : *Endoscopie et changement de caractéristique*, à paraître au J. Inst. Math. de Jussieu

[W2]—————————— : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue : facteurs de transfert*, en préparation

Institut de Mathématiques de Jussieu CNRS
175 rue du Chevaleret
75013 Paris