Der Beginn der Formalen Spieltheorie: Zermelo (1913)

Christoph Eichhorn

21. Juni 2004

1 Einleitung

Zermelo (1913) wird oft als Beginn der formalen Spieltheorie bezeichnet. Über das von ihm behauptete/bewiesene Ergebnis herrscht in Lehrbüchern der Spieltheorie jedoch kein Konsens. In diesem kurzen Aufsatz wird der Beitrag von Zermelo reflektiert und entschieden, welche Aussage er tatsächlich gemacht hat. Auch ein Beweis für diese Aussage wird bereitgestellt.

2 Ernst Zermelo

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, deutscher Mathematiker, 1871-1953, studierte Mathematik, Physik und Philosophie an den Universitäten von Berlin, Halle (Saale) und Freiburg. Als Professor war er tätig an den Universitäten Göttingen, Zürich und Freiburg. Seine bekanntesten Beiträge lieferte er zur Axiomatisierung der Mengenlehre (sogenanntes *Zermelo-Fränkelsches Axiomensystem*).

3 Verschiedene Versionen des Satzes von Zermelo

In Lehrbücher der Spieltheorie findet man u.a. folgende Aussagen als *Satz von Zermelo*:[1]

1. Chess is determinate (Aumann (1989)).
2. In chess, either white can force a win, or black can force a win, or both sides can force a draw (Eichberger (1993)).
3. Every finite game of perfect information Γ_E has a pure strategy Nash equilibrium that can be derived through backward induction. Moreover, if no player has the same payoffs at any two terminal nodes, then there is a unique Nash equilibrium that can be derived in this manner (Mas-Colell et al. (1995)).

Diese unterschiedlichen Interpretationen rühren eventuell daher, dass der ursprüngliche Aufsatz auf deutsch erschienen ist, die zitierten Lehrbücher aber mit Ausnahme von Eichberger (1993) von englischsprachigen Autoren verfasst wurden.

4 Was Zermelo wirklich bewies

Zermelos Aufsatz erschien 1913 und damit lange *vor* der Entwicklung der heute üblichen Terminologie zur Spieltheorie. Im Folgenden wird um der besseren Verständlichkeit willen die Ausdrucksweise Zermelos in die moderne Terminologie übertragen. Der Bezug zum Originalaufsatz wird aber gewahrt (auch indem dieselbe Notation verwendet wird).

Betrachtet wird ein 2–Personen Nullsummenspiel ohne Zufallszüge mit endlichem Strategienraum in extensiver Form. Das von Zermelo durchgängig verwendete Beispiel ist *Schach*.

[1] Auch Schwalbe and Walker (1999) weisen auf diese Unterschiede hin.

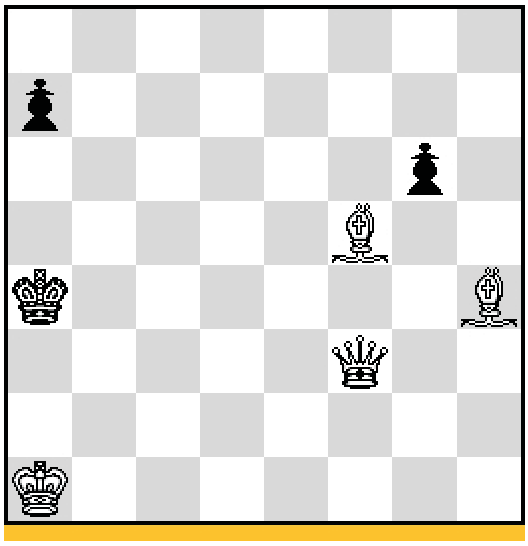

Abbildung 1: Endspiel.

Zermelo behandelt folgende Fragestellungen: Bestimmung/Definition des *Wertes einer beliebigen möglichen Position* für einen Spieler und des *bestmöglichen Zugs*.

Man weiß im Schach (sog. Schachprobleme): In besonderen Positionen kann der Spieler Matt erzwingen, siehe dazu bspw. die Spielkonstellation in Abbildung 1.[2]

Gilt das auch allgemeiner?

Zermelo stellt also die Frage nach der Definition und Existenz von *strikt dominanten Strategien* (am Beispiel des Schachspiels).

Die Strategien, die beide Spieler wählen können, führen in einem endlichen Spiel nur zu endlich vielen möglichen (Spiel-)Positionen.[3]

Definition 1 (Positionen) *1. Sei* $P := \{p_i : i = 1, \dots k\}$ *die endliche*

[2]Der Schachinteressierte möge prüfen, dass das abgebildete Endspiel folgende Lösung hat: Dd5 gf, Dc4+ Ka5, Ld8# oder Dd5 g5, Dc5 gh, Lc2# oder Dd5 Kb4, Le7+ Kc3, Dd3#.

[3]Zermelo verwendet noch nicht klar den Begriff der Geschichte des Spiels, erklärt aber, dass nicht allein die momentane Spielposition wichtig ist, sondern auch, was die Spieler noch getan haben (z.B. Rochade), aber nicht, welche Zugfolge zur Position geführt hat.

Menge möglicher Positionen*, d.h. im Graphen: die Menge der Entscheidungsknoten;*[4]

2. *Ein* Endspiel $\mathfrak{q} := (q, q_1, q_2, ...)$ *ausgehend von der Position* $q \in P$ *sei eine Folge von Positionen, bei denen* $q_{\lambda-1}$ *in* q_λ *durch einen regelkonformen Spielzug übergeht.*[5] *Die* Menge aller Endspiele *sei bezeichnet mit* Q*.*

Weil das Spiel endlich ist, ist jedes Element $\mathfrak{q} \in Q$ eine endliche Folge. Beim Schach kann das Spiel nur mit 'Matt' oder 'Remis' enden.[6]
Zermelo gibt nun eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine strikt dominante Strategie:

Proposition 1 (Zermelo) *Gegeben eine Position* q *(ein Entscheidungsknoten). Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Strategie, die für Spieler 1 nach höchstens* r *Zügen zum Gewinn führt ist,* $U_r(q) \neq \emptyset$*.*

Dabei bezeichnet $U_r(q) \subset Q$ die Teilmenge aller Endspiele $\mathfrak{q}$, die in höchstens r Zügen enden, d.h. keine Folge hat mehr als r Glieder.
Diese Menge hat folgende Eigenschaft: Für $\mathfrak{q} := (q, q_1, q_2, ..., q_s) \in U_r(q)$ $(s \leqslant r)$ muss folgen: $\mathfrak{q}' := (q, q_1, q_2, ..., q_t) \in U_r(q)$ $(t \leqslant r)$, wobei $\mathfrak{q}'$ aus $\mathfrak{q}$ entsteht, indem Spieler 2 statt q_λ den zulässigen Zug q'_λ gewählt hat.
Letztere Bedingung sagt gerade aus, dass ein Spieler eine strikt dominante Strategie haben muss, also eine Strategie die zum Gewinn führt unabhängig von der Strategie des Gegenspielers, $U_r(q)$ ist die Menge der strikt dominanten Strategien, die nach r Zügen zum Gewinn für Spieler 1 führen.
Für solche Untermengen $U_r(q)$ gilt:

[4]In moderner Terminologie: $B = (K, A)$ ein Spielbaum mit endlicher Knotenmenge K.

[5]In der Terminologie der extensiven Form muss für die zu der Folge von Knoten $(q, q_1, q_2, \ldots)$ gehörenden Kanten $(a, a_1, a_2, \ldots)$ gelten: $b(a) = q$, $e(a) = q_1$, $b(a_i) = q_i$, $e(a_i) = q_{i+1}$, für $i = 1, 2, \ldots$.

[6]Zermelo weicht hier zwar von seiner ursprünglichen Annahme eines endlichen Spiels ab, wertet aber unendlich fortlaufende Spiele als 'Remis'. Wir können uns auf endliche Spiele beschränken, insbesondere weil ein Spiel beim Schach als beendet gilt, wenn eine Position wiederholt aufgetreten ist.

Bemerkung 1 *Es gilt:* $U_r(q) \subset U_{r'}(q)$*, für* $r < r'$*,* $U_r(q) \subset U_t(q)$*, wobei* t *die höchste Anzahl von Zügen bezeichnet nach der das Spiel überhaupt enden kann.*

Ist $U_t(q) = \emptyset$, so existiert keine strikt dominante Strategie. Gegeben der Gegenspieler ist rational, kann er höchstens 'Remis' erreichen.
Er kann erreichen bis in s Zügen nicht geschlagen zu werden, wenn eine Menge $V_s(q) \in Q$ existiert, mit:

$$\forall \mathsf{q} \in V_s(q) \text{ gilt: alle } q_t,\ t \leqslant s \text{ sind keine Endknoten.} \tag{1}$$

5 Zusammenfassung

Jedem Entscheidungsknoten $q \in P$ sind zwei Familien von Mengen zugeordnet $(U_r(q))_{r=1}^t$ und $(V_s(q))_{s=1}^t$. Existiert $1 \leqslant r^* \leqslant t$: $U_{r^*}(q) \neq \emptyset$, so existiert eine strikt dominante Strategie für Spieler 1. Gilt $U_r(q) = \emptyset$, $\forall 1 \leqslant r \leqslant t$ und $V(q) \neq \emptyset$, so existiert keine strikt dominante Strategie. Gilt $U(q) = \emptyset$ und $V(q) = \emptyset$, so hat Spieler 2 eine strikt dominante Strategie.
Zermelo hat also tatsächlich am ehesten folgende Aussage getan:

Satz 1 (Zermelo (1913)) *In endlichen 2–Personen Nullsummenspielen (wie etwa Schach) existiert entweder eine dominante Strategie für einen Spieler, dann kann dieser unabhängig von der Strategie des anderen gewinnen oder eine solche Strategie existiert nicht.*

Übertragen auf das Schachspiel hieße das: entweder hat Weiß eine dominante Strategie oder Schwarz, dann kann er das Spiel unabhängig vom Spiel des Gegners gewinnen oder keiner der beiden hat eine solche Strategie.
Die Innovation besteht also in der ersten Formalisierung des Begriffs der Dominanz.

6 Beweis des Satzes von Zermelo

Zermelo selbst hat seine Aussage nicht streng bewiesen. Der folgende Beweis folgt der Darstellung von Eichberger (1993) und verwendet Rückwärtsinduktion.

Beweis: Sei Γ ein endliches Spiel, d.h. es existiert eine natürliche Zahl T, nach der das Spiel spätestens an einem finalen Knoten angelangt ist. Keine Strategienkombination führt also zu mehr als T Zügen.

Betrachte nun das folgende modifizierte Spiel $\Gamma'(t)$, $t \in \mathbb{N}, t \leqslant T$. $\Gamma'(t)$ entspreche dem Spiel Γ außer, dass es nach t Zügen automatisch beendet wird (Auszahlung jedes Spielers ist 0 wie bei einem Remis).

Der Beweis verwendet nun vollständige Induktion nach t:

1. Induktionsanfang: Spieler 1 ziehe zuerst (das ist natürlich o.E.d.A, weil die Nummerierung willkürlich ist). Dann gilt:

   - entweder Spieler 1 hat eine dominante Strategie oder
   - Spieler 2 hat eine dominante Strategie oder
   - weder Spieler 1 noch Spieler 2 haben eine dominante Strategie, d.h. beide Spieler können ein Unentschieden erzwingen.

   Also gilt die Aussage für $\Gamma'(1)$.

2. Induktionsschritt, $t - 1 \to t$: Hat Spieler 1 eine dominante Strategie in $\Gamma'(t-1)$, so gilt dies natürlich auch für $\Gamma'(t)$. Ebenso, falls Spieler 2 in $\Gamma'(t-1)$ eine dominante Strategie hat. Falls beide Spieler in $\Gamma'(t-1)$ ein Unentschieden erzwingen können, dann gilt: falls Spieler 1 am Zug ist:

   - entweder Spieler 1 kann mit diesem Zug den Sieg erzwingen oder
   - Spieler 2 kann mit seinem Zug den Sieg erzwingen oder
   - weder Spieler 1 noch Spieler 2 können den Sieg erzwingen, d.h. beide Spieler können ein Unentschieden erzwingen.

   (analog für Spieler 2).

■

Literatur

Robert J. Aumann. *Game Theory.* The New Palgrave: Game Theory. MacMillan Press, London, 1989.

Jürgen Eichberger. *Game Theory for Economists.* Academic Press, San Diego and others, 1993.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, Oxford, 1995.

Ulrich Schwalbe and Paul Walker. Zermelo and the early history of game theory, 1999.

Ernst Zermelo. Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 2:501–504, 1913.