**Vilniaus universitetas**

**Matematikos ir informatikos fakultetas**

# Įvadas į statistiką su R

**Remigijus Lapinskas**

http://uosis.mif.vu.lt/~rlapinskas/

**2005 m. rugsėjis**

# Turinys

9. Sprendžiamoji statistika: hipotezių tikrinimas (vienas ėminys)
   9.1. Hipotezės apie proporciją
   9.2. Hipotezės apie vidurkį
   9.3. Pareto skirstinys
   9.4. Hipotezės apie medianą
   9.5. Suderinamumo kriterijai
10. Sprendžiamoji statistika: hipotezių tikrinimas (du ėminiai)
   10.1. Hipotezės apie proporcijas
   10.2. Hipotezės apie požymių nepriklausomumą (dažnių lentelės)
   10.3. Hipotezės apie vidurkius
   10.4. Hipotezės apie "centrų" lygybę
   10.5. Hipotezės apie skirstinių lygybę

# Įvadinės pastabos

Šiame konspekte yra aprašomas komputerinis matematinės statistikos paketas R ir jo taikymai, skirti pradinėms matematinės statistikos savokoms iliustruoti.

Statistiko darbas visuomet buvo susijęs su (dažnai labai dideliais) skaičiavimais, todėl komputerių atsiradimas turėjo milžiniškos įtakos kaip teorinės taip ir praktinės statistikos vystymuisi. Šiuo metu egzistuoja labai daug statistikai skirtų komputerinių paketų, o tarp jų kūrėjų vyksta ganėtinai aštri konkurencija. Tenka pripažinti, kad dabar daugumos populiarių komercinių paketų galimybės yra daugmaž vienodos, o vieno ar kito produkto pasirinkimą dažnai nulemia gamintojo reklaminės veiklos intensyvumas ar aptarnavimo kokybė, kaina, profesiniai interesai ar tiesiog pripratimas.

Programinę įrangą galima klasifikuoti, remiantis įvairiais kriterijais. Jei kalbėtume apie kainą, tai vienai grupei priklauso komerciniai produktai (juos reikia pirkti, "piratinių" kopijų naudojimas yra ir amoralus, ir baudžiamas). Jai priklauso tokie statistiniai paketai kaip SAS, SPSS, Statistica, Statgraphics, S-Plus, Stata, Gauss, Ox, TSP, Minitab, EViews (=Econometric Views) ir t.t. Studentams skirtos šių produktų versijos, kaip taisyklė, kainuoja žymiai pigiau, pvz., ekonometrijai skirto Eviews 4.1 paketo individuali licencija universiteto darbuotojui kainuoja 360 eurų, o jo Student Version 3.1 studentui kainuoja 40 eurų. Kitai grupei priklauso nemokami (free) produktai (dėl suprantamų priežasčių, jie kartais yra menkesnės kokybės). Į šią grupę kartais pakliūna komercinių paketų senesnės versijos (pvz., NCSS 6.0 Junior versija), nekomercinių organizacijų produktai (pvz., Europos Sąjungos statistikos departamento (Eurostat'o) laiko eilučių analizei skirta DEMETRA) arba įvairių entuziastų (arba jų grupių) kūryba (pvz., Herman'o J. Bierens'o ekonometrikai skirtas EasyReg 2000 arba Luke Tierney sukurtas produktas XLISP-STAT). Skyrium stovi pasaulinės (programuojančių) statistikų bendruomenės GNU programos pagrindu[1] kuriamas produktas R) – tai sparčiai vystomas tarptautinis projektas, kuris jau dabar leidžia spręsti praktiškai visus statistikos uždavinius.

Kitas paketų klasifikavimo kriterijus galėtų būti statistinės analizės komandų vykdymo būdas. Dauguma aukščiau išvardintų paketų turi meniu tipo komandų sistemą – norint apskaičiuoti, tarkime, (imties) vidurkį, užtenka pateiktajame komandų sąraše spragtelėti ant **Mean** langelio ir ekrane bus pateiktas skaičiavimo rezultatas. Kito tipo paketuose (programuojamuose paketuose) komandą `mean(x)` komandiniame lange reiktų surinkti pačiam ir tik po to pamatytume rezultatą. Abu būdai turi privalumų ir trūkumų. Pirmasis būdas paprastesnis (nereikia mokytis gana greitai užmirštamų komandų), tačiau antrasis statistikos profesionalui teikia daugiau galimybių. Kartais sakoma: jei jums reikia lentelių ir grafikų (variantas: jeigu mėgstate kiną) – naudokitės pirmojo tipo produktais, o jei statistinės analizės (variantas: jeigu mėgstate skaityti knygas) – antrojo. Pažymėsime, kad kai kurie antrojo tipo produktai (pvz., S-Plus, SAS) dabar turi abi galimybes. Antra vertus, dauguma pirmo tipo produktų dabar irgi turi didesnes ar mažesnes programavimo galimybes (pvz., toks yra SPSS ar Eviews). R iš esmės yra programavimo kalba su specializuota (statistikos reikmėms skirta)

[1] "... The licenses for most software are designed to take away your freedom to share and change it. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change free software – to make sure the software is free for all its users..."

aplinka. Kai kurie iš R vystymo komiteto (The R Development Core Team) narių apskritai mano, kad meniu variantas nereikalingas, tačiau progresas šia kryptimi yra akivaizdus (plg. `library(Rcmdr)`). Šiame konspekte R paketo meniu galimybėmis nesinaudosime[2].

R yra nemokamas (ir labai geros kokybės) produktas[3]. R yra "jaunesnysis" komercinio S-Plus paketo "brolis". Šių dviejų kalbų sintaksė praktiškai ta pati, nors programiniai interpretavimo principai skiriasi. Dauguma S kalba parašytų programų veikia ir R aplinkoje.

R projekto internetinis adresas yra http://www.r-project.org/, tačiau teisingiau būtų kreiptis į vieną iš CRAN (=Central R Archive Network) veidrodinių kopijų (mes paprastai naudosimės http://cran.at.r-project.org/. Ten rasite paskutinę R versiją (šiuo metu R 2.1.1), įvairiems statistikos skyriams skirtas bibliotekas ir kitą informaciją (pvz., įvairių autorių parašytus R vadovus).

Trumpai aprašysime bendrąją konspekto struktūrą. 1 skyriuje yra pateiktos pagrindinės aprašomosios statistikos sąvokos. 2 ir 3 skyriuose skaitytojas ras trumpą R paketo aprašymą ir įvadą į programavimą R kalba. Paprastai, prieš pradedant taikyti statistikos kriterijus, atliekama duomenų priešanalizė – tai aptarta 4, 5 ir 6 skyriuose. 7 skyrius skirtas ribinėms tikimybių teorijos teoremos, tiksliau kalbant, centrinei ribinei teoremai ir didžiųjų skaičių dėsniui. 8 skyriuje aptartos populiacijos parametrų vertinimo procedūros. 9 ir 10 skyriai skirti statistinių hipotezių tikrinimui.

Šis 2005ix variantas yra kiek papildytas 2003ix variantas. Konspektą derėtų atnaujinti, nes nuo 2003 m. R smarkiai pasikeitė. Prie pirmos progos autorius tai ir padarys, tačiau prognozuoti, kada tai įvyks, labai sunku...

[2] Tiksliau sakant, naudosimės tik tomis minimaliomis R grafinių sąsajų (=GUI=Grafical User's Interface) galimybėmis, kurias matome 2.1 pav. antroje eilutėje.

[3] Su įspūdingomis R galimybėmis galite susipažinti interneto puslapiuose http://www.r-bloggers.com/ , http://romainfrancois.blog.free.fr/ , http://zoonek2.free.fr/UNIX/48_R/all.html , http://www.statmethods.net/ , http://r.research.att.com/man/R-intro.html ir t.t. Taip pat naudingas gali būti adresas http://biostat.mc.vanderbilt.edu/s/finder/finder.html ir kiti panašūs.

# 1. Aprašomoji statistika

## 1.1. Keli statistikos uždavinių pavyzdžiai

Panagrinėkime kelis būdingus statistikos uždavinius.

**1.1 pvz.** Norint patikrinti teiginį, kad Lietuvos gyventojų ūgis kasmet didėja, 2000 metais buvo išmatuotas tūkstančio atsitiktinai paimtų vyrų (jų amžius buvo tarp 20 ir 25 metų) ūgis. (Vieno tūkstančio didumo) imtimi vadiname skaičių rinkinį ($x_1$, $x_2$,...,$x_{1000}$) (čia $x_i$ yra *i*-jo vyro ūgis), o panašus (bet tik žymiai didesnis) skaičių rinkinys, kurį gautume išmatavę visus nurodyto amžiaus Lietuvos vyrus, vadinamas populiacija[1]. Panašus tyrimas, bet su 1500 vyrais, buvo atliktas ir 1995 bei 1990 metais. Aišku, kad skaičių turime labai daug (žr. 1.1 lentelę žemiau), todėl norėdami patikrinti mūsų hipotezę, juos turėtume pateikti suprantamu, sutrauktu arba kondensuotu pavidalu. Tuo užsiima aprašomoji (descriptive) statistika. Antra vertus, sakykime, 2000-jų metų vyrų ūgio vidurkis yra didesnis už 1995-jų. Bet ar tai iš tikrųjų reiškia, kad vyrų ūgis padidėjo? Juk gal tik šitam tūkstančiui vyrų vidurkis didesnis, kitam tūkstančiui jis gal būtų mažesnis? Būdus, kurie leidžia imties analizės rezultatus praplėsti visai populiacijai, nagrinėja sprendžiamoji (inferential) statistika.

1.1 lentelė

2000 metų ūgio matavimo rezultatai (duomenų rinkinys `u2000`)

```
  [1]  180 179 174 183 179 179 184 181 179 183 174 184 177 182 181 180 176 183 182
 [20] 181 176 175 176 179 181 178 177 176 180 175 184 181 179 177 184 176 178 183
 [39] 177 181 177 178 181 189 181 176 179 186 183 183 191 175 177 184 174 176 184
 [58] 181 182 179 173 168 178 173 182 174 186 185 182 179 179 173 184 189 176 178
 [77] 183 178 175 180 180 184 176 188 174 178 178 178 180 175 179 179 178 185 180
 [96] 181 177 182 180 179 181 181 179 174 183 179 184 181 177 178 181 178 185 183
[115] 182 188 181 171 176 176 180 180 186 178 183 177 186 185 182 183 189 178 181
[134] 173 181 178 177 181 174 177 192 182 173 177 179 191 180 187 172 186 179 177
[153] 182 180 180 178 185 191 179 181 184 178 185 185 179 178 181 184 178 186 178
[172] 172 186 186 179 186 182 187 184 186 184 188 180 178 189 178 182 183 177 179
[191] 172 185 188 169 181 184 174 174 185 167 181 182 189 185 167 183 187 179 174
[210] 187 178 183 185 183 175 187 167 171 178 183 186 182 180 180 179 183 176 186
[229] 176 178 188 177 185 178 188 181 182 178 178 185 187 182 180 183 180 190 181
[248] 172 183 175 182 189 182 186 178 183 180 178 187 179 181 178 173 177 188 173
[267] 174 179 183 181 188 170 190 183 180 171 169 179 177 184 177 178 175 176 175
[286] 179 183 183 183 177 187 178 181 172 187 180 185 181 178 170 178 177 180 181
[305] 182 186 185 182 176 186 182 175 173 180 181 180 175 175 179 173 174 181 182
[324] 175 181 166 182 179 176 180 176 175 186 189 179 174 181 183 178 187 177 175
[343] 182 178 178 180 180 180 182 186 175 179 188 181 174 176 183 180 179 179 184
[362] 183 183 178 179 180 192 180 183 181 177 184 183 179 184 178 183 178 171 178
[381] 176 185 184 183 181 183 174 181 176 180 176 176 179 182 177 178 175 181 188
[400] 185 170 177 171 175 179 178 182 178 176 179 171 175 176 183 179 176 174 181
[419] 179 182 184 182 182 162 179 172 183 185 186 178 182 192 181 181 175 177 177
[438] 181 188 178 182 178 191 178 177 174 184 179 176 183 175 167 173 181 173 181
[457] 186 182 175 181 179 177 181 176 180 177 170 186 198 184 185 180 182 174 175
[476] 182 176 179 178 176 184 170 177 172 176 185 179 179 175 181 176 187 172 180
[495] 183 176 175 174 187 173 186 180 183 182 181 185 181 182 170 177 183 179 184
[514] 172 168 183 180 172 182 177 188 178 178 182 184 181 177 180 175 177 175 177
[533] 191 182 191 186 185 181 174 184 183 176 180 188 183 173 187 184 182 173 177
[552] 184 177 178 183 179 177 177 171 178 183 181 186 178 177 176 182 179 182 180
[571] 170 176 188 179 179 179 178 177 177 179 188 185 189 189 177 171 189 183 187
[590] 179 176 177 186 185 184 174 179 182 186 187 183 179 181 184 186 179 183 178
[609] 180 182 176 179 170 182 185 181 182 181 182 176 177 189 174 176 179 177 184
[628] 180 179 175 184 180 178 186 179 179 178 172 171 177 178 179 184 180 178 177
[647] 177 186 187 175 175 179 177 178 185 179 176 178 178 185 174 161 177 177 179
[666] 173 178 177 180 181 181 190 183 179 174 177 174 182 181 184 190 179 175 186
[685] 192 181 183 181 181 190 183 174 184 185 187 184 182 185 178 180 183 175 188
```

[1] Atkreipsime dėmesį – populiacija vadinsime ne Lietuvos vyrų rinkinį, bet visų jų ūgio matavimo rezultatų rinkinį

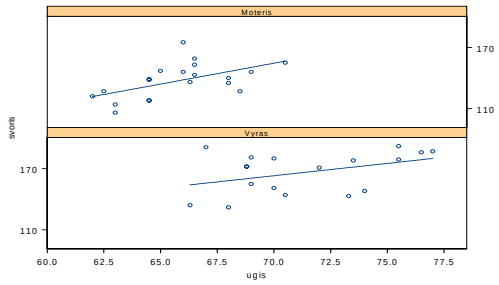
```
[704] 183 174 185 181 179 175 183 182 181 182 182 173 181 177 176 175 175 179 173
[723] 182 186 182 181 169 184 185 182 184 185 178 186 185 180 182 173 174 182 178
[742] 171 184 179 182 177 179 174 182 178 183 177 183 181 178 176 173 177 179 184
[761] 173 181 181 187 179 192 180 180 181 186 171 172 179 175 176 184 181 185 183
[780] 176 184 175 178 179 178 185 172 169 174 187 187 190 171 180 175 180 173 182
[799] 188 178 177 176 174 181 176 178 181 185 181 189 180 174 177 184 176 182 182
[818] 187 176 181 183 180 179 180 178 178 183 186 180 175 178 184 182 182 181 176
[837] 183 179 178 184 172 173 180 180 177 181 177 175 188 179 180 177 188 177 185
[856] 177 178 177 176 180 181 183 169 185 176 177 182 186 180 185 179 177 168 185
[875] 174 190 172 176 188 181 186 177 177 182 177 178 191 182 177 174 175 175 183
[894] 181 173 178 175 191 176 174 180 170 178 176 176 174 180 181 193 180 177 177
[913] 186 177 180 180 180 183 181 180 184 185 176 174 181 176 186 176 179 176 184
[932] 183 176 185 178 178 180 188 181 188 175 187 181 184 183 183 177 174 186 172
[951] 173 180 181 185 176 184 178 169 173 180 181 187 180 185 173 184 174 181 189
[970] 175 174 177 172 175 183 178 179 175 180 179 183 182 175 180 186 179 186 176
[989] 176 174 177 182 180 180 175 191 176 175 177 179
```

**1.2 pvz.** Žemiau yra pateiktas duomenų rinkinio `IQ` dalis (jį radome internete, žr. http://lib.stat.cmu.edu/DASL/Stories/BrainSizeandIntelligence.html). Čia lytis (kintamasis $x_{1i}$) įgyja reikšmes M (=Moteris) arba V (=Vyras), ūgis ($x_{2i}$) užrašytas coliais, svoris ($x_{3i}$) – svarais, o NA (= Not Available) reiškia, kad dėl kažkokių priežasčių matavimo rezultatas nėra žinomas. Šį kartą imtimi vadinsime trejetų rinkinį $((x_{11},x_{21},x_{31}),...,(x_{40,1},x_{40,2},x_{40,3}))$, o pats rinkinys vadinamas trimačiu. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pirmoji komponentė nėra skaičius.

1.2 lentelė
Dalis duomenų rinkinio `IQ`

| | | |
|---|---|---|
| lytis ūgis svoris<br>[1] M 64.5 118<br>[2] V 72.5 NA<br>[3] V 73.3 143<br>[4] V 68.8 172<br>[5] M 65.0 147<br>[6] M 69.0 146<br>[7] M 64.5 138<br>[8] M 66.0 175<br>[9] V 66.3 134<br>[10] V 68.8 172<br>[11] M 64.5 118<br>[12] V 70.0 151<br>[13] V 69.0 155 | [14] M 70.5 155<br>[15] M 66.0 146<br>[16] M 68.0 135<br>[17] M 68.5 127<br>[18] V 73.5 178<br>[19] M 66.3 136<br>[20] V 70.0 180<br>[21] V NA NA<br>[22] V 76.5 186<br>[23] M 62.0 122<br>[24] V 68.0 132<br>[25] M 63.0 114<br>[26] V 72.0 171<br>[27] M 68.0 140 | [28] V 77.0 187<br>[29] M 63.0 106<br>[30] M 66.5 159<br>[31] M 62.5 127<br>[32] V 67.0 191<br>[33] V 75.5 192<br>[34] V 69.0 181<br>[35] M 66.5 143<br>[36] M 66.5 153<br>[37] V 70.5 144<br>[38] M 64.5 139<br>[39] V 74.0 148<br>[40] V 75.5 179 |

Aišku, kad žmogaus svoris priklauso ir nuo ūgio ir nuo lyties. Norėdami susidaryti įspūdį apie šią priklausomybę, šiuos duomenis pateiksime grafiškai (žr. 1.1 pav. žemiau). Paveiksle pateiktos dvi vadinamosios sklaidos diagramos, vyrams ir moterims atskirai, kiekvienoje taip pat išbrėžtos bendrą svorio priklausomybės nuo ūgio tendenciją atspindinčios tiesės.




1.1 pav. Moterų (viršuje) ir vyrų (apačioje) svorio priklausomybės nuo ūgio grafikai

**1.3 pvz.** Marketingo padalinys nori išsiaškinti, kuris iš dviejų naujų gaminių bus labiau perkamas. Kadangi skonis yra pakankamai subjektyvus kriterijus, potencialūs pirkėjai buvo prašomi įvertinti abu gaminius skaičiais nuo 0 iki 4 (jų prasmė paaiškinta lentelėje):

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Labai nepatiko | Nepatiko | Neturiu nuomonės | Patiko | Labai patiko |

Kiekvieną gaminį vertino po 15 pirkėjų, štai jų atsakymai:
pirmojo gaminio įverčiai: 3 2 3 0 1 0 2 1 0 0 4 3 2 0 3
antrojo gaminio įverčiai: 4 2 2 0 3 3 1 2 2 4 3 2 3 2 2

Atrodo, kad antrasis gaminys vertinamas geriau, tačiau kaip tai pagrįsti? Vienas iš būdų yra toks - apjunkime abi imtis į vieną ir išdėstykime įverčius didėjimo tvarka: 0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4. Jei pirmasis gaminys būtų tiek pat geras kaip ir antrasis, tai jo įverčiai (jie pabraukti) būtų daugmaž tolygiai išsidėstę jungtinėje imtyje. Matome, kad daugiau pabrauktų įverčių yra kairėje, todėl matyt geresnis yra antrasis produktas. Deja, tikslaus atsakymo į šį klausimą teks palaukti iki 10 skyrelio (taikysime Vilkoksono rangų sumų testą, žr. 10.2 pvz.).

**1.4 pvz.** 112 kritiškos būsenos ligonių lentelėje `šokas` suklasifikuoti pagal du požymius: jei pacientas į ligoninę pakliuvo šoko būsenoje, tai (žr. 1.3 lentelę) Šokas=1, priešingu atveju – 0; jei pacientas ligononėje mirė – 1, priešingu atveju – 0. Šiame pavyzdyje "skaičiais" 0 ir 1 iš tikrųjų yra užšifruoti žodžiai ar netgi (būseną aprašantys) sakiniai – aišku, kad, tarkime, skirtumas 1-0 čia jokios prasmės neturi.

1.3 lentelė
Duomenų rinkinys `šokas`

| | Šokas | Ar mirė? | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 39 | 0 | 0 | 78 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 40 | 0 | 0 | 79 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 41 | 1 | 1 | 80 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 42 | 1 | 1 | 81 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 43 | 0 | 0 | 82 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 44 | 0 | 0 | 83 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 45 | 1 | 1 | 84 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 46 | 1 | 1 | 85 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 47 | 0 | 0 | 86 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 48 | 0 | 0 | 87 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 49 | 0 | 0 | 88 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 89 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 0 | 51 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 52 | 1 | 0 | 91 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 53 | 1 | 1 | 92 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 54 | 0 | 0 | 93 | 1 | 1 |
| 17 | 0 | 0 | 55 | 1 | 0 | 94 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 0 | 56 | 1 | 1 | 95 | 1 | 1 |
| 19 | 0 | 0 | 57 | 0 | 0 | 96 | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 58 | 0 | 0 | 97 | 1 | 1 |
| 21 | 1 | 0 | 59 | 1 | 1 | 98 | 1 | 1 |
| 22 | 1 | 1 | 60 | 1 | 0 | 99 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 0 | 0 | 61 | 0 | 0 | 100 | 1 | 1 |
| 24 | 1 | 1 | 62 | 1 | 0 | 101 | 1 | 1 |
| 25 | 1 | 1 | 63 | 1 | 0 | 102 | 1 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 64 | 1 | 1 | 103 | 0 | 0 |
| 27 | 1 | 1 | 65 | 0 | 0 | 104 | 1 | 0 |
| 28 | 1 | 0 | 66 | 0 | 0 | 105 | 1 | 0 |
| 29 | 1 | 0 | 67 | 0 | 0 | 106 | 1 | 1 |
| 30 | 1 | 0 | 68 | 1 | 1 | 107 | 1 | 1 |
| 31 | 0 | 1 | 69 | 0 | 0 | 108 | 1 | 0 |
| 32 | 0 | 0 | 70 | 1 | 0 | 109 | 1 | 1 |
| 33 | 0 | 0 | 71 | 1 | 1 | 110 | 1 | 1 |
| 34 | 1 | 0 | 72 | 1 | 1 | 111 | 0 | 0 |
| 35 | 1 | 0 | 73 | 1 | 0 | 112 | 1 | 1 |
| 36 | 0 | 1 | 74 | 1 | 1 | | | |
| 37 | 1 | 0 | 75 | 1 | 1 | | | |
| 38 | 1 | 0 | 76 | 0 | 0 | | | |

Štai tipiškas klausimas: ar priklauso paciento likimas nuo to, su šoku ar be jo, jis buvo atgabentas į ligononę? Paprastai tokie, kokybiniai, duomenys sumuojami požymių sąveikos (kitaip - dažnių) lentelėje. Atrodo, kad šoko buvimas turi didelę įtaką ligo-

Požymių sąveikos lentelė

| | | Ar mirė? | | Eilučių suma |
|---|---|---|---|---|
| | | Ne | Taip | |
| Šokas | Nėra | **35** | **2** | **37** |
| | Yra | **29** | **46** | **75** |
| Stulpelių suma | | **64** | **48** | **112** |

nio likimui, tačiau tai pagrįsti galėsime tik vėliau (žr. 10.1 užduotį).

## 1.2. Kintamųjų tipai

Pereisime prie kiek nuoseklesnio dėstymo. Vieno populiacijos objekto stebėjimo (matavimo) rezultatas vadinamas įrašu (įrašų kiekis vadinamas imties dydžiu). Tuo atveju, kai matuojame tik vieną parametrą (pvz., ūgį), įrašas turės vienintelę komponentę, o pats stebimasis dydis (ir pati imtis) vadinamas vienmačiu. Jei mums rūpi kelios stebimojo objekto charakteristikos (pvz., lytis, ūgis ir svoris), įrašą sudarys $p$ komponenčių (paminėtuoju atveju $p$=3), o pats stebimasis dydis (ir imtis) vadinamas $p$-mačiu.

Komponentes sudaro įvairių tipų kintamieji. Dažniausiai sutinkami **skaitiniai** (kitaip: kardinalieji ar kiekybiniai) kintamieji, jie dar skirstomi į tolydžiuosius (temperatūra, tūris, laikas,...) ir diskrečiuosius (vaikų šeimoje skaičius, avarijų ar klientų per dieną skaičius,...). Bet kuris iš šių tipų skirstomas dar į dvi grupes – santykinius (svoris, ūgis ir pan.; prasmę turi ne tik svorių skirtumas, bet ir santykis) ir skirtuminius (temperatūra, IQ, data; skirtumai turi prasmę, tačiau santykiai - ne). Dydžio priskyrimas vienai ar kitai grupei iš esmės priklauso nuo to, galime ar ne įvesti prasmingą nulį. Santykiniams kintamiesiams teiginys pavidalo: Jonas (60 kg) yra du kartus sunkesnis už mažąjį Augustą (30 kg), yra teisingas (nes, kokius svorio vienetus beįvestume, sąvoka "svoris lygus nuliui" reiškia tą patį), tačiau teigti, kad šiandien (+20$^{o}$C) yra dvigubai šilčiau negu vakar (+10$^{o}$C) yra neteisinga, nes, pvz., Farenheito skalėje šios tempera-

tūros užrašomos kaip +68$^{o}$F ir +50$^{o}$F. Panašiai yra su intelektualumo koeficientu IQ (nes psichologai nesutaria, ką reiškia IQ=0) ar su data (paprastai atskaitos pradžia (pvz., Kristaus gimimas) yra susitarimo reikalas). Antra vertus, teiginys, kad futbolo rungtynių kėlinys trunka du su puse karto ilgiau negu krepšinio, yra teisingas (laiko momentų (ar temperatūrų) skirtumas yra santykinis kintamasis, nes sąvoka "įvykis truko 0 laiko" yra vienareikšmiškai suprantamas).

Kitą dydžių klasę sudaro **ranginiai** (kitaip: tvarkos arba ordinalieji ( lot. ordinatio – sutvarkymas)) kintamieji (socialinė grupė, išsimokslinimas, ...). Tarkime, kad keturių komandų turnyre komandos U, V ir Z po pirmojo rato surinko atitinkamai 45, 16 ir 18 taškų. Kadangi 0 yra natūrali vertinimo skalės pradžia, taškų skaičius yra skaitinis santykinis kintamasis. Antra vertus, sporto esmė yra kuo aukštesnė vieta, todėl komandas galima išdėstyti pagal užimtą vietą. Kitais žodžiais, U yra 1-ji, V – 3-ji, o Z – 2-ji komanda, tačiau dabar skaičiai 1, 2, ir 3 yra komandos vieta arba rangas. Tiesą sakant, tai netgi ne skaičiai, o simboliai, komandas mes galime pavadinti auksine, sidabrine arba bronzine (A, S ir B). Jei tartume, kad pirmenybėse buvo ir antrasis ratas, kuriame komandos surinko atitinkamai 28, 30 ir 12 taškų, tai aišku, kad jų taškus galima (ir reikia) sudėti, tačiau simbolių (ranginių kintamųjų) A, S ir B suma prasmės neturi.

| | 1-as ratas | 2-as ratas | Galutinis rezultatas |
|---|---|---|---|
| U | 45 | 28 | 73 |
| | A | S | A |
| V | 16 | 30 | 46 |
| | B | A | S |
| Z | 18 | 12 | 30 |
| | S | B | B |

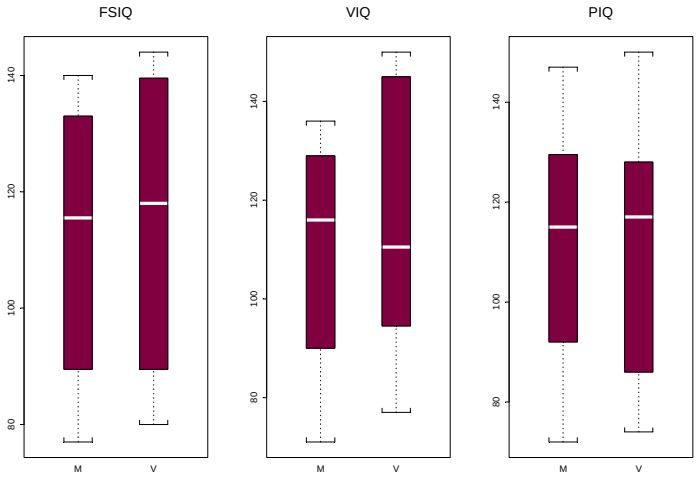
Trečią didelę dydžių klasę sudaro **vardiniai**[2] (kitaip: kategoriniai, kokybiniai arba nominalieji (iš nomen - lot. vardas)) kintamieji (akių spalva, socialinė grupė, automobilio gamintojo vardas,...). Šiuo atveju jokio natūralaus išdėstymo "didėjimo tvarka" nėra. Štai būdingas uždavinys: ar vyrų ir moterų intelektualumo koeficientas IQ toks pat? Žemiau yra pateikta aukščiau minėto duomenų rinkinio `IQ` dalis:

| lytis | FSIQ | VIQ | PIQ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 133 | 132 | 124 | V | 83 | 83 | 86 |
| V | 140 | 150 | 124 | V | 97 | 107 | 84 |
| V | 139 | 123 | 150 | M | 135 | 129 | 134 |
| V | 133 | 129 | 128 | V | 139 | 145 | 128 |
| M | 137 | 132 | 134 | M | 91 | 86 | 102 |
| M | 99 | 90 | 110 | V | 141 | 145 | 131 |
| M | 138 | 136 | 131 | M | 85 | 90 | 84 |
| M | 92 | 90 | 98 | V | 103 | 96 | 110 |
| V | 89 | 93 | 84 | M | 77 | 83 | 72 |
| V | 133 | 114 | 147 | M | 130 | 126 | 124 |
| M | 132 | 129 | 124 | M | 133 | 126 | 132 |
| V | 141 | 150 | 128 | V | 144 | 145 | 137 |
| V | 135 | 129 | 124 | V | 103 | 96 | 110 |
| M | 140 | 120 | 147 | | | | |

[2] Ranginiai ir vardiniai kintamieji visuomet diskretūs.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 96 | 100 | 90 | V | 90 | 96 | 86 |
| M | 83 | 71 | 96 | M | 83 | 90 | 81 |
| M | 132 | 132 | 120 | M | 133 | 129 | 128 |
| V | 100 | 96 | 102 | V | 140 | 150 | 124 |
| M | 101 | 112 | 84 | M | 88 | 86 | 94 |
| V | 80 | 77 | 86 | V | 81 | 90 | 74 |
| | | | | V | 89 | 91 | 89 |

Čia Lytis yra vardinis, o FSIQ (Full Scale IQ), VIQ (Verbal IQ) ir PIQ (Performance IQ) yra skaitiniai kintamieji. Duomenis reiktų sugrupuoti (atskirai vyrams ir moterims), o po to juos palyginti. Pasirodo, kad apskritai (žr. 1.2 pav. žemiau; stačiakampių diagramų paaiškinimus žr. 4.2.3 skyrelį) vyrų IQ yra didesnis, tačiau pagal VIQ, t.y. verbalinį (žodinį) IQ testą, paremtą keturiais Wechslerio (1981) potesčiais, geriau atrodo moterys.




1.2 pav. Moteris ir vyrus lyginame pagal tris intelektualumo koeficiento (IQ) testus; juodo stačiakampio viduje esanti balta linija žymi imties "centro" padėtį

Mes susipažinome su įvairiomis matavimo skalėmis. Vaizdžiai kalbant, blogiausia yra vardinė, toliau "gerėjimo" tvarka eina ranginė, skirtuminė ir santykinė skalės.

Vardinių kintamųjų statistinė analizė paprastai apsiriboja narių skaičiaus grupėse (counts) registravimu (kiek yra vyrų ir kiek moterų su IQ didesniu nei 100?) arba jų palyginimu (ar teisybė, kad tokių moterų yra daugiau?).

Nagrinėdami ranginius kintamuosius, "centrą" paprastai nusakome mediana (žr. žemiau). Šiuos kintamuosius galime analizuoti, taikydami visus statistinius metodus, pagrįstus rangais.

Kadangi intervaliniams kintamiesiems yra prasmingos aritmetinės operacijos, tai kartu su mediana, "centrą" galime charakterizuoti ir vidurkiu (žr. žemiau). Galime taip pat skaičiuoti imties standartą, Pirsono koreliacijos koeficientą, taikyti Stjudento kriterijų ir daug kitų statistinių metodų (santykiniams ir intervaliniams kintamiesiems taikomos tos pačios statistinės procedūros).

**1.1 UŽDUOTIS.** 1.1 skyrelyje pateikti keturi duomenų rinkinių pavyzdžiai. Nustatykite visų juose pateiktų kintamųjų tipus.

**1.2 UŽDUOTIS**. Klasifikuokite šiuos kintamuosius:

a) Lytis
b) Pajamos
c) Ūgis
d) Rasė
e) Amžius
f) Šeimyninė padėtis
g) Vaikų skaičius šeimoje
h) Mokinio klasė (mokykloje)
i) Religija
j) Svoris
k) Užimta vieta lenktynėse
l) Atestato vidurkis
m) Darbuotojų skaičius įstaigoje
n) Karinis laipsnis
o) Kalendoriaus data

## 1.3. Imtys ir jų grafinės charakteristikos

Intuityvus atsitiktinio dydžio (a.d.) apibrėžimas galėtų būti toks: tai skaitinis dydis, kurio reikšmių nei paaiškinti, nei prognozuoti (pagal kokio kito dydžio ar jo paties ankstesnes reikšmes) negalime. Pavyzdžiui, jei nagrinėjame 20-25-mečių Lietuvos vyrų ūgį $X$, tai $k$-ojo už durų stovinčio vyro ūgis yra a.d. $X_k$ (laikome, kad atsitiktiniai dydžiai $X_k$ yra tarpusavyje nepriklausomi, o visų jų skirstinys yra toks pat kaip ir $X$; rinkinys $(X_1,...,X_n)$ vadinamas atsitiktine imtimi). Antra vertus, jei šis vyras įėjo vidun, tai jo ūgio matavimo rezultatas yra konkreti šio a.d. realizacija, $x_k$ ($n$ vyrų matavimo rezultatą $(x_1,...,x_n)$ vadiname (konkrečiąja) imtimi). Norėdami rasti visas a.d. $X$ charakteristikas[3], turėtume išmatuoti visus Lietuvos vyrus, tačiau mes žinome tik konkrečią baigtinę imtį. Aišku, kad jis tik apytiksliai nusako a.d. $X$. Jei imtis nėra didelė, jos reikšmes galėtume tiesiog išvardinti, tačiau jei imties dydis yra dešimtys ar šimtai (plg. 1.1 pvz.), šis sąrašas mažai ką sako. Reikia ieškoti kitokių stebimojo atsitiktinio dydžio charakteristikų.

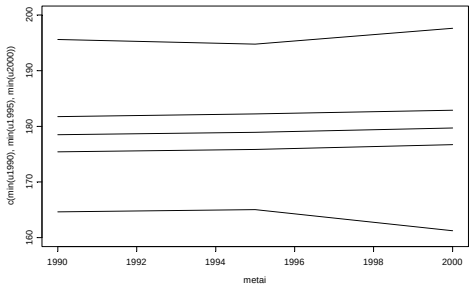
Nagrinėkime vienmatę skaitinę imtį $(x_1, x_2,..., x_n)$. Perrašę ją didėjimo tvarka, gautume naują objektą, vadinamąją variacinę eilutę: $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ , $x_1^* \le x_2^* \le ... \le x_n^*$. Skirtumas tarp didžiausio imties nario $x_n^*$ ir mažiausio $x_1^*$ vadinamas imties pločiu. Vidurinysis variacinės eilutės narys vadinamas mediana (jei imtis turi tris elementus, tai mediana bus $x_2^*$, tačiau jei keturis – tai $(x_2^* + x_3^*)/2$). Apatiniu (pirmuoju) kvartiliu $Q_1$ vadiname visų variacinės eilutės elementų, ne didesnių už medianą, medianą, antruoju (žymėsime $Q_2$) - pačią medianą, o viršutiniu (trečiuoju) kvartiliu $Q_3$ – elementų, ne mažesnių už medianą, medianą; skaičius *iqd* = $Q_3$-$Q_1$ vadinamas tarpkvartiliniu

[3] Pavyzdžiui, kokį procentą Liertuvos vyrų sudaro vyrai, aukštesni nei 200 cm? Arba – koks vidutinis Lietuvos vyro ūgis?

pločiu (*iqd* - nuo interquartile distance). Štai 1.1 pvz. duomenų variacinės eilutės dalis:

```
  [1]  161 162 166 167 167 167 167 168 168 168 169 169 169 169 169 169 170 170 170
 [20] 170 170 170 170 170 170 171 171 171 171 171 171 171 171 171 171 171 171 172
 ..............................................................................
[248] 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177
[267] 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177 177
 ..............................................................................
[495] 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180
[514] 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180 180
 ..............................................................................
[704] 182 182 182 182 182 182 182 182 182 182 182 182 182 182 183 183 183 183 183
[723] 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183 183
 ..............................................................................
[970] 189 189 189 189 189 189 189 189 190 190 190 190 190 190 190 191 191 191 191
[989] 191 191 191 191 191 192 192 192 192 192 193 198
```

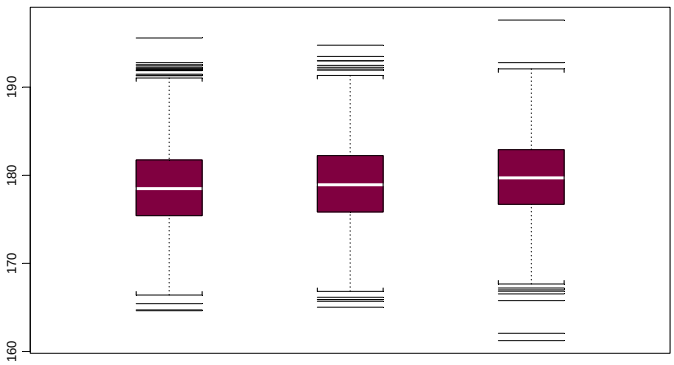
Dažnai imtis charakterizuojama “penkių skaičių santrauka” – be trijų kvartilių dar pateikiamas imties minimumas ir maksimumas. Štai visų trijų tyrimų rezultatai:




1.3 pav. Trijų santraukų grafikas

| | 1990 | 1995 | 2000 |
|---|---|---|---|
| Minimumas | 165 | 165 | 161 |
| Apatinis kv. | 175 | 176 | 177 |
| **Mediana** | **178** | **179** | **180** |
| Viršutinis kv. | 182 | 182 | 183 |
| Maksimumas | 196 | 195 | 198 |
| | | | |
| Plotis | 31 | 30 | 37 |
| iqd | 7 | 6 | 6 |

Aišku, kad mediana yra tam tikra prasme centrinė, vidutinė ar vidurinė imties reikšmė. Imties reikšmių išsibarstymą nusako jo plotis arba *iqd* (pastaroji charakteristika – stabilesnė, t.y., vienodesnė skirtingose imtyse). Penkių skaičių santrauka gana vaizdžiai charakterizuoja turimą imtį, ja remiantis jau galima būtų daryti kai kurias išvadas apie 1990-jų, 1995-jų ir 2000-jų metų vyrų populiacijas, tačiau turimus duomenis patogiau vaizduoti stačiakampe diagrama (arba stačiakampiu su žandenomis (ar ūsais), boxplot, box and whisker plot).




1.4 pav. 1990, 1995 ir 2000 m. vyrų ūgio imčių stačiakampės diagramos

Tamsaus stačiakampio viduryje esanti linija žymi medianą, tamsaus stačiakampio apačia – apatinį kvartilį $Q_1$, o viršus – viršutinį kvartilį $Q_3$, prie stačiakampio taškine linija (žandenomis) prijungtos užlenktos atkarpos arba sutampa su ekstremaliomis reikšmėmis, arba lygios atitinkamai $Q_1$-1,5*iqd* ir $Q_3$+1,5*iqd* (žiūrint kuri arčiau medianos); dar toliau esančios atkarpos žymi reikšmes vadinamas išskirtimis. Jei duomenys turi Gauso skirstinį, maždaug 99,3% duomenų turi būti tarp žandenų.

Jeigu 2000 m. duomenis suskaidytume į keturias grupes, tai jie demonstruotų nemažesnį kintamumą negu aukščiau buvusieji:

```
Min             166  162  161  168
1-asis kv.      178  176  177  176
Mediana         180  179  180  180
3-asis kv.      183  182  183  183
Max             192  198  192  193
```

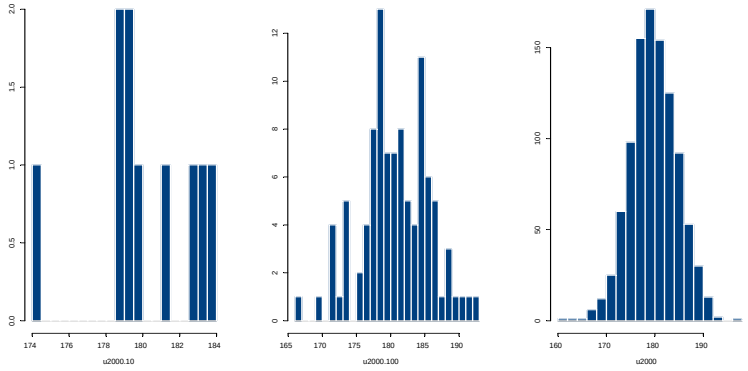
Kadangi šį kartą mes tikimės, kad šie skirtumai neesminiai, tai kuo remdamiesi teigiame, kad ankstesni duomenys įrodo ūgio didėjimo tendenciją? Į šiuos klausimus atsakysime vėliau, tai tipiškas sprendžiamosios statistikos uždavinys.

Svarbi imties charakteristika yra įvairių reikšmių dažniai. Jei reikšmių yra daug, geriau iš pradžių duomenis sugrupuoti. Žemiau yra pateikta visų 2000 m. vyrų ūgio dažnių lentelė (duomenys sugrupuoti į 2 cm pločio intervalus, apatinėje eilutėje nurodyta, kelių vyrų iš duomenų rinkinio `u2000` ūgis priklauso atitinkamai grupei):

1.4 lentelė.
2000 m. vyrų ūgio dažnio lentelė

| 160-162 | 162--164 | 164-166 | 166-168- | 168-170 | 170-172 | 172-174 | 174-176 | 176-178 | 178-180 | 180-182 | 182-184 | 184-186 | 186-188 | 188-190 | 190-192 | 192-194 | 194-196 | 196-198 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 6 | 12 | 25 | 60 | 98 | 155 | 171 | 154 | 125 | 92 | 53 | 30 | 13 | 2 | 0 | 1 |

Ši lentelė gana didelė, ją lengviau suvokti, pavaizdavus grafiškai – tai vadinamoji histograma. *k* -jo histogramos stulpelio aukštis yra lygus grupės narių skaičiui $n_k$ (tai vadinamieji *dažniai*, jų suma lygi imties dydžiui *n*) arba santykiui $n_k / n$ (tai vadinamieji *santykiniai dažniai*, jų suma visada lygi vienetui).

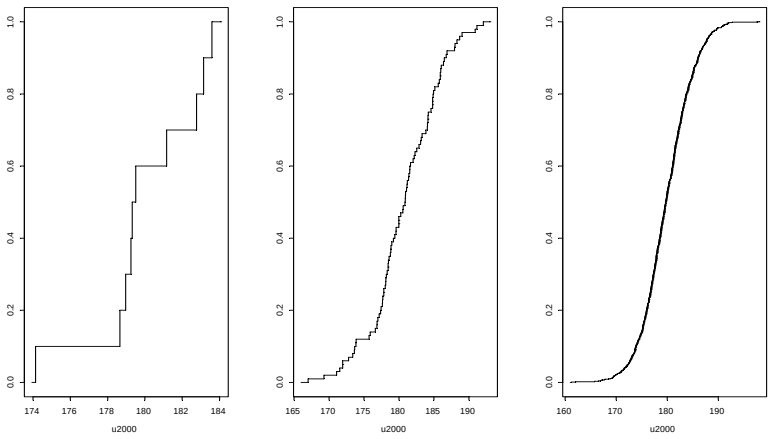



1.5 pav. 2000 m. ūgio reikšmių histogramos:
kairėje – pirmųjų dešimties, viduryje – pirmojo šimto, dešinėje – visų vyrų
(didėjant imties dydžiui histograma darosi vis reguliaresnė)

Iš histogramos matyti, kokios imties reikšmės yra dažniausiai sutinkamos[4] (arba - labiausiai tikėtinos), reikšmių ribos, simetriškumas ir pan.

Tikslesnė (nes imties reikšmės negrupuojamos), bet ne tokia vaizdi, yra sukauptųjų santykinių dažnių kreivė (kitaip: empirinė (reikšmių) skirstinio funkcija $F_n$): kiekvienam $x$ ši funkcija lygi mažesnių už $x$ imties reikšmių skaičiui, padalintam iš $n$. Ši funkcija yra pastovi tarp gretimų variacinės eilutės reikšmių, o taške $x_k$ apibrėžiama taip: jei reikšmė $x_k$ imtyje sutinkama $n_k$ kartų, tai $F_n$ šiame taške daro dydžio $n_k/n$ šuolį aukštyn.

**1.3 UŽDUOTIS.** 1.6 pav. dešiniame grafike yra išbrėžta visų 2000 m. vyrų ūgio empirinė skirstinio funkcija. Remdamiesi šių duomenų variacine eilute, raskite $F_{1000}$ reikšmes taškuose 170, 171, 198 ir 200.




1.6 pav. 2000 m. vyrų ūgio sukauptųjų santykinių dažnių kreivė:
kairėje – pirmųjų dešimties, viduryje – pirmojo šimto, dešinėje – visų vyrų
(didėjant imties dydžiui funkcija $F_n$ darosi vis reguliaresnė)

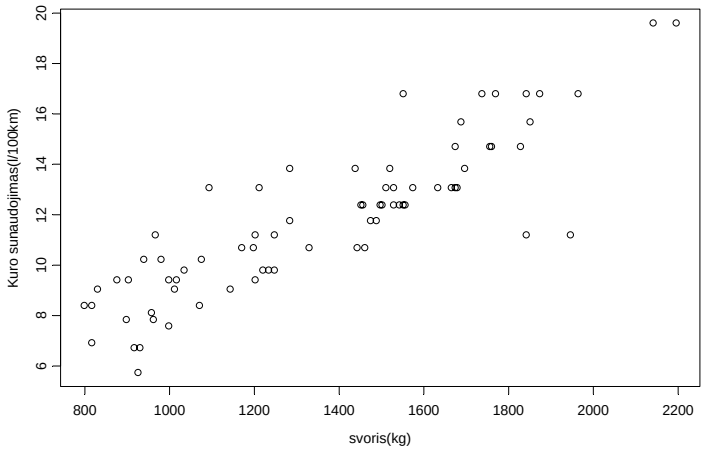
Nauji uždaviniai atsiranda, nagrinėjant **dvimačias** imtis. Dabar labai dažnai mums rūpi ne tik kiekvienos komponentės individualios reikšmės, bet ir jų ryšiai. Žemiau pateiktas 1979 m. surinktų duomenų masyvas `auto`, kuriame pateikti duomenys apie 74 automobilių modelių tris charakteristikas: kuro sunaudojimą (`sun`, l/100km), svorį (`svo`, kg) ir cilindrų tūrį (`tur`, cm$^3$). Vėl susiduriame su būdinga padėtimi – duomenų daug, todėl susidaryti įspūdį apie jų tarpusavio priklausomybę yra sunku.

| | sun | svo | tur |
|---|---|---|---|
| Amc Concord | 10 | 1329 | 1982 |
| Amc Pacer | 13 | 1519 | 4227 |
| Amc Spirit | 10 | 1197 | 1982 |
| Audi 5000 | 13 | 1283 | 2146 |
| Audi Fox | 10 | 938 | 1589 |
| BMW 320i | 9 | 1202 | 1982 |
| Buick Century | 11 | 1474 | 3211 |
| Buick Electra | 15 | 1850 | 5735 |
| Buick Le Sabre | 13 | 1664 | 3785 |
| Buick Opel | 9 | 1011 | 1818 |
| Buick Regal | 11 | 1487 | 3211 |
| Buick Riviera | 14 | 1759 | 3785 |
| Linc. Cont. Mark V | 19 | 2140 | 6554 |
| Linc. Versailles | 16 | 1737 | 4948 |
| Mazda Glc | 7 | 898 | 1409 |
| Merc Bobcat | 10 | 1170 | 2294 |
| Merc Cougar | 16 | 1841 | 4948 |
| Merc Cougar XR-7 | 16 | 1873 | 4948 |
| Merc Marquis | 15 | 1687 | 4948 |
| Merc Monarch | 13 | 1528 | 4096 |
| Merc Zephyr | 11 | 1283 | 2294 |
| Olds 98 | 11 | 1841 | 5735 |
| Olds Cutlass | 12 | 1496 | 3785 |
| Olds Cutl. Supr. | 12 | 1501 | 3785 |
| Olds Delta 88 | 13 | 1673 | 3785 |
| Olds Omega | 12 | 1528 | 3785 |

[4] Aukščiausio stulpelio vidurys vadinamas imties moda – 5 pav. kairiajame brėžinyje moda lygi (178,5+179,5)/2=179, centriniame – (178+179)/2=178,5, dešiniajame – (178+180)/2=179.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Buick Skylark | 12 | 1542 | 3785 | Olds Starfire | 9 | 1233 | 2474 |
| Cad. Deville | 16 | 1964 | 6964 | Olds Toronado | 14 | 1827 | 5735 |
| Cad. Eldorado | 16 | 1769 | 5735 | Peugot 604 Sl | 16 | 1551 | 2671 |
| Cad. Seville | 11 | 1945 | 5735 | Plym Arrow | 8 | 1070 | 2556 |
| Chev Chevette | 8 | 957 | 1605 | Plym Champ | 6 | 816 | 1409 |
| Chev Impala | 14 | 1673 | 4096 | Plym Horizon | 9 | 997 | 1720 |
| Chev Malibu | 10 | 1442 | 3277 | Plym Sapporo | 9 | 1143 | 1950 |
| Chev Monte Carlo | 10 | 1460 | 3277 | Plym Volare | 13 | 1510 | 3687 |
| Chev Monza | 9 | 1247 | 2474 | Pont Catalina | 13 | 1678 | 3785 |
| Chev Nova | 12 | 1555 | 4096 | Pont Firebird | 13 | 1573 | 3785 |
| Datsun 200-SX | 10 | 1075 | 1950 | Pont Grand Prix | 12 | 1456 | 3785 |
| Datsun 210 | 6 | 916 | 1392 | Pont Le Mans | 12 | 1451 | 3785 |
| Datsun 510 | 9 | 1034 | 1950 | Pont Phoenix | 12 | 1551 | 3785 |
| Datsun 810 | 11 | 1247 | 2392 | Pont Sunbird | 9 | 1220 | 2474 |
| Dodge Colt | 7 | 961 | 1605 | Renault Le Car | 9 | 830 | 1294 |
| Dodge Diplomat | 13 | 1632 | 5211 | Subaru | 6 | 929 | 1589 |
| Dodge Magnum XE | 14 | 1755 | 5211 | Toyota Celica | 13 | 1093 | 2195 |
| Dodge St. Regis | 13 | 1696 | 3687 | Toyota Corolla | 7 | 997 | 1589 |
| Fiat Strada | 11 | 966 | 1720 | Toyota Corona | 13 | 1211 | 2195 |
| Ford Fiesta | 8 | 816 | 1605 | Volk Rabbit | 9 | 875 | 1458 |
| Ford Mustang | 11 | 1202 | 2294 | Volk Rabbit(d) | 5 | 925 | 1474 |
| Honda Accord | 9 | 1016 | 1753 | Volk Scirocco | 9 | 902 | 1589 |
| Honda Civic | 8 | 798 | 1491 | Volks Dasher | 10 | 979 | 1589 |
| Linc. Continental | 19 | 2195 | 6554 | Volvo 260 | 13 | 1437 | 2671 |

Dvimačių imčių tyrimas paprastai pradedamas nuo jų sklaidos diagramos brėžimo. Duomenų rinkinio `(svo,sun)` atveju kiekvienas taškas atitinka automobilio modelį, taško abscisė rodo jo svorį, o ordinatė – kuro sunaudojimą. Sklaidos diagrama aiškiai demonstruoja tiesinį ryšį tarp dydžių `svo` ir `sun`.




1.7 pav. Kintamųjų `svo` ir `sun` sklaidos diagrama

Pabrėšime, kad mes netvirtiname, jog žinant svorį galima vienareikšmiškai prognozuoti kuro sunaudojimą (`sun` yra atsitiktinis dydis, gerai matyti, kad (maždaug) tai pačiai `svo` reikšmei `sun` reikšmės gana pastebimai skiriasi). Antra vertus, tendencija yra aiški: didėjant `svo` reikšmėms, atsitiktinio dydžio `sun` vidutinė reikšmė didėja. Būtent ją ir prognozuoja vadinamieji regresiniai modeliai.

## 1.4. Imtys ir jų skaitinės charakteristikos

Skaitinės imties grafinės charakteristikos yra labai naudingos, tačiau pasirodo, kad gana dažnai imtį galima sėkmingai charakterizuoti dar paprasčiau, keliais skaičiais. Kelias skaitines charakteristikas jau žinome – tai penkių skaičių santrauka, dažnių lentelė. Šiame skyrelyje pakalbėsime apie momentus.

Vieną imties "centro" charakteristiką jau žinome – tai mediana. Kita, dar populiaresnė imties ( $x_1, x_2, ..., x_n$ ) charakteristika, yra jo (empirinis) vidurkis $\overline{x}$ : tai imties reikšmių aritmetinis vidurkis

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

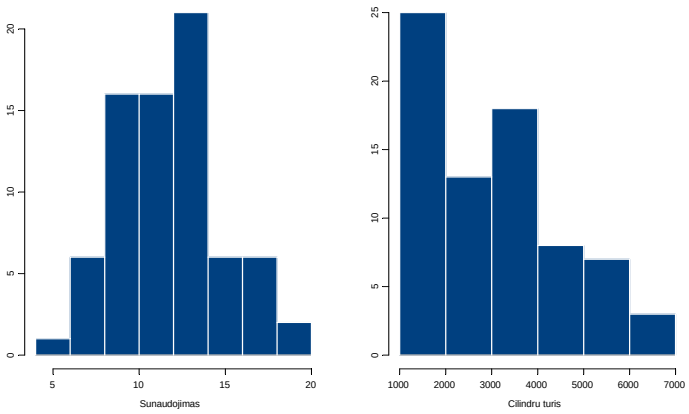
Jei imtis yra pateikta dažnių lentele

| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_N$ |
|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_N$ |

(t.y., reikšmė $x_1$ imtyje kartojasi $n_1$ kartą, reikšmė $x_2$ – $n_2$ kartus ir t.t.), vidurkį galima perrašyti kitokiu pavidalu:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} n_k x_k \; ;$$

čia N yra skirtingų imties reikšmių skaičius. Jei imties histograma yra maždaug simetrinė, tai mediana ir vidurkis yra beveik vienodi, tačiau priešingu atveju jie gali pastebimai skirtis.




```
vidurkis = 11.80732      vidurkis = 3160.932
 mediana = 11.76196       mediana = 2671.091
    moda =13                 moda = 1500
```

1.8 pav. `auto` duomenų histogramos: `sun` (kairėje) ir `tur` (dešinėje)

Pažymėsime, kad viena (vienintelė!) nenormaliai didelė imties reikšmė (išskirtis) gali pastebimai pakeisti vidurkį, tuo tarpu mediana[5] išskirtims mažiau jautri.

Nagrinėkime dvi variacines eilutes: (99.99, 99.99, 100.01, 100.01) ir (0, 0, 200, 200). Aišku, kad vidurkių prasme jos abi vienodos (abiejų vidurkiai lygūs 100), tačiau jų struktūra visai skirtinga: pirmuoju atveju matuojame praktiškai nekintantį dydį, o antrosios eilutės reikšmių išsibarstymas vidurkio atžvilgiu yra didžiulis. Imties reikšmių išsibarstymo matu galėtų būti imties reikšmių vidutinis nuotolis nuo vidurkio, t.y.

[5] Vardiniams kintamiesiems vienintelė prasminga "centro" reikšmė yra moda, ranginiams – moda ir mediana (nes ranginiams kintamiesiems apibrėžta sąvoka "daugiau"), o skaitiniams – moda, mediana ir vidurkis.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|,$$

tačiau populiaresnis yra imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$s_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n}(x_i-\overline{x})^2\ .$$

Pažymėsime, kad dėl tam tikrų priežasčių paprastai vartojamas kiek "pataisytas" vidutinis kvadratinis nuokrypis: skaičius

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

vadinamas imties (empirine) dispersija[6]. Beje, jei $x_i$ matuojami, pvz., centimetrais (*cm*), tai $s^2$ dimensija bus $cm^2$. Dydžio $s=\sqrt{s^2}$ (jis vadinamas imties standartiniu nuokrypiu arba tiesiog standartu) dimensija jau bus *cm* , t.y., lygiai tokia pati kaip ir $x_i$, todėl būtent jis, standartas, ir yra populiariausia reikšmių išsibarstymo charakteristika.

Nesunku apskaičiuoti, kad pirmos iš anksčiau minėtų variacinių eilučių vidutinis kvadratinis nuokrypis lygūs $0.01^2$ (nes $\frac{1}{4}((99.99-100)^2+...)=\frac{1}{4}(0.01^2+...)=0.01^2$), o antros - $100^2$!

Vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio sąvokas galima apibendrinti: skaičius

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k, k\in N\ ,$$

vadinamas *k*-ju (pradiniu[7]) imties momentu, o skaičius

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k, k\in N,\ -$$

*k* – ju centriniu[8] momentu. Kitaip sakant, vidurkis yra pirmasis momentas, o vidutinis kvadratinis nuokrypis – antrasis centrinis momentas. Iš principo, kiekvienai imčiai galime apskaičiuoti be galo daug momentų, tačiau minėti du yra svarbiausi: vidurkis yra imties "centro", o standartas – imties reikšmių išsibarstymo charakteristikos.

---

[6] Būkite atsargūs – kartais (empirine) dispersija vadinamas dydis $s_1^2$ !

[7] Nes "pradžios", t.y. nulio atžvilgiu.

[8] Nes "centro", t.y. vidurkio atžvilgiu.

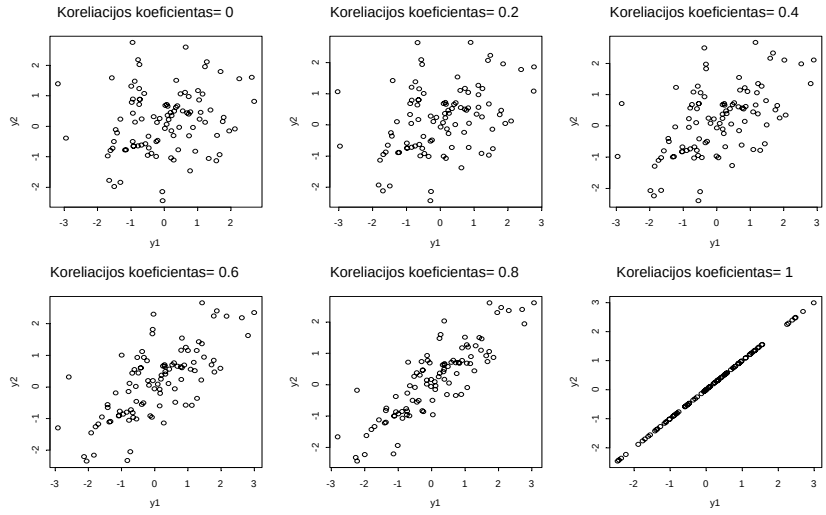
Jei iš kiekvieno imties $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nario atimsime vidurkį, tai naujoji imtis $(x_1 - \overline{x}, x_2 - \overline{x}, ..., x_n - \overline{x})$ bus vadinama centruota. Jei centruotos imties kiekvieną narį dar padalinsime iš standarto, tai naujoji imtis $((x_1 - \overline{x})/s, (x_2 - \overline{x})/s, ..., (x_n - \overline{x})/s)$ bus vadinama (centruota ir) normuota. Histogramos forma nuo šių transformacijų nesikeičia, tačiau normuotos imties vidurkis visuomet 0, o standartas – 1.

**1.4 UŽDUOTIS**. Patikrinkite pastarąjį teiginį.

Jei tiriamoji imtis $((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n))$ yra dvimatė skaitinė, tai kiekvieną komponentę vėl galima charakterizuoti jos vidurkiu ir standartu. Antra vertus, dabar yra dar viena, komponenčių ryšį nusakanti, skaitinė charakteristika – tai vadinamasis normuotų komponenčių mišrusis momentas arba Pirsono (Pearson) empirinis koreliacijos koeficientas *r*:

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \overline{y}}{s_y}\right).$$

Galima įrodyti, kad visuomet $-1 \le r \le 1$. Jei *r* neigiamas, tai *x*'sui didėjant, *y*, apskritai kalbant, mažėja, o jei teigiamas, tai *x*'sui didėjant *y* irgi didėja. Gruboka taisyklė tokia: jei |*r*|>0.7, tai *x* ir *y* ryšys pakankamai stiprus.

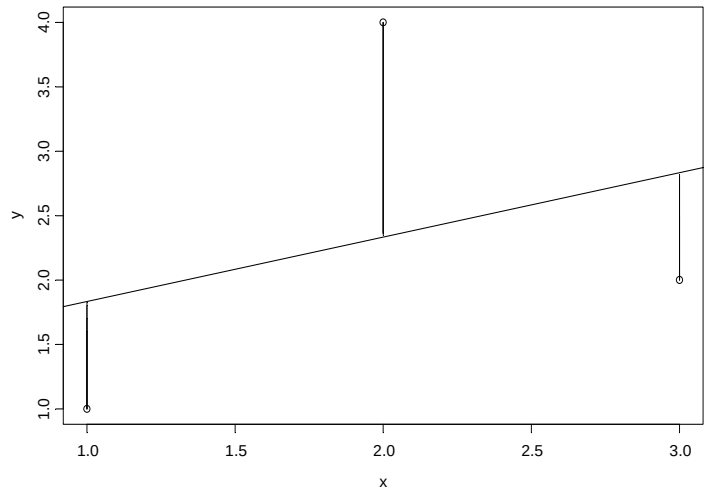



1.9 pav. Koreliacijos koeficiento *r* įtaka
sklaidos diagramos formai

Kita svarbi dvimačio skaitinio duomenų masyvo charakteristika yra (*y*'ko) regresijos (*x*'so atžvilgiu) tiesė: tai "arčiausiai visų sklaidos diagramos taškų esanti" tiesė $y = b_0 + b_1 x$. Tiksliau kalbant, iš visų galimų tiesių $y = \beta_0 + \beta_1 x$ pasirinksime tokią, kuriai jos atitinkamų taškų atstumų nuo sklaidos diagramos taškų kvadratų suma yra mažiausia, t.y. ieškosime funkcijos

$$RSS = RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

(RSS – nuo Residual Sum of Squares (angl. liekanų kvadratų suma)) minimumo pagal




1.10 pav. Trys stebėjimų taškai ir regresijos tiesė

$\beta_0$ ir $\beta_1$. Prilygindami *RSS* dalines išvestines pagal $\beta_0$ ir $\beta_1$ nuliui, gauname dviejų lygčių sistemą; jos sprendiniai (patikrinkite) yra

$$b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{rs_y}{s_x}, \quad b_0 = \hat{\beta}_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$$

Nesunku apskaičiuoti, kad duomenų sistemos (`tur,sun`) atveju $r$=0,8179, $s_{tur}$=1509,03, $s_{sun}$=3,01, $b_0$=6,6377, o $b_1$=0,0016 (šiais laikais tokie skaičiavimai paprastai atliekami su kompuriu), kitais žodžiais regresijos tiesės lygtis atrodo taip:

`sun`=6,6377+0,0016`tur.`

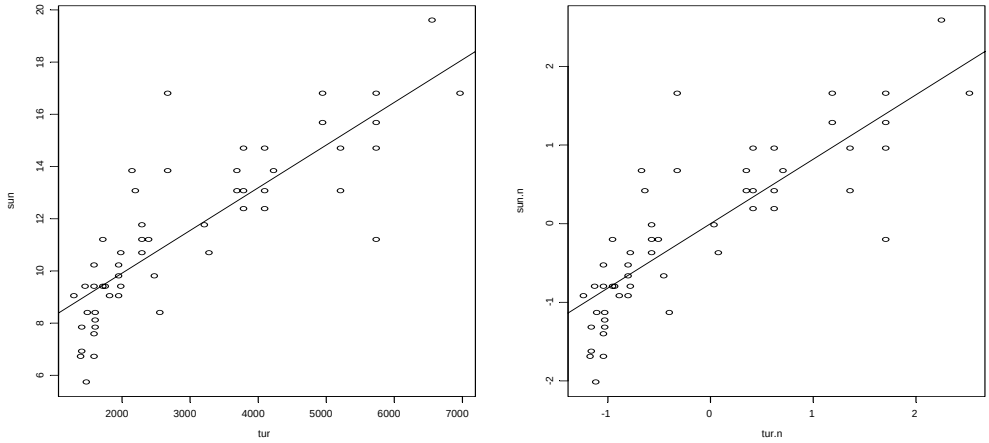
Pastebėsime, kad nors koeficientas 0,0016 labai mažas, tai dar nereiškia , kad kuro sunaudojimas `sun` beveik nepriklauso nuo cilindrų tūrio `tur`. Atvirkščiai, koreliacijos koeficiento reikšmė signalizuoja, kad ryšys pakankamai stiprus. Iš tikrųjų, koeficientų $b_0$ ir $b_1$ reikšmės labai priklauso nuo matavimo vienetų: jei cilindrų tūrį matuotume litrais, tai regresijos lygtis būtų

`sun`=11,8073+2,4680 `tur.l,`

o jei pereitume prie normuotų `sun` ir `tur` reikšmių, tai (kodėl?)

`sun.n`=0+$r$ `tur.n`=0,8179 `tur.n.`

Pažymėsime, kad sklaidos diagramos ir regresijos tiesių grafikai visais trim atvejais atrodytų "vienodai", nes komputeris braižydamas grafikus paprastai pasirenką "teisingus" ašių mastelius (plg. žemiau pateiktą 1.11 pav.).




1.11 pav. Sklaidos diagramos ir regresijos tiesės:
kairėje - (`tur, sun`), o dešinėje – (`tur.n, sun.n`) sistema
(atkreipkite dėmesį į skaičius prie ašių)

*****

Mes glaustai išdėstėme aprašomosios statistikos pagrindus. Norėdami pereiti prie sprendžiamosios statistikos, pirmiausiai turėtume daugiau sužinoti apie tikimybių teoriją. Tuo užsiims kiti kursai. O dabar pereisime prie nuoseklesnio mūsų kurso – Įvado į statistiką – dėstymo.

# 2. R – bendrieji faktai

## 2.1. R instaliacija

Svetainėje http://cran.at.r-project.org/ nuvairuokite į Precompiled Binary Distributions|Windows (95 and later)|base ir atsisiųskite (download) iš ten failą rw1071.exe (maždaug 20 megabaitų). Patalpinkite jį bet kur, o po to paleiskite šią programą – instaliaciją ši programa atliks (beveik) automatiškai. Pažymėsime, kad šis failas taip pat yra kompaktiniame diske R1, instaliaciją galima atlikti ir spragtelėjus ant jo vardo.

R standartinė instaliacija sukuria darbinę (working) direktoriją C:\Program Files\R\rw1071[1], kurios podirektorijoje ...\bin yra failas Rgui.exe. R paleisti galima, spragtelėjus ant šio failo, arba, "ištraukus" jį į desktopą (darbalaukį) ir sukūrus R ikoną (pavadinkime ją R 1.7.1). Jei ateityje šiuo produktu naudosis vienas vartotojas, kuris dirbs tik su vienu projektu, tai tuo instaliaciją galima ir baigti. Jei vartotojų ar projektų bus keli, tai kiekvienam galima sukurti savąją ikoną: sukurkite naują direktoriją, pvz., C:\aR[2]; joje sukurkite podirektorijas Mano1, Mano2 ir t.t. Dešiniuoju pelės klavišu spragtelėkite ant R 1.7.1 ikonos ir pasirinkite Copy; po to bet kur desktope spragtelėkite dešiniuoju klavišu ir pasirinkite Paste. Spragtelėję ant pasirodžiusios ikonos kopijos dešiniuoju klavišu, pasirinkite Properties\Shortcut; Target eilutėje įrašykite "C:\Program Files\R\rw1071\bin\Rgui.exe", o Start in eilutėje - "C:\aR\ Mano1", OK, o po to šią ikoną pervardinkite į, pvz., R_Mano1; aprašytą procedūrą pakartokite su Mano2 ir t.t. Ateityje savąjį projektą bus galima paleisti, spragtelėjus ant reikalingos ikonos.

## 2.2. R ekranas

Spragtelėkite ant reikalingos R ikonos (2.1 pav. yra vaizdas, kurį matote ekrane). Šis (beveik) tuščias ekranas ateityje bus užpildytas komandomis, kurias rašysime į dešinę nuo kreipinio >, o taip pat grafikais, kurie atsiras grafiniame lange. Štai paprasčiausia komanda[3]:

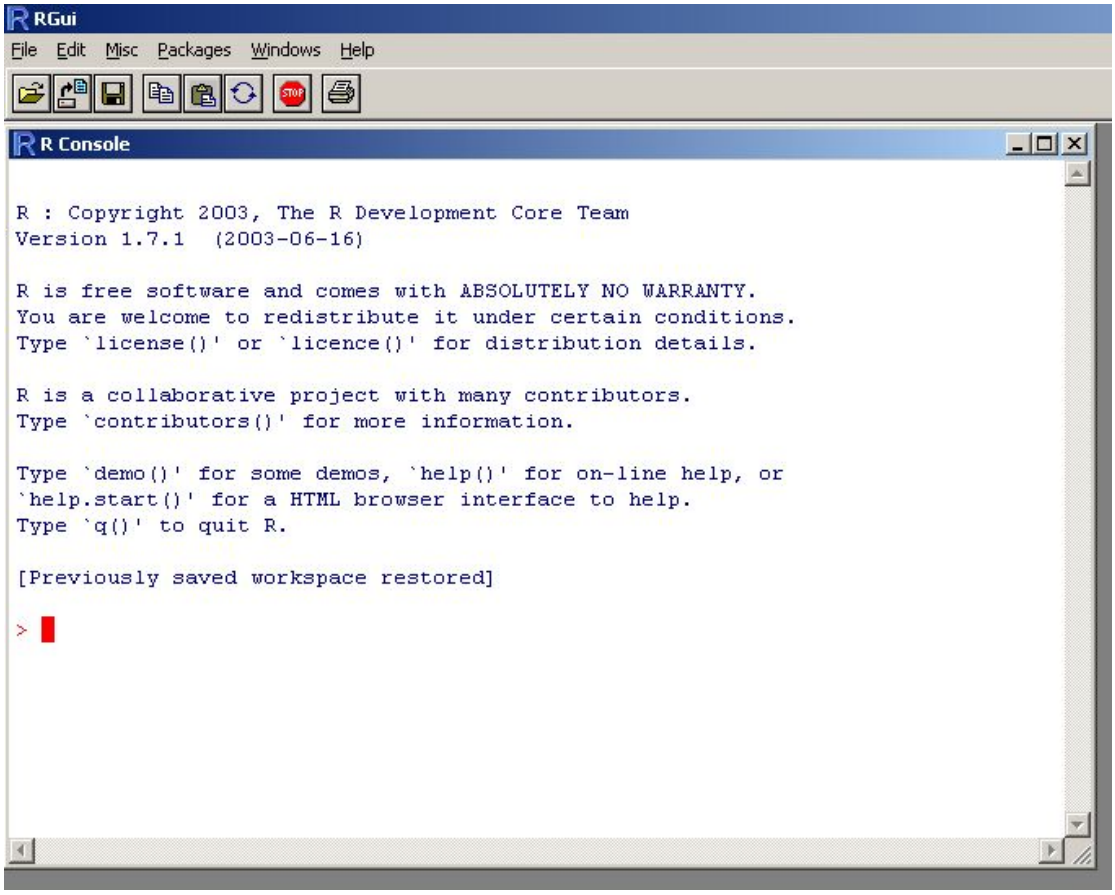
```
> y <- 1:5
```

(simbolį <− gauname paspaudę klavišą < (mažiau) ir po to minuso ( − ) klavišą; jei a ir b yra sveiki skaičiai, tai binarios operacijos a:b reikšmė yra seka a, a+1,…,b), kuri sukurs skaitinį vektorių y lygų 1, 2, 3, 4, 5. Ši komanda yra ekvivalenti komandoms

[1] Atsiradus naujesnei R versijai, atsisiųskite ją iš CRAN'o ir instaliuokite (tai sukurs naują direktoriją, tarkime …\rw1080); jei norite išsaugoti senus duomenis ir anksčiau sukurtas funkcijas – perkelkite senuosius failus .Rdata ir .Rhistory (ir, gal būt, dar kitus reikalingus failus, pvz., duomenų failus *.txt) į šią direktoriją, o senąją direktoriją (tarkime, …\rw1071) tiesiog ištrinkite (su unins000.exe iš C:\Program Files\R\rw1071).

[2] Komputerinėse klasėse kiekvienas studentas turi savo asmeninę direktoriją diske U. Sukurkite joje direktoriją aR, o joje dvi podirektorijas – IntroStat ir Ataskaitos. Pirmoji podirektorija gali tarnauti kaip darbinė (t.y., kaip Mano1 ekvivalentas), o antroje galima kaupti užduočių ataskaitas.

[3] Toliau šiame konspekte kreipinį > dažnai praleisime.




2.1 pav. R komandinio lango (konsolės) vaizdas

```
> y = 1:5
```

(simbolis = yra simbolio <- sinonimas; ilgose programose geriau rašyti <-, nes tuomet tekstas aiškesnis), arba komandai

```
y <- seq(1,5)
```

(funkcija `seq(a,b)` yra `a:b` sinonimas; komanda `seq(1,50,7)` generuos vektorių 1, 8, 15,...,50), arba komandai

```
> y <- c(1,2,3,4,5)
```

(funkcija `c` (nuo combine (angl.) = apjungti) apjungia skliaustuose nurodytus skaičius į vektorių). Pasižiūrėkime į sukurtą objektą `y`:

```
y <- 1:5
y                    # Komanda > (y <- 1:5) apjungia dvi komandas:
[1] 1 2 3 4 5        # > y <- 1:5 ir > y
```

Dvi žaliai nuspalvintas komandas (eilutes) R komandiniame lange galite surinkti rankomis, arba, jei skaitote komputerinę šio teksto versiją, perkelti į šį langą su Copy ir Paste komandomis. Paspaudę Enter klavišą, ekrane pamatysite

```
[1] 1 2 3 4 5
```

Pažymėsime, kad R vartoja vektorinę aritmetiką, t.y. operacijos

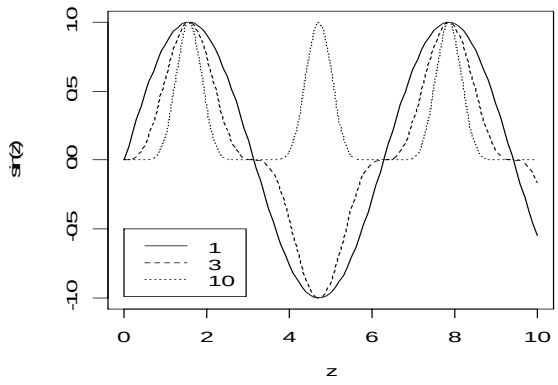
```
> (1:5)^3
[1]   1   8  27  64 125
```

rezultatas yra vektorius su koordinatėmis $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$. Štai dar vienas pavyzdys:

```
> z<-(0:100)/10
> z
  [1]  0.0  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1.0  1.1
 [13]  1.2  1.3  1.4  1.5  1.6  1.7  1.8  1.9  2.0  2.1  2.2  2.3
 .....................................................
 [85]  8.4  8.5  8.6  8.7  8.8  8.9  9.0  9.1  9.2  9.3  9.4  9.5
 [97]  9.6  9.7  9.8  9.9 10.0
> round(sin(z),4)
  [1]  0.0000  0.0998  0.1987  0.2955  0.3894  0.4794  0.5646  0.6442
  [9]  0.7174  0.7833  0.8415  0.8912  0.9320  0.9636  0.9854  0.9975
 .....................................................
 [89]  0.5849  0.5010  0.4121  0.3191  0.2229  0.1245  0.0248 -0.0752
 [97] -0.1743 -0.2718 -0.3665 -0.4575 -0.5440
```

O dabar išbrėškime pirmąjį grafiką[4]:

```
plot(z,sin(z),type="l") # z yra x koordinatė, o sin(z)- y koordinatė;
                        # "l" nurodo, kad taškus reikia sujungti
                        # linijomis
lines(z,(sin(z))^3,lty=2) # Funkcija "lines" papildo pirmą grafiką
                          # linijomis; lty=2 nurodo linijos tipą
lines(z,(sin(z))^10,lty=3)
legend(0,-0.5,c("1","3","10"),lty=c(1,2,3)) # Legendos viršutinis
                                            # kairysis kampas bus
                                            # taške (0;0,5)
```




2.2 pav. Funkcijų $y = \sin z$, $y = \sin^3 z$ ir $y = \sin^{10} z$ grafikai

Jei tekstą iš ekrano su Copy+Paste nesunku perkelti į Word'o dokumentą, tai su grafika yra sudėtingiau: suaktyvinę grafikos langą, spragtelėkite dešiniu klavišu ir pasirinkite Copy as metafile; grįžkite į Word'o dokumentą ir pasirinkite Edit|Paste Special…|Picture (Enhanced Metafile)|OK.

[4] Nuostabių grafikų kolekciją rasite http://addictedtor.free.fr/graphiques/allgraph.php

Grįžkime prie R ekrano nagrinėjimo. Meniu eilutėje spragtelėkite ant Help skyriaus.

1) Pasirinkę FAQ on R, matome DPK (=dažniausiai pateikiamus klausimus) apie R ir atsakymus į juos. Štai šio dokumento pradžia:

# R FAQ

---

### R FAQ

### Frequently Asked Questions on R

### Version 1.7-18, 2003-06-13

### ISBN 3-901167-51-X

*Kurt Hornik*

---



Štai vienas šio dokumento naudojimo pavyzdžių: įjungus R, pakraunami tik pagrindiniai paketai (package). Dauguma specializuotų funkcijų yra kituose R paketuose. Spragtelėję ant R Add-On Packages, pamatysime visų (šios R versijos) paketų sąrašą:

## 5 R Add-On Packages



### 5.1 Which add-on packages exist for R?

- Add-on packages from CRAN:
- Add-on packages from Omegahat:
- Add-on packages from BioConductor:
- Other add-on packages:

### 5.1.1 Add-on packages in R

The R distribution comes with the following extra packages:

**ctest**
: A collection of Classical TESTs, including the Ansari-Bradley, Bartlett, chi-squared, Fisher, Kruskal-Wallis, Kolmogorov-Smirnov, t, and Wilcoxon tests.

**eda**
: Exploratory Data Analysis. Currently only contains functions for robust line fitting, and median polish and smoothing.

**lqs**
: Resistant regression and covariance estimation.

**methods**
: Formally defined methods and classes for R objects, plus other programming tools, as described in the Green Book.

**modreg**
: MODern REGression: smoothing and local methods.

**mva**
: MultiVariate Analysis. Currently contains code for principal components, canonical correlations, metric multidimensional scaling, factor analysis, and hierarchical and k-means clustering.

……..

2) Pasirinkę FAQ on R for Windows, pamatysime html tipo dokumentą, kuriame rasime (Windows aplinkoje dirbančiam) R vartotojui svarbią informaciją. Štai jos pradžia:

# R for Windows FAQ

## Version for rw1071

*B. D. Ripley*

---

## Table of Contents

- 7.5 How do I include C++ code?
- 7.6 The output from my C code disappears. Why?
- 7.7 The output from my Fortran code disappears. Why?
- 7.8 The console freezes when my compiled code is running.

3) Pasirinkę R functions (text)... ir langelyje Help on surinkę, pvz., mean|OK, pamatysime anglišką funkcijos `mean` aprašymą[5]:

```
mean                    package:base                    R Documentation

Arithmetic Mean

Description:

     Generic function for the (trimmed) arithmetic mean.

Usage:

     mean(x, ...)
     mean.default(x, trim = 0, na.rm = FALSE)

Arguments:

       x: a numeric vector containing the values whose mean is to be
          computed.  A complex vector is allowed for `trim=0', only.

    trim: the fraction (0 to 0.5) of observations to be trimmed from
          each end of `x' before the mean is computed.

   na.rm: a logical value indicating whether `NA' values should be
          stripped before the computation proceeds.

Value:

     If `trim' is zero (the default), the arithmetic mean of the val-
ues
     in `x' is computed.

     If `trim' is non-zero, a symmetrically trimmed mean is computed
     with a fraction of `trim' observations deleted from each end
     before the mean is computed.

See Also:

     `weighted.mean'

Examples:

     x <- c(0:10, 50)
     xm <- mean(x)
     c(xm, mean(x, trim = .10))
     all.equal(mean(x, trim = 0.5), median(x))
```

Jei norite pamatyti funkcijos `mean` tekstą, surinkite

```
> mean
function (x, ...)
UseMethod("mean")
```

[5] Tokį patį rezultatą gausite, jei ekrano komandiniame lange (konsolėje) surinksite `help("mean")` arba `?mean`.

R yra objektiškai orientuota kalba, kas reiškia, kad, pvz., funkcija `mean` pirmiausiai patikrina savo argumento (objekto) klasę, o jau paskui taiko jam tinkamą metodą.

```
> methods(mean)
[1] "mean.data.frame" "mean.default" "mean.POSIXct" "mean.POSIXlt"
```

Matome, kad yra keturi skirtingi funkcijos `mean` taikymo variantai. Tai reiškia, kad jei tiriamasis objektas nėra duomenų sistema (data.frame) arba jis nepriklauso POSIX klasei (tai datų ir laiko objektai), tai funkcija `mean` kreipsis į standartinę `mean.default` funkciją. Štai jos tekstas:

```
> mean.default
function (x, trim = 0, na.rm = FALSE)
{
    if (na.rm)
        x <- x[!is.na(x)]
    trim <- trim[1]
    n <- length(c(x, recursive = TRUE))
    if (trim > 0 && n > 0) {
        if (mode(x) == "complex")
            stop("trimmed means are not defined for complex data")
        if (trim >= 0.5)
            return(median(x, na.rm = FALSE))
        lo <- floor(n * trim) + 1
        hi <- n + 1 - lo
        x <- sort(x, partial = unique(c(lo, hi)))[lo:hi]
        n <- hi - lo + 1
    }
    sum(x)/n
}
```

Funkcijos aprašymas, o taip pat jos tekstas atrodo komplikuotas, kadangi į juos įtraukta trim[6] opcija, diagnostiniai žingsniai ir nurodymai, ką daryti, kai vektorius `x` turi praleistų reikšmių (tai dažnai pasitaiko realiuose uždaviniuose). Jei `trim=0` (tai standartinė (= default (angl.)) trim reikšmė, jos nurodyti nereikia), tai surinkę ekrane tekstą `mean(y)` (arba `mean(1:5)`), rastume pirmų penkių natūraliųjų skaičių (aritmetinį) vidurkį:

```
> mean(y)
[1]  3
```

Tą patį rezultatą gautume ir su tokia paprasta funkcija:

```
> mean.mano <- function(x){sum(x)/length(x)}
> mean.mano(y)
[1] 3
```

Vidurkis dažnai naudojamas, charakterizuojant imties centrinę ar vidutinę ar vidurinę reikšmę. Deja, statistikoje dažnai susiduriame su įrašų klaidomis, o tuomet vidurkis gali smarkiai nutolti nuo "tikrosios" reikšmės. Pvz.,

```
mean(c(1,2,3,4,50))
[1] 12
```

[6] trim (angl.) = pakirpimas, palyginimas

Funkcija `mean` bus atsparesnė klaidoms, jei atmesime, pvz., po 20% didžiausių ir mažiausių reikšmių:

```
mean(c(1,2,3,4,50),trim=0.2)
[1] 3
```

Grįžkime prie meniu eilutės Help skyriaus.

4) Pasirinkę Html help, pakliūtume į puslapį su daugeliu sąsajų (link'ų). Sąsajos gali mus nukreipti į An Introduction to R, The R language definition, Writing R extensions ar kitus skyrius. Šiuos tekstus (tiksliau, hipertekstus) lengva skaityti, kadangi juose galima keliauti iš vienos vietos į kitį, naudojantis vidinėmis sąsajomis. Pvz., spragtelėję ant Search Engine & Keywords, pakliūname į kitą R pagalbos aplinką (Search Engine R): paieškos langelyje surinkę `mean`, vėl pakliūtume į anksčiau pateiktą funkcijos `mean` aprašymo puslapį, tačiau jo apačioje dabar yra sąsaja su gimininga funkcija `weighted.mean` ir `mean.POSIXct`.

R meniu eilutėje yra ir daugiau skyrių (File, Edit, Misc, Packages, Windows). Juos aptarsime tinkamu laiku.

## 2.3. R paketai ir duomenų rinkiniai

R funkcijos yra apjungtos į paketus (= packages (angl.)), kurie gali būti prijunti prie darbinės srities arba, kai nebereikalingos, atjungti. Įjungiant R, automatiškai instaliuojamos septyni paketai. Tuo galima įsitikinti, apžiūrėjus paieškos kelią:

```
> search()
[1] ".GlobalEnv"        "package:methods" "package:ctest"
[4] "package:mva"       "package:modreg"  "package:nls"
[7] "package:ts"        "Autoloads"       "package:base"
```

Dauguma šiam kursui reikalingų funkcijų priklauso šiems paketams. Jei mūsų tyrimui reikėtų paketų, nesančių minėtoje direktorijoje, juos galima atsisiųsti iš http://cran.hu.r-project.org/ (žr. Software|Package Sources) ir išzipuoti į ...\rw1071\library direktoriją. Instaliuokime, pavyzdžiui, `car` paketą – jis mums pravers ateityje, į jį įeina procedūros, naudojamos J.Fox'o knygoje "Companion to Applied Regression". Be jau minėto metodo, ją galima instaliuoti dar bent dviem būdais. Jei jūsų kompiuteris prijungtas prie interneto ir įjungta kuri nors interneto naršyklė, surinkite[7]

```
install.packages(car)
```

(tolimesnė instaliacija bus atlikta automatiškai). Paketas car taip pat yra autoriaus sudarytame kompaktiniame diske R1, instaliuoti iš jo galima taip: R meniu eilutėje renkamės Packages|Install package from local zip file, pasirodžius lentelei Select zip file to install, nurodome kelią ...R-packages\car.zip ir spragtelime ant Open. Paketų direktorija bus papildyta nauja eilute:

[7] Vienu metu galima instaliuoti ir kelis paketus, pavyzdžiui.: `install.packages (c("car","gregmisc"))`.

```
car             Companion to Applied Regression
```

visų jų sąrašą galima gauti su komanda

```
> library().
```

O štai pats (autoriaus komputeryje esančių paketų) sarašas:

```
Packages in library 'C:/PROGRA~1/R/rw1071/library':

base                    The R base package
boot                    Bootstrap R (S-Plus) Functions (Canty)
car                     Companion to Applied Regression
class                   Functions for classification
cluster                 Functions for clustering (by Rousseeuw et al.)
ctest                   Classical Tests
eda                     Exploratory Data Analysis
foreign                 Read data stored by Minitab, S, SAS, SPSS,
                        Stata, ...
grid                    The Grid Graphics Package
KernSmooth              Functions for kernel smoothing for Wand &
                        Jones (1995)
lattice                 Lattice Graphics
lqs                     Resistant Regression and Covariance Estimation
MASS                    Main Library of Venables and Ripley's MASS
methods                 Formal Methods and Classes
mgcv                    Multiple smoothing parameter estimation and
                        GAMs by GCV
modreg                  Modern Regression: Smoothing and Local Methods
multcomp                Multiple Tests and Simultaneous Confidence
                        Intervals
mva                     Classical Multivariate Analysis
nlme                    Linear and nonlinear mixed effects models
nls                     Nonlinear regression
nnet                    Feed-forward neural networks and multinomial
                        log-linear models
Rcmdr                   R Commander
rpart                   Recursive partitioning
spatial                 functions for kriging and point pattern
                        analysis
splines                 Regression Spline Functions and Classes
stepfun                 Step Functions, including Empirical
                        Distributions
strucchange             Testing for Structural Change
survival                Survival analysis, including penalised
                        likelihood.
tcltk                   Tcl/Tk Interface
tools                   Tools for package development
ts                      Time series functions
tseries                 Time series analysis and computational finance
```

Jei esate R aplinkoje ir norite prijungti car paketą, surinkite komandą

```
library(car) # Atkreipkite dėmesį: ne package(car)!
```

Dabar

```
> search()
 [1] ".GlobalEnv"        "package:car"       "package:methods"
 [4] "package:ctest"     "package:mva"       "package:modreg"
 [7] "package:nls"       "package:ts"        "Autoloads"
```

```
[10] "package:base"
```

Jei car paketas bus dažnai naudojamas, jį galima pakrauti įjungimo metu – su Notepad'u atidarykite failą …\R\R-1.7.1\etc\Rprofile ir papildykite jį eilute library(car). Išsaugojus jį su Save, kitą kartą car paketas bus pakrautas įjungimo metu.

Šiuo metu R turi labai daug specializuotų paketų. Jei jūsų komputeris prijungtas prie interneto, jų sąrašą galima gauti su

```
> CRAN.packages()[,1]
```

o paketų šiuo metu (2008 m. kovas) yra maždaug 1300:

```
> length(available.packages()[,1])
[1] 1303
```

Jums reikalingų paketų pakrovimą galima automatizuoti. Pvz., norint instaliuoti gregmisc ir xgobi paketus, reikia surinkti

```
> install.packages(c("gregmisc","xgobi"))
```

Jei norite instaliuoti absoliučiai visas šiuo metu CRAN'e esančius paketus (tai 20+Mb), surinkite

```
>  install.packages(CRAN.packages()[,1])
```

(po to kartą į kelias savaites neužmirškite atnaujinti jas su `update.packages()`).

Tolimesniame darbe dažnai naudosimės į R įmontuotais duomenų rinkiniais. Norėdami gauti sąrašą rinkinių, prijungtų prie dabartinio paieškos kelio, surinkime

```
> data()
Data sets in package `car':

Adler               Experimenter Expectations
Angell              Moral Integration of American Cities
Anscombe            U. S. State Public-School Expenditures
Baumann             Methods of Teaching Reading Comprehension
Bfox                Canadian Women's Labour-Force Participation
Burt                Fraudulent Data on IQs of Twins Raised Apart
Can.pop             Canadian Population Data
Chile               Voting Intentions in the 1988 Chilean Plebiscite
Chirot              The 1907 Romanian Peasant Rebellion
Davis               Self-Reports of Height and Weight
Duncan              Duncan's Occupational Prestige Data
Ericksen            The 1980 U.S. Census Undercount
Florida             Florida County Voting
Freedman            Crowding and Crime in U. S. Metropolitan Areas
Friendly            Format Effects on Recall
Ginzberg            Data on Depression
Greene              Refugee Appeals
Guyer               Anonymity and Cooperation
Hartnagel           Canadian Crime-Rates Time Series
Leinhardt           Data on Infant-Mortality
Mandel              Contrived Collinear Data
Migration           Canadian Interprovincial Migration Data
Moore               Status, Authoritarianism, and Conformity
```

```
Mroz                U.S. Women's Labor-Force Participation
Ornstein            Interlocking Directorates Among Major Canadian
                    Firms
Prestige            Prestige of Canadian Occupations
Quartet             Four Regression Datasets
Robey               Fertility and Contraception
SLID                Survey of Labour and Income Dynamics
Sahlins             Agricultural Production in Mazulu Village
States              Education and Related Statistics for the U.S.
                    States
UN                  GDP and Infant Mortality
US.pop              Population of the United States
Vocab               Vocabulary and Education
Womenlf             Canadian Women's Labour-Force Participation

Data sets in package `base':

Formaldehyde   Determination of Formaldehyde concentration
HairEyeColor   Hair and eye color of statistics students
InsectSprays   Effectiveness of insect sprays
LifeCycleSavings
               Intercountry life-cycle savings data
OrchardSprays  Potency of orchard sprays
PlantGrowth    Results from an experiment on plant growth
Titanic        Survival of passengers on the Titanic
ToothGrowth    The effect of vitamin C on tooth growth in guinea pigs
UCBAdmissions  Student admissions at UC Berkeley
USArrests      Violent crime statistics for the USA
USJudgeRatings Lawyers' ratings of state judges in the US Superior
               Court
USPersonalExpenditure
               Personal expenditure data
VADeaths       Death rates in Virginia (1940)
airmiles       Passenger miles on US airlines 1937-1960
airquality     New York Air Quality Measurements
anscombe       Anscombe's quartet of regression data
attenu         Joiner-Boore Attenuation Data
attitude       Chatterjee-Price Attitude Data
cars           Speed and Stopping Distances for Cars
chickwts       The Effect of Dietary Supplements on Chick Weights
co2            Moana Loa Atmospheric CO2 Concentrations
discoveries    Yearly Numbers of `Important' Discoveries
esoph          (O)esophageal Cancer Case-control study
euro           Conversion rates of Euro currencies
eurodist       Distances between European Cities
faithful       Old Faithful Geyser Data
freeny         Freeny's Revenue Data
infert         Secondary infertility matched case-control study
iris           Edgar Anderson's Iris Data as data.frame
iris3          Edgar Anderson's Iris Data as 3-d array
islands        World Landmass Areas
longley        Longley's Economic Regression Data
morley         Michaelson-Morley Speed of Light Data
mtcars         Motor Trend Car Data
nhtemp        Yearly Average Temperatures in New Haven CT
phones        The Numbers of Telephones
precip        Average Precipitation amounts for US Cities
presidents    Quarterly Approval Ratings for US Presidents
pressure      Vapour Pressure of Mercury as a Function of Temperature
quakes        Earthquake Locations and Magnitudes in the Tonga Trench
randu         Random Numbers produced by RANDU
rivers        Lengths of Major Rivers in North America
sleep         Student's Sleep Data
stackloss     Brownlee's Stack Loss Plant Data
```

```
state          US State Facts and Figures
sunspots       Monthly Mean Relative Sunspot Numbers
swiss          Swiss Demographic Data
trees          Girth, Height and Volume for Black Cherry Trees
uspop          Populations Recorded by the US Census
volcano     Topographic Information on Auckland's Maunga Whau Volcano
warpbreaks     Breaks in Yarn during Weaving
women          Heights and Weights of Women
```

Jei norite pamatyti visus instaliuoto paketo MASS duomenų rinkinius, surinkite

```
> data(package="MASS"),
```

o jei visų instaliuotų paketų duomenų rinkinius -

```
> data(package = .packages(all.available = TRUE))
```

Kiekvieną R paketą sudaro dviejų rūšių objektai: duomeniniai (data sets) ir funkciniai (functions). Visus car objektus galime pamatyti su

```
> library(help=car)
```

(duomeninių objektų sąrašą matėme aukščiau, dabar jis bus papildytas paketui car priklausančiomis funkcijomis).

Kaip galima apžiūrėti duomeninius objektus? car pakete yra rinkinys `Davis`, kuriame pateikti 200 reguliariai užsiiminėjančių sportu asmenų (vyrų=`M` ir moterų=`F`) duomenys apie jų svorį (tikrąjį `weight` ir praneštąjį `repwt`) bei ūgį (tikrąjį `height` ir praneštąjį `repht`). Surinkime

```
> data(Davis) # Duomenys išarchivuojami
> Davis
    sex weight height repwt repht
1     M     77    182    77   180
2     F     58    161    51   159
3     F     53    161    54   158
*********************************
198   M     81    175    NA    NA
199   M     90    181    91   178
200   M     79    177    81   178
```

Bendrąją informaciją apie šį duomenų rinkinį galima gauti su

```
> summary(Davis)
 sex         weight          height          repwt           repht
 F:112   Min.   : 39.0   Min.   : 57.0   Min.   : 41.00   Min.   :148.0
 M: 88   1st Qu.: 55.0   1st Qu.:164.0   1st Qu.: 55.00   1st Qu.:160.5
         Median : 63.0   Median :169.5   Median : 63.00   Median :168.0
         Mean   : 65.8   Mean   :170.0   Mean   : 65.62   Mean   :168.5
         3rd Qu.: 74.0   3rd Qu.:177.3   3rd Qu.: 73.50   3rd Qu.:175.0
         Max.   :166.0   Max.   :197.0   Max.   :124.00   Max.   :200.0
                                         NA's   : 17.00   NA's   : 17.0
```

arba su[8]

```
> str(Davis)
```

[8] Jei jūsų objektų sąrašas nėra ilgas, galite surizikuoti ir surinkti `ls.str()` - pamatysite visų savo objektų aprašymus.

```
`data.frame':   200 obs. of  5 variables:
 $ sex   : Factor w/ 2 levels "F","M": 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 ...
 $ weight: int  77 58 53 68 59 76 76 69 71 65 ...
 $ height: int  182 161 161 177 157 170 167 186 178 171 ...
 $ repwt : int  77 51 54 70 59 76 77 73 71 64 ...
 $ repht : int  180 159 158 175 155 165 165 180 175 170 ...
```

Aišku, kad (vidutiniškai) vyrai yra aukštesni už moteris, tačiau kiek? Žinome, kad vidurkį skaičiuoja funkcija `mean`, deja komanda `mean(height)` neveikia:

```
> mean(height)
Error in mean(height) : Object "height" not found
```

Reikalas tas, kad `height` yra tik stulpelio vardas, o ne R duomeninis objektas. Norint, kad `Davis` stulpeliai taptų pasiekiami (su salyga, kad paieškos kelyje nėra kitų kintamųjų su šių stulpelių vardais), surinkime

```
> attach(Davis) # attach (angl.) = prijungti
> mean(height)
[1] 170.02
```

Deja, mums reikia ne visų tiriamųjų ūgio vidurkio, bet atskirai vyrų ir moterų. Tai galima atlikti tiesiogiai, t.y., skaičiuojant tik, pvz., vyrų ūgio vidurkį. Kiek detaliau paaiškinsime kaip tai galima atlikti.

```
> height # Visų tiriamųjų ūgiai

  [1] 182 161 161 177 157 170 167 186 178 171 175  57 161 168 163
 [16] 166 187 168 197 175 180 170 175 173 171 166 169 166 157 183
 [31] 166 178 173 164 169 176 166 174 178 187 164 178 163 183 179
 [46] 160 180 161 174 162 182 165 169 185 177 176 170 183 172 173
 [61] 165 177 180 173 189 162 165 164 158 178 175 173 165 163 166
 [76] 171 160 160 182 183 165 168 169 167 170 182 178 165 163 162
 [91] 173 161 184 180 189 165 185 169 159 155 164 178 163 163 175
[106] 164 152 167 166 166 183 179 174 179 167 168 184 184 169 178
[121] 178 167 178 165 179 169 153 157 171 157 166 185 160 148 177
[136] 162 172 167 188 191 175 163 165 176 171 160 165 157 173 184
[151] 168 162 150 162 163 169 172 170 169 167 163 161 162 172 163
[166] 159 170 166 191 158 169 163 170 176 168 178 174 170 178 174
[181] 176 154 181 165 173 162 172 169 183 158 185 173 164 156 164
[196] 175 180 175 181 177

> sex  # Visų tiriamųjų lytis (kadangi duomenų rinkinys Davis yra
       # prijungtas, kintamasis sex yra pasiekiamas)

  [1] M F F M F M M M M M M F F F F F M F M F M F M M F F F F F M
 [31] F M M F F M F M M M F M F M M F M F F F M F M M M M F M M M
 [61] M M M F M F F F F M F M F F F F F F M M F M F F F M M F F F
 [91] M F M M M F M F F F F M F F F F F F F F M M F M F F M M M M
[121] M M F F M F F F F F F M F F M F F F M M M F F F F F F F F M
[151] F F F F F M M F F F F F F F M F F F M F M F M M M M F M M M
[181] M F M F M F F F M F M M F F F M M M M M
Levels: F M

> sex=="M" # Kurie tiriamieji yra Male?

  [1]  TRUE FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
 [11]  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE FALSE
 [21]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE
 [31] FALSE  TRUE  TRUE FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE
```

```
 [41] FALSE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE
 [51]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE
 [61]  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE
 [71] FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE
 [81] FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE
 [91]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE
[101] FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
[111]  TRUE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
[121]  TRUE  TRUE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
[131] FALSE  TRUE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE
[141]  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE
[151] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE
[161] FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE
[171]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE
[181]  TRUE FALSE  TRUE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE
[191]  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
```

```
> height[sex=="M"] # Tik vyrų (Male) ūgiai (simbolis "[…]" žymi
                   # poaibio operaciją)
```

```
 [1] 182 177 170 167 186 178 171 175 187 197 180 175 173 183 178
[16] 173 176 174 178 187 178 183 179 180 182 169 185 177 176 183
[31] 172 173 165 177 180 189 178 173 182 183 168 182 178 173 184
[46] 180 189 185 178 183 179 179 184 184 169 178 178 167 179 185
[61] 177 188 191 175 184 169 172 163 191 169 170 176 168 178 170
[76] 178 174 176 181 173 183 185 173 175 180 175 181 177
```

```
> mean(height[sex=="M"]) # Vyrų ūgio vidurkis
[1] 178.0114
```

Kadangi skaičiavimo procedūra dabar aiški, moterų ūgio vidurkį apskaičiuosime iš karto:

```
> mean(height[sex=="F"])
[1] 163.7411
```

Pasirodo, kad visus `height` įrašus suskirstyti į dvi grupes galima ir kitaip (su funkcija `tapply`[9]):

```
> tapply(height,sex,mean)
       F        M
163.7411 178.0114
```

arba naudojant funkciją `aov`:

```
> aov(height~sex)$coeff
(Intercept)        sexM
  163.74107    14.27029  # Tai vyrų (male) ūgio priedas
```

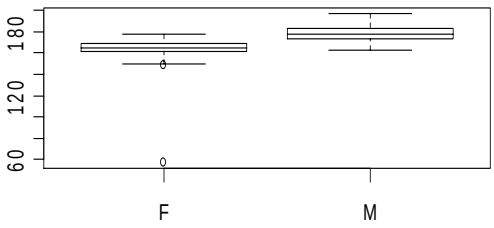
arba funkciją `summary`:

```
> summary(height[sex=="F"])
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   57.0   161.0   165.0   163.7   169.0   178.0
> summary(height[sex=="M"])
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
    163     173     178     178     183     197
```

[9] Daugiau apie šią funkciją žr. 3-23 psl.

Atrodo, kad duomenų rinkinyje `Davis` yra klaidų: moterų ūgio minimumas tikrai keistas. Prie klaidų paieškos grįšime vėliau, o dabar tą patį faktą pademonstruosime kitaip, išbrėždami stačiakampes moterų ir vyrų ūgio diagramas:

```
> boxplot(height~sex)
```




2.3 pav. Moterų (F) ir vyrų (M) ūgio stačiakampės diagramos

(taigi `F` (moterų) grupėje iš tikro yra dvi išskirtys; jos pažymėtos rutuliukais, o viena iš jų lygi maždaug 60).

Darbą su duomenų rinkiniu baigus, jį tikslinga atjungti:

```
> detach(Davis) # Komanda detach() atjungs visus duomenų rinkinius
```

Kai paketo nebereikia, ją taip pat vertėtų atjungti:

```
> detach(package:car)
> search()
[1] ".GlobalEnv"    "package:ctest" "Autoloads"     "package:base"
```

Mes jau turėjome kelis R grafikos pavyzdžius. Dar kelis pavyzdžius pasižiūrėkime su funkcija `demo`. Surinkę

```
> demo(),
```

pamatysime temų iš base paketo sąrašą:

```
Demos in package 'base':

glm.vr              Some glm() examples from V&R with
                    several predictors
graphics            A show of some of R's graphics
                    capabilities
Hershey             Tables of the characters in the
                    Hershey vector fonts
image               The image-like graphics builtins of R
is.things           Explore some properties of R objects
                    and is.FOO() functions. Not for
                    newbies!
Japanese            Tables of the Japanese characters in
                    the Hershey vector fonts
lm.glm              Some linear and generalized linear
```

```
                    modelling examples from `An
                    Introduction to Statistical Modelling'
                    by Annette Dobson
nlm                 Nonlinear least-squares using nlm()
persp               Extended persp() examples
plotmath            Examples of the use of mathematics
                    annotation
recursion           Using recursion for adaptive
                    integration
scoping             An illustration of lexical scoping.


Use 'demo(package = .packages(all.available = TRUE))'
to list the demos in all *available* packages.
```

Surinkite dabar kurią nors iš komandų

```
demo(graphics)
demo(image)
```

ir pamatysite daug gražių paveikslėlių!

R turi daug funkcijų[10] ir jas visa nėra lengva įsiminti, todėl ryžtingai naudokitės visomis įmanomis pagalbos priemonėmis[11]. Jau žinome funkciją `help(image)` ir jos sinonimą `?image`. Pagalbos failo pabaigoje paprastai yra Examples skyrelis, kuriame yra funkcijos taikymo pavyzdžių. Juos apžvelgti galima ir tiesiogiai, pvz., su `example(image)`[12]. Labai naudinga paieškos funkcija `help.search ("image")`[13] – ji pateiks visų library direktorijoje esančių paketų funkcijas, kurių varduose yra `image`.

Žemiau pateikiame J. Baron'o sudarytą pagrindinių R funkcijų sąrašą:

*Parentheses are for functions, brackets are for indicating the position of items in a vector or matrix. (Here, items with numbers like x1 are user-supplied variables.)*

**Miscellaneous**

`q()`: quit
`<-`: assign

---

[10] 
```
> search()
 [1] ".GlobalEnv"      "Davis"           "package:car"
 [4] "package:methods" "package:ctest"   "package:mva"
 [7] "package:modreg"  "package:nls"     "package:ts"
[10] "Autoloads"       "package:base"
> length(ls(pos=11))
[1] 1658
```
taigi base paketas turi 1658 funkcijas!

[11] Įskaitant pagalbą iš interneto: surinkite google *R help boxplot* (pateiks laiškus iš R konferencijos) arba *filetype:R boxplot -rebol* (pateiks funkcijos `boxplot` skriptą).

[12] Terminas image sakinyje `demo(image)` reiškia temų ratą, o sakinyje `example(image)` – funkcijos vardą. Funkcija `graphics` neegzistuoja. Norint, kad `example(image)` paveikslai nepralėktų žaibu ekrane, prieš šią komandą surinkite `par(ask=TRUE)`, o pasibaigus demonstracijai – `par(ask=FALSE)`.

[13] Tą patį rezultatą galima gauti paprasčiau – R menu eilutėje surinkite Help|Search help...|image

`INSTALL package1`: install package1
`m1[,2]`: column 2 of matrix m1
`m1[,2:5] or m1[,c(2,3,4,5)]`: columns 2–5
`m1$a1`: variable a1 in data frame m1
`NA`: missing data
`is.na`: true if data missing
`library(mva)`: load (e.g.) the mva package

## Help

`help(command1)`: get help with command1 (NOTE: USE THIS FOR MORE DETAIL THAN THIS CARD CAN PROVIDE.)
`help.start()`: start browser help
`help(package=mva)`: help with (e.g.) package mva
`apropos("topic1")` and `help.search( "topic 1")`: commands relevant to topic1
`example(command1)`: examples of command1

## Input and output

`source("file1")`: run the commands in file1.
`read.table("file1")`: read in data from file1
`data.entry()`: spreadsheet
`scan(x1)`: read a vector x1
`download.file("url1")`: from internet
`url.show("url1"), read.table.url("url1")`: remote input
`sink("file1")`: output to file1, until `sink()`
`write(object1, "file1")`: writes object1 to file1
`write.table(dataframe1,"file1")`: writes a table

## Managing variables and objects

`attach(x1) detach(x1)`: put (remove) x1 in search path
`ls()`: lists all the active objects.
`str(object1)`: print useful information about object1
`rm(object1)`: remove object1
`dim(matrix1)`: dimensions of matrix1
`dimnames(x1)`: names of dimensions of x1
`length(vector1)`: length of vector1
`1:3`: the vector 1,2,3
`c(1,2,3)`: creates the same vector
`rep(x1,n1)`: repeats the vector x1 n1 times
`cbind(a1,b1,c1), rbind(a1,b1,c1)`: binds columns or rows into a matrix
`merge(df1,df2)`: merge data frames
`matrix(vector1,r1,c1)`: make vector1 into a matrix with r1 rows and c1 columns
`data.frame(v1,v2)`: make a data frame from vectors v1 and v2
`as.factor(), as.matrix(), as.vector()`: conversion
`is.factor(), is.matrix(), is.vector()`: what is it?
`t()`: switch rows and columns
`which(x1==a1)`: returns indices of x1 where x1==a1

## Control flow

`for (i1 in vector1)`: repeat what follows
`if (condition1) ...else ...`: conditional

Pažymėsime, kad `if` procedūra yra gana kaprizinga ir, norint apsidrausti, sąlyginius sąkinius vertėtų rašyti taip:

```
{
       if(sąlyga1)
       {
         darome kažką
       } else {
         darome kitką
       }
}
```

(atkreipkite dėmesį į visus figūrinius skliaustus!)

### Arithmetic

`%*%`: matrix multiplication
`%/%, ^, %%, sqrt()`: integer division, power, modulus, square root

### Statistics

`max(), min(), mean(), median(), sum(), var()`: as named
`summary(data.frame)`: prints statistics
`rank(), sort()` : rank and sort
`ave(x1,y1)`: averages of x1 grouped by factor y1
`by()`: apply function to data frame by factor
`apply(x1,n1,function1)`: apply function1 (e.g. mean) to x by rows (n1=1) or columns (n2=2)
`tapply(x1,list1,function1)`: apply function to x1 by list1
`table()`: make a table
`tabulate()`: tabulate a vector

### Basic statistical analysis

`aov(), anova(), lm(), glm()`: (generalized) linear models, anova
`t.test()`: t test
`prop.test(), binom.test()`: tests on probability
`chisq.test(x1)`: chi-square test on matrix x1
`fisher.test()`: Fisher exact test
`cor(a)`: show correlations
`cor.test(a,b)`: test correlation
`friedman.test()`: Friedman test

### Graphics

`plot(), barplot(), boxplot(), stem(), hist()`: basic plots
`matplot()`: matrix plot
`pairs(matrix)`: scatterplots
`coplot()`: conditional plot
`stripplot()`: strip plot
`qqplot()`: quantile-quantile plot
`qqnorm(), qqline()`: fit normal distribution

O čia dar viena, E. Paradis sudaryta, atmintinė:

**1.**

| Operators | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Arithmetic | | Comparison | | Logical | |
| + | addition | < | lesser than | ! x | logical NOT |
| - | subtraction | > | greater than | x & y | logical AND |
| * | multiplication | <= | lesser than or equal to | x && y | id. |
| / | division | >= | greater than or equal to | x \| y | logical OR |
| ^ | power | == | equal | x \|\| y | id. |
| %% | modulo | != | different | xor(x, y) | exclusive OR |
| %/% | integer division | | | | |

**2.**

| | |
|---|---|
| sum(x) | sum of the elements of x |
| prod(x) | product of the elements of x |
| max(x) | maximum of the elements of x |
| min(x) | minimum of the elements of x |
| which.max(x) | returns the index of the greatest element of x |
| which.min(x) | returns the index of the smallest element of x |
| range(x) | id. than c(min(x), max(x)) |
| length(x) | number of elements in x |
| mean(x) | mean of the elements of x |
| median(x) | median of the elements of x |
| var(x) or cov(x) | variance of the elements of x (calculated on $n-1$); if x is a matrix or a data frame, the variance-covariance matrix is calculated |
| cor(x) | correlation matrix of x if it is a matrix or a data frame (1 if x is a vector) |
| var(x, y) or cov(x, y) | covariance between x and y, or between the columns of x and those of y if they are matrices or data frames |
| cor(x, y) | linear correlation between x and y, or correlation matrix if they are matrices or data frames |

Šių funkcijų[14] reikšmė yra skaičius (t.y., ilgio 1 vektorius). Žemiau pateiktų funkcijų reikšmė gali būti gana komplikuota.

**3.**

[14] Išskyrus range() , kuri gražina du skaičius ir var(), cov() bei cor(), kurios gali grąžinti matricą.

| | |
|---|---|
| `round(x, n)` | rounds the elements of x to n decimals |
| `rev(x)` | reverses the elements of x |
| `sort(x)` | sorts the elements of x in increasing order; to sort in decreasing order: `rev(sort(x))` |
| `rank(x)` | ranks of the elements of x |
| `log(x, base)` | computes the logarithm of x with base `"base"` |
| `scale(x)` | if x is a matrix, centers and reduces the data; to center only use the option `center=FALSE`, to reduce only `scale=FALSE` (by default `center=TRUE, scale=TRUE`) |
| `pmin(x,y,...)` | a vector which *i*th element is the minimum of `x[i], y[i],...` |
| `pmax(x,y,...)` | id. for the maximum |
| `cumsum(x)` | a vector which *i*th element is the sum from `x[1]` to `x[i]` |
| `cumprod(x)` | id. for the product |
| `cummin(x)` | id. for the minimum |
| `cummax(x)` | id. for the maximum |
| `match(x, y)` | returns a vector of the same length than x with the elements of x which are in y (NA otherwise) |
| `which(x == a)` | returns a vector of the indices of x if the comparison operation is true (TRUE), in this example the values of i for which `x[i] == a` (the argument of this function must be a variable of mode logical) |
| `choose(n, k)` | computes the combinations of $k$ events among $n$ repetitions $= n!/[(n-k)!k!]$ |
| `na.omit(x)` | suppresses the observations with missing data (NA) (suppresses the corresponding line if x is a matrix or a data frame) |
| `na.fail(x)` | returns an error message if x contains at least one NA |
| `unique(x)` | if x is a vector or a data frame, returns a similar object but with the duplicate elements suppressed |
| `table(x)` | returns a table with the numbers of the differents values of x (typically for integers or factors) |
| `subset(x, ...)` | returns a selection of x with respect to criteria (..., typically comparisons: `x$V1 < 10`); if x is a data frame, the option `select` gives the variables to be kept (or dropped using a minus sign -) |
| `sample(x, size)` | resample randomly and without replacement `size` elements in the vector x, the option `replace = TRUE` allows to resample with replacement |

Pažymėsime, kad visų (pvz., base paketo) funkcijų sąrašą galima rasti iš R meniu eilutės nuvairavus į Help|Html help|Packages|base.

R darbinėje direktorijoje yra naudingas failas .Rhistory , kuriame fiksuojamos visos šios ir ankstesnių sesijų metu įvykdytos (ir išsaugotos! – žr. keliomis eilutėmis žemiau) komandos. Apžiūrėti šį failą galime su `history()`, o pasižymėję jame reikalingas komandas, spragtelėję dešiniuoju klavišu ir pasirinkę Paste to console, galėsite pakartoti ankstesnę analizę.

Norėdami baigti sesiją, surinkite `q()`. Jei į klausimą Save workspace image? atsakysite Yes, tai visa šios sesijos istorija (t.y., vykdytos komandos (bet ne grafikai)) bus išsaugota, o jei No – ne.

## 2.4. R literatūra, konferencija, archyvai

Yra nemažai literatūros, skirtos darbui su R paketu. Daug jos patalpinta internete, beveik visos šios knygos yra kompaktiniame diske R1. Pradedantiesiams ypač siūlyčiau šias knygas:

1) John Verzani, **Simple R** http://www.math.csi.cuny.edu/Statistics/R/simpleR
2) John Maindonald , **Using R for Data Analysis and Graphics**, žr. http://cran.hu.r-project.org/ Documentation|Contributed
3) Emmanuel Paradis, **R for Beginners,** žr. http://cran.hu.r-project.org/ Documentation|Contributed

4) Labai įspūdingą konspektą rasite http://zoonek2.free.fr/UNIX/48_R/all.html
5) Puikios, R grafikai skirtos knygos, internetinis puslapis http://www.stat.auckland.ac.nz/~paul/RGraphics/rgraphics.html irgi gali būti naudingas.
6) Puikią grafikų kolekciją rasite adresu http://addictedtor.free.fr/graphiques/
7) Nemažai vertingų patarimų galite rasti adresu http://www.ats.ucla.edu/STAT/r/ ir ypač http://wiki.r-project.org/rwiki/doku.php

Tiems, kurie ruošiasi dirbti su R paketu ir ateityje, autorius rekomenduoja dalyvauti nuolat veikiančioje konferencijoje (list): nuvairuokite į http://www.r-project.org/ ir pasirinkite Mailing Lists; skyrelyje R-help spragtelėkite ant web interface ir ten, skyrelyje Your email address: nurodykite savo pašto adresą. Po to kasdien gausite kokį 10-100 laiškų, kurių dažnas bus jums naudingas. Paiešką šios konferencijos archive galima atlikti keliais būdais (pvz., iš http://finzi.psych.upenn. edu/nmz.html); jie aprašyti svetainės http://cran.hu.r-project.org/ CRAN|Search skyriuje. Jei jūsų komputeris prijungtas prie interneto, paiešką galima atlikti per www.google.lt (surinkus, pvz., R help volatility) arba iš R vidaus su `RSiteSearch` funkcija:

```
library(utils)
RSiteSearch("{logistic regression}")
```
(tiksli frazė)

arba

```
RSiteSearch("logistic regression")
```
(R archive ieškos pagal kiekvieną žodį)

arba

```
RSiteSearch("logistic", restrict="functions").
```

Taip pat labai rekomenduočiau pasinaudoti http://www.r-project.org/search.html arba http://www.rseek.org teikiamomis galimybėmis.

# 3. Duomenų įrašymas ir programavimo pavyzdžiai

Duomenų rinkimas ir įrašymas dažnai užima daugiau laiko negu jų statistinė analizė. Deja, tai būtinas statistinio tyrimo etapas.

Kiekvienas R duomeninis objektas visuomet turi du vidinius požymius (tipą (mode) ir ilgį (length)) ir dar gali turėti vieną ar kelis papildomus požymius (attributes) (pvz., klasę (class) ar matavimų skaičių (dimension)). Žemiau esančioje lentelėje pateikta šių faktų santrauka.

| Objektas | Galimi tipai | Ar galima naudoti skirtingus tipus viename objekte? | Klasė |
|---|---|---|---|
| Vektorius (vector) | logical, integer, double, complex, character, raw, list | ne | Tokia kaip `mode(x)` |
| Vardinis kintamasis = faktorius (factor) | Skaitinis ar simbolinis | ne | factor |
| Ranginis kintamasis (ordered factor) | Skaitinis ar simbolinis | ne | factor ordered |
| Masyvas (array) | Skaitinis, simbolinis, kompleksinis ar loginis | ne | NULL |
| Matrica (matrix) | Skaitinis, simbolinis, kompleksinis ar loginis | ne | matrix |
| Duomenų sistema (data frame) | Skaitinis, simbolinis, kompleksinis ar loginis | taip | data.frame |
| Laiko eilutė (ts= time series) | Skaitinis, simbolinis, kompleksinis ar loginis | taip | ts |
| Sąrašas (list) | Skaitinis, simbolinis, kompleksinis, loginis, funkcija, reiškinys ar formulė | taip | list |

R yra objektiškai orientuota kalba – pvz., funkcijų `plot` ar `summary` elgesys (reikšmė) priklauso nuo objekto klasės.

## 3.1. Duomenų įrašymas rankomis

Pradėsime nuo to (reto) atvejo, kai duomenys į komputerio atmintį įrašomi, vartojant R programą.

### 3.1.1. Skaitiniai vektoriai ir matricos

Tarkime, kad skaitinio vektoriaus `skve` komponentės yra 1,2,3,3,3,3,3[1]. Šį vektorių galima įrašyti keliais būdais.

1a)

```
skve1a <- c(1,2,3,3,3,3,3)
skve1
[1] 1 2 3 3 3 3 3
> mode(skve1a)
[1] "numeric"
> length(skve1a)
[1] 7
> class(skve1a)
numeric
```

1b)

```
skve1b <- c(1,2,rep(3,5))      # Surinkite > ?rep (paeksperimentuoki-
                               # te: rep(3,1:3), rep(1:3,3), rep(1:3,
                               # 1:3) ir t.t.)
```

2)

```
skve2 <- scan()
1: 1 2                 # Paspauskite Enter
3: 3 3 3 3             # Norint baigti duomenų įvedimą, Enter
7:                     # klavišą reikia paspausti du kartus
Read 6 items
```

3) Kai duomenų daug, geriau naudoti funkciją `edit`, kuri leis ne tik patogiai įvesti duomenis, bet ir nesunkiai juos redaguoti. Norint, kad funkcija `edit` pateiktų ekrane elektroninės lentelės pavidalo lapą, `skve3` reikia traktuoti kaip (vieno stulpelio) matricą.

```
skve3 <- matrix(1)      # Įvedėme skaičių 1 – tai bus matricos
                        # elementas su indeksais (1,1)
skve3 <- edit(skve3)    # Atsidarys R Data Editor langas;
                        # kai lentelę užpildysite, langą uždarykite
> mode(skve3)
[1] "numeric"
> dim(skve3)
[1] 6 1             # skve3 yra 6x1 matrica
> class(skve3)
matrix
> skve3
     col1
[1,]    1
[2,]    2
[3,]    3
[4,]    3
```

[1] Visi vektoriaus elementai turi būti vieno (šiuo atveju - skaitinio) tipo.

```
[5,]    3
[6,]    3
[7,]    3
```

Reikalui esant, matricai `skve3` galima sugrąžinti vektorinę struktūrą:

```
skve3 <- as.vector(skve3)
dim(skve3)
NULL
> skve3
[1] 1 2 3 3 3 3 3
```

Visi naujai sukurtieji vektoriai dabar yra darbinėje atmintyje (= memory, workspace, curently active enviroment (angl.)):

```
> ls()      # ls=list=išvardink
 [1] "a"                   "b"                   "bwages"
 [4] "cars"                "d"                   "Davis"
 [7] "doR"                 "draw.plotmath.cell"  "draw.title.cell"
[10] "ewr"                 "f"                   "faithful"
[13] "fill"                "g"                   "get.c"
[16] "get.r"               "h.f"                 "i"
[19] "i.out"               "iris"                "islands"
[22] "kernels"             "l"                   "last.warning"
[25] "make.table"          "n"                   "nc"
[28] "nhtemp"              "nr"                  "oldpar"
[31] "op"                  "opar"                "pie.sales"
[34] "pin"                 "pp"                  "precip"
[37] "quakes"              "r"                   "RKs"
[40] "scale"               "skve1a"              "skve1b"
[43] "skve2"               "skve3"               "tt"
[46] "usr"                 "volcano"             "x"
[49] "x.at"                "xadd"                "xdelta"
[52] "xm"                  "xscale"              "xx"
[55] "y"                   "y.at"                "yadd"
[58] "ydelta"              "yscale"              "yy"
[61] "z"                   "zmin"
```

Autoriaus mašinos darbinėje atmintyje yra susikaupę daug (duomeninių ir funkcinių) objektų, norint ją visiškai išvalyti[2], reikia surinkti

```
>rm(list=ls())              # rm=remove=pašalinti
```

arba ekvivalenčią komandą

```
>rm(list=ls(pat="^[a-z]"))  # pat=pattern=pavyzdys;
                            # pvz.,[b-f]-angliškos raidės nuo b iki f;
                            # mūsų eilutė pašalins visus atmintyje
                            # esančius objektus, kurių
                            # vardai prasideda raidėmis nuo a iki z
```

o jei tik naujuosius vektorius –

```
>rm(skve1a,skve1b,skve2,skve3)
```

arba

[2] Tai rizikinga operacija, nes kartą atmintį ištrynus, jos atstatyti nepavyks.

```
>rm(list=ls(pat="^skve"))   # Pašalins objektus, kurių vardai
                           # prasideda simboliais "skve"
```

Jei norite ištrinti visus objektus, išskyrus tuos, kurie prasideda raide "s", surinkite

```
> rm(list=ls(pat="^[a-r,t-z]"))
> ls()
[1] "scale"  "skve1a"  "skve1b"  "skve2"  "skve3"
```

Dar trys variantai: eilutė `ls(pattern="^sk")` išrenks visus objektus, prasidedančius (o eilutė `ls(pattern="sk$")` – pasibaigiančius) simbolių seka `sk`; komanda `ls(pattern="sk")` išrinks visus objektus, kurių varde yra seka `sk`.

Grįžtame prie vektorių įrašymo. Skaitmeninę seką 3,4,5,6 galima sukurti taip:

```
> skse1 <- 3:7
```

o seką 0,3;0,4;0,5;0,6 su

```
> skse2 <- seq(0.3,0.6,0.1)
```

arba

```
> skse2 <- (3:7)/10
```

Pereikime prie matricos įrašymo. Žemiau yra matrica `Pastas`, kurioje pateikti duomenys apie dvidešimties siuntinių svorį, atstumą, kuriuo juos reikėjo pristatyti, ir realią pristatymo kainą.

| kaina | svoris | atstumas |
|---|---|---|
| 2.0 | 0.3 | 160 |
| 1.9 | 4.5 | 53 |
| 1.5 | 0.7 | 80 |
| 4.4 | 0.8 | 280 |
| 1.7 | 1.1 | 90 |
| 5.0 | 2.4 | 209 |
| 9.2 | 6.6 | 160 |
| 3.9 | 3.2 | 145 |
| 8.0 | 3.5 | 250 |
| 3.3 | 4.1 | 95 |
| 8.0 | 4.4 | 202 |
| 1.0 | 0.6 | 100 |
| 11.0 | 5.1 | 240 |
| 2.6 | 5.9 | 47 |
| 6.0 | 6.2 | 115 |
| 14.5 | 6.5 | 240 |
| 1.1 | 2.7 | 160 |
| 15.5 | 7.0 | 1260 |
| 14.0 | 7.5 | 190 |
| 12.1 | 8.1 | 160 |

Šią matricą galimą įrašyti kaip ilgą vektorių, o po to suteikti jam matricos struktūrą ir dar, gal būt, stulpelių vardus.

```
Pastas <- c(2, 1.9, 1.5, 4.4, 1.7, 5, 9.2, 3.9, 8, 3.3, 8, 1, 11,
2.6, 6, 14.5, 1.1, 15.5, 14, 12.1, 0.3, 4.5, 0.7, 0.8, 1.1, 2.4, 6.6,
```

```
3.2, 3.5, 4.1, 4.4, 0.6, 5.1, 5.9, 6.2, 6.5, 2.7, 7, 7.5, 8.1, 160,
53, 80, 280, 90, 209, 160, 145, 250, 95, 202, 100, 240, 47, 115, 240,
160, 1260, 190, 160)
```

R kodu šis objektas užrašomas taip:

```
c(2, 1.9, 1.5, 4.4, 1.7, 5, 9.2, 3.9, 8, 3.3, 8, 1, 11, 2.6, 6, 14.5,
1.1, 15.5, 14, 12.1, 0.3, 4.5, 0.7, 0.8, 1.1, 2.4, 6.6, 3.2, 3.5,
4.1, 4.4, 0.6, 5.1, 5.9, 6.2, 6.5, 2.7, 7, 7.5, 8.1, 160, 53, 80,
280, 90, 209, 160, 145, 250, 95, 202, 100, 240, 47, 115, 240, 160,
1260, 190, 160)
```

Dabar šį vektorių paversime matrica.

```
Pastas <- matrix(Pastas,ncol=3)
```

Štai šio objekto išraiška R kodu[3]:

```
structure(.Data = c(2, 1.9, 1.5, 4.4, 1.7, 5, 9.2, 3.9, 8, 3.3, 8, 1, 11,
2.6, 6, 14.5, 1.1, 15.5, 14, 12.1, 0.3, 4.5, 0.7, 0.8, 1.1, 2.4, 6.6, 3.2,
3.5, 4.1, 4.4, 0.6, 5.1, 5.9, 6.2, 6.5, 2.7, 7, 7.5, 8.1, 160, 53, 80, 280,
90, 209, 160, 145, 250, 95, 202, 100, 240, 47, 115, 240, 160, 1260, 190,
160), .Dim = c(20, 3))
```

Stulpeliams suteikime vardus:

```
colnames(Pastas) <- c("kaina","svoris","atstumas")
```
[4]

arba

```
Pastas <- matrix(c(2.0,1.9,…,12.1,0.3,4.5,…,8.1,160,53,…,160),ncol=3,
dimnames=list(NULL,c("kaina","svoris","atstumas")))
```
[5]

R kodu ši matrica dabar atrodo taip:

```
structure(c(2, 1.9, 1.5, 4.4, 1.7, 5, 9.2, 3.9, 8, 3.3, 8, 1, 11, 2.6, 6,
14.5, 1.1, 15.5, 14, 12.1, 0.3, 4.5, 0.7, 0.8, 1.1, 2.4, 6.6, 3.2, 3.5, 4.1,
4.4, 0.6, 5.1, 5.9, 6.2, 6.5, 2.7, 7, 7.5, 8.1, 160, 53, 80, 280, 90, 209,
160, 145, 250, 95, 202, 100, 240, 47, 115, 240, 160, 1260, 190, 160), .Dim =
c(20, 3), .Dimnames = list(NULL, c("kaina", "svoris", "atstumas")))
```

Beje, matricos `Pastas` požymius galima pamatyti ir taip:

```
> attributes(Pastas)
$dim
[1] 20  3

$dimnames
$dimnames[[1]]
NULL
```

[3] Pabandykite `dump("Pastas","Pastas.matrica")` - R objektas `Pastas` bus paverstas tekstiniu failu Pastas.matrica (jį rasite savo darbinėje direktorijoje). Šį failą galima nusikopijuoti ir po to nusiskaityti kitoje mašinoje su `source("…/Pastas.matrica",echo=T)`. Dar paprasčiau tiesiog surinkti `dput(Pastas)` - R objektą `Pastas`, užrašytą R kodu, pamatysite ekrane.

[4] Mes kiek aplenkėme įvykius: simbolinio vektoriaus komponentės rašomos kabutėse.

[5] Dar kartą aplenkiame įvykius: `dimnames` yra sąrašas (list) su dviem komponentėm – pirmoji komponentė (eilučių vardai) yra tuščia (NULL), o antroji nusako stulpelių vardus.

```
$dimnames[[2]]
[1] "kaina"    "svoris"   "atstumas"
```

Matricai `Pastas` galime suteikti duomenų sistemos struktūrą.

```
Pastas.df <- as.data.frame(Pastas)
```

Štai šios duomenų sistemos išraiška R kodu:

```
structure(list(kaina = c(2, 1.9, 1.5, 4.4, 1.7, 5, 9.2, 3.9, 8, 3.3, 8, 1,
11, 2.6, 6, 14.5, 1.1, 15.5, 14, 12.1), svoris = c(0.3, 4.5, 0.7, 0.8, 1.1,
2.4, 6.6, 3.2, 3.5, 4.1, 4.4, 0.6, 5.1, 5.9, 6.2, 6.5, 2.7, 7, 7.5, 8.1),
atstumas = c(160, 53, 80, 280, 90, 209, 160, 145, 250, 95, 202, 100, 240,
47, 115, 240, 160, 1260, 190, 160)), .Names = c("kaina", "svoris", "atstu-
mas"), row.names = c("1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10",
"11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", "19", "20"), class = "da-
ta.frame")
```

Atkreipsime dėmesį, kad duomenų sistemos `Pastas.df` požymiai skiriasi nuo matricos `Pastas` požymių:

```
> attributes(Pastas.df)
$names
[1] "kaina"    "svoris"   "atstumas"

$row.names
 [1] "1"  "2"  "3"  "4"  "5"  "6"  "7"  "8"  "9"  "10" "11" "12" "13" "14"
"15"
[16] "16" "17" "18" "19" "20"

$class
[1] "data.frame"
```

Dar kartą pažymėsime, kad ir matricą lengviau įrašyti, naudojantis `edit` komanda (atlikite tai patys).

Matricos `Pastas` 18-oje eilutėje yra klaida – `atstumas` turi būti 260, o ne 1260. Ją ištaisome:

```
Pastas[18,3] <- 260    # […] yra poaibio ženklas; [18,3] yra matricos
                       # pastas elementas, esantis 18-os eilutės 3-me
                       # stulpelyje
```

arba

```
Pastas[18,"atstumas"] <- 260
```

Dar keli pavyzdžiai:

```
Pastas23 <- Pastas[,2:3]    # Palikome tik 2-ą ir 3-ią matricos Pastas
                            # stulpelius
Pastas23 <- Pastas[,-1]     # Tas pat
```

R naudoja vektorinę (tiksliau, masyvinę) aritmetiką, t.y. operacijos atliekamos pakomponenčiui. Pailiustruosime tai matricų pavyzdžiu.

```
m1 <- diag(rep(1,3))
m1
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
```

```
[3,]    0    0    1
m2 <- matrix(1:9,3,3)
m2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

Šias dvi matricas galima (paelemenčiui) sudėti, sudauginti bei atlikti daug kitokių operacijų:

```
m1+m2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    4    7
[2,]    2    6    8
[3,]    3    6   10
```

`m1*m2` – tai Adamaro (J. Hadamard) tiesioginė (paelementė) sandauga:

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    5    0
[3,]    0    0    9
```

Įprastinė matricų sandauga apskaičiuojama taip:

```
m1%*%m2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

O štai transponuota matrica `m2`:

```
t(m2)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
[3,]    7    8    9
```

Matrica `m2` yra singuliari (t.y. jos determinantas lygus 0 (kodėl?)) ir todėl atvirkštinės ji neturi. Antra vertus, `m2^2` yra jau "gera" matrica, o jos atvirkštinę randame taip:

```
solve(m2^2)
          [,1]      [,2]       [,3]
[1,]  1.291667 -2.166667  0.9305556
[2,] -1.166667  1.666667 -0.6111111
[3,]  0.375000 -0.500000  0.1805556
```

Tai tikrai atvirkštinė matrica, kadangi

```
m2^2%*%solve(m2^2)

               [,1]          [,2]           [,3]
[1,]  1.000000e+000 1.776357e-014 -7.105427e-015
[2,]  7.105427e-015 1.000000e+000  1.776357e-015
[3,] -1.065814e-014 1.421085e-014  1.000000e+000
```

Vaizdesnę išraišką gausime, jeigu atsakymą suapvalinsime iki, tarkime, vieno ženklo po kablelio:

```
round(m2^2%*%solve(m2^2),1)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
```

### 3.1.2. Kompleksiniai ir loginiai vektoriai

Kompleksinius vektorius rankomis įrašyti tenka retai (žr. `?complex` arba `example(complex)`). Dažniausiai tai būna kai kurių funkcijų reikšmės.

```
> roots <- polyroot(c(1,2,3))
> mode(roots)
[1] "complex"
> roots
[1] -0.3333333+0.4714045i -0.3333333-0.4714045i
```

Čia vektorius `c(1,2,3)` yra polinomo $1+2*x+3*x^2$ koeficientų vektorius; funkcijos `polyroot` reikšmė yra šio polinomo (dviejų kompleksinių jungtinių) šaknų vektorius. Nesunku patikrinti, kad tai iš tikrųjų šio polinomo šaknys:

```
> 1+2*roots[1]+3*roots[1]^2
[1] 0+0i
> 1+2*roots[2]+3*roots[2]^2
[1] 1.110223e-16-4.440892e-16i # Iš tikrųjų čia 0+0i
```

Kadangi R naudoja vektorinę aritmetiką, abi šaknis galime patikrinti iš karto.

```
> round(1+2*roots+3*roots^2,2) #Suapvaliname iki 2 ženklų po kablelio
[1] 0+0i 0+0i
```

Loginiai vektoriai irgi paprastai atsiranda kaip kai kurių (palyginimo) operacijų rezultatai.

```
> x <- 1:5
> x>1
[1] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
> xT <- x>1
> xT
[1] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
> !xT # Ženklas ! žymi loginį NE
[1] TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
> x<=4
[1]  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE
> x>1|x<=4 # Ženklas | žymi loginį ARBA
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
> x>1&x<=4 # Ženklas & žymi loginį IR
[1] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE
> x[x>1&x<=4]
[1] 2 3 4
```

### 3.1.3. Simboliniai vektoriai ir matricos

Jau turėjome simbolinio vektoriaus įrašymo pavyzdį:

```
simbve1 <- c("kaina","svoris","atstumas")
mode(simbve1)
[1] "character"
```

Jei įrašomas ilgas vektorius – naudokitės `edit` komanda:

```
simbve1 <- "kaina"
simbve1 <- matrix(simbve1)
simbve1 <- edit(simbve1)     # Užpildykite 1-ąjį stulpelį
simbve1
     col1
[1,] "kaina"
[2,] "svoris"
[3,] "atstumas"
mode(simbve1)
[1] "character"
dim(simbve1)
[1] 3 1
class(simbve1)
NULL
names(simbve1)
NULL
```

Patys panagrinėkite vektorių

```
simbve2 <- c(“1”,”2”,”3”)
```

Aišku, kad jis skiriasi nuo vektoriaus `ve3 <- c(1,2,3)`:

```
simbve2 <- c("1","2","3")
mean(simbve2)
Error in sum(..., na.rm = na.rm) : invalid "mode" of argument
mean(ve3)
[1]  2
```

Simbolinės matricos (jų visi elementai turi būti simboliniai!) įrašinėjamos retai. Jei to prireiktų – naudokite `edit` funkciją.

R objektų tipai (mode) turi tam tikrą hierarchiją, kurią, ne visai tiksliai kalbant, galima užrašyti taip: logical < integer < double < complex < character. Pavyzdžiui,

```
> v <- vector(mode="numeric",length=10) # v yra skaitinio tipo
> v[3] <- TRUE # Priskiriant reikšmes,loginis TRUE verčiamas 1-tu
> v
 [1] 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
> v[4] <- "foo" # Visos v reikšmės verčiamos aukštesnės hierarchijos,
                # t.y., simbolinėmis reikšmėmis
> v
 [1] "0"   "0"   "1"   "foo" "0"   "0"   "0"   "0"   "0"   "0"
```

Prievartinis tipo keitimas yra atliekamas iš žemesnės hierarchijos tipo į aukštesnį, bet ne atvirkščiai. Priskiriant reikšmes, pirmiausiai patikrinamas abiejų pusių tipas, o paskui priskiriamasis objektas įgyja aukštesnį tipą.

```
> v <- vector(mode="numeric",length=4)
> v[3:4] <- 3:4
> mode(v)
[1] "numeric"
> storage.mode(v)
[1] "double"
> v[2] <- "foo"
> v
[1] "0"   "foo" "3"   "4"
> storage.mode(v)
[1] "character"
```

### 3.1.4. Duomenų sistemos

Matricoje `Pastas` iš tikrųjų yra ir ketvirtas stulpelis, būtent `didumas`: pašto skyriuje siuntiniai dar skirstomi į didelius ir mažus. Štai tas stulpelis:

```
didumas <- c(rep("mazas",10),rep("didelis",10))
```

Skaitinę matricą `Pastas` ir simbolinę matricą(-stulpelį) `didumas` galima apjungti į naują matricą `pastas`:

```
pastas <- cbind(Pastas,didumas)   # Funkcija cbind matricą didumas
                                  # prirašo šalia matricos Pastas
                                  # (funkcija rbind – po matrica)
```

Deja, visi matricos elementai turi būti vieno tipo, todėl `cbind` automatiškai paverčia visus matricos `pastas` elementus (aukštesnės hierarchijos) simboliniais kintamaisiais:

```
pastas

      kaina     svoris      atstumas     didumas
[1,]  "2.0"      "0.3"         "160"     "mazas"
……
```

Norint, kad duomenų tipas nebūtų iškraipomas, `pastas` reikia apiforminti kaip duomenų sistemą[6] (jame stulpeliai gali būti skirtingos prigimties):

```
pastas <- data.frame(Pastas,didumas)
pastas

       kaina   svoris   atstumas     didumas
1        2.0      0.3        160       mazas
……
dim(pastas)
[1] 20  4
mode(pastas)
```

[6] Angliškai tai vadinama data frame.

```
[1] "list"
class(pastas)
[1] "data.frame"
names(pastas)
[1] "kaina"    "svoris"   "atstumas"    "didumas"
```

Keli duomenų sistemų pertvarkos pavyzdžiai. Norėdami iš `pastas` pašalinti stulpelius `svoris` ir `didumas`, elgiamės taip:

```
n.pastas=pastas[,-c(2,4)]
```

Jei stulpelių daug, lengviau nurodyti ne jų numerius, bet vardus:

```
nn.pastas=subset(pastas, select=-c(svoris,didumas))
```

Stulpelio vardą pakeisti galima taip: `names(pastas)[4]="dydis"`; norėdami naujoje duomenų sistemoje stulpelius surikiuoti pagal abėcėlę, surinkite

```
a.pastas=pastas[,c(3,4,1,2)]
```

### 3.1.5. Vardiniai kintamieji ( faktoriai)

`didumas` nėra paprastas vardų rinkinys, jį sudaro vardinio kintamojo `didumas` reikšmės `mazas` ir `didelis`. Norėdami tai pabrėžti, jam suteiksime specialią vadinamojo faktoriaus struktūrą:

```
> didumasf <- factor(didumas)
> didumasf
 [1] mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas
 [9] mazas   mazas   didelis didelis didelis didelis didelis didelis
[17] didelis didelis didelis didelis
Levels:  didelis mazas
```

Išoriškai skirtumas nėra didelis – `didumasf` reikšmės dabar rašomos be kabučių, tačiau šįkart atsirado dar vienas požymis, būtent `Levels`:

```
> attributes(didumasf)
$levels
[1] "didelis" "mazas"

$class
[1] "factor"
```

Antra vertus, R viduje (kad būtų taupiau) faktoriai talpinami kaip skaičiai

```
> mode(didumasf)
[1] "numeric"
```

Tuo taip pat galima įsitikinti surinkus

```
> edit(didumasf) -
```

Notepad'o lange matome

```
structure(c(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1), .Label = c("didelis", "mazas"), class = "factor")
```

Aišku, kad įrašų lentelėse daug kartų rašyti žodžius `mazas` ir `didelis` nepatogu, juos galima užkoduoti, pvz., simboliais 0 ir 1:

```
> DIDUMAS <- c(rep(0,10),rep(1,10))
> attributes(DIDUMAS)
NULL
```

Aišku, kas `DIDUMAS` išoriškai skiriasi nuo `didumas`, tačiau R viduje faktoriai `didumasf` ir

```
DIDUMASF <- factor(DIDUMAS)
> attributes(DIDUMASF)
$levels
[1] "0" "1"

$class
[1] "factor"
```

skiriasi tik Label vardais:

```
> edit(DIDUMASF)
structure(c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
2, 2, 2), .Label = c("0", "1"), class = "factor")
```

Nesunku pasiekti, kad `didumasf` ir `DIDUMASF` R vidinių reprezentacijų prasme būtų vienodi. Mat Levels yra priskiriami abėcėlės arba, jeigu tai skaičiai, jų didėjimo tvarka. Pasirinkę lygius Levels taip, kad `mazas` atitiktų 0, o `didelis` – 1, pasieksime, kad abu faktoriai reikštų tą patį:

```
> didumasf <- factor(didumas,levels=c("mazas","didelis"))
> edit(didumasf)
structure(c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
2, 2, 2), .Label = c("mazas", "didelis"), class = "factor")
```

ir

```
> DIDUMASF <- factor(DIDUMAS,levels=c(0,1))
> edit(DIDUMASF)
structure(c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
2, 2, 2), .Label = c("0", "1"), class = "factor")
```

Pažymėsime, kad prijungdama prie skaitinio objekto (mūsų atveju, skaitinės matricos `Pastas`) simbolinį vektorių `didumas`, funkcija `data.frame` automatiškai paverčia jį faktoriumi:

```
pastas <- data.frame(Pastas,didumas)
attach(pastas)
class(didumas)
[1] "factor"
```

Kai kurių funkcijų argumentai turi būti faktoriai – tai joms signalizuoja, kad šis argumentas yra vardinis kintamasis, o ne etikečių rinkinys. Pavyzdžiui,

```
pastas <- data.frame(Pastas,didumas)
attach(pastas)
summary(didumas)
didelis   mazas
     10      10
```

arba

```
tapply(kaina,didumas,mean)
didelis   mazas
   8.58      4.09
```

Funkcija `tapply` skaičiuoja kintamojo `kaina` vidurkį visus duomenų sistemos `pastas` įrašus suskaidydama į grupes pagal faktoriaus `didumas` reikšmes. Taigi, didelių siuntinių vidutinė pristatymo kaina yra 8,58, o mažų – 4,09.

### 3.1.6. Ranginiai kintamieji

Kintamieji `didumasf` arba `DIDUMASF` yra vardiniai kintamieji – aišku, kad šiuo atveju skirtumas 1 - 0 (tai ekvivalentu skirtumui `didelis - mazas`) prasmės neturi. Antra vertus, `didelis` vistik "didesnis" už `mazas` – kitais žodžiais, kintamąjį `didumasf` galime interpretuoti kaip ranginį. R kalboje tai galima užrašyti taip (levels reikia išvardinti didėjimo tvarka):

```
> attach(pastas)
> didumaso <- ordered(didumas,levels=c("mazas","didelis"))
> didumaso
 [1] mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas   mazas
 [9] mazas   mazas   didelis didelis didelis didelis didelis didelis
[17] didelis didelis didelis didelis
Levels:  mazas < didelis
> summary(didumaso)
  mazas didelis
     10      10
> attributes(didumaso)
$levels
[1] "mazas"   "didelis"

$class
[1] "ordered" "factor"
```

### 3.1.7. Sąrašai

Sąrašas (angl. list) yra pagrindinis R objektas, jis naudojamas, kai reikia apjungti skirtingos prigimties[7] objektus į vieną naują objektą. Pažymėsime, kad daugumos R funkcijų reikšmė yra būtent sąrašas. Štai būdingas pavyzdys. Aišku, kad `kaina` (žr. matricą `Pastas`) priklauso nuo kintamojo `atstumas`. Kadangi, didėjant atstumui, kaina turėtų didėti, galima tikėtis tokios (regresinės) priklausomybės:

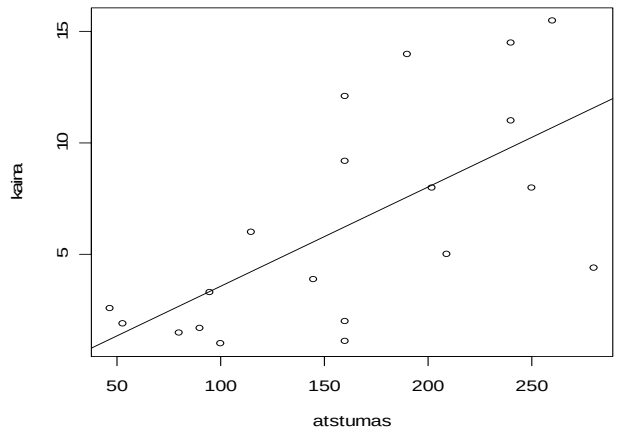
[7] Viena komponentė gali būti skaitinis, o kita – simbolinis vektorius, trečia – matrica, ketvirta – kitas sąrašas ir t.t.

$$kaina = a + b \cdot atstumas + paklaida\ .$$

Nežinomus (regresijos) koeficientus *a* ir *b*, remdamasi matricos `Pastas` duomenimis, skaičiuoja R funkcija `lm`:

```
> kaina.lin <- lm(kaina~atstumas)
> mode(kaina.lin)
[1] "list" # Funkcijos lm reikšmė, t.y., sukurtas objektas kaina.lin,
           # yra sąrašas
> names(kaina.lin) # Šis sąrašas turi daug komponenčių:
 [1] "coefficients"  "residuals"     "effects"       "rank"
 [5] "fitted.values" "assign"        "qr"            "df.residual"
 [9] "xlevels"       "call"          "terms"         "model"
> kaina.lin$coeff  # Koeficientų komponentė
(Intercept)    atstumas
-0.87284907  0.04454789
```

Taigi, koeficientas *a*=-0,873, o *b*=0,045.




3.1 pav. Kintamųjų `atstumas` ir `kaina` sklaidos diagrama bei regresijos tiesė `kaina=-0,873+0,045atstumas`

Sąrašai natūraliai atsiranda, sudarant kai kurias anketas:

```
anketa <- list(pavarde="Jonaitis Jonas", issilavinimas="magistras",
vaikai=2, vaiku.amzius=c(7,5))
```

Matome, kad sąrašo komponentės gali būti ir skirtingos prigimties ir skirtingo ilgio. Norėdami į sąrašą įtraukti kelias pavardes, elgsimės taip:

```
pavarde <- c("Jonaitis Jonas","Petraitis Antanas") # Simb. vektorius
issilavinimas <- c("magistras","vidurinis")        # Simb. vektorius
vaikai <- c(2,3)                                   # Skait. vektorius
vaiku.amzius  <-  list(vaiku.amzius1=c(7,5),vaiku.amzius2=c(14,12,5))
#Sąrašas
anketa <- list(pavarde=pavarde, issilavinimas=issilavinimas, vaikai
=vaikai, vaiku.amzius=vaiku.amzius) #Sąrašas
> anketa
$pavarde
[1] "Jonaitis Jonas"    "Petraitis Antanas"
```

```
$issilavinimas
[1] "magistras" "vidurinis"

$vaikai
[1] 2 3

$vaiku.amzius
$vaiku.amzius$vaiku.amzius1
[1] 7 5

$vaiku.amzius$vaiku.amzius2
[1] 14 12  5
```

Sąrašo pirmoji komponentė pasiekiamos su

```
> anketa[[1]]
[1] "Jonaitis Jonas"    "Petraitis Antanas"
```

(plg. `anketa[1]` – tai sąrašas su viena komponente) arba nurodant jos vardą (rezultatą pateiksime kaip simbolinę matricą)

```
> cbind(anketa$pavarde)
     [,1]
[1,] "Jonaitis Jonas"
[2,] "Petraitis Antanas"
```

Funkcija `unlist` paverčia sąrašą vektoriumi:

```
> unlist(anketa)
               pavarde1                pavarde2           issilavinimas1
       "Jonaitis Jonas"     "Petraitis Antanas"              "magistras"
         issilavinimas2                 vaikai1                  vaikai2
            "vidurinis"                     "2"                      "3"
vaik.amzius.vaik.amzius1 vaik.amzius.vaik.amzius2 vaik.amzius.vaik.amzius1
                     "7"                     "5"                     "14"
vaik.amzius.vaik.amzius2 vaik.amzius.vaik.amzius3
                    "12"                     "5"
```

Sąrašo komponenčių vardus galima praleisti:

```
> unlist(anketa,use.names=F)
 [1] "Jonaitis Jonas"    "Petraitis Antanas" "magistras"         "vidurinis"
 [5] "2"                 "3"                 "7"                 "5"
 [9] "14"                "12"                "5"
```

Kelis sąrašus galima apjungti į vieną su paprasta apjungimo funkcija `c`:

```
list.AB <- c(list.A,list.B)
```

**3.1 pvz.** Norint sukurti šimtą panašių objektų, galima išbandyti tokią procedūrą:

```
for (j in 1:100) x.j <- rnorm(5)
```

Deja, ji nesukuria nei `x.1`, nei kitų objektų. Iš tikrųjų, mums reiktų pasinaudoti `assign` funkcija

```
varnames <- paste("x", 1:100, sep = ".")
for(j in 1:100) assign(varnames[j], rnorm(5))
```

(kaip vėliau pašalintumėte visus x.1,...,x.100 iš darbinės aplinkos?), tačiau dar geriau sukurti sąrašą:

```
x <- vector(mode="list", length=100)
for (j in 1:100) x[[j]] <- rnorm(5)
```

(pabandykite x, x[[15]], lapply(x,mean) ir plot(1:100,lapply(x, mean)- apie apply grupės funkcijas daugiau pasiskaityti galima 25 psl.).

Daugiau apie sąrašus galima pasiskaityti [V&R, p.18], [Intro, p.27] arba [Ma, p.23].

## 3.2. Duomenų importas ir eksportas

Dažnai tenka apdoroti duomenis, kurie pateikti ne R formatu (pvz., Excel, SAS, SPSS ar dar kitokiu formatu). R turi paketą foreign, kuris gali daugumą šių duomenų importuoti (perskaityti). Lengviausia importuoti tekstinius failus[8], kuriuos galima nuskaityti su base paketo funkcijomis scan arba read.table . Štai keli pavyzdžiai.

Tarkime, kad tekstiniame faile import1.txt yra įrašytas vektorius 1 2 3 4. Perkelkite šį failą į R darbinę direktoriją (priminsime: ją galima sužinoti su getwd()) ir komandiniame lange surinkite

```
> x <- scan(file="import1.txt")
Read 4 items
> x
[1] 1 2 3 4
```

Skaitinius vektorius galima importuoti ir taip: surinkite

```
> x <- scan()
```

ir, spragtelėję Enter, atidarykite import.txt, pasižymėkite jį visą ir su Copy + Paste perkelkite į R konsolę. Du kartus spragtelėję Enter, turėsite R vektorių x.

Jei šio vektoriaus koordinatės būtų viena nuo kitos atskirtos kableliu, tai rinktume

```
x <- scan(file="import1.txt",sep=",")
```

Tarkime, failas import2.txt yra matricos pavidalo (pirmoje eilutėje yra kintamųjų vardai):

```
     wage     lnwage      educ      exper     lnexper     lneduc       male
 313.8528   5.748924         1         23    3.178054          0          1
 194.378    5.269804         1         15    2.772589          0          0
 426.1364   6.05476          1         31    3.465736          0          1
 284.0909   5.649294         1         32    3.496508          0          1
```

Jį importuoti galime taip[9]:

[8] Dauguma programinių produktų gali eksportuoti savo duomeninius objektus į ASCII (kitaip sakant, tekstinį) formatą.

[9] Jei tikslaus reikalingo failo adreso neprisimenate, patogu naudoti komandą x <- read.table (file.choose(),header=TRUE)

```
> x <- read.table(file="import2.txt",header=T)
> x
      wage   lnwage educ exper  lnexper lneduc male
1 313.8528 5.748924    1    23 3.178054      0    1
2 194.3780 5.269804    1    15 2.772589      0    0
3 426.1364 6.054760    1    31 3.465736      0    1
4 284.0909 5.649294    1    32 3.496508      0    1
> mode(x)
[1] "list"
> class(x)
[1] "data.frame"
```

Pažymėsime, kad failas import2.txt yra kompaktiniame diske R1 esančio failo Data\Verbeek\ bwages.dat pirmos keturios eilutės. Norėdami importuoti visą šį failą (jame stulpeliai vardų neturi, todėl juos sukursime), elgsimės taip[10]:

```
bwages <- read.table(file="E:/Data/Verbeek/bwages.dat", col.names=
c("wage","lnwage","educ","exper","lnexper","lneduc","male"))
> bwages[1:4,]
      wage   lnwage educ exper  lnexper lneduc male
1 313.8528 5.748924    1    23 3.178054      0    1
2 194.3780 5.269804    1    15 2.772589      0    0
3 426.1364 6.054760    1    31 3.465736      0    1
4 284.0909 5.649294    1    32 3.496508      0    1
> dim(bwages)
[1] 1472    7
```

Failas bwages.dat yra patalpintas internete, žr. http://www.econ.kuleuven.ac.be/GME. Jame yra 1472 Belgijos šeimų stebėjimų rezultatai. Kintamieji čia tokie:

wage – neapmokestintos šeimos nario valandinės pajamos (Belgijos frankais)
lnwage = log(wage)
educ – išsilavinimo lygis (1 – žemas,…, 5 - aukštas)
exper – profesinis patyrimas (metais)
lnexper = log(1+exper)
lneduc = log(educ)
male – 1 (jei vyras) ir 0 (jei moteris)

Žinant rinkinio internetinį adresą, failą bwages.dat galima nuskaityti ir taip:

```
read.table(file=url("http://www.econ.kuleuven.ac.be/GME/bwages.dat"))
```

R duomeninius failus galima eksportuoti į daugumą populiarių formatų. Pvz., pirmąsias dešimt R duomenų rinkinio `bwages` eilutes galima eksportuoti į darbinę direktoriją ASCII formatu (sukurtasis failas vadinsis bwages.txt):

```
write.table(bwages[1:10,],file="bwages.txt",row.names=F,col.names=F)
```

arba tiesiog

```
write.table(bwages[1:10,],file="bwages.txt")
```

[10] Nurodant tikslų failo adresą, reikia naudoti arba Linux'o/Unix'o stiliaus kelio nuoroda su separatoriumi "/" arba Windows'iniu separatoriumi "\\" (nepamirškite tikslaus adreso apsupti kabutėmis).

(šiuo atveju eilutės bus sunumeruotos, o stulpeliai turės vardus).

Taigi duomenų sistemas eksportuojame su `write.table`, o importuojame su `read.table`. Norint eksportuoti vektorių, matricą arba masyvą, galima pasirinkti funkciją `write`. Štai pavyzdys:

```
> mm <- matrix(1:20,nrow=2)
> mm
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]    1    3    5    7    9   11   13   15   17    19
[2,]    2    4    6    8   10   12   14   16   18    20

> write(t(mm),"mm.txt",ncol=10) # Matricą mm reikia transponuoti
```

Nuvairavę į darbinę direktoriją, joje rasime ASCII failą mm.txt:

```
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
```

Beje, įsitikinti tuo, kad šis failas buvo sėkmingai sukurtas, galime ir su

```
> file.exists("mm.txt") # Šios funkcijos reikšmė – loginis TRUE
[1] TRUE
```

Jau žinome, kad importuoti jį galima su, pvz.,

```
> matrix(scan("mm.txt"),byrow=T,ncol=10)
```

Jei šio failo nebereiks, jį galima ištrinti:

```
> file.remove("mm.txt")
[1] TRUE
> file.exists("mm.txt")
[1] FALSE
```

R objektus galime išsaugoti ir binariniu pavidalu (to gali prireikti, jei juos norėtume perkelti į kitą mašiną). Tai atliekame su funkcija `save`:

```
> save(mm,file="mm.Rdata") # Eksportuojame
> rm(mm)
> mm
Error: Object "mm" not found
> load("mm.Rdata") # Importuojame
> mm
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]    1    3    5    7    9   11   13   15   17    19
[2,]    2    4    6    8   10   12   14   16   18    20
```

Beje, šitaip galima transportuoti ir kitus R objektus, pvz., funkcijas.

```
> save(mm,mean.mano,file=”new.Rdata”)
```

Su šia komanda faile `new.Rdata` galima kaupti visas savo parašytas funkcijas. Jei šis failas yra standartinėje direktorijoje, pvz., C:\Program Files\R\R-2.4.0, tai visas funkcijas iš šio failo prisijungti ir jomis naudotis galima su komanda `attach`

("C:/Program Files/R/R-2.4.0/new.Rdata"). Šią komandą galima įrašyti ir į Rprofile failą iš R-2.4.0/etc direktorijos – tuomet visos ten esančios funkcijos bus prijungiamos R sesijos pradžioje.

O štai dar vienas paprastas importo būdas: pasižymėkite (apšvieskite) reikalingą lentelę *.txt arba *.xls faile ir paspauskite Ctrl+C; po to R komandiniame lange surinkite vieną iš komandų

```
read.delim2("clipboard") (arba read.delim("clipboard"))
read.delim2("clipboard",header=FALSE)
```

Panašiai galima ir eksportuoti: jei x yra duomenų sistema, atspausdinkite

```
write.table(x,"clipboard",sep="\t")
```

Paprastai komputavimo rezultatai yra išvedami į ekraną, tačiau reikalui esant juos galima išvesti (kartu išsaugant) į failą.

```
sink("sink-examp.txt") # Nuo šiol komputavimo rezultatai bus išvedami
                       # į failą "sink-examp.txt"
i <- 1:10
outer(i, i, "*")       # Šią matricą rasite minėtame faile
sink()                 # Nuo šiol komputavimo rezultatai bus vėl iš-
                       # vedami į ekraną
unlink("sink-examp.txt") # Failą "sink-examp.txt" ištriname (jei jo
                         # nebereikia)
```

Klausimas: koks žemiau užrašytų komandų rezultatas?

```
sink("results.txt")
1+1
sink()
```

## 3.3. (Pseudo)atsitiktinių skaičių generavimas

Realūs stebėjimų rezultatai retai elgiasi "taip kaip reikia" (pvz., dauguma statistikos modelių reikalauja, kad stebėjimai turėtų Gauso skirstinį, o tuo tarpu matavimo rezultatų histograma nelabai panaši į varpo pavidalo kreivę). Norint geriau suprasti statistikos metodus, dažnai tikslinga nagrinėti "dirbtinius" duomeninius objektus. R moka generuoti "teisingus" (t.y., turinčius reikalingą skirstinį) (beveik[11]) atsitiktinius skaičius, kurių histogramos, *p* reikšmės, modelių paklaidos ir t.t. jau elgiasi "tinkamai".

Atsitiktinius skaičius generuojančios funkcijos yra pavidalo `r +{beta, binom, norm, unif,…}`. Štai jų sąrašas (žr. [Pa, 15 p.]):

[11] Šie skaičiai nėra atsitiktiniai, jie yra (labai ilgos, bet) tam tikra neatsitiktine funkcija nusakytos, sekos nariai. Nors jie ir nėra atsitiktiniai, tačiau išoriškai jie labai panašūs į tokius. Negana to, netgi statistiniai kriterijai juos sunkiai atskiria nuo „visai" atsitiktinių sekų. Šie skaičiai paprastai vadinami pseudo-atsitiktiniais skaičiais arba tiesiog atsitiktiniais skaičiais.

| law | function |
|---|---|
| Gaussian (normal) | `rnorm(n, mean=0, sd=1)` |
| exponential | `rexp(n, rate=1)` |
| gamma | `rgamma(n, shape, scale=1)` |
| Poisson | `rpois(n, lambda)` |
| Weibull | `rweibull(n, shape, scale=1)` |
| Cauchy | `rcauchy(n, location=0, scale=1)` |
| beta | `rbeta(n, shape1, shape2)` |
| 'Student' ($t$) | `rt(n, df)` |
| Fisher–Snedecor ($F$) | `rf(n, df1, df2)` |
| Pearson ($\chi^2$) | `rchisq(n, df)` |
| binomial | `rbinom(n, size, prob)` |
| geometric | `rgeom(n, prob)` |
| hypergeometric | `rhyper(nn, m, n, k)` |
| logistic | `rlogis(n, location=0, scale=1)` |
| lognormal | `rlnorm(n, meanlog=0, sdlog=1)` |
| negative binomial | `rnbinom(n, size, prob)` |
| uniform | `runif(n, min=0, max=1)` |
| Wilcoxon's statistics | `rwilcox(nn, m, n), rsignrank(nn, n)` |

Pradėkime nuo atsitiktinių skaičių, turinčių Puasono skirstinį, generavimo.

```
?rpois
rpois(20,3)
```

`[1] 2 4 2 3 2 2 0 1 5 2 0 4 3 3 2 3 2 2 4 2` - generuojame seką dvidešimties atsitiktinių skaičių, turinčių Puasono skirstinį su vidurkiu 3;

```
rpois(20,3)
```

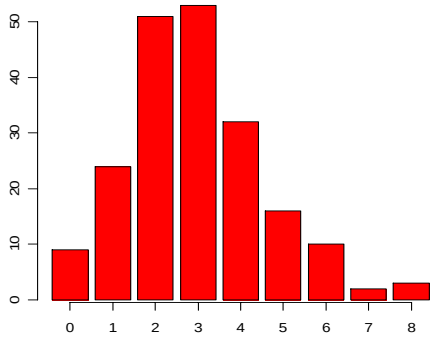
`[1] 4 3 5 1 5 3 3 3 0 3 5 1 3 6 5 3 1 0 4 2` - šie atsitiktiniai skaičiai yra pirmosios sekos tęsinys, todėl jie kitokie;

```
sort(rpois(20,3))
```

`[1] 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 4 4 5 6 6` - trečia puasoninių dydžių porcija, surūšiuota didėjimo tvarka.

Panagrinėkima dar vieną pavyzdį. Tarkime, kad 10 kartų šauname į taikinį, o pataikymo tikimybė yra 0,3. Aišku, kad sėkmingų šūvių skaičius yra atsitiktinis dydis, turintis binominį skirstinį su parametrais 10 ir 0,3 (jo vidurkis lygus $n \cdot p = 10 \cdot 0{,}3 = 3$). Imituoti tokius eksperimentus galime su funkcija `rbinom` (jos žemiau esantis variantas pateikia sėkmių skaičių kiekviename iš 200 įsivaizduojamų eksperimentų):

```
> rb <- rbinom(200,10,0.3)
> rb
  [1] 0 3 1 3 0 0 2 4 4 4 5 3 1 2 4 1
 [17] 5 2 3 2 5 1 0 2 2 1 2 4 3 4 8 4
 [33] 3 2 2 3 0 6 4 2 3 6 3 2 3 6 0 8
 [49] 1 4 1 4 4 3 5 4 2 2 3 1 5 1 3 2
 [65] 6 3 3 3 1 1 5 4 1 2 2 6 2 3 2 3
 [81] 2 4 3 3 6 4 2 3 2 2 4 0 4 2 2 4
 [97] 3 5 2 3 6 0 2 3 1 1 2 3 1 4 2 3
[113] 4 2 2 4 2 3 2 4 5 2 3 3 2 3 4 1
[129] 3 1 1 4 3 0 3 2 5 5 4 3 3 2 2 3
[145] 4 3 3 2 6 5 7 3 3 6 3 2 5 5 2 2
[161] 2 2 3 2 3 2 3 3 4 3 5 4 1 3 7 8
[177] 5 2 3 2 2 1 3 1 4 2 2 2 4 4 3 3
[193] 6 1 3 1 4 1 5 3
> mean(rb)
[1] 2.955
> table(rb)
rb
 0  1  2  3  4  5  6  7  8
 9 24 51 53 32 16 10  2  3
> barplot(table(rb))
```




3.2 pav. Grafike matyti, keli eksperimentai baigėsi 0, 1, … ar 10-čia sėkmių

Panašų grafiką galime gauti (pabandykite) ir su

```
plot(table(rb), type = "h", col = "red", lwd=10,
main="rbinom(200,10,0.3)")
```

Nors teoriškai sėkmių gali būti nuo 0 iki 10, tačiau matome, kad atlikus 200 eksperimentų nei karto nepataikėme 9 kartų. To priežastis yra aiški – 9 kartus pataikyti "turėjome" 0,0276 kartus, todėl nieko nuostabaus, kad tokio įvykio nestebėjome:

```
> 200*dbinom(9,10,0.3)
[1] 0.0275562
```

Beje,

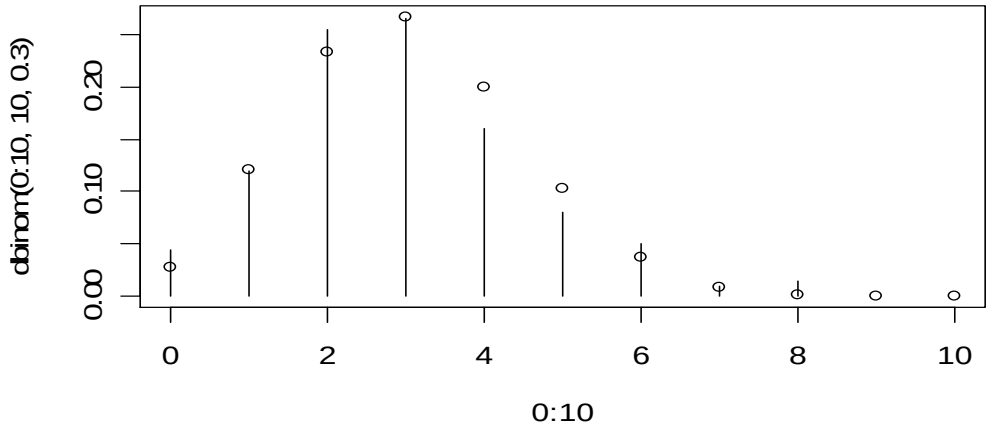
```
> 200*dbinom(3,10,0.3)
[1] 53.36559
```

kas labai arti stebėtųjų 53 kartų. Apskritai, tikimybių ir santykinių dažnių artumą galime pavaizduoti lentele

```
> round(rbind(table(rb)/200,dbinom(0:8,10,0.3)),4)
          0      1      2      3      4      5      6     7      8
[1,] 0.0450 0.1200 0.2550 0.2650 0.1600 0.0800 0.0500 0.010 0.0150
[2,] 0.0282 0.1211 0.2335 0.2668 0.2001 0.1029 0.0368 0.009 0.0014
```

arba grafiškai

```
plot(0:10,dbinom(0:10,10,0.3))
lines(as.integer(names(table(rb))),table(rb)/200,type="h")
```

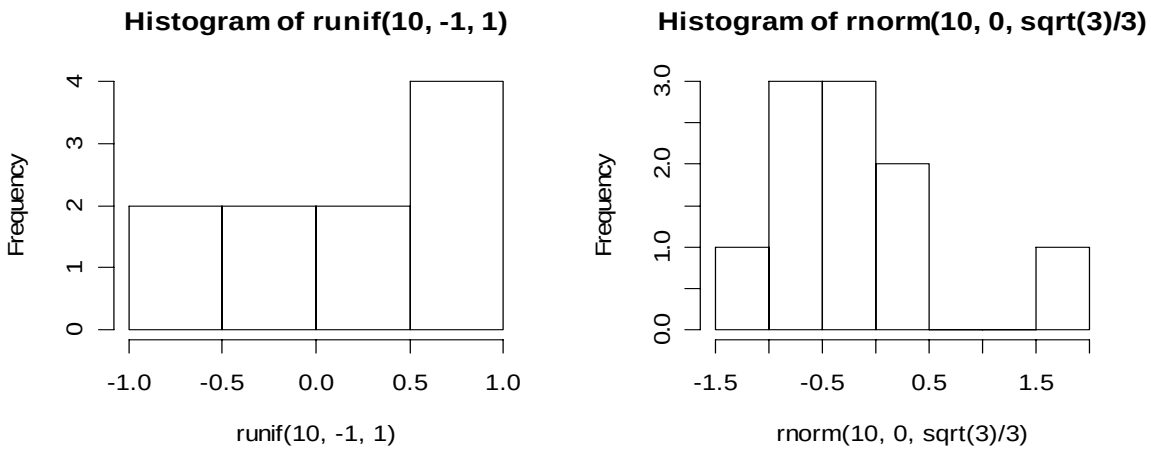



3.3 pav. Tikimybių (rutuliukai)
ir santykinių dažnių (stačios atkarpos) grafikas

Jei diskrečiųjų atsitiktinių dydžių dažnius brėžiame su `barplot` komanda (arba `plot` su opcija "h"), tai tolydžiuoju atveju tam naudojame empirinį tankio atitikmenį – histogramą. Palyginkime dvi imtis, kurių viena yra tolygioji su parametrais -1 ir 1, o kita - normalioji (Gauso) su parametrais 0 ir sqrt(3)/3 (abiejų imčių vidurkiai ir dispersijos sutampa, ar ne?):

```
par(mfrow=c(1,2))          # Grafiniame lange bus du vienoje eilutėje
                           # esantys polangiai
hist(runif(10,-1,1))       # Generuojame 10 tolygiųjų atsitiktinių
                           # skaičių ir brėžiame jų histogramą
hist(rnorm(10,0,sqrt(3)/3))
```

Matome, kad tuomet, kai imtys nedidelės, netgi skirtingų a.d. histogramos gali būti labai panašios (dvi paskutines eilutes pakartokite kelis kartus)



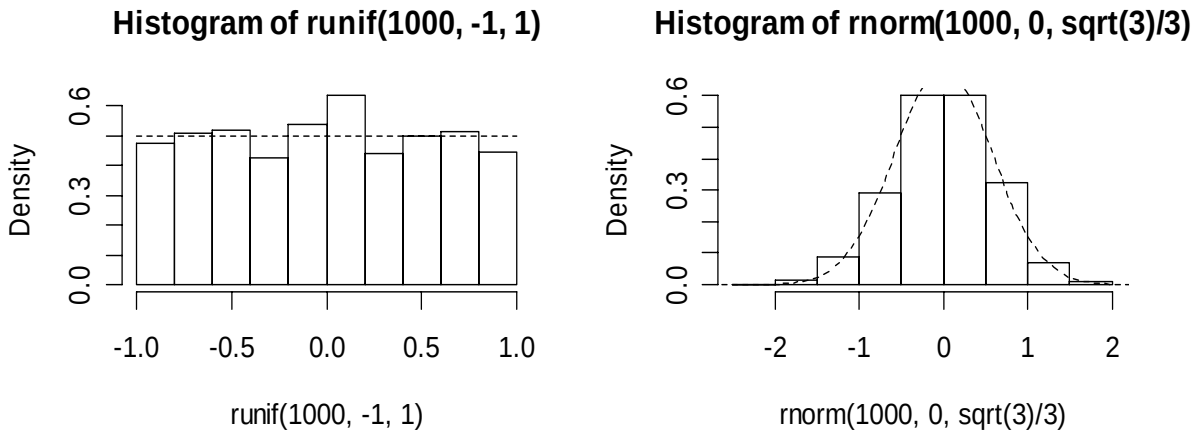

3.4 pav. 10 -ties tolygiųjų (kairėje) ir 10 - ties normaliųjų (dešinėje)
atsitiktinių skaičių histogramos

Kai imties dydis auga, histograma artėja prie tankio: kelis kartus pabandykite

```
hist(runif(100,-1,1))          # Didėjant imties dydžiui, skirtumai
hist(rnorm(100,0,sqrt(3)/3)) # tarp histogramų ryškėja
```

o dabar pabandykite

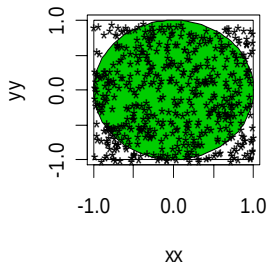
```
hist(runif(1000,-1,1),freq=F)
x <- seq(-1,1,length=100)
lines(x,dunif(x,-1,1),lty=2)
hist(rnorm(1000,0,sqrt(3)/3),freq=F)
xx <- seq(-3,3,length=100)
lines(xx,dnorm(xx,0,sqrt(3)/3),lty=2)
```




3.5 pav. 1000 tolygiųjų (kairėje) ir 1000 normaliųjų (dešinėje) skaičių histogramos ir atitinkami tankiai

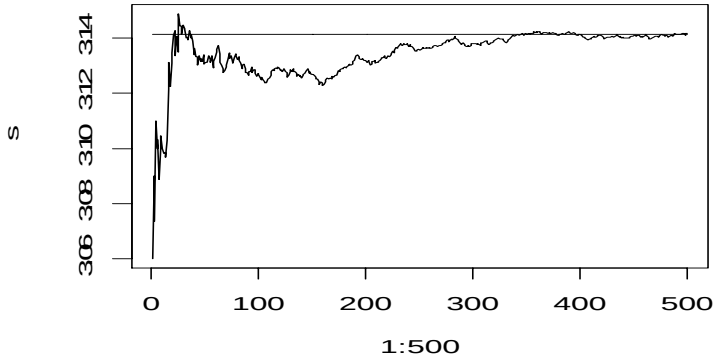
**3.2 pvz.** Aprašysime kaip, taikant vadinamąjį Monte-Carlo metodą, galima apskaičiuoti skaičių $\pi$. Generuokime seką dvimačių atsitiktinių vektorių $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, turinčių tolygų skirstinį kvadrate K su viršūnėmis taškuose $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ ir $(-1,1)$ (vieną tokį vektorių generuosime su `runif(2,-1,1)`). Žinome, kad tolygiojo skirstinio atveju tikimybė, kad taškas paklius į kvadrato "gerą" poaibį $A$ yra lygi $P(A) = l(A)/l(K) = l(A)/4$ (čia $l(A)$ yra aibės $A$ Lebego matas, t.y. tiesiog plotas). Kitais žodžiais, tikimybė $P(S)$ pakliūti į vienetinį skritulį $S$ lygi $\pi/4$. Monte Carlo metodas tvirtina, kad tuomet, kai bandymų skaičius $n$ didelis, pakliuvusių į $A$ taškų skaičiaus santykinis dažnis maždaug lygus $P(S)$, t.y., $\pi/4$ . Štai programa, kuri leidžia apytiksliai apskaičiuoti $\pi$:

```
xx <- c(-1,1,1,-1,-1)
yy <- c(-1,-1,1,1,-1)
plot(xx,yy,type="l")                    # Brėžiame kvadratą K
x <- cos(seq(0,2*pi,length=100))
y <- sin(seq(0,2*pi,length=100))        # Apskritimo lygtis polinėse koord.
polygon(x,y,col=3)                      # Nuspalvinsime skritulį
points(runif(500,-1,1),
runif(500,-1,1),pch="*")
```




3.6 pav. Į kvadratą K "metėme" 500 taškų

```
xxx <- runif(100000,-1,1)
yyy <- runif(100000,-1,1) # Į kvadratą K "metame" 100000 taškų
s <- numeric(500)
print(s)                  # Vektorius iš 500 nulių
for(i in 1:500) {s[i] <-
4*sum(ifelse(xxx[1:(200*i)]^2+yyy[1:(200*i)]^2<=1,1,0))/(200*i)}
# Ciklas: kam lygus santykinis dažnis, jei jį
# skaičiuotume pagal pirmuosius 200*i taškus
print(s)              # Santykinių dažnių (padaugintų iš 4) vektorius
plot(1:500,s,type="l")
lines(1:500,rep(pi,500))
s[500]                # π įvertis pagal 100000 eksperimentų
[1] 3.14088
```




3.7 pav. Santykinio dažnio s elgesys (n=200*i, i=1,500)

Skaičiavimas trunka gana ilgai, o tikslumas nelabai didelis, todėl geriau $\pi$ skaičiuoti kitokiais metodais[12] (žinoma, jei skaičiuotume tik vieną *s* reikšmę, atitinkančią

[12] Visus skaičiavimus R atlieka dvigubu tikslumu:

```
> pi
[1] 3.141592653589793
```

arba

```
> options(digits=16)   # Standartinė reikšmė yra digits=7
```

100000 eksperimentų, tai skaičiavimai truktų žymiai trumpiau). Antra vertus, tai mūsų pirma tokia ilga programa. Tokias programas geriau rašyti ne komandiniame lange. Elgsimės taip. Komandiniame lange pradėkime rašyti (beargumentę) funkciją `py`:

```
py <- function(){}
```

Toliau ją rašysime kokio nors redaktoriaus lange (standartinis Windows'inio R redaktorius yra Notepad'as): surinkite

```
py <- edit(py)
```

Notepad'o lange perrašysime (kiek pakeitę) anksčiau parašytas eilutes. Galutinis funkcijos tekstas yra toks:

```
function(){
# funkcija py (Monte Carlo metodas)
opar <- par(mfrow=c(1,2))          # Bus du polangiai
on.exit(par(opar))                 # Programai baigus darba, polangių
                                   # bus tiek, kiek anksčiau
xx <- c(-1,1,1,-1,-1)
yy <- c(-1,-1,1,1,-1)
plot(xx,yy,type="l")               # Brėžiame kvadratą K
x <- cos(seq(0,2*pi,length=100))
y <- sin(seq(0,2*pi,length=100))   # Apskritimo lygtis polinėse koordinatėse
polygon(x,y,col=3)                 # Nuspalvinsime skritulį
points(runif(500,-1,1),runif(500,-1,1),pch="*")
xxx <- runif(100000,-1,1)
yyy <- runif(100000,-1,1)          # Į kvadratą K "metame" 100000 taškų
s <- numeric(50)
for(i in 1:50) {s[i] <-
4*sum(ifelse(xxx[1:(2000*i)]^2+yyy[1:(2000*i)]^2<=1,1,0))/(2000*i)
   cat("ciklo zingsnis=",i,"\n")} # Ciklas: kam lygus santykinis dažnis, jei
                                   # jį skaičiuotume pagal pirmuosius 2000*i
                                   # taškus,i=1:50
plot(1:50,s,type="l")
lines(1:50,rep(pi,50))
s[50]                              # Įvertis pagal 100000 eksperimentų
}                                  # rezultatus
```

Uždarykite Notepad'o langą (į klausimą Do you want to save the changes? atsakykite Yes) ir surinkę

```
py()
```

po kiek laiko pamatysite komputavimo rezultatą.

---

```
> 4*atan(1)            # atan (angl.) = arktangentas
[1] 3.141592653589793
```

Mažus ir didelius skaičius R automatiškai užrašo standartiniu pavidalu. Jie bus užrašyti dešimtaine trupmena , jei pasirinksime `options(scipen=100)`:

```
> 4.485107e-10
[1] 0.0000000004485107
```

## 3.4. Apie R funkcijas ir `source` komandą

Jau žinome, kad R programas galima rašyti kelias būdais. Pavyzdžiui, tokią dviejų eilučių programą galima rašyti iš karto konsolėje

```
> x <- 1:10
> x
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Šią procedūrą galima apiforminti kaip funkciją:

```
> seka <- function(){x <- 1:10;x}
> seka()
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

arba, surinkus

```
seka <- function(){}
seka <- edit(seka)
```

baigti redaguoti atsidariusiame Notepad'o lange

```
function(){
x <- 1:10
x
}
> seka()
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Yra dar viena galimybė, kuri sudėtingesnėms funkcijoms dažnai būna patogi. Darbiniame kataloge atidarykime[13] naują tekstinį failą seka.txt (arba, dar geriau, seka.R). Jame parašykite dvi eilutes

```
x <- 1:10
print(x) # Ne x , bet būtent print(x)!
```

ir jo neuždarę (bet išsaugoję su File|Save) R konsolės meniu eilutėje pasirinkite File|Source R code... ir, nuvairavę į darbinį katalogą, spragtelėkite ant seka.R:

```
> source("C:/Program Files/R/LabDarbai/seka.R")
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Jei `source` eilutę pakeistumėte į

```
> source("C:/Program Files/R/LabDarbai/seka.R",echo=T)
```

tai matytumėte dar ir savo programos tekstą:

```
> x <- 1:10
> print(x)
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

[13] Tai gali būti Notepad'o arba, pvz., Word'o failas. Labai patogu redaguoti su (mokamu produktu) WinEdt'u (jeigu jis instaliuotas, surinkite `library(RWinEdt)`).

Tekstą seka.R faile dabar galima papildyti ar redaguoti, o pakeitimus išsaugojus su File|Save vėl galima kreiptis į `source` procedūrą. Pažymėsime, kad šitaip patogu atlikti visus laboratorinius darbus, tekstinius failus *.R patogu parsinešti namo ir atgal.

## 3.5. Programavimo pavyzdžiai

**3.3 pvz.** R "nemėgsta" ciklų, tiksliau kalbant, kai duomenų rinkiniai dideli, vektorinės aritmetikos funkcijos pagreitina R programų darbą. Štai kelios `apply` grupės funkcijos:

```
apply(X,MARGIN, FUN,...)   # X yra masyvas (arba matrica)
```

Jei `MARGIN=1`, tai funkcijos `FUN` argumentas bus kiekviena masyvo (pvz., matricos) `X` eilutė, jei `MARGIN=2` – stulpelis ir t.t.

```
lapply(X,FUN,...)          # X yra sąrašas (arba vektorius)
sapply(X,FUN,...,simplify=TRUE,USE.NAMES=TRUE) # Beveik tas pat
```

Taikant funkciją `lapply` (=list `apply`) arba jos labiau "user-friendly" variantą `sapply`, funkcijos `FUN` argumentas yra kiekvienas sąrašo `X` elementas (jei sąrašas `X` yra duomenų sistema, tai šio sąrašo elementai bus stulpeliai, o jei `X` yra vektorius, tai tiesiog kiekvienas jo elementas).

```
tapply(X,INDEX,FUN=NULL,...,simplify=TRUE) # X paprastai vektorius,
                                           # o INDEX - faktorius
```

(jei, pvz., `X` yra žmogaus svoris, `INDEX` – jo lytis, o `FUN=mean` , tai `tapply` (=table `apply`) apskaičiuos atskirai vyrų ir moterų svorių vidurkius). Smulkiau apie kiekvieną funkciją galima sužinoti su, pvz., `?apply` ir pan. Čia pateiksime kelis jų taikymo pavyzdžius.

```
set.seed(1)
a1 <- rpois(10,11)
a2 <- rpois(10,12)
a3 <- rpois(10,13)
a4 <- rpois(10,14)
am <- cbind(a1,a2,a3,a4)
# am yra dvimatis masyvas (t.y., 10x4 matrica)
am
      a1 a2 a3 a4
 [1,]  7 16 12 16
 [2,]  9 15 10 23
 [3,]  5 11 22 13
 [4,] 14 16 11 13
 [5,]  9 12 13 11
 [6,] 10 11 12 14
 [7,] 11 11  9 17
 [8,]  9 14 12 12
 [9,] 12 17 11 15
[10,] 17  7 13 11

> apply(am,1,mean)  # Skaičiuosime matricos eilučių vidurkius
 [1] 12.75 14.25 12.75 13.50 11.25 11.75 12.00 11.75 13.75 12.00
```

Beje, jei funkcijoje `apply` funkcija `FUN` yra `sum` arba `mean`, o masyvas `X` yra labai didelis (megabaitų ar net gigabaitų eilės), tuomet tikslinga naudotis funkcijomis `rowSums`, `colSums`, `rowMeans` ar `colMeans` (esminė šių funkcijų kodo dalis parašyta (žemesnio lygio) C kalba, todėl jos komputuoja žymiai greičiau nei vien R kodais parašytos funkcijos):

```
> rowMeans(am)
 [1] 12.75 14.25 12.75 13.50 11.25 11.75 12.00 11.75 13.75 12.00
```

Matricos `am` stulpelių vidurkius galima suskaičiuoti taip:

```
> apply(am,2,mean)  # Skaičiuosime matricos stulpelių vidurkius
  a1   a2   a3   a4
10.3 13.0 12.5 14.5
> lapply(am,mean)   # Funkcija lapply čia netinka – ji matricą am
[[1]]               # interpretuoja kaip masyvą ir skaičiuoja
[1] 7               # kiekvienos jos komponentės (susidedančios iš
                    # vienintelio elemento) vidurkį
[[2]]
[1] 9

[[3]]
[1] 5
.....
```

Funkcija `lapply` čia netinka, kadangi ji taikoma ne matricoms, bet sąrašams (pvz., duomenų sistemoms):

```
> adf <- data.frame(a1,a2,a3,a4)
> lapply(adf,mean) # Skaičiuoja kiekvieno duomenų sistemos elemento
$a1                # (t.y., stulpelio) vidurkį
[1] 10.3
$a2
[1] 13
$a3
[1] 12.5
$a4
[1] 14.5
```

Tokį patį rezultatą gauname ir su[14]

```
> sapply(adf,mean)
  a1   a2   a3   a4
10.3 13.0 12.5 14.5
```

Su funkcija `tapply` galime apskaičiuoti, tarkime, pirmojo stulpelio vidurkį kiekvienoje grupėje, kurią nusako antrasis stulpelis:

```
> rbind(a1,a2)
   [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
a1    7    9    5   14    9   10   11    9   12    17
a2   16   15   11   16   12   11   11   14   17     7
> tapply(a1,a2,mean)
```

[14] Pirmų dešimties skaitmenų kvadratų vektorių galima apskaičiuoti paprastai: `sq <- (0:9)^2`, bet galima ir "sudėtingai": `sq <- sapply(0:9,function(x)x^2)` arba net `sq <- sapply(0:9,"^",y=2)`

```
        7        11        12        14        15        16        17
17.000000  8.666667  9.000000  9.000000  9.000000 10.500000 12.000000
```

(grupėje su numeriu 11 yra trys įrašai: 5, 10 ir 11; jų vidurkis 8,666667).

Pateiksime dar vieną funkcijų `apply` ir `sapply` taikymo pavyzdį – iš matricos `am` pašalinkite stulpelius, kurių vidurkis mažesnis už 13. Šitai, aišku, galime atlikti rankomis

```
> am[,-c(1,3)]
      a2 a4
 [1,] 16 16
 [2,] 15 23
 [3,] 11 13
 [4,] 16 13
 [5,] 12 11
 [6,] 11 14
 [7,] 11 17
 [8,] 14 12
 [9,] 17 15
[10,]  7 11
```

tačiau, jei stulpelių daug, tokį darbą geriau automatizuoti:

```
> m.am <- apply(am,2,mean)
> m.am<13
   a1    a2    a3    a4
 TRUE FALSE  TRUE FALSE
> am[,m.am<13]
      a1 a3
 [1,]  7 12
 [2,]  9 10
 [3,]  5 22
 [4,] 14 11
 [5,]  9 13
 [6,] 10 12
 [7,] 11  9
 [8,]  9 12
 [9,] 12 11
[10,] 17 13
```

Antra vertus, jei duomenys apiforminti kaip duomenų sistema, naudosime funkciją `lapply`:

```
> m.adf <- lapply(adf, mean)
> adf[m.adf<13]
   a1 a3
1   7 12
2   9 10
3   5 22
4  14 11
5   9 13
6  10 12
7  11  9
8   9 12
9  12 11
10 17 13
```

Dar vienas pavyzdys. Sudarysime sąrašą `aList`, kurio 1-sis elementas `aList[[1]]` nurodys matricos `am` 1-osios eilutės narių lygių 11-kai numerius, 2-asis elementas `aList[[2]]` nurodys matricos `am` 2-osios eilutės narių lygių 11-kai numerius ir t.t. (aišku, kad `aList` turi būti sąrašas, kadangi 11-tukų skaičius kiekvienoje eilutėje gali skirtis).

```
aList <- apply(am, 1, function(x) which(x == 11))
> aList[1:3]
[[1]]
numeric(0) # Pirmoje eilutėje 11-tukų nėra

[[2]]
numeric(0) # Antroje eilutėje 11-tukų nėra

[[3]]
a2         # Trečioje eilutėje 11 yra antroje pozicijoje
 2
```

Jei reikia, `aList` galima apiforminti kaip 10 atskirų skaitinių vektorių `A1`,…, `A10`:

```
for(i in 1:10) assign(paste("A", i, sep=""), aList[[i]])
> A3
a2
 2
```

Dar vienas pavyzdys. Duomenų sistemoje

```
dd <- data.frame(a=c(1,2,NA,4),b=c(NA,2,3,4))
> dd
   a  b
1  1 NA
2  2  2
3 NA  3
4  4  4
```

yra trūkstamų reikšmių NA. Norint pakeisti jas 0, galima elgtis keliais būdais.

```
> dd2 <- apply(dd,2,function(x) replace(x, is.na(x), 0))
> dd2
  a b
1 1 0
2 2 2
3 0 3
4 4 4

> class(dd2)
NULL # dd2 yra matrica
> dd3 <- data.frame(apply(dd,2,function(x) replace(x, is.na(x), 0)))
> class(dd3)
[1] "data.frame" # Jei reikėtų duomenų sistemos
```

Funkcijos `apply` reikšmė yra matrica. Mūsų užduotį galima atlikti ir su `lapply` funkcija, tačiau jos reikšmė bus jau sąrašas:

```
lapply(dd,function(x) replace(x, is.na(x), 0))
$a
[1] 1 2 0 4
```

```
$b
[1] 0 2 3 4
```

Jei reikėtų, su

```
data.frame(lapply(dd,function(x) replace(x, is.na(x), 0)))
```

jį nesunku paversti duomenų sistema. Ne tokį akivaizdų, bet trumpą sprendimą galima gauti ir su

```
dd2 <- dd
dd2[] <- lapply(dd2,function(x) replace(x, is.na(x), 0))
dd2
```

Dar vienas pavyzdys. Vektoriaus `x` ilgis 81000, jis sudarytas iš 0 ir 1. Iš tikrųjų vektorių `x` sudaro 9000 grupių po 9 elementus, todėl bus vaizdžiau, jei jį užrašysime matricos `xx` pavidalu (atsitiktinį vektorių `x` sugeneruosime su `?sample` funkcija)

```
x <- sample(0:1,9000,replace=TRUE,prob=c(1,9))
xx <- matrix(x,ncol=9)
xx[1:3,]
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,]    1    1    1    0    1    1    0    0    1
[2,]    1    1    1    1    1    0    1    1    1
[3,]    1    1    1    0    1    1    1    1    1
```

Jei grupėje (eilutėje) yra bent vienas nulis, tai mūsų tikslas yra pakeisti visus narius į dešinę nuo jo nuliais. Tai galima atlikti bent kelias būdais, tačiau pradėti vertėtų su vienu ilgio 9 vektoriumi. Pirmoji procedūra galėtų būti tokia

```
FillWith <- function(vec,SearchForOne=0,ReplaceNextValues=0)
{
print(vec)
pp <- which(vec==SearchForOne)
print(pp)
if (length(pp)>0) vec[min(pp):length(vec)] <- ReplaceNextValues
vec
}
```

Čia pateikėme gražų R funkcijos pavyzdį. Pirmasis jos argumentas `vec` yra skaitinis vektorius (ateityje tai bus bet kuri matricos `xx` eilutė). Argumentas `SearchForOne` gali būti bet koks, tačiau jei jo vėliau nenurodysime, ieškosime skaičiaus 0. Panašiai yra ir su argumentu `ReplaceNextValues` – narius dešiniau pirmojo 0 galime pakeisti bet kokiu nurodytu skaičiumi, tačiau jei nieko nerašysime, funkcija `FillWith` pakeis jį skaičiumi 0. Funkcija `which` ieško, kurioje vietoje yra 0 (`pp` yra arba nenulinio ilgio vektorius, nurodantis 0 vietas, arba, jei 0 nėra, nulinio ilgio "tuščias" vektorius; jei `pp` ilgis ne nulis, visi `vec` elementai į dešinę nuo skaičiaus `min(pp)` bus pakeisti nurodytu skaičiumi).

Nukopijuokite `FillWith` į R konsolę ir išbandykite ją kelis kartus:

```
> FillWith(sample(0:1,9,replace=TRUE,prob=c(1,9)))
[1] 1 1 0 1 1 1 1 1 1
```

```
[1] 3
[1] 1 1 0 0 0 0 0 0 0
> FillWith(sample(0:1,9,replace=TRUE,prob=c(1,9)))
[1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1
numeric(0)
[1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Kadangi funkcija `FillWith` dirba taip kaip reikia, ją panaudosime `apply` aplinkoje (kad atsakymas būtų "gražesnis", `print` eilutes papildykite komentaro ženklu `#` kairėje).

```
> apply(xx[1:3,],1,FillWith)
      [,1] [,2] [,3]
 [1,]    1    1    1
 [2,]    1    1    1
 [3,]    1    1    1
 [4,]    0    1    0
 [5,]    0    1    0
 [6,]    0    0    0
 [7,]    0    0    0
 [8,]    0    0    0
 [9,]    0    0    0
```

Norint atsakymui sugražinti vektoriaus struktūrą, reikia surinkti `as.vector(apply(xx,1,FillWith))`

Kitas uždavinio sprendimo variantas yra paprastas ciklas (jis puikiai išnaudoja R vektorinę aritmetiką ir tą faktą, kad "logikos" funkcija `&` taip pat gali būti pritaikyta ir 0/1 skaičiams!):

```
for(i in 2:9) xx[,i] <- xx[,i] & xx[,i-1]
xx[1:3,]
```

Skyrelį apie `apply` grupės funkcijas baigsime keliomis pastabomis apie `mapply` funkciją (tai daugiamatis `sapply` variantas). 3-15 psl. jau buvo minėtas `bwages` duomenų rinkinys.

```
> bwages[1:4,]
      wage   lnwage educ exper  lnexper lneduc male
1 313.8528 5.748924    1    23 3.178054      0    1
2 194.3780 5.269804    1    15 2.772589      0    0
3 426.1364 6.054760    1    31 3.465736      0    1
4 284.0909 5.649294    1    32 3.496508      0    1
```

Į klausimą ar priklauso atlygimas nuo išsilavinimo galima atsakyti taip:

```
> attach(bwages)
> wage.e <- split(wage,educ) # Suskaidome į penkias grupes
> sapply(wage.e,mean)        # Apskaičiuojame vidurkį kiekvienoje gr.
       1        2        3        4        5
340.0270 371.7398 411.5962 461.1304 563.2010 # Taigi priklauso
```

Vyrai (vidutiniškai) uždirba daugiau negu moterys

```
> sapply(split(wage,male),mean)
```

```
       0        1
413.9497 466.4193
```

tačiau šį kartą patikrinsime hipotezes apie vyrų ir moterų atlyginimų lygybę įvairiose išsilavinimo grupėse. Remsimės Student'o kriterijumi (žr. 10.3 skyrelį):

```
> wage.e0 <- split(wage[male==0],educ[male==0]) # Skaidome moteris
> wage.e1 <- split(wage[male==1],educ[male==1]) # Skaidome vyrus
> wage.St <- mapply(t.test,wage.e0,wage.e1)
# Kiekvienoje išsilavinimo grupėje lyginame vyrų ir moterų atlyginimų
# vidurkius; wage.St yra sąrašas, pateiktas matricos pavidalu
> wage.St[3,] # Matricos trečioje eilutėje yra kriterijaus p reikšmės
[[1]]
[1] 4.579053e-07

[[2]]
[1] 4.22e-05

[[3]]
[1] 6.864625e-05

[[4]]
[1] 0.0001024282

[[5]]
[1] 7.695451e-05 # Visos p reikšmės mažesnės už 0.01
```

Taigi kokia bebūtų išsilavinimo grupė, atlyginimų vidurkiai neabejotinai skiriasi.

**3.1 UŽDUOTIS.** Iš matricos `am` (duomenų sistemos `adf`) pašalinkite tuos stulpelius (variantas: eilutes), kurių maksimalus narys didesnis už 18.

**3.2 UŽDUOTIS.** Iš matricos `am` pašalinkite tą stulpelį (eilutę), kuriame yra didžiausias visos matricos elementas[15] .

**3.4 pvz.** Kintamasis `gr` (nuo grupė) nurodo grupės numerį (1 arba 2), o `a` yra skaitinis vektorius, pvz.,

```
> cbind(gr,a)

      gr  a
[1,]   1  2
[2,]   1  5
[3,]   1  9
[4,]   1  3
[5,]   2 15
[6,]   2  9
[7,]   2  7
[8,]   2 10
[9,]   2 11
```

Apskaičiuosime kiekvienos grupės dviejų didžiausių `a` elementų vidurkį (1-je grupėje tai (5+9)/2=7, o 2-je – (15+11)/2=13) (atkreipkite dėmesį, kad nei viena žemiau pasiūlyta funkcija nenaudoja ciklo).

[15] `which(am==max(am),arr.ind=TRUE)`

**#1**

```
tapply(a, gr, function(x) mean(rev(sort(x))[1:2]))
 1  2
 7 13
```

**#2**

```
sapply(split(a, gr), function(x)mean(rev(sort(x))[1:2]))
```

Jei kurioje nors grupėje yra mažiau kaip du įrašai, `1:2` reikia pakeisti į `seq(min(2,length(x)))` (funkcija tuomet skaičiuos visų šios grupės `a` elementų vidurkį).

**#3**

```
listofdata <- split(a,gr)
lapply(listofdata, FUN=function(x)return(mean(rev(sort(x))[1:2])))
```

arba iš karto

```
lapply(split(a,gr),FUN=function(x)return(mean(rev(sort(x))[1:2])))
```

**#4**

```
foo <- function(x, n=2){
  x.sorted <- rev(sort(x))
  mean(x.sorted[1:n])}

tapply(a, gr, FUN=foo)
```

**#5**

```
gr <- rep(1:2,c(4,5))
a <- c(2,5,9,3,15,9,7,10,11)
asc <- tapply(a,gr,sort)
n <- tapply(a,gr,length)
N <- unique(gr)
for(i in 1:length(N)){ print(mean(asc[[i]][n[i]:(n[i]-1)])) }
```

**#6**

```
t1 <- data.frame(gr=rep(1:2,c(4,5)),a=c(2,5,9,3,15,9,7,10,11))
t1 <- t1[order(t1$gr,t1$a),]
t2 <- table(t1$gr)
t3 <- t1[sort(c(outer(cumsum(t2),0:1,"-"))),]
tapply(t3$a,t3$gr,mean)
```

**3.3 UŽDUOTIS.** Sukurkite ilgesnį `gr` variantą su trimis reikšmėmis ir atitinkamą `a` vektorių. Kiekvienoje grupėje apskaičiuokite keturių mažiausių `a` elementų dispersiją (ją skaičiuoja funkcija `var`).

**3.5 pvz.** Kartais vektoriaus elementas arba matricos eilutė netyčia įrašomi kelis kartus. Pašalinti pasikartojančius įrašus galima su `duplicated` arba `unique` funkcijomis.

```
> x <- c(1:3,2:4)
> x
[1] 1 2 3 2 3 4
> duplicated(x) # Argumentas turi būti vektorius arba duomenų sistema
[1] FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE FALSE
> which(duplicated(x)==T)
```

```
[1] 4 5 # Galima sužinoti pasikartojančių elementų numerius

> xu <- x[!duplicated(x)]
> xu    # Nesikartojantys elementai
[1] 1 2 3 4
```

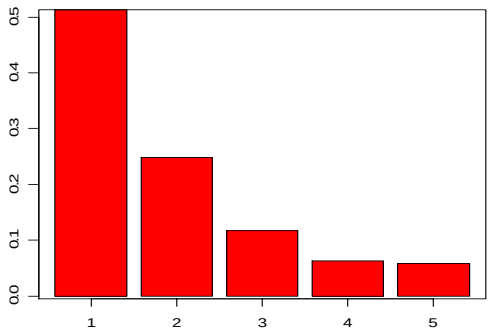
Tą patį rezultatą gautume su

```
 > unique(x)
[1] 1 2 3 4
```

**3.4 UŽDUOTIS.** Sukurkite duomenų sistemą (iš determinuotų ar atsitiktinių skaičių), kuri turėtų tris stulpelius po 100000 elementų, įgyjančių reikšmes 1, 2, 3 ar $4$[16] (taigi iš viso bus tik $4^3$=64 skirtingos eilutės (ar galite kelias pirmąsias išvardinti?)). Išrinkite nesikartojančias eilutes.

**3.6 pvz**. Jaunavedžiai nusprendė, kad jų šeima "plėsis" tol, kol gims pirmas sūnus. Antra vertus, jie sutarė, kad bet kokiu atveju maksimalus vaikų skaičius šeimoje neviršys skaičiaus MAX. Funkcija `bernMC1` Monte Carlo metodu metodu įvertina tikimybę, kad šeimoje bus 1, 2, …, MAX vaikų (berniuko gimimo tikimybė lygi 0,515).

```
bernMC1 <- function(MAX){
#bernMC
s.nr <- numeric(10000)
for(i in 1:10000){
s <- 1
while(runif(1)> 0.515)s <- s+1
s.nr[i] <- min(s,MAX)}
tab.s.nr <- table(s.nr)
print(tab.s.nr/10000)
barplot(tab.s.nr/10000)
mean(s.nr)
}
```




3.8 pav. Tikimybių įverčiai

```
> bernMC1(5)
s.nr
     1      2      3      4      5
0.5134 0.2486 0.1171 0.0624 0.0585
[1] 1.904  # Vidutinis vaikų skaičius šeimoje
```

Funkcija `while` yra sąlyginio ciklo funkcija (žr. `?"while"`). Pažymėsime, kad tikimybę, kad tokia "politika" besivadovaujančioje šeimoje bus $k$ vaikų, nesunku apskaičiuoti ir "teoriškai": jei MAX=5, tai šios tikimybės atitinkamai lygios 0.5150, 0.2498, 0.1211, 0.0588 ir 0.0553 (įsitikinkite!).

**3.5 UŽDUOTIS.** Parašykite funkciją `bernMC2` , kuri pateiktų panašų atsakymą tuomet, kai šeima nutarusi turėti du berniukus. Koks šiuo atveju vidutinis berniukų ir mergaičių skaičius šeimoje? *Nuoroda.* Jei MAX>2, $p$ yra berniuko gimimo tikimybė, o $q$ – mergaitės, tai $P$(šeimoje yra $k$ vaikų)=$(k-1)p^2q^{k-2}$, k=2,…,MAX-1. Kam lygi tikimybė, kad šeima turės MAX vaikų? Kam lygi tikimybė, kad šeimoje bus MAX-2 mergaitės?

[16] Tam tinka funkcija `sample`.

**3.6 UŽDUOTIS.** Matricoje `m1` kai kurios eilutės yra sudarytos iš vienodų skaičių. a) Sugalvokite, kaip galima generuoti tokią matricą, b) Sudarykite matricą `m2`, kurioje nebūtų tokių eilučių. *Nuoroda*. Išmeskite eilutes, kurių `sd==0`.

**3.7 UŽDUOTIS.** Tarkime, vektoriaus `x` komponentės yra 1, 3, 5, 7 ir 9, o vektoriaus `y` komponentės yra 11, 13, 5, 6 ir 2. Atspėkite, koks bus šių operacijų rezultatas? 1) `x-1`; 2) `y^2`; 3) `length(x)`; 4) `length(x+y)`; 5) `sum(x>=4)`; 6) `sum(x[x>=4])` 7) `sum(x>5|x<2)` (žr. `?"|"`); 8) `y[4]`; 9) `y[-4]`; 10) `y[x]`.

**3.8 UŽDUOTIS.** Štai autoriaus bute esančio dujų skaitiklio mėnesiniai parodymai (nuo 1997.12.20 iki 1999.01.20): 18000, 18350, 18650, 19000, 19100, 19222, 19350, 194000, 19550, 19810, 20100, 20500, 20850 ($m^3$). 1) Įrašykite šiuos skaičius į R duomenų rinkinį `gas`; 2) Apskaičiuokite kiekvieno mėnesių dujų sunaudojimą (galite pasinaudoti funkcija `diff`; šį vektorių pavadinkite `dujos`); 3) raskite maksimalų ir minimalų sunaudotų dujų per mėnesį kiekį (funkcijos `max` ir `min` arba `range`); 4) kokiais mėnesiais tai buvo (funkcijos `which.max` ir `which.min`)? ; 5) sukurkite duomenų sistemą `Dujos`, kurios pirmas stulpelis būtų mėnesio vardas, o antras – vektorius `dujos` (arba suteikite vardus vektoriaus `dujos` komponentėms); 6) kuriais mėnesiais dujų sunaudojimas viršijo 150 $m^3$?; 7) kiek buvo tokių mėnesių? 8) išbrėžkite mėnesinio dujų sunaudojimo grafiką (funkcija `plot(…, type="l")`); 9) metų pradžioje dujų kaina buvo 0,45 Lt/$m^3$, o nuo rugpjūčio mėn. – 0.59 Lt/$m^3$; sukurkite duomenų sistemą `Dujos.mok`, kurios pirmi du stulpeliai būtų `Dujos`, o trečias – mėnesinis mokestis už dujas; 10) išbrėžkite mokamos sumos grafiką.

**3.9 UŽDUOTIS.** Atlikite tokią pat savo buto mokesčių analizę (jei reikia, dujas galite pakeiti elektra).

**3.10 UŽDUOTIS.** Sukurkite aritmetinę ir geometrinę progresijas (aritmetinę (geometrinę) progresiją pateikite kaip funkcijos `ar.pr(n,a1,d)` (atitinkamai, `geo.pr(n,b1, q)`) reikšmę ). Viename grafike išbrėžkite dalinių progresijos sumų ir pačios progresijos kreives. Progresijas sukurkite trim būdais: apibrėždami jas rekurentiškai, naudodami bendrojo nario formulę ir naudodami R vektorinę aritmetiką (pvz., progresiją 1, 2, 4 , 8 galima užrašyti kaip 2^(0:3)).

**3.11 UŽDUOTIS.** Sukurkite vektorių iš vieno 1, dviejų 2,…, devynių 9 (naudokite funkciją `rep`). Šiuos duomenis apiforminkite kaip $5\times 9$ matricą. Apskaičiuokite kiekvienos eilutės vidurkį.

**3.12 UŽDUOTIS.** Parašykite funkciją, kuri sukurtų *n* narių Fibonačio seką (priminsime: tai seka, tenkinanti sąlygą $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ ). Išbrėžkite a) jos grafiką, b) paskutiniojo skaitmens reikšmių histogramą ir c) pirmojo skaitmens reikšmių histogramą (o gal geriau taikyti `barplot` funkciją?). *Nuoroda*. Paskutinįjį natūraliojo skaičiaus *x* skaitmenį galima apskaičiuoti bent dviem būdais:

`x-floor(x/10)*10` arba `x%%10 # Dalyba moduliu 10`

(kaip galima rasti paskutinius du skaitmenis?), o pirmąjį realiojo skaičiaus $x \geq 1$

skaitmenį, pvz., taip:

```
floor((x/10^(floor(log(x,base=10))+1))*10)
```

**3.13 UŽDUOTIS.** Apskaičiuokite kiekvieno duomenų sistemos `USJudgeRatings` (iš base paketo) stulpelio minimumą, maksimumą, plotį, vidurkį ir medianą. Nustatykite ir atspausdinkite eilutes, kuriose yra ketvirto stulpelio maksimumas (minimumas). Išbrėžkite visų stulpelių grafikus (išsiaiškinkite tokias komandas:

```
par(mfrow=c(3,4));apply(USJudgeRatings,2,plot,type="l")
```

**3.14 UŽDUOTIS.** Pabandykite atspėti, koks bus šių komandų rezultatas:

a)
```
x <- c(4,8,1,7,15,4,8)
for (i in 2:length(x)) x[i] <- max(x[i],x[i-1])
x[length(x)]
```

b)
```
x <- c(4,8,1,7,15,4,8)
for (i in 2:length(x)) x[i] <- sum(x[i],x[i-1])
x[length(x)]
```

**3.15 UŽDUOTIS.** Štai duomenų sistemos `cabbages` pradžia:

```
> library(MASS)
> data(cabbages)
> cabbages[1:3,]
  Cult Date HeadWt VitC
1  c39  d16    2.5   51
2  c39  d16    2.2   55
3  c39  d16    3.1   45
```

Nustatykite visų stulpelių klases. Faktoriams atspausdinkite jų lygius. Nustatykite ir atspausdinkite eilutę, kurioje `VitC` kiekis didžiausias. Apskaičiuokite `VitC` vidurkį kiekvienoje `Cult` grupėje.

**3.16 UŽDUOTIS.** Pateikite išsamų duomenų sistemos `anorexia` iš MASS paketo aprašymo. Apiforminkite kaip Word'o dokumentą. Gal būt grafikai padėtų nustatyti, kuris gydymo metodas efektyvesnis?

**3.17 UŽDUOTIS.** Iš paketo MASS duomenų rinkinio `Cars93` išrinkite tik tuos duomenis, kurie susiję su small ir sporty automobiliais. Kiekvienoje iš šių grupių apskaičiuokite parametro `MPG.highway` vidurkį bei standartinį nuokrypį ir išbrėžkite histogramas.

**3.18 UŽDUOTIS**. MASS paketo duomenų rinkinyje `Cars93` pašalinkite small ir sporty automobilių įrašus. Gautojoje duomenų siatemoje pašalinkite automobilius, kurių svoris `weight` didesnis už 3000 (svarų) ir cilindrų `Cylinders` skaičius didesnis už 5.

**3.19 UŽDUOTIS**. MASS paketo duomenų rinkinyje `airquality` yra daug trūkstamų duomenų (jie žymimi NA=Not Available). Juos visus pakeisti nuliais nėra sunku:

```
x <- as.matrix(airquality)
x[is.na(x)] <- 0
```

Štai dvi šios operacijos variacijos: 1) bet kuriame `airquality` stulpelyje esančius NA pakeiskite atitinkamo stulpelio vidurkiu (jums, gal būt, prireiks opcijos `mean(x,na.rm=TRUE)`); 2) pašalinkite visas `airquality` eilutes turinčias NA.

**3.20 UŽDUOTIS**. Iš R konsolės, spragtelėkite ant File|Source R Code… ir nuvairuokite į disko R1 direktoriją Data|Maindonald. Pasirinkite orings.R failą ir spragtelėkite ant Open. Jei dabar R komandiniame lange surinksite `orings`, tai pamatysite duomenis apie JAV kosminės šaudyklės O žiedų defektus (priminsime, kad būtent dėl šių žiedų defekto 1986 m. erdvėlaivis kildamas sprogo).

```
> orings
   Temperature Erosion Blowby Total
1           53       3      2     5
2           57       1      0     1
3           58       1      0     1
4           63       1      0     1
**********************************
```

Koks yra sukurtojo duomeninio objekto `orings` tipas? klasė? Išbrėžkite bendro defektų skaičiaus `Total` priklausomybės nuo `Temperature` grafiką. Kai kurie taškai "sulimpa", todėl pabandykite funkcijas `jitter` ir `sunflowerplot` (plg. 5.2 pav.). Ar tikrai `Total` lygus `Erosion` ir `Blowby` sumai?

Atsakant į paskutinį klausimą, naudingas galėtų būti toks pavyzdys:

```
> X <- data.frame(a=1:5, b=2:6, ce=c(3,5,7,6,11))
> X
  a b ce
1 1 2  3
2 2 3  5
3 3 4  7
4 4 5  6
5 5 6 11
> X[X$a + X$b != X$ce, ] # Nustatome, kuriose eilutėse ce≠a+b
  a b ce
4 4 5  6
```

Variantas:

```
> subset(X,a+b!=ce)
  a b ce
4 4 5  6
```

Beje, tik ką aprašytos skaičių palyginimo procedūros tinka dirbant su sveikais skaičiais, bet nėra tinkamos realiems skaičiams (tai susiję su vidinėmis kompiuterių problemomis).

```
> 1 + 2
[1] 3
> 1 + 2 == 3
```

```
[1] TRUE
> 1.1 + 2.2
[1] 3.3
> 1.1 + 2.2 == 3.3
[1] FALSE
```

Todėl, jei reiktų palyginti realius skaičius, elkitės taip:

```
tolerance <- .Machine$double.eps ^ 0.5 # Žr. Machine() ir ?Machine
X[abs(X$a + X$b - X$ce) > tolerance,]
     a b ce
4 4 5  6
```

**3.21 UŽDUOTIS.** Priminsime, kad kiekvienas R objektas gali turėti vieną ar kelis (išorinius) požymius. Štai pavyzdys.

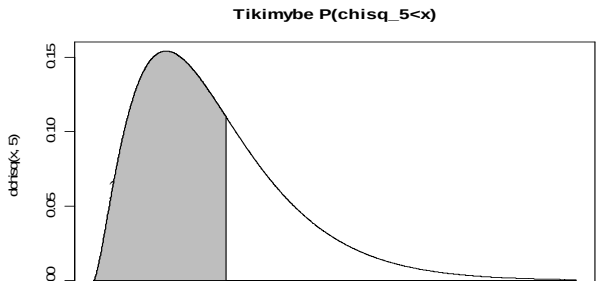
```
> x <- 1:9
> x
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9
> attributes(x)
NULL
> attributes(x) <- list(Komentaras="Sudaryta 2002.03.24", names =
letters[1:9])
> x
a b c d e f g h i
1 2 3 4 5 6 7 8 9
attr(,"Komentaras")
[1] "Sudaryta 2002.03.24"
> attributes(x)
$Komentaras
[1] "Sudaryta 2002.03.24"
$names
[1] "a" "b" "c" "d" "e" "f" "g" "h" "i"
```

Kokius požymius turi duomenų rinkinys `orings` (žr. 3.20 užduotį)? Papildykite juos naujais. Pakeiskite `orings` klasę. Ar pasikeitė požymiai?

3.22 **UŽDUOTIS**. Statistikos vadovėliuose ar uždavinynuose paprastai būna kai kurių tikimybinių skirstinių lentelės. Parašykite funkciją, kuri "gražiu pavidalu" pateiktų pageidaujamo skirstinio lentelę. Pvz., chi kvadrato su 5 laisvės laipsniais skirstinio atveju, tikimybių $P(\chi_5^2 < x)$ (jas skaičiuoja funkcija `pchisq(x,5)`) lentelė turėtų atrodyti maždaug taip:

```
         0.000    0.001    0.002    0.003 ...    0.009
0.00  0.00e+00 1.68e-09 9.51e-09 2.62e-08 ... 4.07e-07
0.01  5.30e-07 6.72e-07 8.35e-07 1.02e-06 ... 2.63e-06
0.02  2.99e-06 3.37e-06 3.79e-06 4.23e-06 ... 7.54e-06
.....................................................................
1.02  0.039063 0.039146 0.039228 0.039311 ... 0.039807
.....................................................................
```

Puslapį su šia lentele papildykite atitinkamo skirstinio tankio grafiku – aptartuoju atveju jis galėtų atrodytų šitaip:



3.9 pav.
Chi kvadrato su 5 l.l. tankio grafikas

**3.23 UŽDUOTIS**. Kaip žinia, Vandermondo (A.T. Vandermonde) matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ s1 & s2 & s3 & ... & sn \\ s1^2 & s2^2 & s3^2 & ... & sn^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ s1^{n-1} & s2^{n-1} & s3^{n-1} & ... & sn^{n-1} \end{pmatrix}$$

determinantas lygus $\prod_{1 \le i < j \le n} (si - sj)$. Apskaičiuokite šios matricos determinantą dviem būdais: naudodamiesi a) R paketo funkcija `det` ir b) savo parašyta funkcija `vander`, kuri apskaičiuotų nurodytą sandaugą bet kokiam tarpusavyje nelygių skaičių ($s1$, $s2$,…, $sn$) rinkiniui.

**3.24 UŽDUOTIS.** Įvykdykite šias komandas:

```
nn <- rnorm(100000)
j <- 0
for(i in 1:100000) {if (nn[i]>1) j <- j+1}
```

Jei jums atsibodo laukti programos pabaigos, sustabdykite programos vykdymą su Esc klavišu ir pakeiskite antrą ir trečią eilute tokia (tai vektorinės aritmetikos pavyzdys):

```
j <- sum(ifelse(nn>1,1,0))
```

Kokia žemiau pateiktų dviejų skaičių tikimybinė prasmė?

```
cbind(j/100000,1-pnorm(1))
```

**13.25 UŽDUOTIS.** Sukurkite vektorių `vec2`, įterpdami po kiekvienos vektoriaus `vec1` komponentės vienetuką. Pvz., jei `vec1 <- c(2,3,4)`, tai `vec2` turėtų būti 2,1,3,1,4,1.

Pateiksime kelis sprendimo variantus.

1)
```
vec2 <- rep(1, 2*length(vec1))
vec2[seq(1, length(result), 2)] <- vec1
```

```
vec2
```

2)
```
vec1 <- c(2,3,4)
vec2 <- rep(1,length(vec1)*2)
vec2[seq(1,length(vec1)*2-1,by=2)] <- vec1
vec2
```

3)
```
vec2 <- c(t(cbind(vec1,rep(1,length(vec1)))))
vec2
```

4)
```
AddValue <- function(vec,addvalue=1)
{
tmp <- cbind(vec,addvalue)
tmp <- as.vector(t(tmp))
return(tmp[1:(length(tmp))])
}
vec2 <- AddValue(vec1)
vec2
```

5)
```
vec2 <- c(eval(parse(text=paste("c(",paste(vec1,collapse=" ,1,"),
")"))),1)
vec2
```

ar net fantastišką

6)
```
vec2 <- c(rbind(vec1,1)) # Matricos nuskaitomos stulpeliais
vec2
```

Išsiaiškinkite visus sprendimus ir parašykite bent du variantus, kuriuose `vec3` būtų `vec2` be paskutinio vienetuko.

3.26 **UŽDUOTIS**. Atsitiktiniai dydžiai $X1$, $X2$,… yra nepriklausomi ir turi [0,1] tolygų skirstinį. Tarkime, $Y$ yra a.d., lygus tam $k$, kai suma $S_k = X1 + ... + Xk$ pirmą kartą viršija 1. Patikrinte žinomą faktą, kad $EY = e$. *Nuoroda*. Štai funkcija, kuri generuoja $Y$ realizacijas, kai $X$'sai turi [0,1/3] tolygų skirstinį:

```
> my.foo <- function(){
s <- 0
ss <- 0
while(ss<1){
s <- s+1
a <- runif(1,0,1/3)
ss <- ss+a
print(c(s,ss))
}
s
}
```

**3.27 UŽDUOTIS.** Interneto svetainėje http://lark.cc.ukans.edu/~pauljohn/R/ arba kompaktiniame diske R1 (...\Knygos_apie_R&S\PaulJohnson) yra failas StatsRUs.htm, kuriame surinkti trumpi atsakymai į įvairius klausimus (1.1-1.14, 2.1-2.21, 3.1-3.21, 4.1-4.8, 5.1-5.39, 6.1-6.4, 7.1-7.26, 8.1-8.24, 9.1-9.8, 10.1-10.7, 11.1-11.8, 12.1-12.4, 13.1-13.3). Išsiaiškinkite kelis nurodytus klausimus ir atsakymus. Pateikite savus išnagrinėtos problemos taikymo pavyzdžius.

**3.28 UŽDUOTIS.** Sugeneruokime 2000 Cauchy atsitiktinių skaičių (internete paieškokite informacijos apie Cauchy skirstinį) ir paimkime jų sveikąsias dalis:

```
RC <- rcauchy(2000)
rc <- floor(RC)
```

Ar yra šiame vektoriuje reikšmė 347? 13? O praleistosios reikšmės simbolis NA?

Šį uždavinį galima spręsti įvairiai.

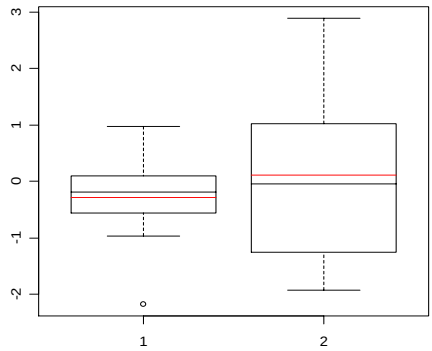
1) `sort(rc)`
2) `table(rc)`
3) `barplot(table(rc))`
4) `which(rc==347)`
5) `length(which(rc==347))`
6) `347 %in% rc`
7) `rc[rc==347]`
8) `length(rc[rc==347])` `# NA atveju galima elgtis taip:`
   `# length(rc[is.na(rc)])`

Išsiaiškinkite kiekvieną iš šių būdų. Kuris jums priimtiniausias? O štai šio uždavinio modifikacija: kelios duomenų rinkinio `RC` reikšmės priklauso intervalui [0,50]?

**3.29 UŽDUOTIS**. Programą

```
set.seed(1)
a <- rnorm(10)
b <- rnorm(10)
boxplot(a, b)
```

papildykite viena eilute taip, kad ji brėžtų žemiau pateiktą grafiką (čia raudona linija žymi vidurkius; gali būti naudinga funkcija `segments`):




3.10 pav. Stačiakampės diagramos su vidurkio linija

**3.30 UŽDUOTIS**. Šio konspekto autorius kiekvienos grupės studentams visų keturių laboratorinių darbų užduotis paskirstė atsitiktinai. Štai pagalbinės programos komputavimo rezultatas (vietoje pavardžių `pav` kol kas įrašytos angliškos raidės):

```
   pav lab11 lab12 lab21 lab22 lab3  lab4
```

```
1     a  3.22   4.1  5.11  6.14  8.5  11.3
2     b  3.20  4.15   5.3  6.23  7.5   9.1
3     c   3.3   4.1  5.21  6.14  7.7  10.9
4     d  3.18  4.19   5.9  6.25  7.2   9.2
5     e  3.22  4.23   5.4  6.19  7.6 10.16
```

Parašykite šią programą. *Nuoroda*. Jums gal būt pravers `paste` ir `sample(…,replace=TRUE`[17]`)` funkcijos.

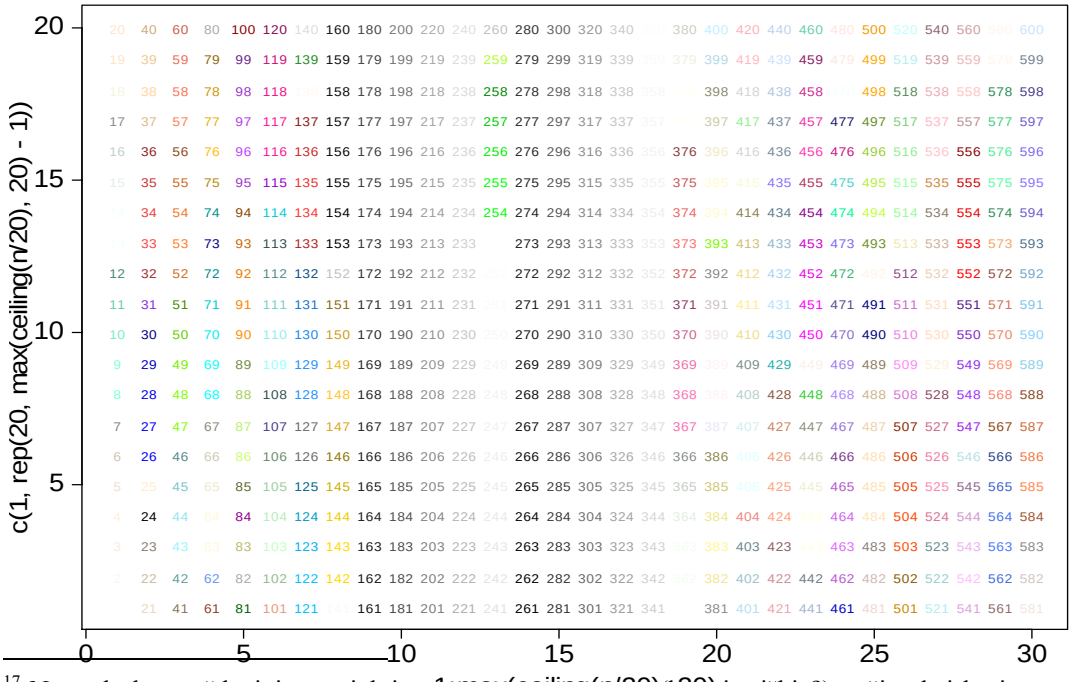
Kompakto R1 faile Data\Misc\Eko21.xls yra 2002/2003 m.m. ekonometrijos programos 2 kurso 1 gr studentų sąrašas. Štai jo ištrauka:

```
Baltramaitytė Inga
Bendžiūnaite Laima
……..
Vaičiulionis Justas
Vasilevskij Edvard
```

Nusiskaitykite šį sąrašą ir patobulinkite aukščiau parašytą programą taip, kad jos rezultatas būtų toks:

```
          Pavarde      Vardas lab11 lab12 lab21 lab22 lab3  lab4
1    Baltramaityte        Inga  3.14  4.18  5.18   6.8  8.2   9.6
2     Bendziunaite       Laima  3.13   4.7  5.13  6.24  8.2  10.6
……..
22    Vaiciulionis      Justas  3.25  4.23  5.22  6.24  7.7  11.9
23     Vasilevskij      Edvard   3.5   4.6   5.1  6.14  7.2  11.3
```

**3.31 UŽDUOTIS**. R spalvų paletę sudaro net 657 spalvos (žr. `colors()`). Štai pirmųjų 600 spalvų lentelė (popierinėje šio konspekto versijoje bus matomi tik pilkos spalvos atspalviai):




[17] Natūralu būtų uždavinius parinkti su `replace=FALSE` (ką tai reiškia?), tačiau kai kuriuose skyriuose uždavinių yra mažiau negu studentų .

3.11 pav. R spalvų paletė

Parašykite programą, kuri išbrėžtų šią lentelę (tam pravers funkcija `text`; taip pat atidžiai išnagrinėkite tekstus prie 3.11 pav. ašių).

**3.32 UŽDUOTIS**. Kaip žinia,

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

Tą patį rezultatą gautume su `integrate` funkcija:

```
> integrate(sin,0,pi)
2 with absolute error < 1.1e-14
```

O štai funkcija, kuri apytiksliai apskaičiuos šį integralą pagal trapecijų taisyklę:

```
> trap.rule <- function(x,y) sum(diff(x)*(y[-1]+y[-length(y)]))/2
> x <- seq(0,pi,length=100); y <- sin(x)
> trap.rule(x,y)
[1] 1.999832
```

Parašykite funkciją, kuri skaičiuotų integralą pagal Simpsono formulę:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(a)+f(b)+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2}))+$$
$$4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1})));$$

čia $x_j = a + jh,\ j = 0,1,...,n.$

**3.33 UŽDUOTIS**. Žemiau yra pateiktos keturios programos, kurios sukuria skaitinį vektorių 6, 7,…, 10, 16, 17,…, 20,…, 9996, 9997,…,10000:

```
> nums <- 1:10000
> xx <- nums[is.element(nums - 10*floor(nums/10), c(0,6:9))]
> xx[1:50]
 [1]   6   7   8   9  10  16  17  18  19  20  26  27  28  29  30
[16]  36  37  38  39  40  46  47  48  49  50  56  57  58  59  60
[31]  66  67  68  69  70  76  77  78  79  80  86  87  88  89  90
[46]  96  97  98  99 100

> xx <- unlist(matrix(1:10000,byrow=T, ncol=10)[,6:10])

> xx <- outer(-4:0,seq(10,10000,10),"+")

> xx <- outer(10 * 0:999, 6:10, "+")
```

Išsiaiškinkite šias programas ir parašykite keturias funkcijas (paremtas aukščiau pateiktais xx generavimo principais), kurios generuotų 10000 normaliųjų atsitiktinių dydžių ir penkiuose šimtuose atsitiktinai parinktose vietose iš xx pakeistu šias reikšmes simboliais NA.

Štai du tokių (teisybė, kitokiais xx generavimo principais pagrįstų) funkcijų pavyzdžiai:

```
replac <- function(){
rn <- rnorm(10000);ind <- 6:10;Ind <- 6:10
for(i in 1:999) Ind <- c(Ind,ind+10*i)
rn[sample(Ind,500,repl=FALSE)]<- NA
rn }
```

ir

```
x <- matrix(rnorm(10000), 10);x[6:10, ][sample(1:5000, 500)] <- NA
x <- as.vector(x)
```

**3.34 UŽDUOTIS. J**ei dirbtume "su pieštuku", matricos *A* kėlimas[18] aukštu laipsniu yra gana daug laiko (o, jei naudotumėmes R paketu, ir komplikuotų žymėjimų) reikalaujanti operacija:

```
> A <- cbind(c(0,0.5,0.5),c(0.5,0,0.5),c(0.5,0.5,0))
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0  0.5  0.5
[2,]  0.5  0.0  0.5
[3,]  0.5  0.5  0.0
> A%*%A # Tai matricų (matricinė) daugyba
     [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.50 0.25 0.25
[2,] 0.25 0.50 0.25
[3,] 0.25 0.25 0.50
> A%*%A%*%A
      [,1]  [,2]  [,3]
[1,] 0.250 0.375 0.375
[2,] 0.375 0.250 0.375
[3,] 0.375 0.375 0.250
> A%*%A%*%A%*%A
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.3750 0.3125 0.3125
[2,] 0.3125 0.3750 0.3125
[3,] 0.3125 0.3125 0.3750
> A%*%A%*%A%*%A%*%A
        [,1]    [,2]    [,3]
[1,] 0.31250 0.34375 0.34375
[2,] 0.34375 0.31250 0.34375
[3,] 0.34375 0.34375 0.31250
```

Štai dvi R funkcijos, kurios palengvina šį darbą:

**1)** Jei kvadratinė matrica *A* turi skirtingas tikrines reikšmes, tai ją galima užrašyti taip: $A = V$ %*% $diag(\lambda)$ %*% $V^{-1}$ - tai vadinamasis matricos *A* spektrinis dėstinys; čia *V* yra matricos *A* tikrinių vektorių matrica, %*% - matricų daugybos ženklas,

[18] Turime galvoje įprastinį, matricinį kėlimą laipsniu, o ne paelementį, kurį R atlieka labai lengvai.

$diag(\lambda)$ - įstrižainė matrica su matricos $A$ tikrinėmis reikšmėmis ant įstrižainės, o $V^{-1}$ - matricos $V$ atvirkštinė matrica. Tuomet $A^n = V$ %*% $diag(\lambda^n)$ %*% $V^{-1}$. Pvz.,

```
> A <- cbind(c(0,0.5,0.5),c(0.5,0,0.5),c(0.5,0.5,0))
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0  0.5  0.5
[2,]  0.5  0.0  0.5
[3,]  0.5  0.5  0.0
> eA <- eigen(A) # eigen (angl.,vok.) = tikrinis
> eA
$values
[1]  1.0 -0.5 -0.5
$vectors
          [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.5773503  0.5957165 -0.5583803
[2,] 0.5773503 -0.7814298 -0.2367155
[3,] 0.5773503  0.1857133  0.7950957

> round(eA$vectors%*%diag(eA$values)%*%solve(eA$vectors),5) # =A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0  0.5  0.5
[2,]  0.5  0.0  0.5
[3,]  0.5  0.5  0.0

> A%*%A%*%A%*%A%*%A # =A^5
        [,1]    [,2]    [,3]
[1,] 0.31250 0.34375 0.34375
[2,] 0.34375 0.31250 0.34375
[3,] 0.34375 0.34375 0.31250
> round(eA$vectors%*%diag(eA$values^5)%*%t(eA$vectors),5)
        [,1]    [,2]    [,3]
[1,] 0.31250 0.34375 0.34375
[2,] 0.34375 0.31250 0.34375
[3,] 0.34375 0.34375 0.31250
```

**2)** Antroji funkcija puikiai demonstruoja R rekurenčiųjų procedūrų galimybes:

```
mp <- function (X, p) if (p == 1) return(X) else X %*% Recall(X, p-1)
```

(arba `mp1 <- function(A, n) if(n == 1) A else A %*% mp1(A,n-1)`)

`mp(A,5)` (arba `mp1(A,5)`)

```
        [,1]    [,2]    [,3]
[1,] 0.31250 0.34375 0.34375
[2,] 0.34375 0.31250 0.34375
[3,] 0.34375 0.34375 0.31250
```

3) Antrąjį variantą galima perrašyti suprantamiau (ir netgi apibrėžti naują (matricos kėlimo laipsniu) operaciją):

```
"%^%"<-function(A,n)
{
if(n==1) A else {B<-A; for(i in (2:n)){A<-A%*%B}}; A
}
```

Pvz., `A%^%5` pateiks lygiai tokį patį atsakymą kaip ir `mp(A,5)`.

4) 2-asis ir 3-asis kėlimo laipsniu variantai yra gana neefektyvūs (nes keliant, pvz., 100-uoju laipsniu reikėtų atlikti 99 matricų daugybos veiksmų). Žymiai efektyvesnis yra būdas, susijęs su vadinamuoju sveiko skaičiaus skaidymu dvejeto laipsniais. Kadangi $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, tai šiuo atveju vietoje 99 veiksmų užtektų 8 daugybų (nes $x^{100} = (((((x^2*x)^2)^2)^2*x)^2)^2$ ). Šią idėją realizuoja `matrix.power` funkcija:

```
matrix.power <- function(mat, n)
{
  if (n == 1) return(mat)
  result <- diag(1, ncol(mat))
  while (n > 0) {
    if (n %% 2 != 0) {
      result <- result %*% mat
      n <- n - 1
    }
    mat <- mat %*% mat
    n <- n / 2
  }
  return(result)
}
```

◀

Tikimybių teorijoje vadinamosios Markovo grandinės yra nusakomos pradinių tikimybių skirstiniu ir perėjimo tikimybių matrica $A=(a_{ij})$ (tai matrica, kurios visi elementai neneigiami, o kiekvienos eilutės elementų suma lygi 1). Grandinė vadinama ergodine, jei egzistuoja riba $\lim_{s\to\infty} A^s = F$ ir ribinės matricos $F$ stulpeliuose visi elementai lygūs. Pvz., matrica

```
A <- cbind(c(0.5,1),c(0.5,0))
```

yra ergodinė, nes jau kai $s$ lygus 20

```
> round(mp(A,20),5)
        [,1]    [,2]
[1,] 0.66667 0.33333
[2,] 0.66667 0.33333
```

O dabar pati

**3.34a UŽDUOTIS**. Nustatykite kurios iš šių matricų yra ergodinės:

i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Teorija teigia, kad ergodinių grandinių stulpelių elementai $\{f_k\}$ yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} f_k = \sum_j f_j a_{jk} \\ \sum_k f_k = 1 \end{cases}$$

sprendiniai. Patikrinkite. *Nuoroda*. Ieškant sistemos sprendinių, pravers funkcija `solve`.

**3.34b UŽDUOTIS**. (Erenfestų difūzijos modelis) Dujų molekulės (iš viso $m$) yra dviejuose susisiekiančiuose induose K ir D. Sistemos būseną galima nusakyti dujų molekulių, esančių inde K, skaičiumi $k$ ($k = 0,1,...,m$). Eilinio difūzijos žingsnio metu atsitiktinai parinktą molekulę iš vieno indo perkeliame į kitą (su tikimybe $k/m$ molekulė parenkama iš indo K ir su tikimybe $1-k/m$ - iš indo D). Tokios sistemos evoliucija yra aprašoma Markovo grandine su perėjimo tikimybių matrica, nusakoma lygybėmis $p_{k,k-1} = k/m$, $p_{k,k+1} = (m-k)/m$ ir $p_{k,i} = 0$, $i \neq k-1, k+1$, $k = 0,1,...,m$. Tarę, kad $m = 200$, užrašykite perėjimo tikimybių matricą $A$ ir raskite šios Markovo grandinės stacionariąsias tikimybes. Tiksliau kalbant, apskaičiuokite „pakankamai didelį“ $A$ laipsnį ir įsitikinkite, kad stulpeliuose skaičiai vienodi. $A$ laipsnius skaičiuokite su įvairiomis anksčiau aptartomis funkcijomis. Nustatykite, kuri iš jų greičiausia. *Pastaba*. Ši grandinė yra ergodinė. Kitaip sakant, jei pradiniu laiko momentu visos dalelės yra inde $K$, tai po pakankamai didelio laiko inde $K$ jų liks tik pusė ir šioje pusiausvyrinėje būsenoje sistema liks „amžinai“.

**3.35 UŽDUOTIS.** Žemiau pateikta didelės duomenų sistemos dalis `abc`:

```
     ID     Numeris     Segmentas
   S.13      S.13.1      S.13.1.2
   S.13      S.13.1      S.13.1.3
   S.13      S.13.2      S.13.2.1
   S.13      S.13.2      S.13.2.2
   S.13      S.13.2      S.13.2.3
   S.13      S.13.3      S.13.3.6
   S.13      S.13.3      S.13.3.7
   S.13      S.13.3      S.13.3.8
   S.13      S.13.3      S.13.3.9
```

Mus domina tik nagrinėtų objektų numeriai, kitaip sakant, šią sistemą transformuokite į tokią:

```
Numeris
 S.13.1
 S.13.2
 S.13.3
```

*Nuoroda*. `unique`.

**3.36 UŽDUOTIS**. i) Visus vektoriaus `rp <- rpois(1000,3)` elementus mažesnius už 3 pakeiskite nuliu, o elementus lygius 3 – devynetuku; ii) tą pat atlikite su matrica `rpm <- matrix(rpois(999,3),nrow=333)`; iii) iš šios matricos pašalinkite eilutes, kuriose yra bent vienas 3; iv) iš šios matricos pašalinkite eilutes,

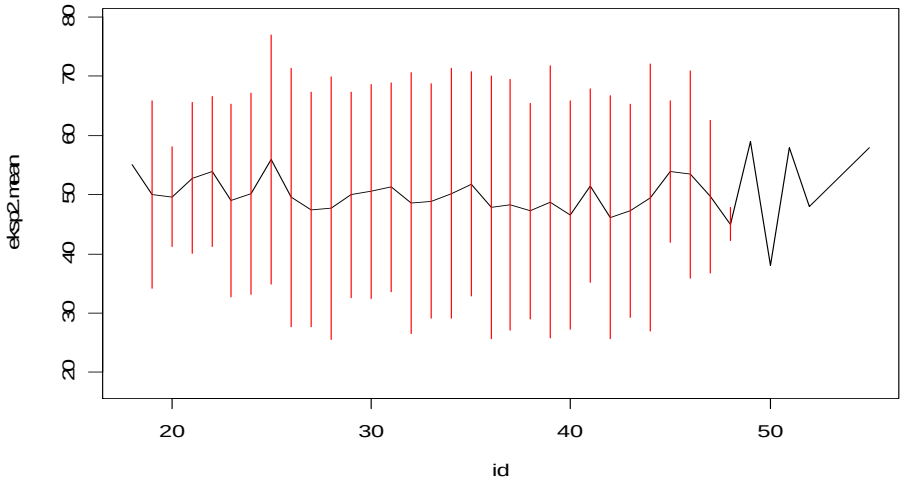
sudarytas vien iš 3; v) eilutėse, kurių pirmas elementas lygus 3, kitus du pakeiskite jų kvadratais.

**3.37 UŽDUOTIS**. Ilgo vektoriaus `x <- rnorm(1000)` duomenis sugrupuokite po 10, kiekvienoje grupėje apskaičiuokite vidurkį, o po to – šio naujo vidurkių vektoriaus standartą. *Nuoroda*. Vektorių `x` galite paversti matrica ir taikyti funkciją `apply` arba įvesti grupės kintamąjį ir taikyti funkciją `tapply` arba remtis funkcija `aggregate`.

**3.38 UŽDUOTIS**. Dirbtinių duomenų rinkinį `eksp1` generuojame su funkcija

```
eksp1 <- data.frame(ID=rpois(1000,33),Result=
round(rnorm(1000,50,10),0))
```

Suskaičiuokite kelis kartus pasikartoja kiekvienas tiriamasis (ID) šiame sąraše, kiekvienam tiriamajam apskaičiuokite jo vidurkį ir standartą, išbrėžkite vidurkių grafiką ir kiekvieną vidurkį apsupkite statmenu segmentu `[mean[i]-2*sd[i], mean[i]+2*sd[i]]` (galimas atsakymas yra pateiktas 3.12 pav.; jūsų paveikslas ko gero skiriasi nuo šio – kodėl?). *Nuoroda*. Jums gali pagelbėti funkcija `tapply`.




3.12 pav. Vidurkiai ± 2standartai.
Kai kur raudona linija neišbrėžta – kodėl?

**3.39 UŽDUOTIS**. Matricoje

```
A <- matrix(rnorm(100,mean=-1),nrow=50)
```

kai kuriose eilutėse abu nariai yra neigiami. Štai funkcija, kuri paliks tik tokias eilutes:

```
A[apply(A, 1, function(x) all(x<=0)),]
```

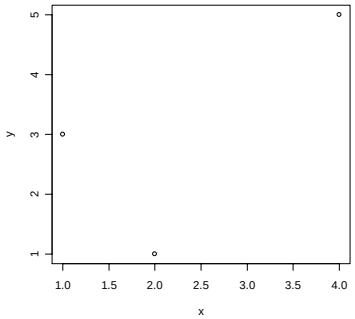
Parašykite funkciją, kuri pašalintų eilutes, kuriose i) abu nariai neigiami, ii) bent vienas narys neigiamas, iii) paliktų eilutes, kuriose minimalus atstumas nuo nulio yra didesnis už 1, iv) paliktų stulpelius, kurių vidurkis didesnė už –1.

**3.40 UŽDUOTIS**. Kartais kai kuriuose įrašuose (eilutėse) trūksta duomenų (R pakete trūkstami duomenys žymimi NA (=Not Available) simboliu). Štai dirbtinis pavyzdys:

```
dat <- data.frame(x=c(1,NA,2,2,NA,4),y=c(3,2,NA,1,3,5))
dat
   x  y
1  1  3
2 NA  2
3  2 NA
4  2  1
5 NA  3
6  4  5
```

Įvairios funkcijos skirtingai reaguoja į NA. Pvz., funkcija `plot` automatiškai išmeta tokius įrašus:

```
plot(x,y)
```




tačiau tiesinės regresijos funkcija `lm` gali elgtis bent dviem būdais: arba tokius įrašus išmesti ir analizę atlikti su likusiais

```
> xy.lm1 <- lm(y~x,na.action=na.omit)
> summary(xy.lm1)

Call:
lm(formula = y ~ x, na.action = na.omit)

Residuals:
      1       4       6
 1.1429 -1.7143  0.5714

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.0000     2.6186   0.382    0.768
x             0.8571     0.9897   0.866    0.546

Residual standard error: 2.138 on 1 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.4286,     Adjusted R-squared: -0.1429
F-statistic:  0.75 on 1 and 1 DF,  p-value: 0.5456
```

arba paprašyti, kad tokiu atveju tiesinės regresijos modelis iš vis nebūtų kuriamas:

```
> xy.lm2 <- lm(y~x,na.action=na.fail)
Error in na.fail.default(structure(list(y = c(3, 2, NA, 1, 3, 5), x =
c(1,  : missing values in object
```

Duomenų sistemą `dat` galime "pagerinti" keliais būdais: išmesti eilutes, kuriose NA yra tik pirmame (tik antrame stulpelyje), bent viename stulpelyje arba abiejuose stulpeliuose.

```
> is.na(dat$x) # Loginis vektorius
[1] FALSE  TRUE FALSE FALSE  TRUE FALSE
> dat$x[is.na(dat$x)]  # Palieka tik trūkstamus x elementus
[1] NA NA
```

Pažymėsime, kad "standartinė" poaibio sudarymo procedūra `dat$x[dat$x==NA]` neveikia su NA. NA reiškia, kad jūs nežinote, todėl NA nelygus niekam, įskaitant ir NA (aš nežinau nei Bušo nei Putino gimtadienių (taigi rašau NA), tačiau tai nereiškia, kad šios dvi datos sutampa).

```
> dat$x[!is.na(dat$x)] # Palieka tik turimus x elementus
[1] 1 2 2 4            # (simbolis ! žymi loginį neiginį)
> dat[!is.na(dat$x),]  # Palieka tik dat eilutes su turimais x
                       # elementais (simbolis ! žymi loginį neiginį)
   x  y
1 1  3
3 2 NA
4 2  1
6 4  5
```

Kiek sudėtingiau pašalinti eilutes kuriose yra bent vienas NA:

```
> dat[apply(dat, 1, function(x) !any(is.na(x))),]
  x y
1 1 3
4 2 1
6 4 5
```

O dabar pati užduotis: duomenų rinkinyje `airquality` (kas tai per duomenys?)

```
> library(MASS)
> data(airquality)
> airquality
    Ozone Solar.R Wind Temp Month Day
1      41     190  7.4   67     5   1
2      36     118  8.0   72     5   2
3      12     149 12.6   74     5   3
4      18     313 11.5   62     5   4
5      NA      NA 14.3   56     5   5
6      28      NA 14.9   66     5   6
7      23     299  8.6   65     5   7
.....................................................
```

yra nemažai įrašų su trūkstamais duomenimis. Pertvarkykite šį rinkinį taip, kad jame liktų tik įrašai, i) kurių `Solar.R` nėra NA, ii) kurie neturi NA. *Nuoroda*. `?all`

**3.41 UŽDUOTIS.** Inventorizuojant sandėlį, buvo aprašytas kiekvienos dėžės turinys:

```
g <- sample(letters,100,replace=TRUE) # g=gaminio i-ojoje dėžėje var
                                      # das
k <- rpois(100,20) # k=gaminių kiekis i-ojoje dėžėje
gk <- data.frame(g,k)
```

Apskaičiuokite: a) kelios dėžės su gaminiais a, b ir t.t. yra sandėlyje, ir b) keli a, b ir t.t. gaminiai yra sandėlyje.

**3.42 UŽDUOTIS**. Duomenų sistema `data` atrodo taip:

```
> data
   group duplicate treatment
1      A         Y         6
```

```
2       A          N          4
3       B          Y          3
4       B          Y          9
5       A          Y          6
6       B          Y          2
7       B          Y          2
8       B          N          5
9       B          N          9
10      A          Y          6
11      A          N          9
12      A          Y          7
13      B          Y          4
14      A          Y          4
15      B          N          2
16      A          Y          1
17      B          Y          7
18      B          N          1
19      A          Y          5
20      B          N          6
```

Apskaičiuoti `treatment` vidurkį kiekvienoje grupėje galima, pvz., taip:

```
> aggregate(data$treatment, list(data$group, data$duplicate), mean)
  Group.1 Group.2   x
1       A       N 6.5
2       B       N 4.6
3       A       Y 5.0
4       B       Y 4.5
```

Stulpelių vardus `Group.1` ir `Group.2` galima pakeisti natūralesniais:

```
> aggregate(data$treatment, list(group=data$group, duplicate=data$
duplicate), mean)
  group duplicate   x
1     A         N 6.5
2     B         N 4.6
3     A         Y 5.0
4     B         Y 4.5
```

Būtų gražu stulpeliui `x` suteikti labiau informatyvų vardą:

```
attach(data)
aggregate(as.data.frame(treatment), list(group = group, duplicate =
duplicate), mean)
  group duplicate treatment
1     A         N       6.5
2     B         N       4.6
3     A         Y       5.0
4     B         Y       4.5
```

Procedūra `attach(data)` turi vieną trūkumą – prijungtą duomenų rinkinį dažnai užmirštama atjungti (su `detach(data)` arba tiesiog `detach()`). To išvengti galima su funkcija `with` , kuri, naudodama kintamaisius iš `data` rinkinio, sukuria vietinę aplinką:

```
with(data, aggregate(list(mean=treatment), list(group=group,duplicate
=duplicate), mean))
  group duplicate mean
```

```
1      A          N  6.5
2      B          N  4.6
3      A          Y  5.0
4      B          Y  4.5
```

O dabar pati UŽDUOTIS. Su komandomis

```
library(MASS)
data(Cars93)

> Cars93[1:2,]
  Manufacturer   Model    Type Min.Price Price Max.Price MPG.city MPG.highway
1        Acura Integra   Small      12.9  15.9      18.8       25          31
2        Acura  Legend Midsize      29.2  33.9      38.7       18          25
             AirBags DriveTrain Cylinders EngineSize Horsepower  RPM Rev.per.mile
1               None      Front         4        1.8        140 6300         2890
2 Driver & Passenger      Front         6        3.2        200 5500         2335
  Man.trans.avail Fuel.tank.capacity Passengers Length Wheelbase Width Turn.circle
1             Yes               13.2          5    177       102    68          37
2             Yes               18.0          5    195       115    71          38
  Rear.seat.room Luggage.room Weight  Origin          Make
1           26.5           11   2705 non-USA Acura Integra
2           30.0           15   3560 non-USA  Acura Legend
```

prisijunkite duomenų rinkinį `Cars93`. **1**. Kiekvienoje iš grupių, nusakomų kintamaisiais `Type`, `Manufacturer` ir `Origin`, apskaičiuokite `Horsepower` vidurkį. **2**. Surūšiuokite gautąją duomenų sistemą pagal `Type` reikšmes. **3**. Dviejose grupėse – JAV ir ne JAV pagamintų automobilių – apskaičiuokite kintamojo `Horsepower` vidurkį. **4**. Kiekvienai `Type` grupei išbrėžkite `Horsepower` stačiakampę diagramą su vardu ir jas patalpinkite greta viena kitos.

**3.43 UŽDUOTIS.** Duomenų sistemoje `xy` yra du stulpeliai – stulpelyje `x` yra pateikti kontroliuojamo kintamojo lygiai, o stulpelyje `y` simboliu 1 žymime "sėkmę" ir simboliu 0 – "nesėkmę":

```
 x:
0.006110 0.007027 0.007027 0.007027 0.008081 0.008081 0.008081
0.008081 0.008081 0.008081 0.008081 0.009293 0.009293 0.009293
0.009293 0.009293 0.009293 0.009293 0.009293 0.010686 0.010686
0.010686 0.010686 0.010686 0.010686 0.010686 0.010686 0.010686
0.010686 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289
0.012289 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289 0.012289
0.014133 0.014133 0.014133 0.014133 0.016253 0.018691 0.021494
0.024718 0.028426 0.032690 0.037594 0.043233 0.049718 0.057175
0.065752 0.075614 0.086957 0.100000

 y:
0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

> (xy <- data.frame(x,y))
          x y
1  0.006110 0
2  0.007027 0
3  0.007027 1
4  0.007027 0
.....
```

Parametro `x` reikšmės auga monotoniškai (kaip tuo galima įsitikinti?), tačiau kiekvienoje grupėje pasikartojimų skaičiai skiriasi:

```
> table(x)
x
 0.00611 0.007027 0.008081 0.009293 0.010686 0.012289 0.014133
       1        3        7        8       10       13        4
0.016253 0.018691 0.021494 0.024718 0.028426  0.03269 0.037594
       1        1        1        1        1        1        1
0.043233 0.049718 0.057175 0.065752 0.075614 0.086957      0.1
       1        1        1        1        1        1        1
```

Norint įvertinti parametro `x` įtaką sėkmės tikimybei, reikia apskaičiuoti `y` vidurkį (kodėl vidurkį?) kiekvienai `x` reikšmei. Tai galima padaryti keliais būdais.

**1.**

```
> names(table(x))[3]
[1] "0.008081"
> y[x==as.numeric(names(table(x)))[3]]
[1] 0 1 0 1 1 0 1
> mean(y[x==as.numeric(names(table(x)))[3]])
[1] 0.5714286
```

Šią "rankomis" atliekamą procedūrą galima pratęsti arba patobulinti (įvedant, pvz., ciklą), tačiau viską galima atlikti viena eilute.

**2.**

```
> tapply(y, x ,mean)
  0.00611  0.007027  0.008081  0.009293  0.010686  0.012289
0.0000000 0.3333333 0.5714286 0.6250000 0.6000000 0.9230769
 0.014133  0.016253  0.018691  0.021494  0.024718  0.028426
1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
  0.03269  0.037594  0.043233  0.049718  0.057175  0.065752
1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
 0.075614  0.086957       0.1
1.0000000 1.0000000 1.0000000
```

**3.**

```
> aggregate(y, list(x), mean)
    Group.1         x
1   0.00611 0.0000000
2  0.007027 0.3333333
3  0.008081 0.5714286
4  0.009293 0.6250000
5  0.010686 0.6000000
6  0.012289 0.9230769
……
```

Išsiaiškinkite pateiktas komandas. Išbrėžkite grafiką, rodantį sėkmės tikimybės priklausomybę nuo `x`.

**3.44 UŽDUOTIS.** Duomenų rinkinį `OLDa ALL OLDa OLDa OLDa NEW OLDa OLDa ALL ALL OLDa NEW OLDa ALL OLDa NEW OLDa NEW OLDa OLDa ALL ALL OLDa` perkoduokite į `1 2 1 1 1 3 1 …` . *Nuoroda*. Jums pagelbės `scan`, `factor` ir `levels` funkcijos. Kitas variantas – funkcija `match`.

**3.45 UŽDUOTIS.** Vektorių (-stulpelį) `x` iš 3-28 psl. apjunkite su vektoriumi (-stulpeliu) `gr <- rep(1:9000, each = 9). tapply` aplinkoje pritaikykite funkciją `FillWith` iš 3-29 psl. ir atlikite ten nurodytą procedūrą. Pakartokite tą patį su `cummin` funkcija. Grįžkite prie vektorinės struktūros su `unlist` funkcija.

**3.46 UŽDUOTIS.** 3.34 užduotyje buvo nagrinėjamos kelios matricos kėlimo laipsniu programos. Pateiksime dar dvi.

```
matPower1 <- function(X,n)
{
   print(X)
   if (n==1) return(X)
   pot <- X
   for (i in 2:n) X <- X%*%pot # ?"%*%"
   X
}
X <- matrix((1:9)/16,3)
n <- 151
cat("Laipsnis= ",n,"\n")
print(matPower1(X,n))
```

Ši programa (tiksliau, joje esantis ciklas) remiasi tuo, kad bet kokį (natūralųjį) laipsnį *n* galime užrašyti kaip vienetukų sumą, pvz., 7=1+1+1+1+1+1+1. Antra vertus, dėmenų skaičių galime dar sumažinti: 7=2+2+2+1 (t.y, matricą *X* galime pirmiau pakelti kvadratu, o po to sudauginti kvadratus). Žemiau pateikta programa skaičių *n* skaido dar išradingiau (ji *n* visą laiką dalina pusiau, tačiau dar atsižvelgia į galimas dalybos liekanas).

```
matPower <- function(X,n)
{
    if(n != round(n))
    {
        n <- round(n) # n>=0
        warning("Laipsni 'n' apvaliname iki ", n)
    }
    phi <- diag(nrow = nrow(X)) # Vienetine matrica
# cat("phi=\n")
# print(phi)
    pot <- X # matricos X 1-asis laipsnis
# cat("pot=\n")
# print(pot)
    while (n > 0)
    {
        if (n %% 2)  # ?"%%"
        {phi <- phi %*% pot
# cat("phi=phi%*%pot= \n")
# print(phi)
        }
        n <- n %/% 2  # ?"%/%"
        pot <- pot %*% pot
# if (n>0)
#    {
# cat("pot=\n")
# print(pot)
#    }
    }
```

```
# cat("Galutine reiksme: phi=\n")
        return(phi)
    }

    # X <- diag(2,1)
    X <- matrix((1:9)/16,3)
    n <- 151
    cat("Laipsnis= ",n,"\n")
    print(matPower(X,n))
```

Išsiaiškinkite šią funkciją (gal būt, butų aiškiau, jei programą vykdytėte be komentaro ženklų pirmame stulpelyje). Kaip skaičius 7 išsiskaidytų šiuo atveju? O skaičius 151?

**3.47 UŽDUOTIS.** Duomenų sistemoje `ship` yra pateikti kelių metų duomenys:

```
Year   Jan   Feb   Mar   Apr   May   Jun   Jul   Aug   Sep   Oct   Nov   Dec
1967 42523 46029 47485 46692 46479 48513 42316 45717 48208 47761 47807 47772
1968 46020 49516 50905 50226 50678 53124 47252 47522 52612 53800 52019 49705
1969 48864 53281 54668 53740 53346 56421 49603 52326 56724 57257 54335 52095
1970 49714 53919 54750 53190 53791 56790 49703 51976 55427 53458 50711 50874
1971 49931 55236 57168 56257 56568 60148 51856 54585 58468 58182 57365 55241
1972 54963 59775 62049 61767 61772 64867 56032 61044 66672 66557 65831 62869
1973 63112 69557 72101 71172 71644 75431 66602 70112 74499 76404 75505 70639
1974 71248 78072 81391 80823 82391 86527 77487 83347 88949 89892 85144 75406
```

Apskaičiuokite kiekvienų metų vidurkį ir dispersiją. *Nuoroda*. Vienas iš elegantiškesnių būdų yra toks:

```
datalist <- split(ship, as.factor(year))
results <- lapply(datalist, ManoFunkcija)
```

Antra vertus, yra ir paprastesnių būdų (žr. `subset`, `by`, `apply`).

**3.48 UŽDUOTIS**. Nagrinėkime funkciją $f(x) = \int_0^x 0,01 \cdot 1,2^t \, dt$. Išspręskite lygtį $f(x) = 4$. *Nuoroda*. Šios lygties šaknį galima rasti ir be R, nes šią funkciją lengva suintegruoti. Antra vertus, sprendžiant su R, jums pagelbės `integrate` ir `uniroot` funkcijos.

# 4. Vienmačiai duomenys: aprašomoji statistika ir duomenų priešanalizė

Ne kartą matėme, kad norint susidaryti įspūdį apie duomenis, juos būtina aprašyti trumpais, vaizdžiais ir suprantamais terminais. Tuo užsiima aprašomoji statistika, kuri šiam reikalui naudoja grafines priemones (stulpelines diagramas, stačiakampes diagramas, kvantilių grafikus, histogramas, tankio grafikus) arba nagrinėja skaitines imčių charakteristikas (modą, kvantilius, medianą, empirinius momentus). Sekantis statistinės analizės žingsnis būtų išvadų apie imtį darymas (populiacijos parametrų įverčiai, jų pasikliovimo intervalai, hipotezių tikrinimas). Tuo užsiima sprendžiamoji statistika, tačiau prieš taikant jos metodus būtina atlikti duomenų priešanalizę (exploratory data analysis, eda), kuri turi atsakyti į kelis pagrindinius klausimus:

- Ar (skaitiniai) duomenys yra (beveik) normalūs?
- Gal duomenyse yra išskirčių ar klaidų?
- Jei duomenys buvo surinkti vienodais laiko intervalais, ar jie nėra koreliuoti?

Aprašomoji statistika ir priešanalizė yra glaudžiai susiję procesai, todėl juos nagrinėsime kartu.

## 4.1. Vardiniai kintamieji

Grįžkime prie duomenų rinkinio bwages.txt:

```
bwages <- read.table("bwages.txt",header=T)
attach(bwages)
```

Priminsime, kad tiriamojo žmogaus išsilavinimas yra (skaičiais užkoduotas) vardinis (tiksliau, ranginis) kintamasis `educ`:

```
> educ
   [1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  [30] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  [59] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  [88] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [117] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [146] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [175] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [204] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [233] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [262] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [291] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [320] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 [349] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [378] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [407] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [436] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [465] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [494] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [523] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [552] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
```

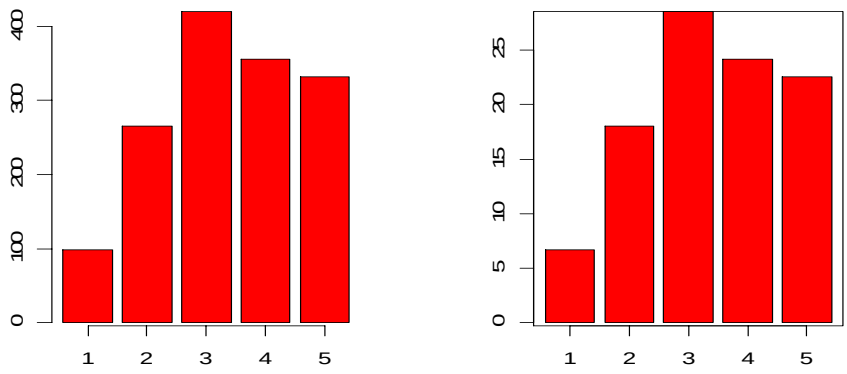
```
 [581] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [610] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [639] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [668] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [697] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [726] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [755] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
 [784] 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
.....................................................................
 [1422] 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
 [1451] 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
```

Nors įrašų sistema pakankamai aiški (pirmiausiai įrašyti žemiausio išsilavinimo asmenys, paskui – aukštesnio išsilavinimo ir t.t.), tačiau atsakyti į paprasčiausią klausimą – kiek asmenų yra kiekvienoje grupėje – be komputerio būtų nelengva. Pasinaudokime funkcija `table`[1] :

```
> table(educ)
educ
  1   2   3   4   5
 99 265 420 356 332
```

Gautąją lentelę pavaizduosime grafiškai:

```
barplot(educ)                              # Blogai
par(mfrow=c(1,2))                          # Bus du polangiai
barplot(table(educ))                       # Dabar gerai
barplot(100*table(educ)/length(educ))      # Tas pat procentais
box()  # Dešinįjį grafiką patalpins į "dėžutę"
```

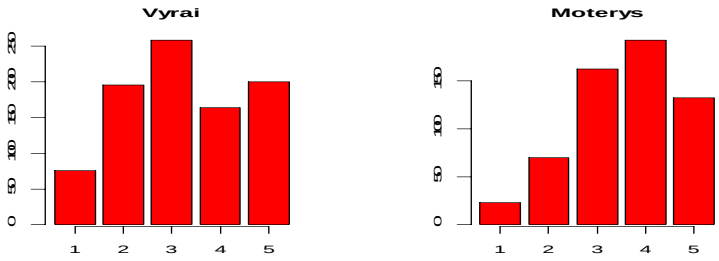



4.1 pav. Dvi kintamojo `educ` stulpelinės diagramos

Palyginkime vyrų ir moterų išsilavinimą:

```
barplot(table(educ[male==1]))  # 1) Koks operacijos  male==1 rezultatas?
title(main="Vyrai")            # 2) O koks educ[male==1]?
barplot(table(educ[male==0]))
title(main="Moterys")
```

[1] Funkcijos `table` argumentas turi būti arba faktorius arba objektai, kurie gali būti paversti faktoriais.




4.2 pav. Vyrų (kairėje) ir moterų (dešinėje) išsilavinomo `educ` stulpelinės diagramos

Atrodo, kad moterų išsilavinimas aukštesnis, tačiau "tikslų" (skaitinį) atsakymą pateiksime tik sprendžiamosios statistikos skyriuje. Antra vertus, dalinį atsakymą galime gauti, palyginę abiejų imčių medianas:

```
> median(educ[male==1])
[1] 3
> median(educ[male==0])
[1] 4
```

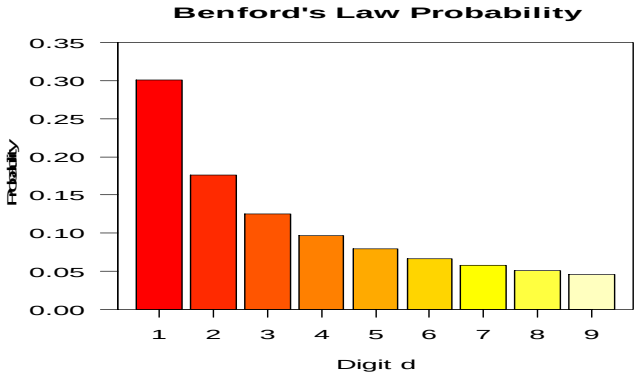
**4.1 UŽDUOTIS.** Labiausiai tikėtina diskretaus a.d. arba faktoriaus reikšmė vadinama jo moda. Žemiau yra pateiktos kelios R eilutės, kurios pateikia modos vardą.

```
> set.seed(3)
> rp <- rpois(20,2)
> barplot(table(rp))
> names(ta <- table(rp))[ta==max(ta)] # Dvi operacijos vienu metu:
[1] "3"                               # ta <- table(rp) ir names(ta)
```

Raskite vyrų ir moterų išsilavinimo modas.

**4.2 UŽDUOTIS**. Vadinamųjų Benfordo tikimybių grafiką galima išbrėžti taip:

```
x <- 1:9
p <- log10(1 + 1/x)
barplot(p, xlab = "Digit d", ylab = "Probability", ylim = c(0, 0.35),
axes = FALSE,  names.arg=c(1:9),main = "Benford's Law Probability")
axis(2, seq(0, 0.35, by = 0.05), las = 1)
box()
```




4.3 pav. Benfordo tikimybių grafikas

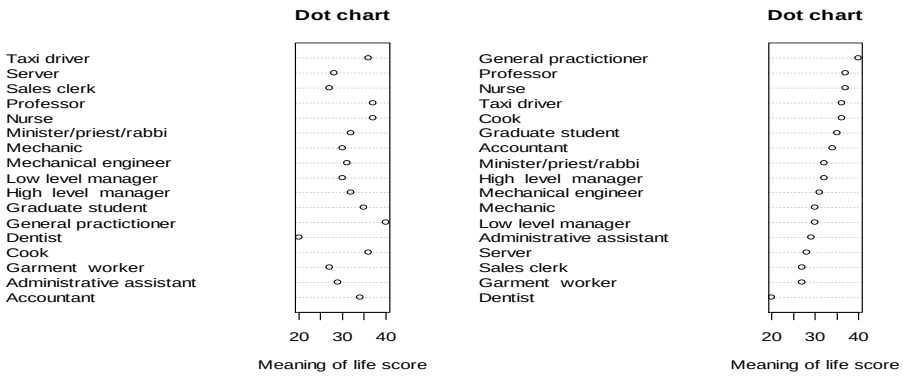
a) Ar skaičiai `p` nusako tikimybes?
b) Pasiskaitykite apie Benfordo tikimybes internete, pvz., http://mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html. Papasakokite, ką sužinojote.

Vietoje stulpelinių diagramų (`barplot`) kartais tikslinga brėžti taškines diagramas (su `dotchart`). Štai psichologų surinkti duomenys apie tai, kaip įvairių profesijų žmonės vertina savo gyvenimą:

```
prof <- c('Accountant', 'Administrative assistant', 'Garment  worker',
'Cook',  'Dentist', 'General practictioner', 'Graduate student',
'High  level  manager', 'Low level manager', 'Mechanical engineer',
'Mechanic', 'Minister/priest/rabbi', 'Nurse', 'Professor',
'Sales clerk', 'Server', 'Taxi driver')
mol <- c(34, 29, 27, 36, 20, 40, 35, 32, 30, 31, 30, 32, 37, 37, 27,
28, 36) # mol = Meaning Of Life = Gyvenimo prasmė
```

Funkcijos `dotchart` ir `barplot` kintamuosius brėžia ta tvarka, kuria jie pateikiami, todėl pirmasis grafikas (žr. 4.4 pav., kairėje) nėra labai informatyvus – kintamojo `mol` reikšmes tikslingiau išdėstyti didėjimo tvarka (žr. 4.4 pav., dešinėje).

```
par(mfrow=c(1,2))
# Brėžiame kairįjį grafiką:
dotchart(mol,labels=prof,main='Dot chart',xlab='Meaning of life score')
# Brėžiame dešinįjį grafiką:
names(mol) <- prof
dotchart(sort(mol),main="Dot chart",xlab="Meaning of life score")
```




4.4 pav. Gyvenomo kokybės įverčiai

Taigi mažiausiai gyvenimu patenkinti yra (daug uždirbantys!) dantistai, o (beveik) labiausiai – universitetų dėstytojai.

## 4.2. Skaitiniai kintamieji

### 4.2.1. Histogramos

Skaitinių kintamųjų atveju vietoje funkcijos `barplot` naudosime funkciją `hist`. Ištirkime kintamojo `wage` elgesį.

```
hist(wage)
hist(log(wage))
```

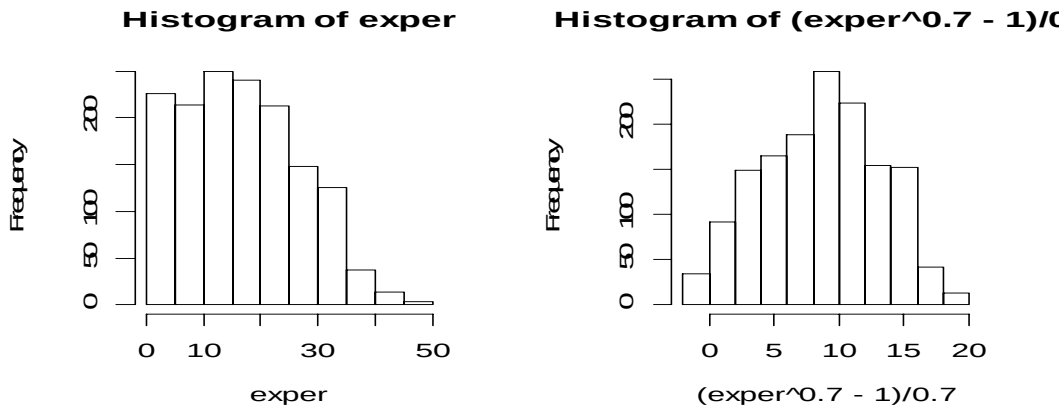

4.5 pav. Kintamojo wage (kairėje) ir jo logaritmo (dešinėje) histogramos

Dauguma klasikinių statistikos kriterijų reikalauja, kad tiriamasis skaitinis kintamasis būtų normalus (arba "beveik normalus"). Matome, kad `wage` logaritmo tankis yra labiau simetriškas, taigi kintamasis `log(wage)` yra "labiau normalus" (ar jis dabar iš tikro normalus – kitas klausimas (čia gali pagelbėti funkcija `qqnorm`, žr. žemiau)). Apskritai, jei kintamasis *y* yra teigiamas, o skirstinys nėra simetriškas, tai dažnai Box – Cox'o transformacija "pagerina normalumą". Šis metodas siūlo vietoje *y* nagrinėti naują kintamąjį $t_\lambda(y)$:

$$t_\lambda(y) = \begin{cases} \dfrac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & jei\ \lambda \neq 0, \\ \log y\ , & jei\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Parametrą $\lambda$ siūloma rinktis iš intervalo (-2,2) (jo parinkimą regresiniuose uždaviniuose galima automatizuoti, žr. [Fa, 89 p.]).

Štai dar vienas transformacijos pavyzdys (šį kartą $\lambda = 0,7$ - kitais žodžiais, vietoje `exper` reikia nagrinėti 1:0,7=1,4 eilės šaknį iš jo):



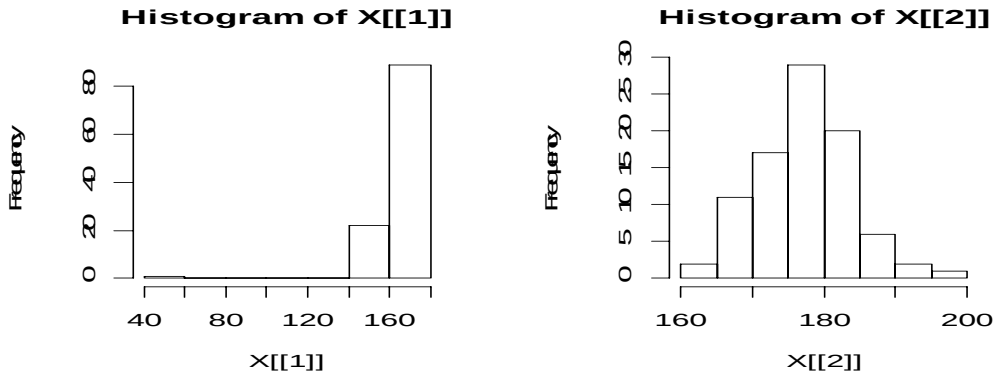

4.6 pav. Kintamojo `exper` (kairėje) ir jo Box-Cox'o transformacijos (dešinėje) histogramos

Prisiminkime domenų rinkinį `Davis`:

```
> library(car)
> data(Davis)
> Davis[1:4,]
  sex weight height repwt repht
1   M     77    182    77   180
2   F     58    161    51   159
3   F     53    161    54   158
4   M     68    177    70   175
> attach(Davis) # Į Davis komponentes dabar galima kreiptis vardais
```

Parašysime funkciją, kuri išbrėš dvi – moterų ir vyrų ūgio - histogramas

```
dvi.hist <- function(){
opar<-par(mfrow=c(1,2))
on.exit(par(opar))
tapply(height,sex,hist) # Brėšime dvi histogramas – moterų ir vyrų
invisible()}            # Kas pasikeistų, jei 4-osios funkcijos
dvi.hist()              # eilutės nebūtų?
```

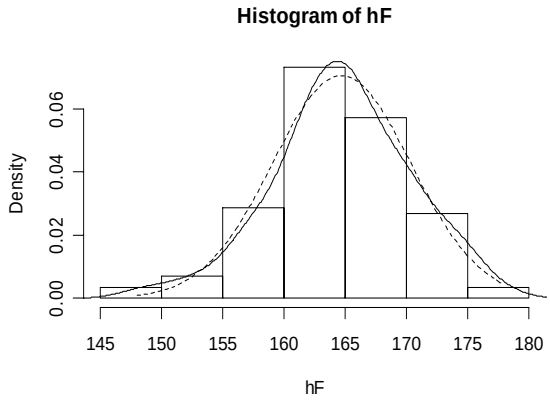



4.7 pav. Moterų (kairėje) ir vyrų (dešinėje) ūgio histogramos

Ūgis paprastai yra "pavyzdingai" normalus, todėl moterų histograma kelia nusistebėjimą – ten arba yra įrašymo klaida arba tyrimuose dalyvavo patalogiškai mažo ūgio moteris.

```
> sort(height)[1:8]
[1]  57 148 150 152 153 154 155 156  # Yra viena išskirtis

> which.min(height)                  # Kurioje eilutėje?
[1] 12                               # 12-ojoje Davis eilutėje
> Davis[(12-4):(12+4),]              # Pasidairykime šios eilutės
   sex weight height repwt repht     # aplinkoje
8    M     69    186    73   180
9    M     71    178    71   175
10   M     65    171    64   170
11   M     70    175    75   174
12   F    166     57    56   163     # Priežastis aiški: ūgis ir
13   F     51    161    52   158     # svoris sukeisti vietomis
14   F     64    168    64   165
15   F     52    163    57   160
16   F     65    166    66   165
> davis <- Davis                     # Sukuriame Davis kopiją
> davis[12,2] <- 57                  # Joje ištaisome klaidas
> davis[12,3] <- 166
```

```
> davis[(12-4):(12+4),]
   sex weight height repwt repht
8    M     69    186    73   180
9    M     71    178    71   175
10   M     65    171    64   170
11   M     70    175    75   174
12   F     57    166    56   163      # Dabar gerai
13   F     51    161    52   158
14   F     64    168    64   165
15   F     52    163    57   160
16   F     65    166    66   165
> attach(davis)                       # Prijunkime davis
> sex=="F"                            # Tai loginis vektorius: jei
  [1] FALSE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE   # įrašytas vyras - bus FALSE,
  [6] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE   # jei moteris - TRUE
 [11] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
 .....................................................
 hF <- height[sex=="F"]               # Moterų ūgio vektorius
 hist(hF,probability=T)               # Moterų ūgio histograma
 lines(density(hF))                   # "Suglodinta" histograma[2]
 xx <- seq(min(hF),max(hF),length=100)
 lines(xx,dnorm(xx,mean(hF),sd(hF)),lty=2)  # Brėžiame atitinkamą
                                            # normalųjį tankis
```




4.8 pav. `density(hF)` (ištisinė linija) mažai skiriasi nuo atitinkamo normaliojo tankio (brūkšniuota linija)

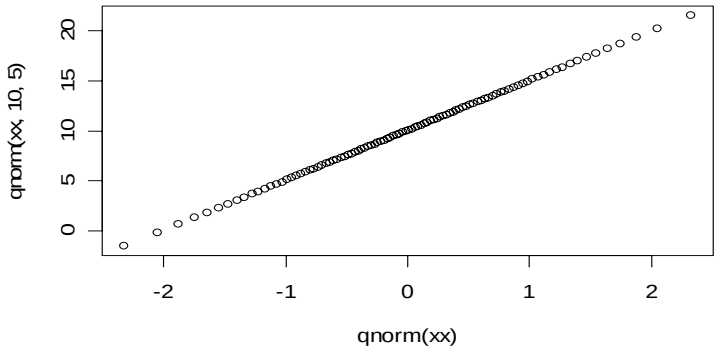
Histogramos ir empirinio tankio grafikai leidžia susidaryti teisingą skirstinio formos vaizdą. Žemiau aptariami kvantilių grafikai taip pat tam tinka, tačiau jie dar vaizdžiai pateikia ir išskirtis.

## 4.2.2. Kvantilių grafikai

Lyginant tiriamą skirstinį su normaliuoju, dažnai tikslinga remtis vadinamuoju kvantilių grafiku. Teoriniame šio grafiko variante x ašyje atidedami standartinio normaliojo skirstinio kvantiliai, o y ašyje – tiriamojo skirstinio kvantiliai. Jei tiriamasis skirstinys yra beveik normalus, tai gauti taškai bus praktiškai ant tiesės:

[2] Apie empirinio tankio funkciją `density` galima daugiau pasiskaityti su `?density` arba [V&R, 5.6 skyrelyje].

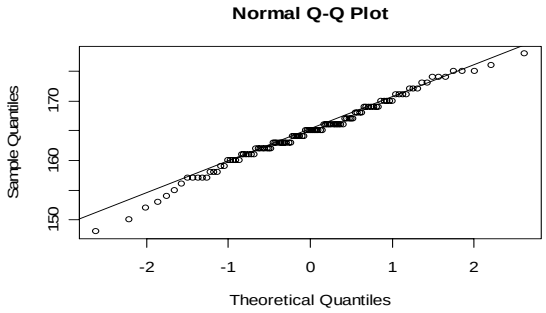
```
xx <- seq(0,1,length=100)
plot(qnorm(xx),qnorm(xx,10,5)) # Standartinį normalųjį a.d. N(0,1)
                               # lyginame su N(10,5)
```




4.9 pav. Normaliojo skirstinio teorinių kvantilių grafikas

Šio grafiko empirinį variantą brėžiame taip: jei tiriamų duomenų yra n, tai x ašyje atidedame standartinio normaliojo skirstinio 1/n, 2/n,…, n/n kvantilius, o y ašyje – tiriamojo dydžio variacinės eilutės pirmąją, antrąją,…, n-ją reikšmes (t.y., jo empirinius kvantilius). Jei tiriamasis dydis beveik normalus, tai gauti taškai bus beveik ant tiesės. `hF` duomenims kvantilių grafiką galime išbrėžti taip:

```
> qqnorm(hF)
> qqline(hF)      # Brėžiame tiesę per 1-jį ir 3-jį kvartilius
```

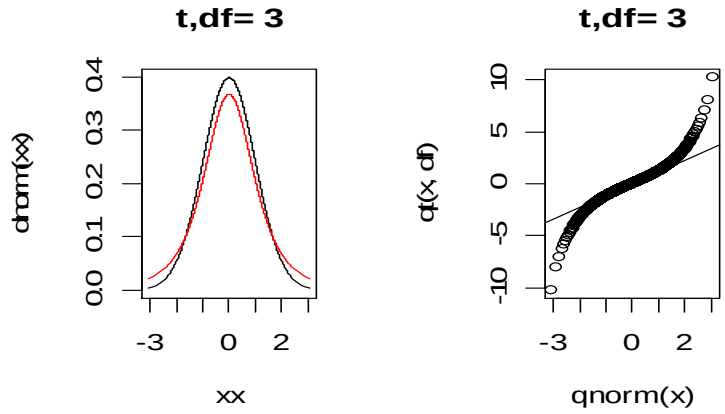



4.10 pav.Matome, kad taškai yra beveik ant tiesės, todėl `hF` skirstinys beveik normalus.

Kaip atrodo nenormaliųjų dydžių kvantilių grafikai? Štai funkcija `forma.t`, kuri lygina normalųjį skirstinį su Stjudento skirstiniu:

```
forma.t <- function(df){
# Funkcija forma.t
# df=degrees of freedom=laisvės laipsnių skaičius=l.l.
opar <- par(mfrow=c(1,2))
on.exit(par(opar))
x <- seq(0,1,length=1000)
xx <- qnorm(x)
plot(xx,dnorm(xx),type="l",main=paste("t,df=",df))
lines(xx,dt(xx,df),col=2)
# dt(…,df) skaičiuoja Stjudento skirstinio su df l.l. tankį
plot(qnorm(x),qt(x,df),main=paste("t,df=",df))
```

```
Y <- qt(c(0.25, 0.75),df) # Brėšime tiesę per 1-jį ir 3-jį kvartilius
X <- qnorm(c(0.25, 0.75))
slope <- diff(Y)/diff(X)      # slope=krypties koeficients
int <- Y[1] - slope * X[1]    # int=intercept=laisvasis narys
abline(int, slope)            # Brėžiame tiesę
}
```

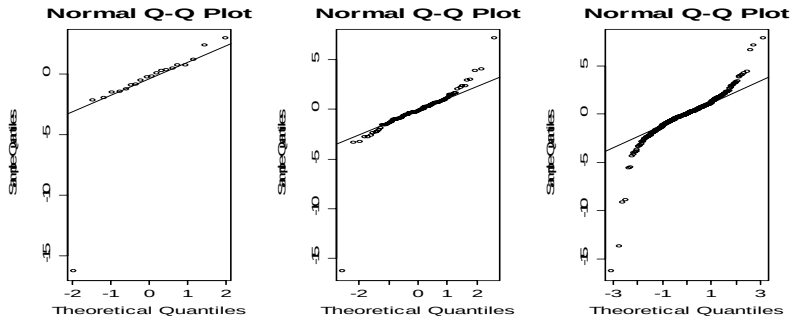



4.11 pav. Stjudento a.d. su 3 l.l.: tankių grafikas (kairėje) ir kvantilių grafikas (dešinėje)

Stjudento tankio (raudona spalva) "uodegos" yra "sunkesnės"[3] už normaliąsias (t.y., pvz., $P(T_3 > 2) > P(N(0,1) > 2)$; panašiai yra ir kairėje). Kvantilių grafike tai atitinka tą faktą, kad taškai dešinėje yra aukščiau kvantilių tiesės, o kairėje – žemiau.

Pateiksime empirinį šio reiškinio analogą:

```
par(mfrow=c(1,3))
t3 <- rt(500,3)       # Generuojame 500 a.skaičių (Stjudento su 3 l.l.)
qqnorm(t3[1:20])      # Pirmieji 20
qqline(t3[1:20])
qqnorm(t3[1:100])     # Pirmieji 100
qqline(t3[1:100])
qqnorm(t3[1:500])     # Visi 500
qqline(t3[1:500])
rm(t3)                # Baigę darbą, pašalinkime sukurtą objektą t3
```



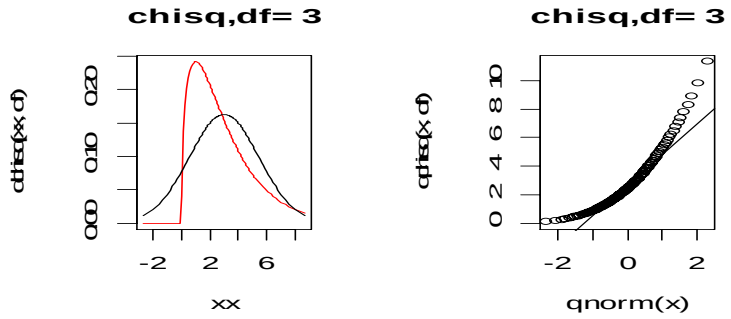

4.12 pav. Stjudento skirstinio kvantilių grafikai: imties dydis lygus 20 (kairėje), 100 (viduryje) ir 500 (dešinėje)

[3] Sakome, kad a.d. X turi "sunkias" "uodegas", jei jo tankis begalybėje gęsta lėčiau nei normalusis.

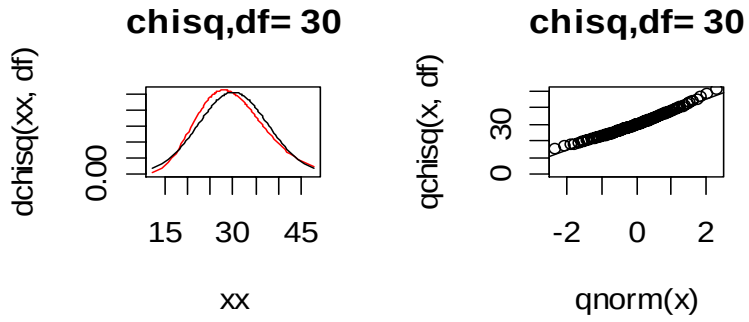
Stebime tipišką reiškinį: imties dydžiui augant, darosi vis aiškiau, kad stebimasis dydis nėra normalusis (uodegos sunkesnės nei priklauso).

Funkcijos `forma.t` modifikacija chi kvadrato skirstiniui galėtų atrodyti taip:

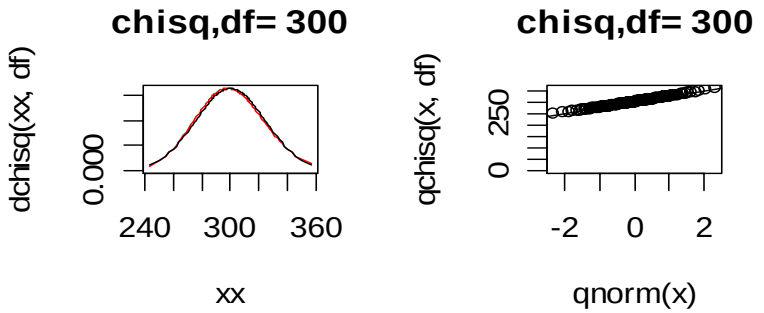
```
forma.chi <- function(df){
# Funkcija forma.chi
# df=degrees of freedom=laisves laipsniu skaicius=l.l.
opar <- par(mfrow=c(1,2))
on.exit(par(opar))
x <- seq(0,1,length=100)
xx <- qnorm(x,df,sqrt(2*df)) # Normaliojo a.d. parametrai sutampa
                             # su chi kvadrato vidurkiu ir standartu
plot(xx,dchisq(xx,df),type="l",main=paste("chisq,df=",df),col=2)
# dchisq(...,df) skaičiuoja chi kvadrato su df l.laipsniais tankį
lines(xx,dnorm(xx,df,sqrt(2*df)))
plot(qnorm(x),qchisq(x,df),main=paste("chisq,df=",df))
Y <- qchisq(c(0.25, 0.75),df) # Brėšime tiesę per 1-jį ir 3-jį
                              # kvartilius

X <- qnorm(c(0.25, 0.75))
slope <- diff(Y)/diff(X)      # slope=krypties koeficients
int <- Y[1] - slope * X[1]    # int=intercept=laisvasis narys
abline(int, slope)            # Brėžiame tiesę y=slope*x+int
}
```




4.13 pav. df=3: dešinė uodega sunkesnė, o kairė - lengvesnė



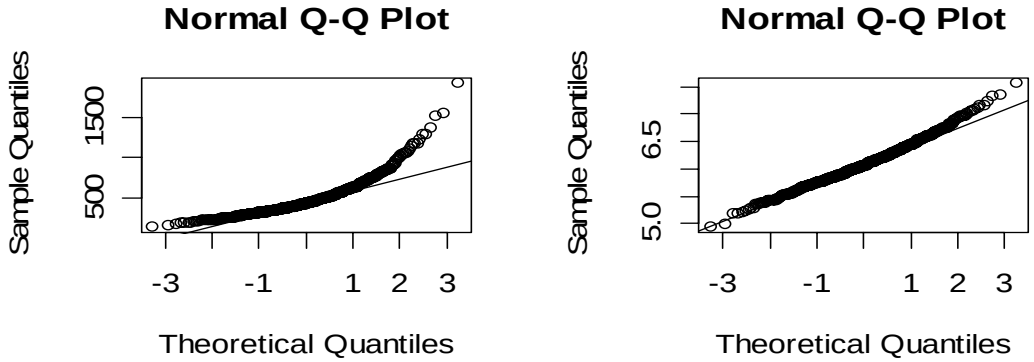

4.14 pav. Kai df=30, skirtumas tarp normaliojo skirstinio ir chi kvadrato nėra didelis




4.15 pav. "Įrodėme" centrinę ribinę teoremą: kai df didelis, chi kvadrato a.d. (kuris pats yra a.d. suma) praktiškai sutampa su normaliuoju a.d.

Panaudosime sukauptas žinias ir patikrinsime vyrų atlyginimo normalumą.

```
attach(bwages)          # Galėsime naudotis stulpelių vardais
par(mfrow=c(1,2))
w1 <- wage[male==1]
qqnorm(w1)
qqline(w1)
qqnorm(log(w1))
qqline(log(w1))
detach(bwages)          # Kai duomenų nebereikia - atjunkime
```



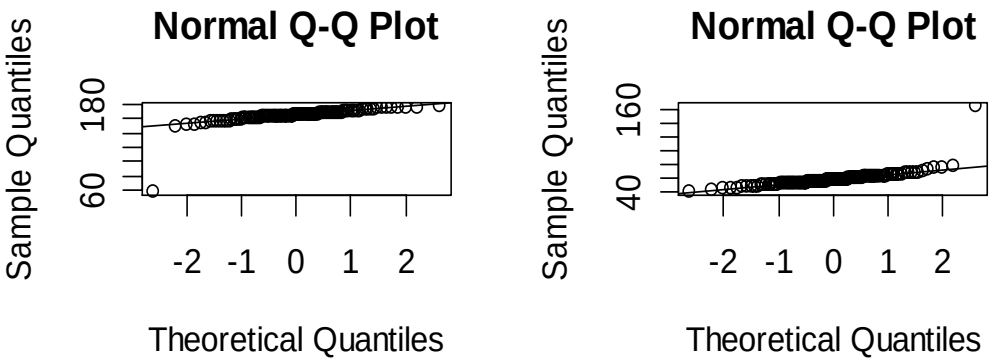

4.16 pav. Kintamųjų `w1` ir `log(w1)` kvantilių grafikai

Vyrų atlyginimo dešinioji uodega yra sunkesnė už normaliąją (t.y., nemažai vyrų gauna labai didelį atlyginimą). Antra vertus, `log(w1)` yra praktiškai normalus a.d. (nors dešinė uodega vis dar per sunki; antra vertus, nereguliarus ekstremalių reikšmių elgesys yra tipiškas reiškinys).

Kvantilių grafikai ir žemiau aptariamos stačiakampės diagramos labai efektyviai išryškina išskirtis. Iš tikrųjų:

```
library(car)
data(Davis)
attach(Davis)
par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(height[sex=="F"])
qqline(height[sex=="F"])
qqnorm(weight[sex=="F"])
```

```
qqline(weight[sex=="F"])
detach(Davis)                    # Pastarosios trys
detach("package:car")            # eilutės pateikia tvarkingos
par(mfrow=c(1,1))                # darbo pabaigos pavyzdį
```




4.17 pav. Moterų ūgio (kairėje) ir svorio (dešinėje) kvantilių grafikai;
abiejuose grafikuose aiškiai matome po vieną išskirtį

## 4.2.3. Stačiakampės diagramos

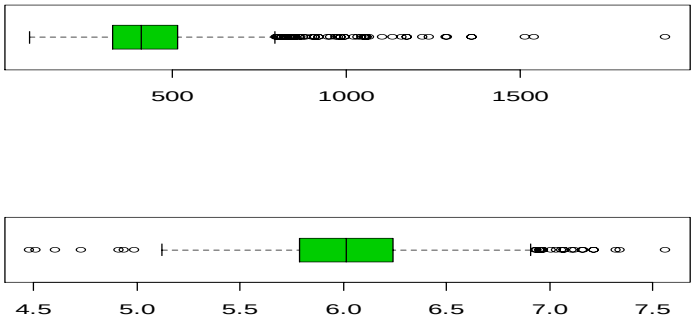
Stačiakampės diagramos yra naudingos tiriant skirstinio simetriškumą ir ieškant išskirčių. Jų brėžimas remiasi kintamojo kvartiliais (žr. 0 sk.). Panagrinėkime `wage` ir `log(wage)` atvejus. Štai trys praktiškai ekvivalenčios funkcijos, skaičiuojančios kvartilius (t.y., kvantilius, atitinkančius 1/4, 2/4, 3/4; atkreipkite dėmesį į skirtumus):

```
> attach(bwages)
> quantile(wage)
       0%        25%        50%        75%       100%
  88.38383  327.27270  408.50815  514.55345 1919.19200
> fivenum(wage)
[1]   88.38383  327.27270  408.50815  514.75280 1919.19200
> summary(wage)                              # daugiausia informacijos
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  88.38  327.30  408.50  445.80  514.60 1919.00
```

Išbrėšime stačiakampes diagramas:

```
> par(mfrow=c(2,1))
> boxplot(wage,horizontal=T,col=3)
> boxplot(log(wage),horizontal=T,col=3)
```

Pažymėsime, kad `wage` diagrama (žr. žemiau) yra labai nesimetriška (yra daug reikšmių dešiniau 3-iojo kvartilio arba, kitais žodžiais, yra daug žmonių, turinčių dideles pajamas). Antra vertus, nemažai didelių nuokrypių nuo medianos matome ir `log(wage)` atveju, tačiau nereiktų užmiršti, kad netgi normaliuoju atveju maždaug vienas stebėjimas iš 100 (arba 14 iš 1472) gali būti už žandenų.

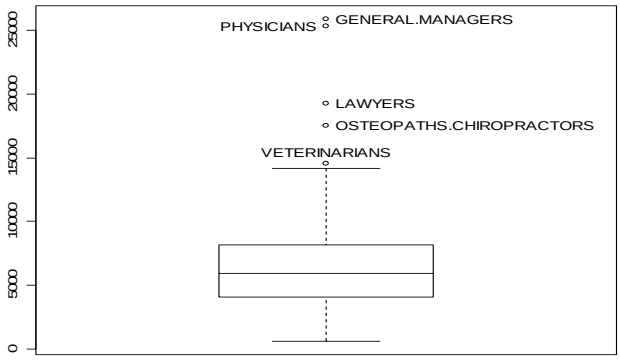



4.18 pav. Kintamųjų `wage` (viršuje) ir `log(wage)` (apačioje) stačiakampės diagramos; `wage` diagrama yra labai nesimetriška ir turi daug didelių reikšmių

R turi funkciją `identify`, kuri leidžia identifikuoti taškus sklaidos diagramose (žr. žemiau, 6-7 psl.). Ši funkcija leidžia identifikuoti išskirtis ir stačiakampėse diagramose, tačiau šiuo atveju `identify` argumentus reikia nurodyti specialiu būdu:

```
library(car)
data(Prestige)
?Prestige
attach(Prestige)
boxplot(income)
identify(rep(1,length(income)),income,labels=rownames(Prestige))
[1]  2 17 24 25 26
```

Matome, kad penkių kategorijų žmonių uždarbis yra "nenormaliai" didelis. Norėdami nustatyti jų specialybes, naudosime funkciją `identify`. Kai ši komanda bus įvykdyta, pereikime į grafikos langą, pasirodžiusį kryželį nuvarykime kairiau, dešiniau ar virš norimos išskirties ir spragtelėkime kairiuoju klavišu. Norėdami darbą baigti, spragtelėkite dešiniuoju klavišu.

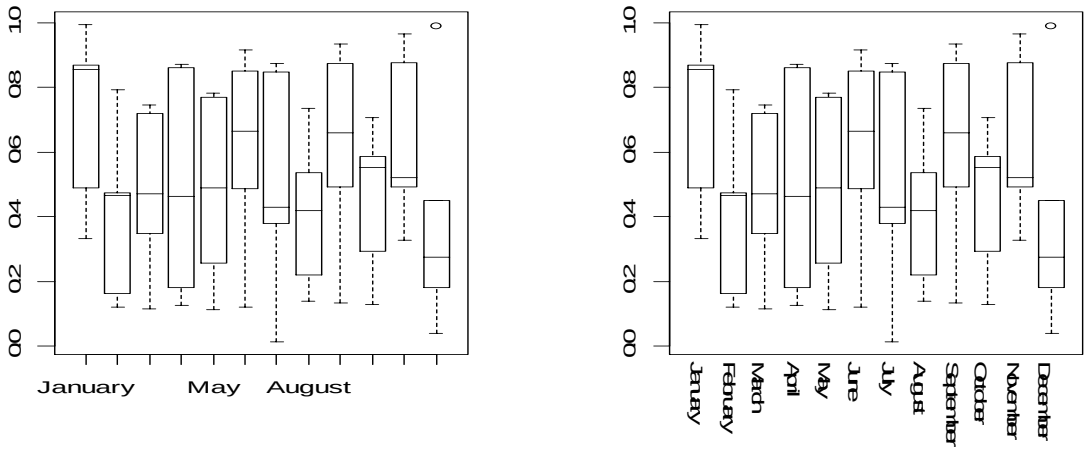



4.19 pav. Uždarbio stačiakampė diagrama ir identifikuotos išskirtys

**4.3 UŽDUOTIS**. Kartais *x* ašyje yra per mažai vietos vardamas įrašyti. Tokiu atveju reiktų pasinaudoti funkcijos `par` teikiamomis galimybėmis (pvz., vardus rašyti vertikaliai).

```
par(mfrow=c(1,2))
d <- as.data.frame(matrix(runif(60),5))
names(d) <- month.name
boxplot(d) # Vardams mažai vietos
boxplot(d,xaxt='n')
# Kai xaxt='n', x ašis nebus išbrėžta
ypos <- par()$usr[3]-(par()$usr[4]-par()$usr[3])/50
```

```
# > ypos
#[1] -0.0446786
text(1:ncol(d),ypos,names(d),srt=270,adj=0,xpd=T)
# srt pasuka tekstą 270⁰, adj=0 tekstą išlygina pagal kairę pusę,
# xpd leidžia spausdinti už grafiko ribų,
```




4.20 pav. Stačiakampės diagramos su vardais

O dabar pati užduotis: pakeiskite antrąjį grafiką taip, kad *y* ašies skaičiai ir mėnesių vardai po *x* ašimi "žiūrėtų" į tą pačią pusę.

4.4 **UŽDUOTIS**. Duomenų rinkinyje `emissions` kintamasis `CO2` turi išskirčių (kaip jas galima pamatyti?) Nustatykite jas su `identify` , pašalinkite šiuos įrašus, o paskui iš naujo išbrėžkite reikalingus grafikus.

4.5 **UŽDUOTIS**. Duomenų pakete Simple yra duomenų rinkiniai `south`, `crime` ir `aid` (esant reikalui, juos importuokite su source, žr. 4.16 užduotį). Kuri iš šių imčių yra simetriška? turi sunkias uodegas? išskirtis?

4.6 **UŽDUOTIS**. Susiraskite kelis ekonominę prasmę turinčius grafikus laikraštyje ar internete ir perbraižykite juos su R.

4.7 **UŽDUOTIS**. Norėdami generuoti diskrečiuosius tolygiai pasiskirsčiusius atsitiktinius skaičius 0, 1, …, 9, galime elgtis taip:

```
x<-floor(runif(1000)*10)
par(mfrow=c(1,3))
hist(x)
barplot(x)
barplot(table(x))
```

Pakartokite šią procedūrą kelis kartus. Kuri iš šių procedūrų "įrodo" gautų skaičių skirstinio tolygumą? Kodėl `hist(x)` brėžia "neteisingą" histogramą? Atspausdinkite kiekvieno skaitmens pasirodymo santykinį dažnį.

## 4.2.4. Skaitinės charakteristikos

Iki šiol nagrinėjome grafines imties charakteristikas. Labai lakoniškos yra skaitinės charakteristikos. Jau žinome, kad skaitinės imties "centrinę" reikšmę nusakome mediana arba vidurkiu $\overline{x}$. Deja, net viena didelė išskirtis gali smarkiai iškreipti vidurkį, kitais žodžiais, tokios imties vidurkis smarkiai nukryps nuo populiacijos vidurkio. Įverčio atsparumą išskirtims galima padidinti "nupjaunant" didžiausias ir mažiausias reikšmes:

```
> mean(wage)
[1] 445.7807
> mean(wage,trim=0.1)      # Atmetėme 10% didžiausių ir 10% mažiausių
[1] 423.1198               # reikšmių
> mean(wage,trim=0.2)      # Atmetėme 20%
[1] 414.6184
> mean(wage,trim=0.5)
[1] 408.5082
> median(wage)             # Atmetėme 50% - tas pat kas mediana
[1] 408.5082
```

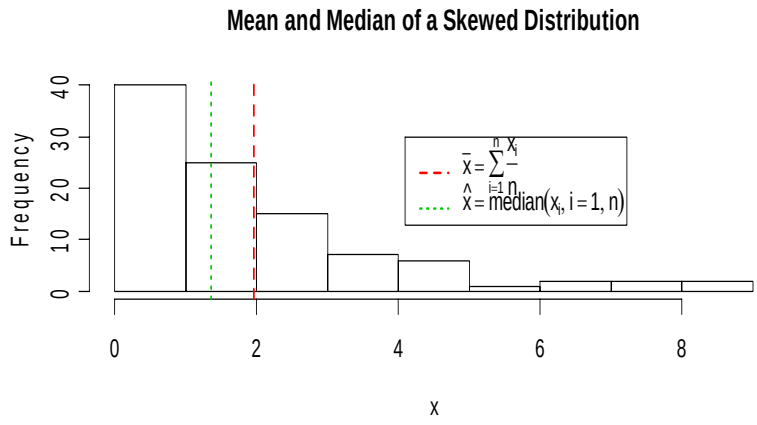
Simetrinio skirstinio atveju vidurkis ir mediana skiriasi nedaug:

```
> mean(log(wage),trim=0.1)
[1] 6.021636
> median(log(wage))
[1] 6.012511
```

Štai dar vienas, truputį pakeistas pavyzdys iš `?legend`: asimetrinio skirstinio atveju vidurkis ir mediana nesutampa. Paskutinėje eilutėje esanti funkcija `locator` leidžia pasirinkti legendos rėmelio viršutinį kairįjį tašką – spragtelėkite ten su kairiuoju pelės klavišu.

```
x <- rexp(100,rate = .5)                  # Skewed=asimetrinis
hist(x,main ="Mean and Median of a Skewed Distribution")
abline(v=mean(x),col=2,lty=2,lwd=2)       # "v" reiškia "vertical"
abline(v=median(x),col=3,lty=3,lwd=2)
ex12 <- expression(bar(x)==sum(over(x[i],n),i==1,n),
        hat(x)==median(x[i],i==1,n)) # Formulių grafikuose
                                     # rašymo pavyzdys[4]
#legend(4.1, 30, ex12, col = 2:3, lty=2:3, lwd=2) # Reikia pasirinkti
legend(locator(1),ex12, col = 2:3, lty=2:3, lwd=2)# vieną iš šių
                                                  # dviejų eilučių
```

[4] Dar vienas pavyzdys: `plot(1:10, xlab=expression(m^2), ylab=expression(mu*g))`




4.21 pav. Asimetriško skirstinio atveju vidurkis ir mediana nesutampa

Aišku, kad vienu, centrą charakterizuojančiu skaičiumi, reiškinių aprašyti neįmanoma. Nesunku įsivaizduoti imtį, kurios visos reikšmės koncentruojasi ties vidurkiu ir kitą imtį, kurios kai kurios reikšmės yra smarkiai nutolusios nuo vidurkio. Šių dviejų imčių vidurkiai gali sutapti, tačiau jie skirsis savo reikšmių išsibarstymo didumu. Pastarąjį galima charakterizuoti keliais būdais, dažniausiai tam naudojama dispersija.

```
> var(hF)             # "Teisingo" moterų ūgio dispersija
[1] 32.02574
```

Ūgis matuojamas $cm$, o jo dispersija - $cm^2$, todėl tikslingiau reikšmių išsibarstymą matuoti šaknimi iš dispersijos, kitaip sakant, imties standartu:

```
> sqrt(var(hF))
[1] 5.659129
> sd(hF)              # "Teisingo" moterų ūgio standartas
[1] 5.659129
```

Prisiminkime, kad duomenų rinkinyje `Davis` moterų ūgis buvo pateiktas klaidingai:

```
> library(car)
> data(Davis)
> attach(Davis)
> sd(height[sex=="F"])
[1] 11.64393          # 11.64≠5.66!
```

Matėme, kad mediana yra atsparesnė klaidoms nei vidurkis. Ja pagrįstas reikšmių išsibarstymo matas yra vadinamas MAD (median average deviation) ir apibrėžiamas formule

$$mediana\,|\,x_i - mediana(x)\,|\cdot 1{,}4826$$

Kitais žodžiais, pirmiausia reikia apskaičiuoti duomenų rinkinio $x$ medianą, iš kiekvienos rinkinio reikšmės atimti medianą, apskaičiuoti naujojo rinkinio modulių medianą ir dar padauginti iš 1,4826 (dauginame tam, kad normaliojo skirstinio atveju MAD sutaptų su standartu).

```
> mad(height[sex=="F"])
[1] 5.9304              # 5,93 žymiai arčiau skaičiaus 5,66 negu 11.64
```

Dar viena išsibarstymo charakteristika yra pagrįsta skirtumu tarp 3-jo ir 1-jo kvartilių:

```
 > IQR(hF)
[1] 7.25
> IQR(height[sex=="F"])
[1] 8
```

Matome, kad šie du skaičiai tarpusavy nelabai skiriasi, tačiau, norint kad Gauso skirstinio atveju jie būtų artimi standartui, reikia įvesti korekcinį daugiklį `1/(qnorm(0.75)-qnorm(0.25))` (=0,7413):

```
> IQR(hF)*0.7413
[1] 5.374425
> IQR(height[sex=="F"])*0.7413
[1] 5.9304
```

Imties normalumui tikrinti galima taip pat naudoti jo trečiąjį ir ketvirtąjį momentus, tiksliau kalbant, imties asimetrijos koeficientą

$$ask = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{sd(s)}\right)^3$$

ir imties ekscesą

$$eks = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{sd(x)}\right)^4 .$$

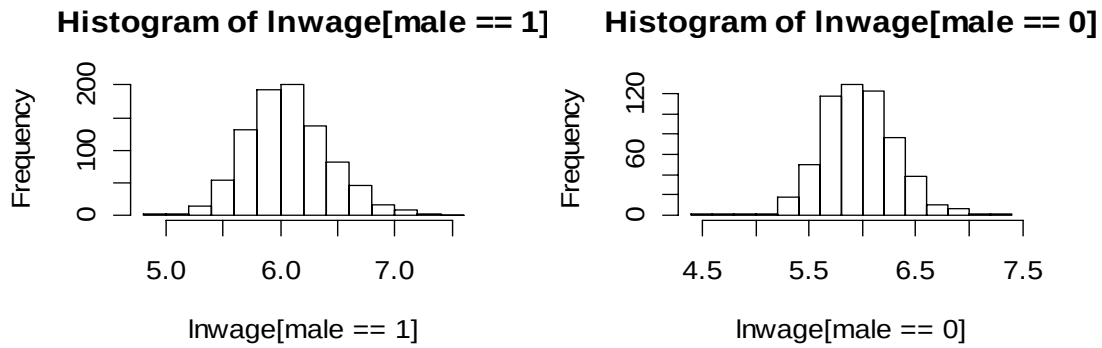
Skirstinių su simetrišku (vidurkio atžvilgiu) tankiu asimetrijos koeficientas lygus 0, o normaliojo dėsnio ekscesas lygus 3. Taigi nuokrypiai nuo šių reikšmių signalizuoja apie galimą imties nenormalumą. R neturi funkcijų `ask` ir `eks`, todėl parašykime jas patys.

```
ask <- function(x){sum((x-mean(x))^3)/(length(x)*(sd(x))^3)}
eks <- function(x){sum((x-mean(x))^4)/(length(x)*(sd(x))^4)}
> attach(bwages)
> ask(wage)
[1] 1.951409
> eks(wage)        # Abu skaičiai signalizuoja apie didelį
[1] 10.30401       # kintamojo wage nenormalumą
> ask(lnwage)
[1] 0.2245817
> eks(lnwage)
[1] 3.95701        # log(wage) gana panašus į normalųjį
```

Galimas daiktas, kad moterų ir vyrų atlyginimų struktūra skiriasi, todėl juos tikslinga panagrinėti atskirai

```
> ask(lnwage[male==1])
[1] 0.3963979              # Vyrų log(wage) asimetriškumas didelis
> eks(lnwage[male==1])
[1] 3.512542               # Panašu į normalumą
> ask(lnwage[male==0])
[1] -0.0854381             # Moterų asimetriškumas mažesnis nei vyrų
> eks(lnwage[male==0])
[1] 4.443928               # Nelabai panašu į normalumą
```

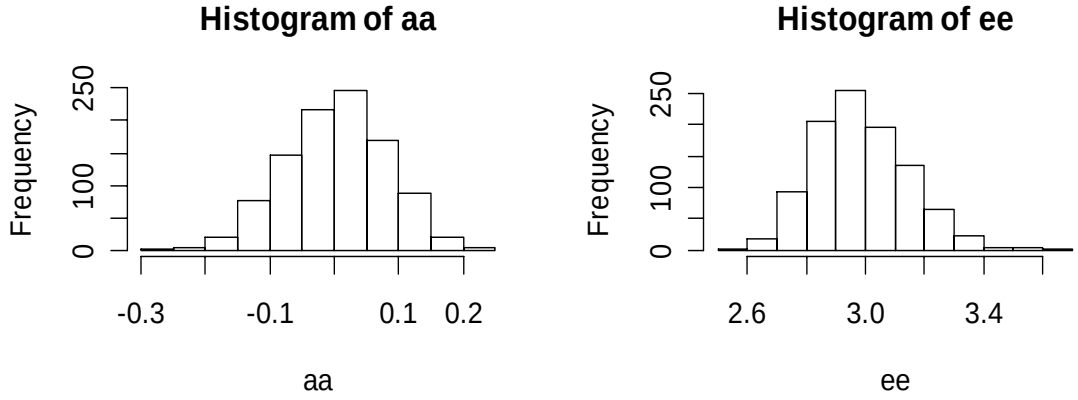
```
> par(mfrow=c(1,2))          # Dar išbrėžkime histogramas - jos
> hist(lnwage[male==1])      # gana simetriškos
> hist(lnwage[male==0])
```




4.22 pav. Vyrų (kairėje) ir moterų (dešinėje) atlyginimų logaritmų `lnwage` histogramos

Norėdami nustatyti, ar vyrų asimetrijos koeficientas 0,396 reiškia didelį nuokrypį nuo simetriškumo, sumodeliuokime 1000 normaliųjų imčių po `length(lnwage[male ==1])` (=893) narius.

```
aa <- numeric(1000)
for(i in 1:1000)aa[i] <- ask(rnorm(893))
ee <- numeric(1000)
for(i in 1:1000)ee[i] <- eks(rnorm(893))
par(mfrow=c(1,2))
hist(aa)
hist(ee)
```




4.23 pav. Asimetrijos (kairėje) ir eksceso (dešinėje) modeliuotų reikšmių histogramos

Jei `lnwage` turėtų normaliųjį skirstinį, tai asimetrijos koeficiento reikšmė 0,396 būtų neįtikėtinai didelė (kaip beje ir eksceso reikšmė 3,51). Vėliau grįšime prie kiekybinių normalumo nustatymo metodų (tai atlieka suderinamumo kriterijai, žr. 10 sk.), o kol kas darome išvadą, kad, nežiūrint išorinio `lnwage` histogramos panašumo į normaliųjį tankį, vyrų atlyginimų logaritmas greičiausiai nėra normalusis a.d.

**4.1 pvz**. Žemiau esančioje lentelėje pateikti avarijų per metus visose 56 JAV atominėse elektrinėse skaičiai:

```
1     0     3     1     4     2     10
6     5     2     0     3     1     5
4     2     7     12    0     3     8
2     0     9     3     3     4     7
2     4     5     3     2     7     13
4     2     3     3     7     0     9
4     3     5     2     7     8     5
2     4     3     4     0     1     7
```

Su Copy+Paste perkelkime šią lentelę į Notepad'ą: ten matysime

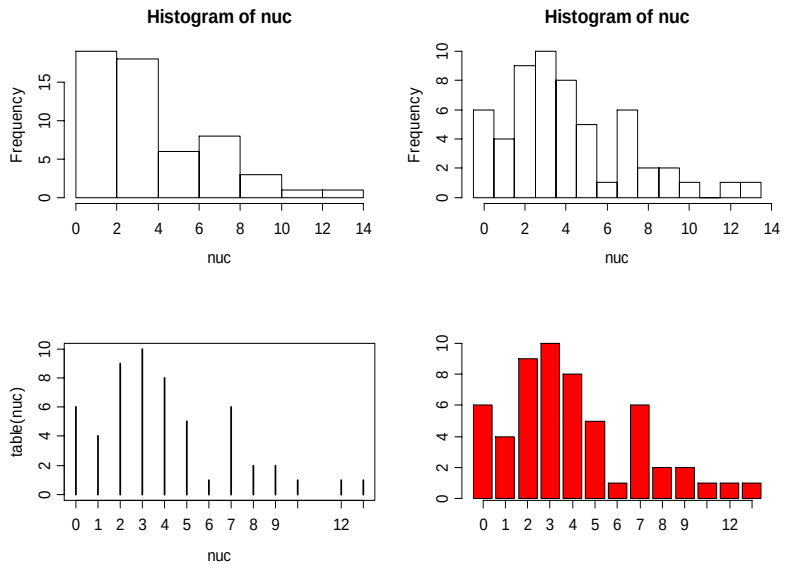
```
1     0     3     1     4     2     10
6     5     2     0     3     1     5
4     2     7     12    0     3     8
2     0     9     3     3     4     7
2     4     5     3     2     7     13
4     2     3     3     7     0     9
4     3     5     2     7     8     5
2     4     3     4     0     1     7
```

Pavadinkime šį failą nuclear.txt ir patalpinkime jį į R darbinę direktoriją. Jis turi matricinę struktūrą, todėl skaitydami jį su `read.table`, gautume duomenų sistemą (pabandykite). Kadangi mes norime gauti vektorių, taikysime `scan` funkciją:

```
nuc<-scan("nuclear.txt")
```

Štai keli grafiniai šios skaitinės informacijos pateikimo variantai.

```
par(mfrow=c(2,2))
hist(nuc)
hist(nuc,breaks=seq(-0.5,13.5))
plot(table(nuc))
barplot(table(nuc))
```




4.24 pav. Keturi avarijų skaičiaus "histogramos" variantai

Viršuje kairėje esanti histograma nėra labai "teisinga" skirstinio formos charakteristika, kadangi į pirmąjį stulpelį ji sumeta net tris[5] reikšmes: 0, 1 ir 2. Iš tikrųjų,

```
> hist(nuc)$breaks
[1] -0.0000014  2.0000014  4.0000014  6.0000014
[5]  8.0000014 10.0000014 12.0000014 14.0000014
```

Avarijų skaičiaus skirstinio formą "teisingai" pateikia viršuje dešinėje esanti histograma, tačiau jos sintaksė gana komplikuota. Panašų paveikslą gauname ir su `barplot` komanda (žr. grafiką apačioje dešinėje), tačiau iš jo sunku suprasti, kad 11 avarijų nebuvo nei vienoje elektrinėje (`barplot` yra pirmiausiai skirta vardiniams kintamiesiams – tokiu atveju 10, 11 ir 12 yra tiesiog vardai). Ko gero paprasčiausiai reikalingą grafiką gauname su `plot(table(nuc))` komanda (grafikas apačioje kairėje).

Kadangi avarijų skaičiaus skirstinys turi sunkią dešiniąją uodegą, vidurkis bus didesnis už medianą.

```
> mean(nuc)
[1] 4.035714
> median(nuc)
[1] 3
```

Kuris iš šių skaičių yra "teisingesnė" centro charakteristika? Kadangi tai priklauso nuo požiūrio, geriausiai pateikti juos abu (matome, kad jie pastebimai skiriasi, taigi skirstinys asimetriškas). Visuomenės nuomone kiekviena avarija pavojinga, todėl didelis vidurkis yra blogai (nes `mean(nuc)*56` reiškia bendrą avarijų skaičių). Antra vertus, vyriausybė žino, kad 12 ir 13 avarijų[6] buvo dviejose naujose elektrinėse, tiek avarijų jose kitais metais nebus ir todėl geriau į jas nekreipti didelio dėmesio (mediana (beje, ir "nupjautas" (=trimmed) vidurkis) kaip tik ir nekreipia!). Pažymėsime, kad JAV vyriausybinė statistika pateikia kasmetinių gyventojų pajamų medianą, nes šimto turtingiausių visuomenės narių pajamos aiškiai iškreipia bendrą vaizdą (t.y., vidurkį)[7]. Apskritai, jei teigiamas a.d. turi sunkią (dešinę) uodegą, tai mediana yra yra stabilesnis įvertis (turi mažesnę dispersiją) ir todėl labiau priimtinas.

4.8 **UŽDUOTIS**. Parašykite dvi funkcijas `apr.st` ir `Apr.st` , kurios pateiktų skaitinio kintamojo `x` aprašomąsias statistikas taip, kaip pavaizduota žemiau:

```
> apr.st(rnorm(100))
Obs= 100 , Mean= 0.041 , Std.Dev.= 0.951 , Min= -2.605 , Max= 2.224

> Apr.st(rnorm(100))
     Obs     Mean Std.Dev.      Min      Max
 100.000    0.031    1.010   -2.770    2.156
```

[5] Čia problema ta, kad kairysis histogramos taškas 0 (kuris bus priskirtas pirmajam intervalui) kartojasi net šešis kartus. Histograma pirmiausiai yra skirta tolydiems atsitiktiniams dydžiams – tuomet šansai, kad viena kokia reikšmė pasikartos, yra nedidelė (teoriškai to iš vis neturėtų būti, tačiau dėl matavimo rezultatų apvalinimo taip gali įvykti).

[6] Jas galima interpretuoti kaip išskirtis – patikrinkite su `boxplot`.

[7] Profesionaliose futbolo komandose dažnai būna keli labai gerai apmokami žaidėjai. Komandos savininkams labiau rūpi vidutinė alga (nes ji nusako jų išlaidas - kodėl?), tačiau eiliniams žaidėjams labiau rūpi atlyginimų mediana (kodėl?).

4.9 **UŽDUOTIS**. Bibliotekoje Simple (ją galima atsisiųsti iš http://www.math.csi.cuny.edu/Statistics/R/simpleR/Simple_0.4.zip ) yra duomenų rinkinys `bumpers`. Kas tai per duomenys? Kaip galima sužinoti, kad tai (duomenų) sąrašas? Transformuokite jį į skaitinį vektorių su vardais ir išbrėžkite histogramą. Pabandykite atspėti vidurkį, modą ir standartą. Savo hipotezes patikrinkite su tinkamomis R funkcijomis.

**4.10 UŽDUOTIS**. Aukčiau pateiktą užduotį atlikite su kitais Simple duomenų rinkiniais `firstchi` ir `math`.

**4.11 UŽDUOTIS**. Pakete car yra duomenų rinkinys `Davis`. Apskaičiuokite jo komponentės `repwt` vidurkį ir dispersiją. Kadangi ten kai kurių duomenų trūksta, gal būt teks pasinaudoti opcija `mean(x,na.rm=TRUE)` arba `mean(x[!is.na(x)])`. Ar trukdo trūkstami duomenys išbrėžti histogramą? Norėdami atsakyti į pastarąjį klausimą, panagrinėkite funkcijos `hist` programą su

```
> hist; methods(hist); hist.default
```

## 4.2.5. Funkcija eda.shape

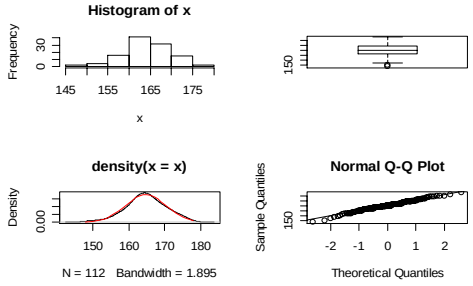
Aukščiau aptarėme įvairias grafines ir skaitines imties charakteristikas. Visas šias procedūras tikslinga pateikti viena funkcija, kurią pavadinsime `eda.shape`:

```
eda.shape <- function(x){
opar <- par(mfrow=c(2,2));on.exit(par(opar))
hist(x);boxplot(x)
plot(density(x));x <- sort(x)
lines(x,dnorm(x,mean(x),sd(x)),col=2)
qqnorm(x);qqline(x)
cat("Vidurkis=",mean(x),", Mediana=",median(x),
"(simetriniu atveju turi beveik sutapti)",     # Tekstą papildome komentaru
"\nStandartas=",sd(x),", MAD=",mad(x),         # Simbolis "\n" nurodo: toliau
"(kai nera isskirciu, turi beveik sutapti)",   # esantį tekstą spausdinti iš
"\nAsimetrijos koeficientas=",ask(x),          # naujos eilutės
"(simetriniu atveju turi buti 0)",
"\nEkscesas=",eks(x),"(normaliuoju atveju turi buti 3)\n")
}
```

Štai jos taikymo pavyzdys:

```
> eda.shape(hF)
Vidurkis= 164.7143 , Mediana= 165 (simetriniu atveju turi beveik sutapti)
Standartas= 5.659129 , MAD= 5.9304 (kai nera isskirciu, turi beveik sutapti)
Asimetrijos koeficientas= -0.2311667 (simetriniu atveju turi buti 0)
Ekscesas= 3.152079 (normaliuoju atveju turi buti 3)
```

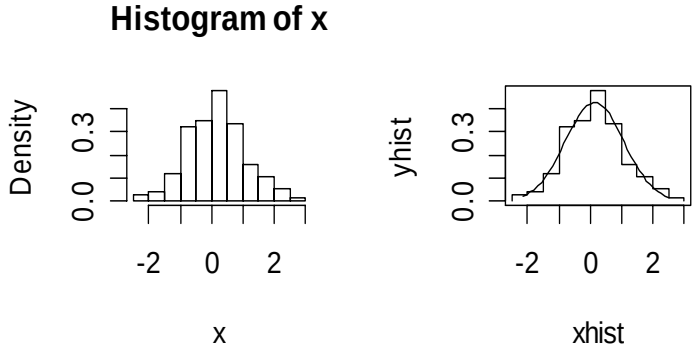
Be šio teksto dar matysime keturis grafikus:




4.25 pav. Funkcijos `eda.shape` pateiktas vaizdas

**4.12 UŽDUOTIS.** Štai, du žemiau esančius grafikus brėžiančios, programos pradžia:

```
set.seed(15)
x<-rnorm(150)
par(mfrow=c(1,2))
h<-hist(x,breaks=15,freq=F)
```




4.26 pav. Žr. 4.12 užduotį.

Pabaikite šią programą (dešinėje yra ta pati, bet kitaip pateikta histograma, bei normaliojo tankio, nusakomo šios imties empiriniais parametrais, grafikas). *Nuoroda.* Pasinaudokite funkcija `plot(…,type="s")`.

**4.13 UŽDUOTIS.** Pateiksime procedūrą, kuri generuoja vadinamąjį dvimodalinį (t.y. tokį, kurio tankis turi dvi modas (lokaliuosius maksimumus)) skirstinį.

```
two.mod <- function(n){x <- numeric(n)
for(i in 1:n) if (runif(1)<0.3) x[i]<-rnorm(1) else x[i]<-rnorm(1,
mean=5)
x}
```

Generuokime 1000 šių atsitiktinių skaičių[8] ir išbrėžkime jų histogramą.

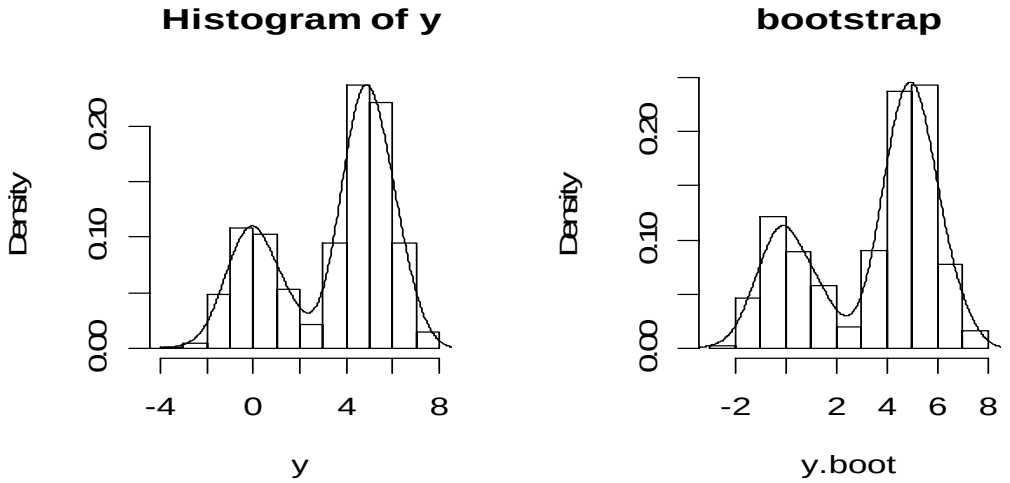
```
par(mfrow=c(1,2))
y<-two.mod(1000)
hist(y,prob=T)
lines(density(y))
> median(y)
[1] 4.445219
```

Kaip toli yra šis medianos įvertis nuo tikrosios? Aišku, kad aprašytąją modeliavimo procedūrą galime pakartoti daug kartų ir taip ištirti, tarkime, skirstinio medianos kintamumą (pvz., rasti jos pasikliauties intervalą arba bent įvertinti jos tarpkvartilinį atstumą IQD[9]). Deja, praktikos uždaviniuose paprastai turime tik vieną imtį ir teoriškai įvertinti mūsų (aiškiai nenormalaus) skirstinio medianos IQD nėra lengva. Tokiu atveju galima taikyti vadinamąjį butstrepo (= bootstrap (angl.)) metodą, kuris siūlo imti naujas imtis ne iš populiacijos, bet tik iš turimos imties. Galima įrodyti, kad tam tikromis sąlygomis abu metodai duoda panašų rezultatą.

[8] Tai vadinamasis dviejų normaliųjų tankių mišinys

[9] Priminsime – tai skirtumas tarp 3-iojo ir 1-ojo kvartilių.

```
> y.boot <- sample(y,1000,replace=T)
> hist(y.boot,main="bootstrap",prob=T)
> lines(density(y.boot))
> median(y.boot)
[1] 4.338387
```




4.27 pav. Pradinės imties `y` (kairėje)
ir vienos butstrepinės kopijos `y.boot` (dešinėje) histogramos

O dabar UŽDUOTIS. i) Generuokite 500 imčių po 600 skaičių su `two.mod` funkcija. Apskaičiuokite kiekvienos imties medianą ir raskite jos IQD. ii) Paimkite dar vieną imtį sudarykite 500 jo butstrepinių kopijų ir apskaičiuokite medianos IQD. Palyginkite abu įverčius.

**4.14 UŽDUOTIS**. $n$ =15 kartų pakartokime Bernulio eksperimentus su sėkmės tikimybe $p$=0,3. Tokio eksperimentų sėkmių skaičių $X$ galima modeliuoti arba su funkcija `rbinom(1,15,0.3)` arba su `sum(sample(c(0,1),15,replace=TRUE,prob=c(0.7,0.3)))` (kuo skiriasi šios dvi procedūros?). Teorinę X skirstinio lentelę palyginkite su empirine (skaitmeniškai ir grafiškai).

**4.15 UŽDUOTIS**. Sugeneruokite dvi Košy atsitiktinių skaičių imtis. Ar jų histogramos bus vienodos?

```
set.seed(2)
x1<-rcauchy(100)
x2<-rcauchy(100)
par(mfrow=c(1,2))
hist(x1)
hist(x2)
```

Papildykite `hist` funkcijas tokiais parametrais, kad abi histogramos turėtų tuos pačius dalinimo taškus.

**4.16 UŽDUOTIS**. Pakete Simple (plg. 4.5 užd.) yra daug duomenų rinkinių. Be tradicinio būdo atidaryti duomenų rinkinį `babies` (su `data(babies)`) galime pasiūlyti dar vieną: komandiniame lange, spragtelėkite ant kairėje viršuje esančio File|Source R code..., atsidariusiame Select file to source lange nuvairuokite į ...\rw1071\library\ Simple\ data\babies.R ir spragtelėkite ant Open.

```
> source("C:/Program Files/R/rw1071/library/Simple/data/babies.R")
> babies[1:5,]
  bwt gestation parity age height weight smoke
1 120       284      0  27     62    100     0
2 113       282      0  33     64    135     0
3 128       279      0  28     64    115     1
4 123        NA      0  36     69    190     0
5 108       282      0  23     67    125     1
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(babies$weight)
# O štai antras variantas:
> attach(babies)
> hist(weight)
# Dar vienas variantas:
> hist(weight)
> barplot(weight)
```

Ar simetriškas `weight` skirstinys? Ar turi jis išskirčių? Kuri uodega sunki? Nubrėžkite suglodintą histogramą. Atlikite tas pačias užduotis su kitais kintamaisiais iš `babies`.

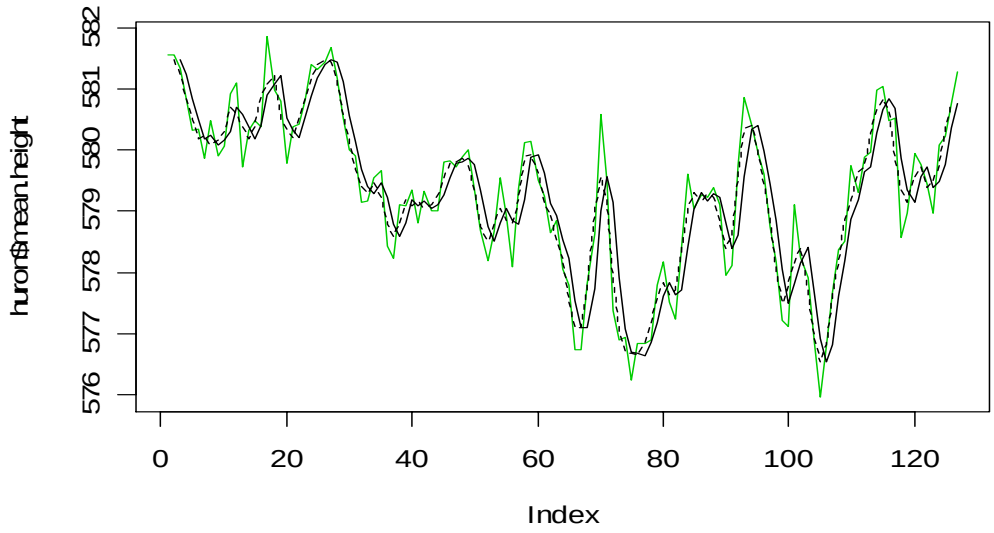
**4.17 UŽDUOTIS**. Naudodamiesi funkcijomis `floor` ir `runif`, generuokite 1000 atsitiktinių skaičių, turinčių tolygų skirstinį skaitmenų aibėje 0, 1, …, 9. Tą patį atlikite su funkcija `sample`. Palyginkite skaitmenų dažnius abiem atvejais. *Nuoroda*. Funkcija `runif` generuoja tolygiai intervale [0,1] pasiskirsčiusius skaičius $x_I$, t.y., pvz., $n(runif(1000) \in [0,3;0,4))/1000 \approx 1/10$ arba, kas ekvivalentu, $n(floor(10 * runif(1000)) = 3)/1000 \approx 1/10$.

**4.18 UŽDUOTIS**. Duomenų rinkinys `huron` yra R1\Data\Maindonald direktorijoje.

```
> huron
    year mean.height
1   1860      581.56
2   1861      581.55
3   1862      581.34
********************
```

Šiame rinkinyje pateikti daugiamečių Hurono ežero lygio stebėjimų rezultatai. Ežero lygis kinta gana chaotiškai (žr. 4.28 pav., žalia linija), todėl norint geriau suvokti tendencijas, duomenis reiktų suglodinti. Tai galima atlikti įvairiai. Vadinamasis slenkamojo vidurkio metodas siūlo lygį $h(t)$ pakeisti gretimų reikšmių vidurkiu, pavyzdžiui, $(h(t-2)+h(t-1)+h(t))/3$ (juoda linija) arba $(h(t-1)+h(t)+h(t+1))/3$ (juoda trūki linija). 4.28 pav. išbrėžtas naudojant tokias komandas:

```
> plot(huron$mean.height,type="l",col=3)
> library(ts)
> lines(filter(huron$mean.height, rep(1, 3), sides = 1)/3)
> lines(filter(huron$mean.height, rep(1, 3))/3, lty=2)
```




4.28 pav. Hurono ežero lygio kitimo grafikas (žalia linija) ir keli suglodinto ežero lygio grafikai (juoda linija)

(Beje, kaip atrodytų paveikslas, jei glodintume ne pagal 3, o pagal 15 taškų?). Parašykite dvi savo funkcijas (vieną su `for` ciklu, kitą – be jo), kurios atliktu tokias glodinimo procedūras su vektoriumi `x`. *Nuoroda*. Glodinant vektorių `x` be ciklo pagal 3 taškus, gali praversti tokia eilutė:

```
cbind(c(NA,NA,x),c(NA,x,NA),c(x,NA,NA))
```

**4.19 UŽDUOTIS**. Testą sudaro 20 klausimų, į kuriuos reikia atsakyti Taip arba Ne. Parašykite R funkciją, kuri imituotų atsitiktinai spėliojantį studentą. Pakeiskite šią funkciją taip, kad klausimų skaičius būtų bet koks. Pakartokite šį testą 1000 kartų, išbrėžkite teisingų atsakymų skaičiaus histogramą (o gal geriau ne histogramą?), apskaičiuokite empirinį vidurkį ir dispersiją. Palyginkite su teorinėmis šių parametrų reikšmėmis.

4.20 **UŽDUOTIS**. Atlikite 4.19 užduotį, jei vieną teisingą testo atsakymą reikia pasirinkti iš 5 pateiktų variantų.

**4.21 UŽDUOTIS**. Gaisrų skaičius Vilniaus rajone turi Puasono skirstinį su vidurkiu 1,2 darbo dienomis ir su vidurkiu 1,5 nedarbo dienomis. Imituokite 52 savaičių gaisrų suvestinę. Apskaičiuokite kiekvienos savaitės dienos empirinį gaisrų vidurkį. Papuoškite savo ataskaitą keliais grafikais.

**4.22 UŽDUOTIS**. Nagrinėkime du duomenų rinkinius.

```
set.seed(1); ru<-runif(40)
```

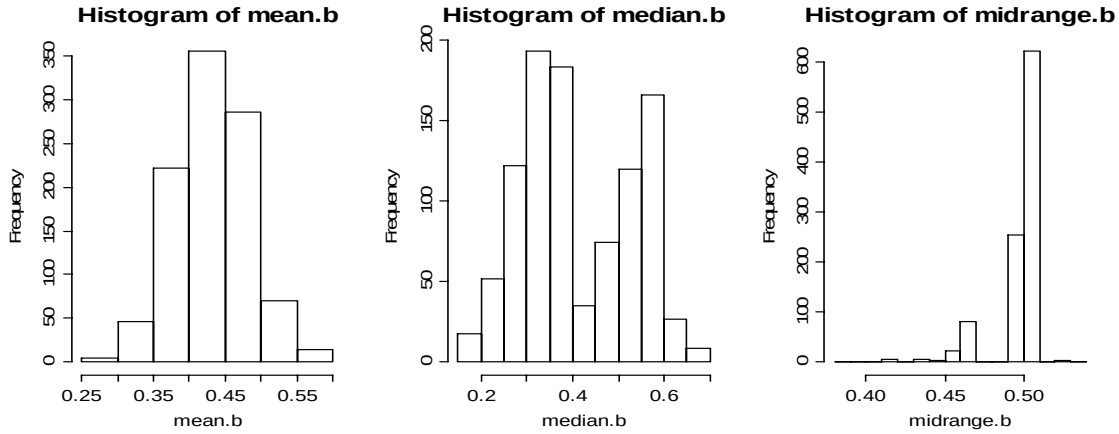
ir

```
set.seed(1); re<-rexp(30,1)
```

Rinkinio “centro” padėtį galima nustatyti, remiantis įvairiais principais, pvz., tai galėtų būti

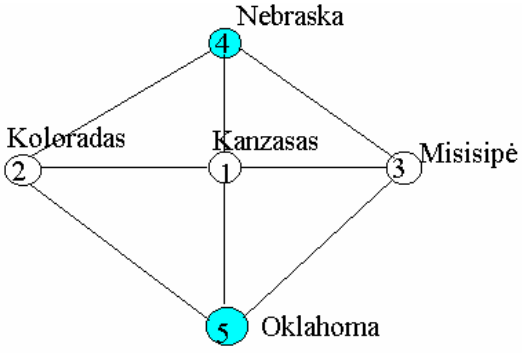
```
mean(ru)
median(ru)
(max(ru)+min(ru))/2 # Angliškai ši statistika vadinama midrange
(Q1+2Q2+Q3)/4       # [ČM1, 39 psl.] tai vadinama triskaičiu vidurkiu
```

Vienas svarbiausių įverčiui keliamų reikalavimų, yra jo tikslumas. Jei imties skirstinys būtų žinomas, kiekvieno iš aukščiau pateiktų įverčių tikslumą (pvz., dispersiją) galima būtų įvertinti teoriškai. Tardami, kad `ru` ir `re` kilmė nėra žinoma, generuokite po 999 kiekvieno įverčio dydžio 40 butstrepinių imčių (tai atlikite su a) `sample` ir b) `boot` funkcija iš boot paketo) ir palyginkite histogramas ir IQD. Kuris įvertis tikslesnis?




4.29 pav. `ru` imties atveju tiksliausia trečioji statistika

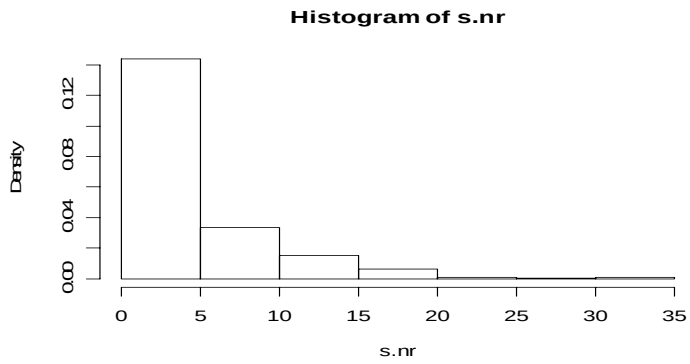
**4.23 UŽDUOTIS.** Alisa ir Bilas tarnauja kariniuose daliniuose, dislokuotuose vienoje iš penkių valstijų: Kanzase, Kolorade, Misisipėje, Nebraskoje ir Oklahomoje. Šiuo metu Alisa tarnauja Nebraskoje, o Bilas – Oklahomoje. Kiekvieną mėnesį jie abu yra pervedami tarnauti į atsitiktinai parinktą vieną iš gretimų valstijų. Pavyzdžiui, Alisa po mėnesio su tikimybe 1/3 tarnaus Kolorade, Kanzase arba Misisispėje.




4.30 pav. Valstijų išsidėstymo schema;
Alisa šiuo metu yra Nebraskoje, o Bilas - Oklahomoje

Apskaičiuokite mėnesių, kurie praeis iki to momento, kai Alisa ir Bilas susitiks vienoje valstijoje, vidurkį ir dispersiją. Pažymėsime, kad tikslus sprendimas yra gana komplikuotas (žr. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, Конкретная математика, стр. 626, 8.32); mėnesių skaičiaus vidurkis lygus 75/16=4,69, o dispersija - 105/4=26,25. Dėl šios priežasties atsakymą rasime Monte Carlo metodu.

```
Randez <- function()
{
# Funkcija Randez
s.nr<-numeric(1000) # 1000 repliku
for(i in 1:1000)
   {
A<-4 # Alisa šiuo metu 4-ojoje valstijoje
B<-5 # Bilas šiuo metu 5-ojoje valstijoje
s<-0
while(A!=B)
{
if(A==1) A<-sample(2:5,1) else if(A==2|A==3) A<-sample(c(1,4,5),1) else
A<-sample(1:3,1) # A yra valstijos, į kurią bus perkelta Alisa, numer.
if(B==1) B<-sample(2:5,1) else if(B==2|B==3) B<-sample(c(1,4,5),1) else
B<-sample(1:3,1)
print(c(A,B))
s<-s+1
}
s.nr[i]<-s # i-osios replikos mėnesių iki susitikimo skaičius
cat(paste("s.nr(",i,")="),s.nr[i],"\n")
   }
hist(s.nr,prob=T)
print(list(vidurkis=mean(s.nr),dispersija=var(s.nr)))
#s.nr
}

> Randez()

.....
[1] 3 3
s.nr( 996 )= 1 # Alisa ir Bilas susitiko po 1 mėnesio 3-joje valst.
[1] 2 3
[1] 1 4
[1] 2 2
s.nr( 997 )= 3 # Šį kartą jie susitiko po 3 mėn. 2-joje valst.
[1] 1 2
[1] 5 4
[1] 1 2
[1] 5 5
s.nr( 998 )= 4
[1] 2 1
[1] 5 3
[1] 3 5
[1] 1 2
[1] 4 5
[1] 2 3
[1] 1 4
[1] 5 2
[1] 1 4
[1] 2 2
s.nr( 999 )= 10
[1] 2 1
[1] 4 3
[1] 3 4
[1] 4 1
[1] 3 5
[1] 5 3
[1] 2 1
[1] 4 5
[1] 2 2
s.nr( 1000 )= 9
```




4.31 pav. Mėnesių iki susitikimo skaičiaus histograma

```
$vidurkis
[1] 4.486
$dispersija
[1] 29.76157
```

1) Išsiaiškinkite `Randez` funkciją. 2) Mėnesių iki susitikimo skaičiaus `s.nr` skirstinys yra labai nesimetriškas, todėl jo vidurkio 95% pasikliauties intervalą raskite butstrepo metodu (žr. 4.13 ir 4.22 užduotis). Ar tikroji vidurkio reikšmė priklauso šiam intervalui?

**4.24 UŽDUOTIS**. Vadinamoji 3σ taisyklė tvirtina, kad (iš tikrųjų neaprėžto) normaliojo a.d. X reikšmės praktiškai visuomet priklauso aprėžtam intervalui $(EX - 3\sqrt{DX}, EX + 3\sqrt{DX})$. 1) apskaičiuokite šią tikimybę, 2) generuokite 500 normaliųjų a.d. ir raskite koks procentas šios imties narių yra intervale $(\overline{x} - 3s, \overline{x} + 3s)$, 3) tą patį atlikite su eksponentiniu skirstiniu ir su Puasono skirstiniu (imkite `lamb-da=0.09`).

**4.25 UŽDUOTIS**. Jei kai kurios kintamojo reikšmės kartojasi kelis kartus, rezultatai kartais pateikiami grupuotu pavidalu (žr. žemiau `nor` arba `nnor`). Štai kelios eilutės, kurios sukurs dirbtinius tokio pavidalo duomenis.

```
set.seed(1)
nor_table(round(rnorm(30,100,1),0))
nor
# 98  99 100 101 102 103
#  3   6  11   7   2   1
nor1_as.numeric(names(nor))
nor1
#[1]  98  99 100 101 102 103
nor2_nor
dimnames(nor2)_NULL
nor2
#[1]  3  6 11  7  2  1
nnor_cbind(nor1,nor2)
> nnor
     nor1 nor2
[1,]   98    3
[2,]   99    6
[3,]  100   11
[4,]  101    7
[5,]  102    2
[6,]  103    1
```

a) Apskaičiuokite `nnor` vidurkį ir standartą (jie lygūs, atitinkamai, *vid*=100,0667 ir *sta*=1,201532);
b) Naudodamiesi funkcija `integrate`, apskaičiuokite integralą

$$\int_{90}^{110} x \exp(-(x - vid)^2 / 2sta^2) dx \ .$$

Išbrėžkite pointegrinės funkcijos grafiką.

**4.26 UŽDUOTIS**. Kompakto R1 failuose Data\Misc\d-olive-test.txt ir Data\Misc\d-olive-train.txt yra yra pateikti duomenys apie Italijos alyvų aliejus. Kiekvienas aliejus buvo

charakterizuojamas gamybos rajonu (Region - tai South=1, Sardinia=2 ir North=3), šio rajono parajoniu (Area) ir aštuonių riebiųjų rūgščių (palmitic, palmitoleic ir t.t.) kiekiu (%×100) šiame aliejuje. Tyrimo[10] tikslas buvo išsiaiškinti ar galima pagal rūgščių kombinaciją nustatyto aliejaus kilmės vietą. Mes apsiribosime aprašomąja šių duomenų analize. Apjunkite šiuos du failus į vieną (ko gero tai bus duomenų rinkinys Data\Misc\olive-dat.txt - patikrinkite) ir nusiskaitykite. Skaitines charakteristikas (visiems rajonams kartu ir kiekvienam rajonui atskirai) pateikite maždaug tokiu pavidalu:

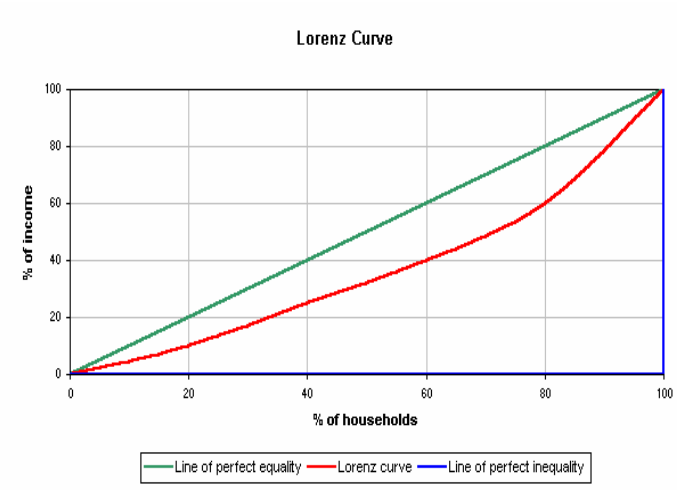
Visiems rajonams:

| | palmitic | palmitoleic | ..... | eicosenoic |
|---|---|---|---|---|
| min | 610 | 15.00 | | 1.00 |
| median | 1201 | 110.00 | | 17.00 |
| mean | 1232 | 126.10 | | 16.28 |
| max | 1753 | 280.00 | | 58.00 |
| std.dev | 168.6 | 52.5 | | 14.1 |

Dabar tą patį apskaičiuokite atskirai pietiniams rajonams (Region=1), Sardinijai (Region=2) ir šiaurės rajonams (Region=3). Kiekvienam rajonui išbrėžkite jo alyvų įvairių rūgščių vidurkius (plg. 6.3 pav.).

**4.27 UŽDUOTIS.** Kompakto R1 faile Data/Misc/Minnrain.csv yra pateikti daugelio metų kritulių kiekiai. Nusiskaitykite šiuos duomenis, išbrėžkite jų histogramą ir kvantilių grafiką. Ar duomenys panašūs į normaliuosius? Gal Box – Cox'o transformacija (žr. 4-4 psl.) galėtų pagerinti duomenų normalumą? Paeksperimentuokite.

**4.28 UŽDUOTIS.** Tarkime, kad visų šalies namų ūkių (= household (angl.)) pajamos $X$ yra vienodos ir lygios $c$ (variantas: visi akcininkai turi vienodą akcijų skaičių). Jei šiuo "visuotinos lygybės" atveju surinktume duomenis apie minėtas pajamas, tai visi imties elementai $x_i$ būtų lygūs $c$. Antra vertus, "visiškos nelygybės" atveju visos šalies pajamos (variantas: visos AB akcijos) priklausytų vienam namų ūkiui (kitų pajamos būtų lygios nuliui). Aišku, kad tarpinių variantų yra daug, o vienas iš būdų pademonstruoti visuomenės "nelygumą" yra Lorenz'o kreivė ir Gini'o koeficientas.



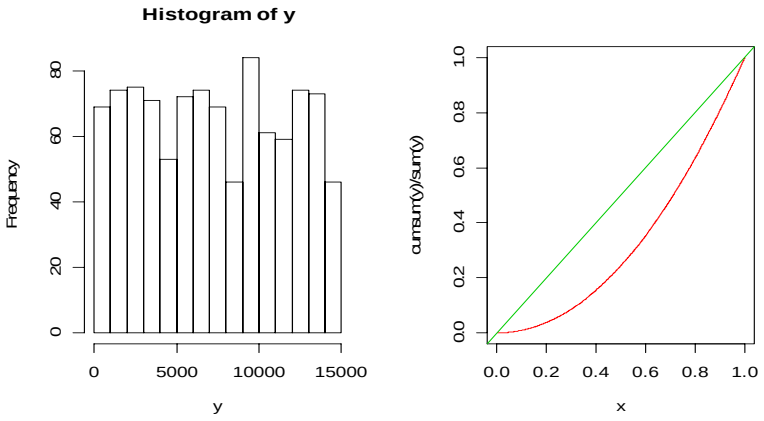

4.32 pav. Trys Lorenz'o kreivės

[10] Žr. http://www.public.iastate.edu/~dicook/stat503.html , failą cs_olive.pdf.

(Raudonąją (žr. 4.32 pav.)) Lorenz'o kreivę reiktų interpretuoti taip. Tarkime, $x_1, x_2, ..., x_n$ yra visų šalies namų ūkių pajamos (šių skaičių suma lygi visam šalies produktui). Jei susumuotume 20% skurdžiausių namų ūkių pajamas, tai ši suma sudarytų tik maždaug 12% viso produkto, o jei 60% - tai 40% viso produkto ir t.t.

Štai kelios eilutės, kurios brėžia kreivę panašią į raudonąją.

```
y <- sort(runif(1000,0,15000))
hist(y)
x <- (1:length(y))/length(y)
plot(x,cumsum(y)/sum(y),type="l",col=2)
abline(0,1,col=3)
```




4.33 pav. 1000-čio namų ūkių pajamos yra tolygiai pasiskirsčiusios intervale [0, 15000] (kairėje); tai nėra (kodėl?) "lygybės visuomenė" (žr. Lorenz'o kreivę dešinėje)

Išbrėžkite dar dvi Lorenz'o kreives, kurios atitiktų atvejus, kai ūkių pajamos turi a) normąlųjį skirstinį su vidurkiu 0 ir standartu 5000 (imtį sudarykite tik iš teigiamų šio objekto elementų) ir b) Pareto skirstinį su parametru $c = 2$.

Pajamų "nelygybę" galima charakterizuoti vadinamuoju Gini'o koeficientu $G$ – skaitmeniškai jis lygus plotui tarp žalios ir raudonos linijos (jei $G = 0$ – "visi lygūs", jei $G = 1$ – visiška nelygybė). Apskaičiuokite a) ir b) atvejų Gini'o koeficientus. Kuri visuomenė "nelygesnė"? Kaip tai susiję su a) ir b) skirstinių savybėmis?

**4.29 UŽDUOTIS.** Lorenz'o kreivę galima apibrėžti ne tik imtims, bet ir populiacijoms. Tiksliau kalbant, jei namų ūkio pajamos nusakomas skirstiniu $F_X$, tai šios populiacijos Lorenz'o funkcija apibrėžiama taip:

$$L_X(p) = \frac{1}{EX} \int_0^p F_X^{-1}(u)du, \quad p \in (0,1)$$

(čia $F_X^{-1}$ yra funkcija atvirkštinė skirstinio funkcijai (kitaip sakant, tai kvantilių funkcija - pakete R ją skaičiuoja funkcijos `qunif`, `qpareto` ir panašiai)). Įrodykite, kad Lorenz'o funkcija turi savybes:

a) $L_X(0) = 0$,

b) $L_X(1) = 1$,

c) $L_X'(p) \geq 0$,

d) $L_X''(p) \geq 0$ (t.y., Lorenz'o kreivė visuomet yra žemiau tiesės $y = x$ (kodėl?)).

e) Įrodykite, kad Gini'o koeficientas $G = 1 - 2\int_0^1 L_X(p)dp$.

f) Kaip Gini'o koeficientas Pareto skirstiniams priklauso nuo *c*?

Išbrėžkite Lorenz'o kreivę, kai *X* turi tolygų skirstinį intervale [0,1]; raskite šio skirstinio Gini'o koeficientą.

**4.30 UŽDUOTIS**. Duomenų rinkinio `attenu`:

```
> data(attenu)
> attenu
   event mag station  dist accel
1      1 7.0     117  12.0 0.359
2      2 7.4    1083 148.0 0.014
***************
11     2 7.4     117 370.0 0.004
12     3 5.3    1117   8.0 0.127
13     4 6.1    1438  16.1 0.411
14     4 6.1    1083  63.6 0.018
15     4 6.1    1013   6.6 0.509
***************
```

pirmajame stulpelyje `event` yra pateiktas žemės drebėjimo Kalifornijoje numeris (nuo 1 iki 23). Kai kuriuos iš jų užregistravo tik viena stotis (pvz., 1-ąjį), tačiau kitus – kelios stotys (pvz., 2-ąjį užregistravo dešimt stočių). Komanda

```
> table(attenu$event)
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
1 10  1  9 11  1  1  5 22  1  3  1  2  4  4  3  3 11 38 16  7 10 18
```

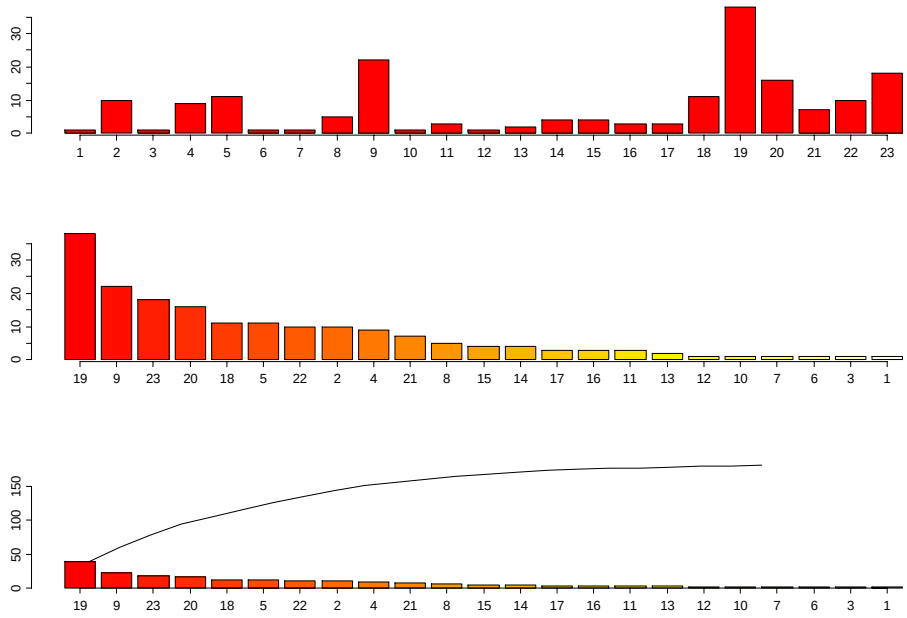
informuoja apie kiekvieno drebėjimo registracijų skaičių, tačiau gerai būtų šią informaciją pateikti vaizdžiau. Komanda

```
> barplot(table(attenu$event)) # Plg. 4.34 pav. viršutinį grafiką
```

pateikia aukščiau užrašytą informaciją grafiškai, o komanda

```
> barplot(rev(sort(table(attenu$event)))) # 4.34 pav., viduryje
```

brėžia tų pačių duomenų Pareto grafiką (žr. [ČM, 55 psl.]). Iš šio grafiko jau aiškiai matome, kad daugiausiai kartų buvo užregistruotas 19-asis žemės drebėjimas, toliau eina 9-asis ir t.t.




4.34 pav. `attenu$event` stulpelinė (viršuje) ir dvi Pareto diagramos

Parašykite kelias komandas, kurios brėžtų apatinį 4.34 pav. grafiką (čia kreivė viršuje yra sukauptieji stebėjimų dažniai).

**4.31 UŽDUOTIS**. Išskirtys (outliers) dažnai signalizuoja apie tai, kad imtyje yra "nereguliarių" stebėjimų arba "klaidų". Nėra standartinių rekomendacijų, ką daryti su išskirtimis (dažnai išskirtys tiesiog atmetamos, tačiau jei keli taškai prieštarauja mūsų modeliui, tai gal tiesiog modelis blogas[11]?). Kaip ten bebūtų, pabandykime aptarti, ką vadinti išskirtimis ir kaip jų efektą susilpninti. Dažnai teikiama rekomendacija atmesti duomenis, kurie netelpa į intervalą $mean \pm 3sd$ (trijų sigmų taisyklė); deja ji nėra visuomet gera, nes tuomet, kai turime išskirčių kaip vidurkis taip ir standartas gali būti toli nuo "tikrųjų". Tokiu atveju tikslingiau naudotis "atspariomis" statistikomis, pvz., mediana ar MAD (žr. 4-15 psl.).

Nagrinėkime duomenų vektorių `x`

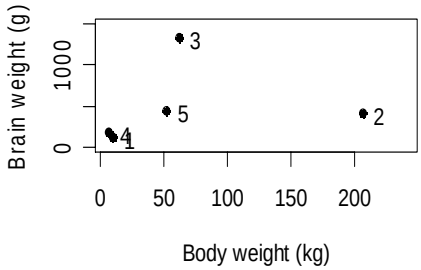
```
 0.378 -22.831  1.123 -10.789  0.191   0.168   0.552   1.192  1.767  0.170
-1.108  -1.714  6.045  -1.424 -1.226 -26.948   1.875  -2.059 -0.491  0.010
-9.526   0.216 -0.479 -27.457  1.148  -3.852  -0.859  -1.338 -0.037  0.912
 0.831   0.132 -0.887   0.144  0.042   3.145  -0.546 321.202  0.612  0.067
 1.910   0.952 -0.738  -4.508 23.327   0.564   3.658   0.885 -0.116  5.232
 0.205  -3.820 -0.236  -0.386  0.727  -3.817  -2.584  -1.514 20.013 -0.160
-0.374  -0.183 -0.368   1.156 -2.995  -1.222   0.041  -0.589  0.993  0.223
 0.043  -2.175  0.576   0.540 -0.179  -4.750   0.585  -1.999 -0.830 -0.653
 4.030   1.472 -0.302   0.509  3.809   1.811 -19.947  -1.860  4.351  0.058
 1.021   1.986  1.389  -0.136  0.459   0.766 -17.920   1.940  1.646  1.211
```

Keturiuose polangiuose išbrėžkite keturias stačiakampes diagramas: 1) pačių duomenų `x`, 2) rinkinyje `x` palikite tik duomenis telpančius į intervalą [`mean(x)-3*sd(x),mean(x)+3*sd(x)`], 3) rinkinyje `x` palikite tik duomenis tarp 0,025-ojo ir 0,975-jo kvantilių, 4) teorija rekomenduoja rinkinyje `x` palikti tik duomenis iš intervalo [`median(x)-3,5*mad(x),median(x) +3,5* mad(x)`].

[11] Teigiama, kad ozono "skylė" virš Antarktidos buvo taip ilgai nepastebėta dėl to, kad stebėjimų "išskirtys" buvo automatiškai atmetamos.

**4.32 UŽDUOTIS**. Su File|Source R code… nuskaitykite duomenų rinkinį primates.R iš Data/Maindonald.

```
 > primates
        Species Bodywt Brainwt
1  Potar monkey   10.0     115
2       Gorilla  207.0     406
3         Human   62.0    1320
4 Rhesus monkey    6.8     179
5         Chimp   52.2     440
```




Šių primatų kūno ir smegenų svorio sąryšį pavaizduosime grafiškai.

```
attach(primates)
plot(x=Bodywt, y=Brainwt, pch=16, xlab="Body weight (kg)",
     ylab="Brain weight (g)",xlim=c(5,240), ylim=c(0,1500))
chw <- par()$cxy[1]
text(x=Bodywt+chw, y=Brainwt, labels=row.names(primates), adj=0)
```

Pakeiskite šį grafiką taip, kad taškų etiketės būtų ne eilės numeris, bet primato vardas. Galimas daiktas, kad horizontaliai užrašyti vardai netilps, todėl pasukite juos 45 laipsnių kampu (parametras `str`). Panašiai įveskite dolphins.R duomenis ir išbrėžkite grafiką

```
attach(dolphins)
plot(logweight,logheart)
```

Kaip nors “protingai” pažymėkite `styx` ir `delph` rūšis.

# 5. Dvimačiai duomenys: aprašomoji statistika ir duomenų priešanalizė

Kaip ir vieno kintamojo atveju, nagrinėjant du kintamuosius, paprastai kyla klausimai apie kiekvieno jų skirstinio formą ar parametrus. Antra vertus, dabar atsiranda nauja tema apie jų tarpusavio ryšius. Jos sprendimas priklauso nuo kintamųjų tipo. Ar išsilavinimo lygis priklauso nuo lyties? (abu kintamieji vardiniai). Ar priklauso atlyginimas nuo lyties? (pirmasis kintamasis skaitinis, antrasis vardinis). Ar priklauso atlyginimas nuo patyrimo (metais)? (abu kintamieji skaitiniai). Šiems bei panašiems klausimas ir skirtas 5 skyrius.

## 5.1. Vardiniai kintamieji

`bwages` duomenų rinkinyje turime informacijos apie tiriamųjų asmenų lytį `male` ir išsilavinimą `educ`. Ar galima teigti, kad moterys (o gal vyrai?) yra labiau išsilavinę?

```
> attach(bwages)
> (me <- table(male,educ))
    educ
male 1   2   3   4   5
   0  23  70 162 192 132   # Tai vadinamoji (požymių) sąveikos
   1  76 195 258 164 200   # lentelė (contingency table)
> (em <- table(educ,male))
    male                   # Kitaip pateikta sąveikos lentelė
educ 0   1
   1  23  76
   2  70 195
   3 162 258
   4 192 164
   5 132 200
```

Štai funkcija `marginals`, sumuojanti gautąsias lenteles pagal eilutes ir stulpelius (pabandykite ją išsiaiškinti!):

```
marginals <- function (x) {
    ## x is a matrix
    row.sums <- apply(x,1,sum)
    row.names <- c(rownames(x),"Total")
    col.names <- c(colnames(x),"Total")
    x <- cbind(x,row.sums)
    col.sums <- apply(x,2,sum)
    x <- rbind(x,col.sums)
    rownames(x) <- row.names
    colnames(x) <- col.names
    x
  }
```

Pritaikykime ją mūsų duomenims:

```
> smem <- simple.marginals(em)
```

```
> smem
        0   1 Total
1      23  76    99
2      70 195   265
3     162 258   420
4     192 164   356
5     132 200   332
Total 579 893  1472
> smme <- simple.marginals(me)
> smme
     1   2   3   4   5   Total
0     23  70 162 192 132   579
1     76 195 258 164 200   893
Total 99 265 420 356 332  1472
```

Kokias nors išvadas apie kintamųjų `educ` ir `male` priklausomybę sunku daryti, kadangi vyrų yra žymiai daugiau ir tiesiog lyginti skaičius atitinkamuose langeliuose neverta. Pavyzdžiui, `smme` lentelėje 5-joje `educ` grupėje moterų yra 132 (iš 579), o vyrų 200 (iš 893; aišku, kad teisingiau būtų lyginti 132/579=0,228 su 200/893=0.224).

```
> (smme/smme[,"Total"])[-3,-6]   # Matricos smme stulpeliai cikliškai
                                 # (t.y.,teisingai) dalinami iš "Total"
                                 # stulpelio; iš gautosios matricos
                                 # pašaliname 3 eilutę ir 6 stulpelį
           1         2         3         4         5
0 0.03972366 0.1208981 0.2797927 0.3316062 0.2279793
1 0.08510638 0.2183651 0.2889138 0.1836506 0.2239642
```

Štai dar du šios procedūros variantai, naudojantys tik base paketo funkcijas:

```
t(apply(em,2,function(x){x/sum(x)})) # t=transponuoti(matricą)
t(apply(me,1,function(x){x/sum(x)}))
```

Tiesą sakant, visus šiuos rezultatus galima gauti ir su base paketo `prop.table` funkcija: išbandykite

```
prop.table(me,1)    # Procentai eilutėse
prop.table(me,2)    # Procentai stulpeliuose
prop.table(me,NULL) # Procentai lentelėje
```

Panašiems reikalams skirta ir funkcija `tab.distrib`, kurią galima taikyti matricoms arba masyvams (galimas daiktas, gautiems kaip funkcijų `table` arba `xtabs` reikšmės):

```
tab.distrib <- function(x){
   dims <- dim(x)
   jtd <- x/sum(x) # N/Total
   col <- matrix(x,nrow=dims[1])
   cold <- sweep(col,2,apply(col,2,sum),"/") # N/ColTotal
   cold <- array(cold,dim=dims)
   row <- matrix(t(col),nrow=dims[2])
   rowd <- sweep(row,2,apply(row,2,sum),"/") # N/RowTotal
   rowd <- t(matrix(rowd,nrow=ncol(col),ncol=nrow(col)))
   rowd <- array(rowd,dim=dims)
   attributes(cold) <- attributes(x)
   attributes(rowd) <- attributes(x)
   list(joint.distrib=jtd,col.distrib=cold,row.distrib=rowd)
}
```

Du pavyzdžiai:

**5.1 pvz.**

```
> tab.distrib(me)$row
    educ
male          1         2         3         4         5
   0 0.03972366 0.1208981 0.2797927 0.3316062 0.2279793
   1 0.08510638 0.2183651 0.2889138 0.1836506 0.2239642
```

**5.2 pvz.**

```
> data(warpbreaks)
> tab <- xtabs(breaks ~ wool + tension, data = warpbreaks)
> tab
    tension
wool   L   M   H
   A 401 216 221
   B 254 259 169
   > tab.distrib(tab)
$joint.distrib
    tension
wool         L         M         H
   A 0.2638158 0.1421053 0.1453947
   B 0.1671053 0.1703947 0.1111842

$col.distrib
    tension
wool         L         M         H
   A 0.6122137 0.4547368 0.5666667
   B 0.3877863 0.5452632 0.4333333

$row.distrib
    tension
wool         L         M         H
   A 0.4785203 0.2577566 0.2637232
   B 0.3724340 0.3797654 0.2478006
```

**5.1 UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite funkcijos `tab.distrib` tekstą ir 5.2 pavyzdį.

**5.2 UŽDUOTIS**. Eilutės

```
sex <- c("Male", "Female")
age <- letters[1:6]
education <- c("low", 'med', 'high')
data <- expand.grid(sex=sex, age=age, education=education)
counts <- rpois(36, 100)
data1 <- cbind(data, counts)
t1 <- xtabs(counts ~ sex + age + education, data=data1)
```

generuoja "labai tvarkingą" duomenų sistemą `data`. Pakeiskite generavimo procedūrą taip, kad `data` būtų labiau panašus į realų ("netvarkingą") 36 eilučių duomenų rinkinį. Papildykite jį "vardų" stulpeliu `ID` ("vardai" turėtų būti pavidalo KL245, AV311 ir pan.). *Nuoroda.* Jums gali praversti tokios komandos:

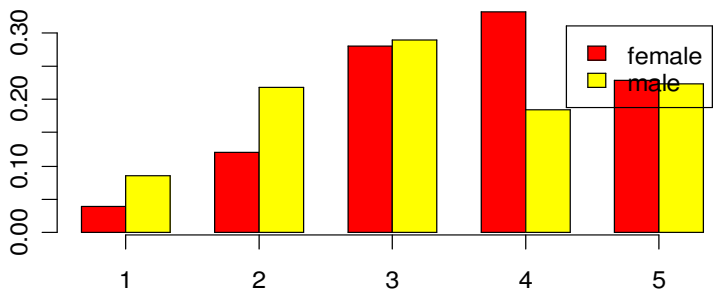
```
i1 <- sample(LETTERS,36,replace=T)
i2 <- sample(LETTERS,36,replace=T)
i3 <- sample(100:999,36)
ID <- paste(i1,i2,i3,sep="")
```

Grįžkime prie išsilavinimo tyrimo. Matėme, kad aukščiausiose išsilavinimo grupėse (ypač 4-joje) dominuoja moterys, o žemiausiose – vyrai. Taigi atrodo, kad lytis turi

įtakos išsilavinimui, tačiau tai patvirtinti statistikos testų skaitmeniniais rezultatais galėsime tik 10 skyriuje (žr. 10.1 užd.).

Tik ką nustatytas faktas bus ypač vaizdus, jei jį pavaizduosime grafiškai.

```
> barplot((smme/smme[,"Total"])[-3,-6],beside=T,legend=c("female",
  "male"))
```




5.1 pav. Moterų ir vyrų išsilavinimo stulpelinės diagramos

Nors kintamieji `educ` ir `male` yra skirti vardiniams kintamiesiems (faktoriams) koduoti, tačiau jie apiforminti kaip skaitiniai kintamieji.

```
> class(educ)
NULL
```

Kartais kintamojo klasė nėra svarbi, tačiau kai kurios funkcijos reikalauja, kad kintamasis būtų, tarkime, faktorius. Pakeisti klasę nėra sunku:

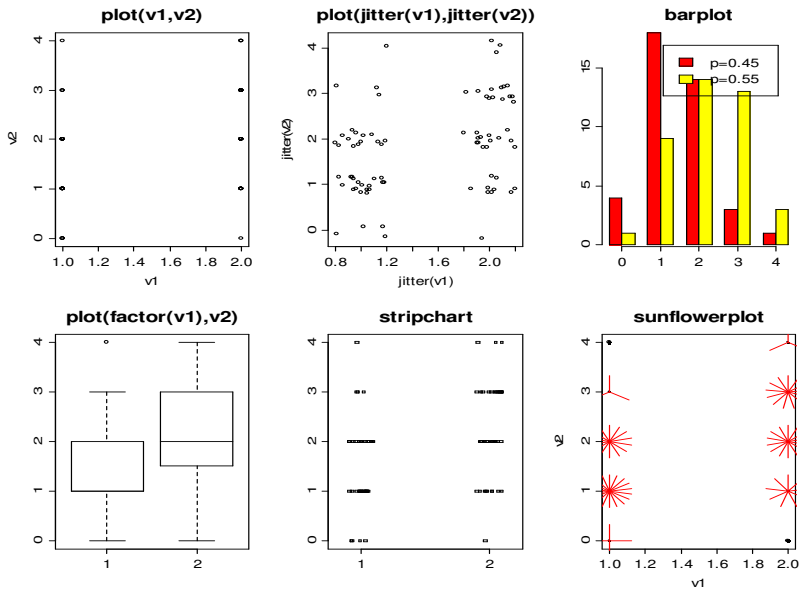
```
> r <- rpois(10,3)
> r
 [1] 3 3 4 4 1 2 2 2 2 4
> class(r)
[1] NULL
> rf <- factor(r) # Keičiame klasės požymį
> rf
 [1] 3 3 4 4 1 2 2 2 2 4
Levels:  1 2 3 4
> class(rf)
[1] "factor"
> rr <- as.numeric(rf) # Grįžtame atgal
> rr
 [1] 3 3 4 4 1 2 2 2 2 4
> class(rr)
NULL
```

Žemiau pateikiame funkciją `jitt`, kuri, kai skirtingų reikšmių "mažai", išbrėžia kelis grafikų variantus. Imtis `r1` yra sudaryta iš *n* atsitiktinių skaičių, kurių kiekvienas žymi sėkmių skaičių, atlikus keturis bandymus (sėkmės tikimybė lygi 0,45), o imtis *r*2 - iš *n* panašių skaičių (bet sėkmės tikimybė dabar kiek didesnė – 0,55). Grafikas `plot(v1,v2)` šį kartą mažai informatyvus, nes daug taškų (ir neaišku kiek) "sulimpa" į vieną. Tokiu atveju naudinga funkcija `jitter` (jitter (angl.) ≈ triukšmas) – ji kiekvieną tašką truputį pastumia į šoną (bet kiekvieną skirtingai), ir dabar aiškiau matyti, keli

taškai buvo sulipę į vieną. Atkreipkite dėmesį į tai, kad priklausomai nuo kintamojo klasės funkcija `plot` brėžia vis kitokį grafiką – R yra objektiškai orientuota programavimo kalba!

```
jitt <- function(n){
# funkcija jitt
v1 <- rep(1:2,c(n,n))
#n <- 4
#v1 <- rep(1:2,c(n,n))          v1 rodo imties numerį
#v1
#[1] 1 1 1 1 2 2 2 2
r1 <- rbinom(n,4,0.45)
r2 <- rbinom(n,4,0.55)
v2 <- c(r1,r2)
opar <- par(mfcol=c(2,3))
on.exit(par(opar))
plot(v1,v2,main="plot(v1,v2)")     # Grafikas visai neinformatyvus
plot(factor(v1),v2,                # Žymiai geriau,sutampa su boxplot
main="plot(factor(v1),v2)")
plot(jitter(v1),jitter(v2),main="plot(jitter(v1),jitter(v2))")
# Visi taškai "padrebinti"
stripchart(v2~v1,method="jitter",vertical=T,main="stripchart")
# Panašus grafikas
barplot(table(v1,v2),beside=T,legend=c("p=0.45","p=0.55"),
main="barplot")                    # Jei p=0,55 - daugiau didelių
                                   # reikšmių
sunflowerplot(v1,v2,               # Spindulių skaičius lygus taško
main="sunflowerplot")              # kartotinumui
cat("Mediana 1=",median(r1),", Mediana 2=",median(r2),"\n")
table(v1,v2)
}
```

```
> jitt(40)
Mediana 1= 1 , Mediana 2= 2
   v2
v1  0  1  2  3 4
  1 4 18 14  3 1
  2 1  9 14 13 3
```




5.2 pav. Šeši būdai sveikaskaičiams matavimams vaizduoti

**5.3 UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite žemiau pateiktą tekstą:

```
data(airquality); attach(airquality)
```

```
table(cut(Temp,quantile(Temp)),Month)
#simple two-way contingency table
plot(table(cut(Temp, quantile(Temp)), Month))
```

Pastarasis grafikas iliustruoja tai, kad karščiausia būna liepos mėnesį. Kaip dar galėtumėte pademonstruoti šį faktą?

5.4 **UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite šį tekstą:

```
data(Titanic)
ftable(Titanic, row.vars = 1:3)
ftable(Titanic, row.vars = 1:2, col.vars = "Survived")
ftable(Titanic, row.vars = 2:1, col.vars = "Survived")
```

5.5 **UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite šį tekstą:

```
data(UCBAdmissions)
x <- aperm(UCBAdmissions, c(2, 1, 3))
dimnames(x)[[2]] <- c("Yes", "No")
names(dimnames(x)) <- c("Sex", "Admit?", "Department")
ftable(x)

## Fourfold display of data aggregated over departments, with
## frequencies standardized to equate the margins for admission
## and sex.
fourfoldplot(margin.table(x, c(1, 2)))
```

## 5.2. Mišrus atvejis: vardiniai ir skaitiniai kintamieji

Ar diskriminuojamos Belgijoje moterys? Tiksliau kalbant, ar priklauso atlyginimo `wage` (tai skaitinis kintamasis) dydis nuo lyties `male` (tai vardinis kintamasis)? Iš principo, galėtume pasinaudoti tuo, ką jau žinome – kintamąjį `wage` galėtume skaidyti į grupes, o paskui tirti šių dviejų vardinių kintamųjų saveikos lentelę. Prisiminkime kaip tai daroma.

```
> attach(bwages)
> summary(wage)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  88.38  327.30  408.50  445.80  514.60 1919.00
```

Suskaidykime atlyginimą į keturias grupes pagal kiek padailintas kvartilių reikšmes (tai atlieka funkcija `cut`):

```
> wage
   [1]  313.85280  194.37800  426.13640  284.09090  318.18180  330.78950
   [7]  331.36360  418.66030  441.91920  290.90910  281.10050  299.87370
.....
> cut(wage,breaks=c(80,320,410,520,1920))
   [1] (80,320]      (80,320]      (410,520]      (80,320]      (80,320]
   [6] (320,410]     (320,410]     (410,520]      (410,520]     (80,320]
.....
```

Matome, kad pirmasis atlyginimas 313,85 priklauso intervalui (80,320] ir t.t.

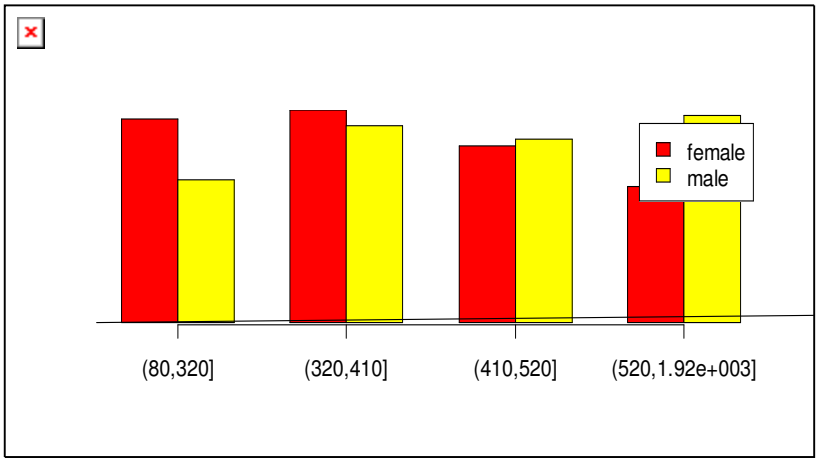
```
> table(cut(wage,breaks=c(80,320,410,520,1920)))

       (80,320]       (320,410]       (410,520] (520,1.92e+003]
            337             410             364             361
```

Kaip ir reikėjo tikėtis (kodėl?), kiekvienoje grupėje yra maždaug vienodas įrašų skaičius. Dabar patyrinėkime lyties ir atlyginimo sąveikos lentelę.

```
> mw <- table(male,cut(wage,breaks=c(80,320,410,520,1920)))
> mw
male (80,320] (320,410] (410,520] (520,1.92e+003]
   0      162       169       140             108
   1      175       241       224             253
> smmw <- simple.marginals(mw)
> smmw
       (80,320] (320,410] (410,520] (520,1.92e+003] Total
0           162       169       140             108   579
1           175       241       224             253   893
Total       337       410       364             361  1472
```

Iš tikrųjų, mums reikia kiek kitokios lentelės:

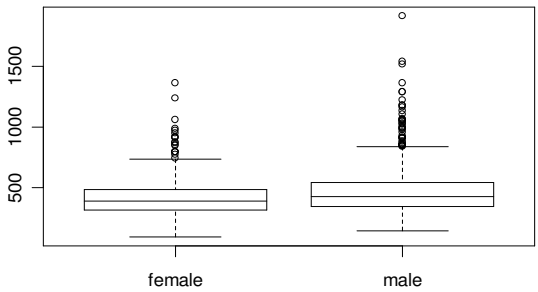
```
> (smmw/smmw[,"Total"])[-3,-5]
   (80,320] (320,410] (410,520] (520,1.92e+003]
0 0.2797927 0.2918826 0.2417962       0.1865285
1 0.1959686 0.2698768 0.2508399       0.2833147
> barplot((smmw/smmw[,"Total"])[-3,-5],beside=T,legend=c("female",
"male"))
```




5.3 pav. Grupuoto atlyginimo stulpelinės diagramos (atskirai moterims ir vyrams)

Matome, kad mažų atlyginimų grupėse moterų daugiau, o didelių – mažiau (diskriminacija!). Antra vertus, grupuodami duomenis, kiek sugrubinome tiriamą paveikslą. Nesunku panašų tyrimą atlikti ir su negrupuotais duomenomis.

```
> boxplot(wage[male==0],wage[male==1],names=c("female","male"))
```




5.4 pav. Atlyginimo stačiakampės diagramos (atskirai moterims ir vyrams)

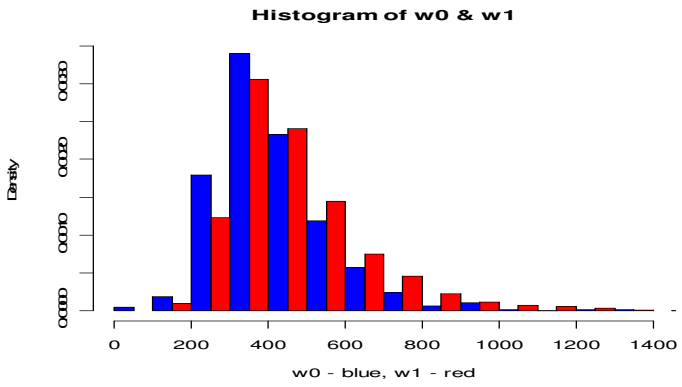
Štai skaitinis šio grafiko ekvivalentas:

```
> tapply(wage,male,summary)      # Funkcijos tapply reikšmė yra sąrašas
                                 # su dviem komponentėm, kurių vardai
                                 # "0" ir "1"

$"0"                             # Moterys, t.y. male==0
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  88.38  314.30  383.50  413.90  483.00 1364.00

$"1"                             # Vyrai, t.y. male==1
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  139.9   340.9   422.8   466.4   539.8  1919.0
```

Grafike matome, kad abiejose grupėse atlyginimų skirstiniai nesimetriški ir turi daug išskirčių. Taip pat matome, kad vyrų atlyginimų ir mediana ir visi kvantiliai didesni nei moterų (norint išsiaiškinti, ar šis skirtumas nėra dėl imties atsitiktinumo, reikia pakentėti iki 10.2 užduoties).

R yra *open source* produktas, t.y., kiekvienas gali parašyti savo funkcijas ir papildyti jomis esamas bibliotekas. H.Bengtsson'as yra parašęs funkciją `plot.histogram`, leidžiančią išbrėžti dvi ar daugiau histogramas viename brėžinyje. Atsisiųskite šią funkciją iš http://www.maths.lth.se/matstat/staff/hb/mypackages/R/plot.histogram.R ir patalpinkite ją bet kur, pvz. C:\spec direktorijoje. RGui aplinkoje surinkite File| Source R code; po lentelėje Select file to source nuvairuokite į C:\spec\plot.histogram.R ir spragtelėkite ant šio failo: dabar base paketo funkcija `plot.histogram` yra pakeista Bengtsson'o funkcija `plot.histogram` (ji skiriasi nuo senosios tuo, kad yra įvesti du papildomi argumentai – stulpelio plotis `width` ir postūmis `offset`). Brėždama histogramą, funkcija `hist` kreipsis į naująją funkciją `plot.histogram`:

```
attach(bwages)
w0 <- wage[male==0]
w1 <- wage[male==1]
hist(w0, width=0.5, offset=0.0, col="blue", breaks=15,
main="Histogram of w0 & w1", xlab="w0 - blue, w1 - red",prob=T)
hist(w1, width=0.5, offset=0.5, col="red", breaks=15, add=TRUE,prob=T)
```

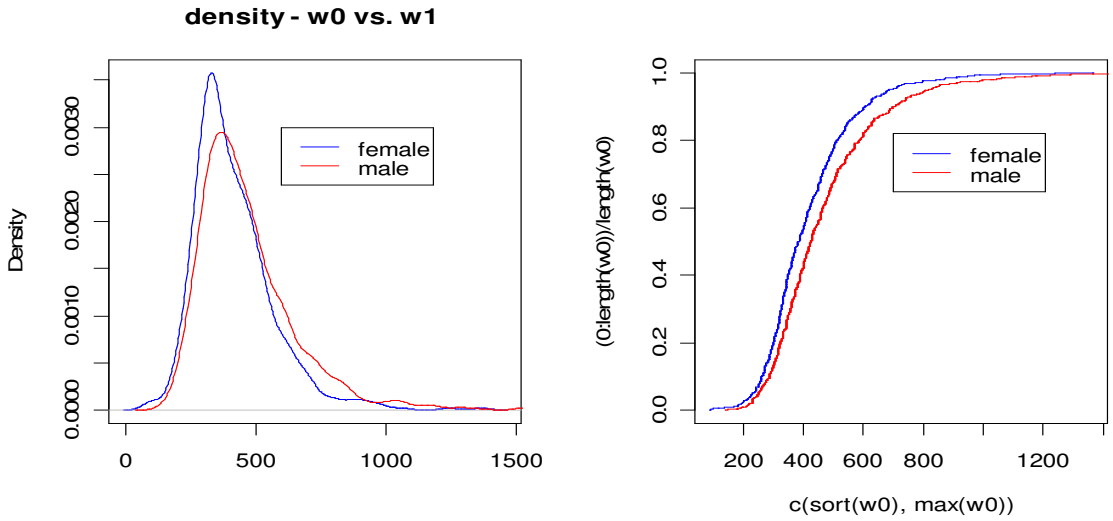



5.5 pav. Moterų ir vyrų atlyginimo histogramos (papildykite šį grafiką legenda)

Vėl matome, kad tarp daug uždirbančių daugumą sudaro vyrai. O štai dar du vyrų ir moterų atlyginimų palyginimo variantai: a) pagrįstas tankio funkcija `density` (žr. 5.6 pav., kairė) ir b) pagrįstas skirtumais tarp empirinių skirstinio funkcijų (žr. 5.6 pav., dešinė)

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(density(w0),main="density - w0 vs. w1 ",xlab="",col=4)
lines(density(w1),col=2)
legend(600,.003,c("female","male"),lty=1,col = c(4,2))
# legend("topright",c("female","male"),lty=1,col=c(4,2)) #variantas
plot(c(sort(w0),max(w0)),(0:length(w0))/length(w0),type="S",col=4)
lines(c(sort(w1),max(w1)),(0:length(w1))/length(w1),type="S",col=2)
legend(700,.82,c("female","male"),lty=1,col = c(4,2))
```

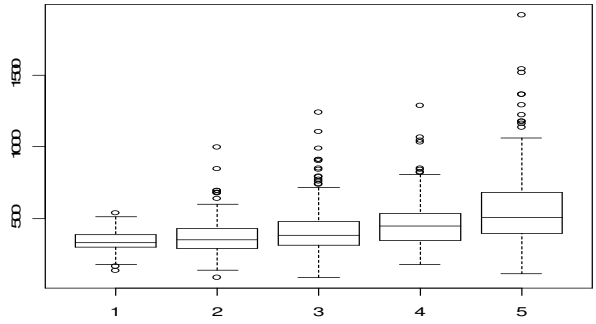
Nagrinėdami empirines skirstinio funkcijas (žr. dešinįjį 5.6 pav. grafiką) matome, kad raudonoji kreivė yra visur žemiau, kas dar kartą įrodo, kad vyrų atlyginimai yra didesni (kodėl?).




5.6 pav. Vyrų ir moterų atlyginimų empiriniai tankiai (kairėje) ir empirinės skirstinio funkcijos (dešinėje; papildykite šį grafiką vardu ir pakeiskite ašių vardus informatyvesniais)

Dar ištirkime atlyginimo `wage` priklausomybę nuo išsilavinimo `educ`.

```
> boxplot(wage[educ==1],wage[educ==2],wage[educ==3],wage[educ==4],
  wage[educ ==5],names=c("1","2","3","4","5"))
```



5.7 pav. Išsilavinimui didėjant, atlyginimas taip pat didėja

Tekstas `boxplot` komandos skliaustuose yra gana ilgas, tačiau jį galima sutrumpinti:

```
1) boxplot(split(wage,educ),names=c("1","2","3","4","5"))
2) boxplot(wage~educ,names=c("1","2","3","4","5"))
3) with(bwages,boxplot(wage~educ)) # ?with
```

arba tiesiog

```
plot(educ,wage)      # plot yra bendrinė funkcija; jei educ yra
                     # faktorius, plot elgiasi kaip boxplot
```

Užrašas `wage~educ` yra pirmasis formulės pavyzdys (jas dažnai naudosime vėliau regresiniuose modeliuose), o funkciją `split` panagrinėkite patys. Trumpam dar sustokime prie skaitinio paskutiniosios procedūros varianto ir prisiminkime, ką žinome apie sąrašus.

```
> wes <- tapply(wage,educ,summary)[1]
> wes
$"1"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  136.4   300.5   331.4   340.0   388.8   539.8

$"2"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  88.38  293.30  353.00  371.70  429.60  997.80

$"3"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  90.91  314.40  384.60  411.60  478.80 1240.00

$"4"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  181.8   351.1   448.6   461.1   533.7  1288.0

$"5"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  113.6   397.3   507.7   563.2   679.9  1919.0
```

`wes` yra sąrašas:

```
> mode(wes)
[1] "list"
```

Jo pirmąją komponentę pasiekti galime su komanda

```
> wes[["1"]]       # Pagal komponentės vardą
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
```

[1] Jei dar norėtume apskaičiuoti panašias charakteristikas sutrumpintam rinkiniui `Bwages` (žr. 6-3 psl.), tai reiktų elgtis taip:

```
detach(bwages)
attach(Bwages)
tapply(wage,educ,summary)
```

Beje, tai galima pastebimai sutrumpinti:

```
with(Bwages, {tapply(wage, educ, summary)})
```

```
  136.4   300.5   331.4   340.0   388.8   539.8
```

arba

```
> wes$"1"          # Pagal komponentės vardą ($ yra [[…]] sinonimas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  136.4   300.5   331.4   340.0   388.8   539.8
```

arba

```
> wes[[1]]         # Pagal komponentės numerį
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  136.4   300.5   331.4   340.0   388.8   539.8
```

Komponentė yra skaitinis vektorius su vardais:

```
> mode(wes$"1")
[1] "numeric"
> names(wes$"1")
[1] "Min."    "1st Qu." "Median"  "Mean"    "3rd Qu." "Max."
```

Antra vertus,

```
> wes[1]
$"1"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  136.4   300.5   331.4   340.0   388.8   539.8
```

yra sąrašas:

```
> mode(wes[1])
[1] "list"
> names(wes[1])
[1] "1"
```

Neužmirškime – R yra programavimo kalba!

**5.6 UŽDUOTIS**. Ištirkite ir palyginkite `davis` duomenų rinkinyje moterų ir vyrų (tikrąjį) svorį `weight` (po to – ūgį `height`). Koks ryšys tarp tikrojo ir praneštojo (reported) ūgio (po to – svorio). Autoriaus hipotezė: ūgį praneša didesnį negu tikrasis, o svorį - mažesnį.

## 5.3. Skaitiniai kintamieji

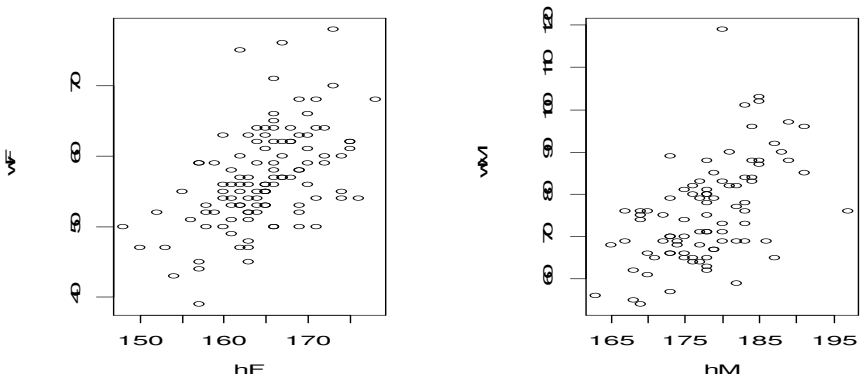
Vienas dažnai sutinkamų uždavinių yra dviejų skaitinių kintamųjų, prognozinio (arba prediktoriaus arba regresoriaus, arba nepriklausomo) kintamojo $x$ ir (modelio) atsako (arba priklausomo kintamojo) $y$, sąveikos tyrimas. Tokie modeliai vadinami regresiniais, o dažniausiai nagrinėjami keli klausimai: 1) kaip, žinant $x$ reikšme, prognozuoti $y$ reikšmę? 2) kaip palyginti du (ar kelis) modelius (Jei turime du Belgiją aprašančius modelius, kuris iš jų "teisingesnis"? Jei Belgijos ir Lietuvos modeliai nedaug skiriasi, tai gal tik dėl imčių atsitiktinumo?) ir t.t.

Tirkime du skaitinius kintamuosius `weight` ir `height` iš duomenų rinkinio `davis`.

```
attach(davis)
hF <- height[sex=="F"]
hM <- height[sex=="M"]
wF <- weight[sex=="F"]
wM <- weight[sex=="M"]
par(mfrow=c(1,2))
plot(hF,wF)
plot(hM,wM)
```

Variantas:

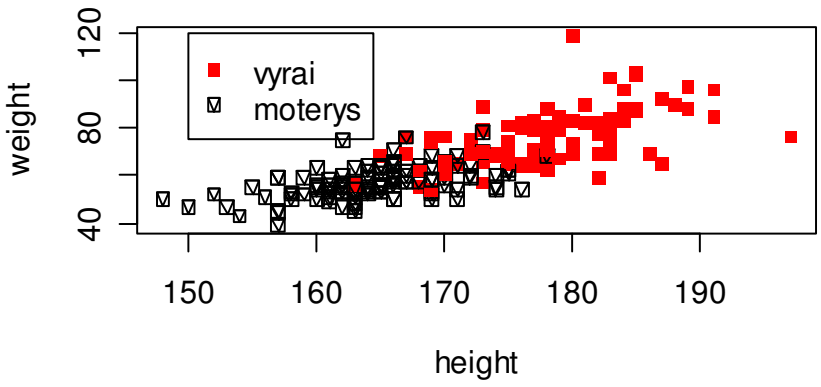
```
par(mfrow=c(1,2))
plot(weight~height, data = davis, subset=sex=="F",main="Females")
plot(weight~height, data = davis, subset=sex=="M",main="Males")
```




5.8 pav. Šiuose paveiksluose *x* yra ūgis (prediktorius),
o *y* – svoris (atsakas) (kairėje - moterys, dešinėje - vyrai)

Atkreipsime dėmesį, kad *x* ir *y* ašys abiejuose grafikuose skiriasi – vyrai apskritai yra aukštesni ir sunkesni. Tai bus lengviau pastebėti, jei abu grafikus išbrėšime viename paveiksle.

```
plot(height,weight,pch=14+sex,col=sex+1)
legend(150,120,c("vyrai","moterys"),pch=14+sex,col=sex+1)
# plg. 6.9 ir 6.10 pav.
```




5.9 pav. Moterų ir vyrų svorio ir ūgio sklaidos diagrama

Matome, kad didėjant ūgiui svoris apskritai didėja. Kaip šią tendeniją, kurią akis lengvai pagauna, išreikšti matematiškai? Kadangi svoris nuo ūgio priklauso tiesiškai, būtų protinga per abiejų 5.8 pav. grafikų taškų debesėlių "vidurį" išbrėžti tiesę, kuri viena ar kita prasme būtų "arčiausiai" visų taškų. Vienas iš galimų tiesės parinkimo principų yra mažiausių kvadratų metodas. Tarkime, kad kiekvienas atsako matavimo rezultatas $y_i$ nuo prediktoriaus $x_i$ priklauso taip (tai vadinamasis tiesinės regresijos modelis):

$$y_i = a + bx_i + e_i,\ i = 1,2,...,n;$$

kitais žodžiais, $y$ ir $x$ priklausomybė tiesinė, bet ją kiek gadina atsitiktinės paklaidos $e_i$. Tiesės koeficientus $a$ ir $b$ tikslinga parinkti taip, kad paklaidų kvadratų suma (dažnai žymima $RSS(a,b)$ (nuo Residual Sum of Squares)) būtų minimali (tai vadinamasis mažiausių kvadratų metodas):

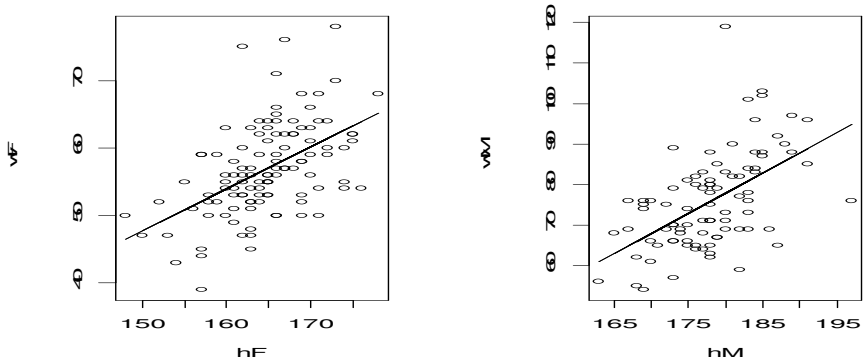
$$RSS = \min_{a,b} RSS(a,b) = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$$

Norint rasti šį minimumą, dalines $RSS(a,b)$ išvestines pagal $a$ ir $b$ reiktų prilyginti 0 ir išspręsti gautąją dviejų tiesinių lygčių sistemą. R pakete šią procedūrą atlieka funkcija `lm` (lm=Linear Model (angl. tiesinis modelis)), joje modelį nusakanti formulė $y_i = a + bx_i + e_i$ užrašoma taip: `y~x` (galima rašyti ir `y~1+x`, bet nėra reikalo: laisvasis narys įtraukiamas automatiškai). Funkcija `lm` randa $a$ ir $b$ įverčius $\hat{a}$ ir $\hat{b}$, ji taip pat apskaičiuoja prognozuojamas y reikšmes $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i,\ i = 1,...,n$ ir dar daug ką.

Patikslinkime savo ankstesnę procedūrą:

```
> par(mfrow=c(1,2))
> Fhw1 <- lm(wF~hF)                  # Sudarome tiesinį modelį moterims
> Fhw1

Call:
lm(formula = wF ~ hF)

Coefficients:
(Intercept)           hF
   -45.6730       0.6227  # Tiesės koeficientų įverčiai â ir b̂
                          # Kitaip sakant, moterų svoris nuo ūgio
                          # priklauso taip: weight = −45,67 + 0,623 · height
> plot(hF,wF)
> lines(hF,Fhw1$fit)       # Fhw1$fit yra vektorius (ŷ_1,...,ŷ_n)

> Mhw1 <- lm(wM~hM)           # Sudarome tiesinį modelį vyrams
> Mhw1

Call:
lm(formula = wM ~ hM)

Coefficients:
(Intercept)           hM
  -101.3301       0.9956     # Vyrų regresijos tiesės lygtis yra
                             # weight = −101,33 + 0,996 · height
> plot(hM,wM)
> lines(hM,Mhw1$fit)        # Sinonimas: abline(Mhw1) - bendrinė
```

```
# funkcija abline pati pasiima reikalingus
# koeficientus iš sąrašo Mhw1
```




5.10 pav. Sklaidos diagramos kartu su regresijos tiesėmis

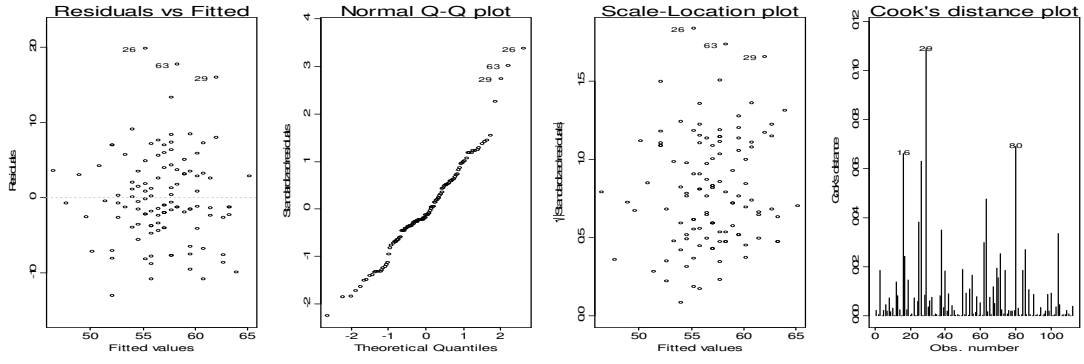
Remdamiesi šiuo tyrimu, galėtume pasiūlyti formules "optimaliam" svoriui apskaičiuoti: tarkime, 170 cm ūgio moteris turėtų sverti 170*0.623-45.67=60.24 kg. Vyrų svorio formulę trumpai galėtume suformuluoti taip: svoris lygus ūgiui – 100, kitaip sakant 170 cm ūgio vyras turėtų sverti 70 kg.

Mažiausių kvadratų metodas turi daug gerų savybių, tačiau norint, kad jos galiotų, reikia tam tikrų sąlygų. Jos formuluojamos paklaidų terminais:

- paklaidų dispersijos turi nepriklausyti nuo $i$: $\sigma_i^2 \equiv \sigma^2$
- paklaidos privalo turėti normalųjį skirstinį

Norėdami patikrinti šiuos du teiginius, surinkime

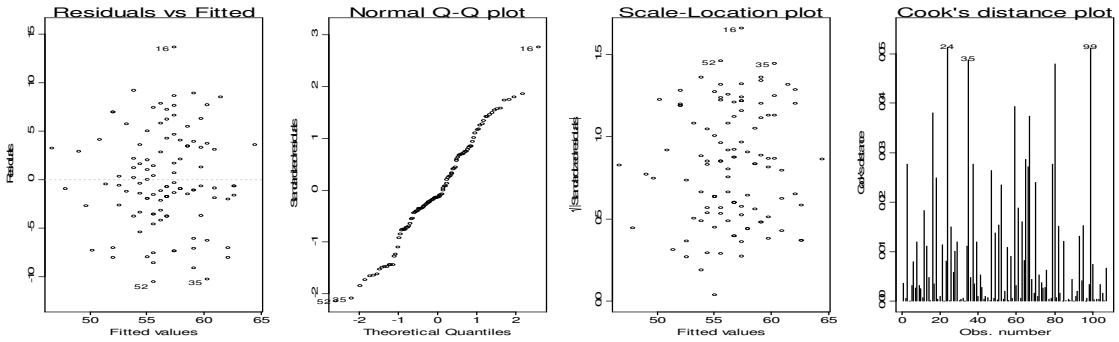
```
par(mfrow=c(1,4))
plot(Fhw1)
```




5.11 pav. Tiesinio regresinio modelio `Fhw1` diagnostiniai grafikai

Kiekviename grafike nurodyta po tris taškus, kurie, vadovaujantis vienu ar kitu principu (žr. [Fo, 268-277 p.], [ČM1, 47 p.], [Fa, 65-73 p.] arba Grubbs'o kriterijų http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/ (žr. taip pat 9.4 užduotį)) turėtų būti pripažinti išskirtimis. Tai įrašai 16, 26, 29, 63 ir 80. Pašalinkime juos iš `hF` ir `wF`:

```
hFn <- hF[-c(16,26,29,63,80)]
wFn <- wF[-c(16,26,29,63,80)]
hFn <- hF[-c(16,26,29,63,80)]
wFn <- wF[-c(16,26,29,63,80)]
Fhw1n <- lm(wFn~hFn)
plot(Fhw1n)
```




5.12 pav. Tiesinio regresinio modelio `Fhw1n` diagnostiniai grafikai

Dabar turime tik vieną ryškesnę išskirtį – tai įrašas 16 (pagal naują numeraciją) – tačiau tai priimtina (pabandykite ją pašalinti savarankiškai). Pirmas iš kairės grafikas rodo, kad visos modelio paklaidos $e_i$ daugmaž homogeniškai telpa juostoje nuo –10 iki +10, taigi visos dispersijos $\sigma_i$ beveik lygios. Antras iš kairės grafikas rodo, kad paklaidos beveik normalios (galite dar patikrinti su su `eda.shape(Fhw1n$res))`. Kadangi

```
> Fhw1n$coef
(Intercept)         hFn
-40.3916370   0.5888778
```

tai pagal naują formulę 170 cm ūgio moteris turėtų sverti truputį mažiau: 170*0,589-40,39= 59,74 kg.

Įspūdingas tiesinės regresijos pavyzdys yra pateiktas [Ve, p.28]. Ten taip pat aptartos atspariosios regresijos funkcijos `rlm` ir `lqs` (jos mažiau jautrios išskirtims).

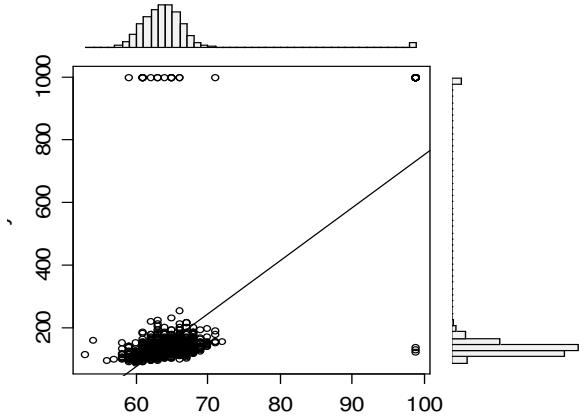
**5.7 UŽDUOTIS**. Pati užduotis – kiek vėliau, o dabar pakartosime ūgio ir svorio analizę su kitais duomenimis. Kompaktiniame diske R1 (Žr. Data\StatLab\Data) yra gana didelis (1236 įrašai) duomenų rinkinys babies_data.htm, kuriame be kitų kintamųjų yra pateikti duomenys apie moterų ūgį ir svorį. Nukopijuokime šiuos duomenis į R darbinę direktoriją ir nusiskaitykime su

```
> StatLabs <- read.table("babies_data.txt",header=T)
> StatLabs
   bwt gestation parity age height weight smoke
1  120       284      0  27     62    100     0
2  113       282      0  33     64    135     0
3  128       279      0  28     64    115     1
4  123       999      0  36     69    190     0
5  108       282      0  23     67    125     1
6  136       286      0  25     62     93     0
7  138       244      0  33     62    178     0
8  132       245      0  23     65    140     0
9  120       289      0  25     62    125     0
```

```
10 143       299      0  30     66    136     1
.....................................................................
```

Pakete Simple yra funkcija `simple.scatterplot` – prisijunkime ją su `library(Simple)`

```
attach(StatLabs)
simple.scatterplot(height,weight) # Brėžia sklaidos diagramą ir abiejų
                                  # kintamųjų histogramas
```




5.13 pav. *x* ašis – `height`, *y* ašis - `weight`

Aiškiai matome abiejų dydžių išskirtis. Pabandykime apžiūrėti `StatLabs` didžiausių reikšmių srityje. Bet pirmiau keli žodžiai

***Apie rūšiavimą.*** Ilgų skaitinių vektorių perrašymas didėjimo tvarka yra gana daug laiko reikalaujanti procedūra (žr. `?sort`). Štai keli paprastesni pavyzdžiai.

```
> set.seed(5)
> x1 <- rbinom(10,20,.4)
> x1
 [1]  7  9  6 10  8  5  7 11  4 13
```

Perrašyti šį vektorių didėjimo tvarka galima su `sort`:

```
> sort(x1)
 [1]  4  5  6  7  7  8  9 10 11 13
```

arba su `order` ir `[…]` kombinacija:

```
> order(x1)
 [1]  9  6  3  1  7  5  2  4  8 10
```

(mažiausias `x1` elementas yra 9-asis, po eina 6-asis ir t.t.)

```
> x1[order(x1)]
 [1]  4  5  6  7  7  8  9 10 11 13
```

Kartais matricą ar duomenų sistemą reikia surūšiuoti, tarkime, pirmojo stulpelio didėjimo tvarka.

```
> x2 <- rbinom(10,20,.4)
> x3 <- rbinom(10,20,.4)
```

```
> xx <- data.frame(x1,x2,x3)
> xx[order(x1),]
   x1 x2 x3
9   4 14  6
6   5 11  9
3   6  6  7
1   7 11  5
7   7  8  8
5   8  7  3
2   9  6  8
4  10  7 12
8  11 10  8
10 13  6  9
```

Šios matricos pirmajame stulpelyje yra du 7-tukai, tačiau kodėl pirmiau eina eilutė 7 11 5, o ne 7 8 8 – sunku pasakyti. Reikalui ęsant, išrišti lygius elementus galima, pavyzdžiui, pagal antrojo stulpelio reikšmes:

```
> xx[order(x1,x2),]
   x1 x2 x3
9   4 14  6
6   5 11  9
3   6  6  7
7   7  8  8
1   7 11  5
5   8  7  3
2   9  6  8
4  10  7 12
8  11 10  8
10 13  6  9
```

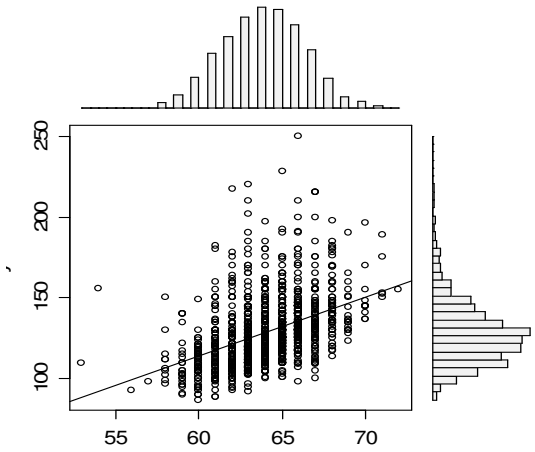
Grįžkime prie `StatLabs` duomenų rinkinio.

```
> oo <- order(height,weight)# Jei a yra vektorius, tai a[order(a)] yra
                            # a, perrašytas didėjimo tvarka
> SL <- StatLabs[oo,]       # SL yra StatLabs, perrašytas height didė-
                            # jimo tvarka; kai height vienodi, įrašus
                            # išdėsto weight didėjimo tvarka

> SL[1210:1236,]
     bwt gestation parity age height weight smoke
718  144       287      1  33     71    153     1
148  160       300      0  29     71    175     1
288  148       279      0  27     71    189     0
86   129       274      0  29     71    999     1
176  122       278      0  31     72    155     1
1216 152       267      0  28     99    119     1
848  134       278      0  28     99    126     1
361  107       278      1  27     99    135     0
43   138       302      0  26     99    999     1
153  127       336      0  29     99    999     0
155  129       999      0  23     99    999     1
186  131       286      0  34     99    999     1
231  111       284      0  22     99    999     1
338  131       283      0  31     99    999     0
```

Atrodo, kad skaičiai 99 ir 999 skirti kažkokiam kodavimui. Iš tikrųjų, www.stat.berkeley.edu/users/statlabs/labs.html skyrelyje Birth weight II randame, kad jie žymi tą faktą, kad šios moters ūgis ar, atitinkamai, svoris nežinomas. Pašalinkime šios įrašus. Tam reiktų prisiminti, kad `height==99` (skaitome: `height` lygus 99) žymi loginį vektorių, kurio ilgis 1236 ir kurio beveik visos komponentės lygios `FALSE` (iš-

skyrus atitinkančias `height==99` – šios lygios `TRUE`). `height!=99` (skaitome: `height` nelygus 99) yra loginis vektorius, kuriame, lyginant su ankstesniuoju, `TRUE` ir `FALSE` sukeista vietomis. Loginiame vektoriuje `height!=99&weight!=999` reikšmė `TRUE` yra ten, kur `height` nelygus 99 ir kartu `weight` nelygus 999 (atkreipiame dėmesį: loginis "arba" žymimas simboliu |).

```
> SL <- StatLabs[height!=99&weight!=999,] # Paliekame tik eilutes,
                                          # atitinkančias TRUE
> simple.scatterplot(SL$height,SL$weight)
```




5.14 pav. Ūgio ir svorio sklaidos diagrama su abiejų kintamųjų histogramomis

Savarankiškai įsitikinkite (pvz., su `eda.shape`), kad *x* koordinatė (t.y., `height`) turi beveik normalųjį skirstinį, tuo tarpu `weight` – tikrai ne. Pastarąjį faktą galima paaiškinti bent dviem priežastimis: 1) nesveiku gyvenimo būdu ir 2) svoris proporcingas tūriui, o pastarasis – ūgio kubui (normaliojo a.d. kubas nėra normalusis).

Dabar pati UŽDUOTIS. Atlikite panašią analizę su vyrų ūgiu ir svoriu. Duomenis ir jų aprašymą rasite R1 disko failuose babies23_data.htm ir All_BABIES.doc.

**5.8 UŽDUOTIS**. Kodėl šie du grafikai skiriasi?

```
par(mfrow=c(1,2))
x <- runif(50,-15,20)
y <- -x^2+rnorm(50,sd=2.5)
plot(x,y,t="l")
oo <- order(x)
plot(x[oo],y[oo],type="l")
```

**5.9 UŽDUOTIS.** `df` yra duomenų sistema, turinti 4 stulpelius: `df <- data.frame(x1,x2,x3,x4)`. Perrašykime šią sistemą `x2` didėjimo tvarka. Štai du variantai.

1) `df[sort.list(df$x2),]`
2) `df.di <- df[order(df$x2),]` `# Rūšiuojame didėjimo tvarka`
   `df.ma <- df[rev(order(df$x2)),]` `# Rūšiuojame mažėjimo tvarka`

Susiraskite ir išrūšiuokite realų pavyzdį iš `data()`.

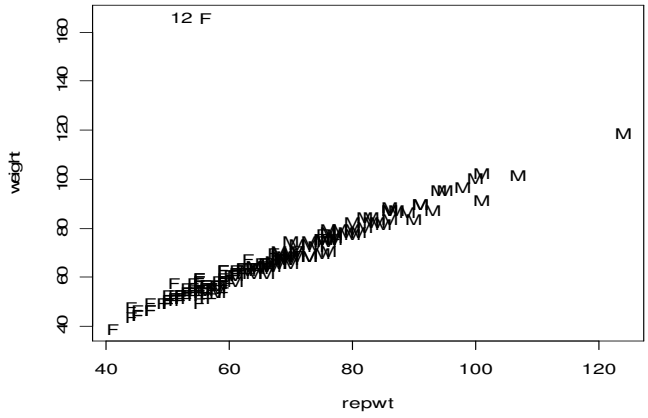
**5.10 UŽDUOTIS**. Kaip matėme 5.1 paveiksle, tinkamai parinkti legendos vietą ir formą ne visuomet paprasta. Žemiau pateiktas pavyzdys pateikia vieną šios problemos sprendimų (žr. `?par` – ši funkcija turi daugybę opcijų).

```
## increase size of the bottom-border:
par(mar= c(6, 4, 4, 2) + .1)
## Set xpd=TRUE, so all plotting is clipped to the figure
## (not the plot) region:
par(xpd=TRUE)
## Your barplot:
bp <- barplot(1:3)
## Text for the legend:
legend.text <- c("cats", "dogs", "cows")
## And plot the legend below the existing plot -- centering it
legend(mean(range(bp)), -0.3, legend.text, xjust = 0.5,
       fill=heat.colors(length(legend.text)), horiz = TRUE)
```

Pagal šį pavyzdį, pertvarkykite 5.1 paveikslą.

**5.11 UŽDUOTIS**. Pateikiame dar vieną išskirčių paieškos variantą. Su Copy ir Paste perkelkite į R žemiau pateiktas komandas (iki `identify` eilutės imtinai), spragtelėkite kairįjį pelės klavišą greta išsiskiriančio `F` taško (pasirodys jo įrašo numeris `12`; taškų identifikavimo procedūrą galima tęsti, bet jei ją nusprendėte baigti, paspauskite pelės dešinį klavišą).

```
library(car)
data(Davis)
attach(Davis)
names(Davis)
#[1] "sex"    "weight" "height" "repwt"  "repht"
rm(sex,weight,height,repwt,repht) # Dėl viso pikto
plot(repwt,weight,pch=as.character(sex))
identify(repwt,weight)
#warning: no point with 0.25 inches
#[1] 12
```




5.15 pav. Praneštojo ir tikrojo svorio sklaidos diagrama

```
> Davis[11:13,]      # Pasidairykime Davis 12 eilutės aplinkoje
   sex weight height repwt repht
11   M     70    175    75   174
12   F    166     57    56   163
13   F     51    161    52   158
```

Atlikite panašią analizę su car paketo `Duncan` duomenų rinkiniu. Panagrinėkite `income` ir `prestige` sklaidos diagramą. Identifikuokite kelis išsiskiriančius taškus su

```
> identify(income,prestige,label=rownames(Duncan))
```

**5.12 UŽDUOTIS**. Pratęsime požymių sąveikos lentelės nagrinėjimą. Išsiaiškinkite žemiau pateiktą pavyzdį.

```
data(warpbreaks)
tab <- xtabs(breaks ~ wool + tension, data = warpbreaks)

> tab
    tension
wool   L   M   H
   A 401 216 221
   B 254 259 169
> tab/sum(tab)
    tension
wool         L         M         H
   A 0.2638158 0.1421053 0.1453947
   B 0.1671053 0.1703947 0.1111842
# N/RowTotal
> tab/apply(tab, 1, sum)
tension
wool         L         M         H
   A 0.4785203 0.2577566 0.2637232
   B 0.3724340 0.3797654 0.2478006
# both N/ColTotal
> sweep(tab, 2, apply(tab, 2, sum), "/")
> tab/(rep(1, 2) %o% apply(tab, 2, sum))
    tension
wool         L         M         H
   A 0.6122137 0.4547368 0.5666667
   B 0.3877863 0.5452632 0.4333333
```

**5.13 UŽDUOTIS.** Štai `warpbreaks` duomenų rinkinio analizės tęsinys.

```
data(warpbreaks)
opar <- par(mfrow = c(1,2), oma = c(0, 0, 1.1, 0))
plot(breaks ~ tension, data = warpbreaks, col = "lightgray",
      varwidth = TRUE, subset = wool == "A", main = "Wool A")
plot(breaks ~ tension, data = warpbreaks, col = "lightgray",
      varwidth = TRUE, subset = wool == "B", main = "Wool B")
mtext("warpbreaks data", side = 3, outer = TRUE)
par(opar)
```

Išsiaiškinkite kiekvienos eilutės prasmę. Kokias išvadas galite padaryti iš gautų grafikų?

Štai kelios užduotys iš [Ve].

**5.14 UŽDUOTIS**. A student evaluation of a teacher is on a 1-5 Leichert scale. Suppose the answers to the first 3 questions are given in this table:

```
Student Ques. 1 Ques. 2 Ques. 3
      1       3       5       1
      2       3       2       3
      3       3       5       1
      4       4       5       1
      5       3       2       1
      6       4       2       3
```

```
 7       3       5       1
 8       4       5       1
 9       3       4       1
10       4       2       1
```

Enter in the data for question 1 and 2 using c(), scan(), read.table or data.entry()

1. Make a table of the results of question 1 and question 2 separately.
2. Make a contingency table of questions 1 and 2.
3. Make a stacked barplot of questions 2 and 3.
4. Make a side-by-side barplot of all 3 questions.

**5.15 UŽDUOTIS**. In the library MASS is a dataset `UScereal` which contains information about popular breakfast cereals. Attach the data set as follows:

```
library(MASS)
data(UScereal)
attach(UScereal)
names(UScereal) # to see the names
```

Now, investigate the following relationships, and make comments on what you see. You can use tables, barplots, scatterplots etc. to do your investigation.

1. The relationship between manufacturer and shelf
2. The relationship between fat and vitamins
3. the relationship between fat and shelf
4. the relationship between carbohydrates and sugars
5. the relationship between fibre and manufacturer
6. the relationship between sodium and sugars

Are there other relationships you can predict and investigate?

**5.16 UŽDUOTIS**. The built-in data set `mammals` contains data on body weight versus brain weight. Use the `cor` to find the Pearson and Spearman correlation coefficients. Are they similar? Plot the data using the `plot` command and see if you expect them to be similar. You should be unsatisfied with this plot. Next, plot the logarithm (`log`) of each variable and see if that makes a difference.

**5.17 UŽDUOTIS**. For the data set on housing prices, `homedata` in UsingR package, investigate the relationship between `y1970` and `y2000` (use `y1970` as the predictor variable). Does the data suggest a linear relationship? Are there any outliers? Which lines contains outliers? What may have caused these outliers? What is the predicted new assessed value for a $75,000 house in 1970? Repeat the analysis with a shorter version of `homedata` taking every $10^{th}$ line of the original data set.

**5.18 UŽDUOTIS**. For the `orida` dataset of Bush vs. Buchanan, there is another obvious outlier that indicated Buchanan received fewer votes than expected. If you remove both the outliers, what is the predicted value for the number of votes Buchanan would get in Miami-Dade county based on the number of Bush votes?

**5.19 UŽDUOTIS**. For the data set `emissions` plot the `perCapita` GDP (gross domestic product) as a predictor for the response variable `CO2` emissions. Identify the outlier and find the regression lines with this point, and without this point.

**5.20 UŽDUOTIS**. Attach the data set `babies`:

```
library(simple)
data(babies)
attach(babies)
```

This data set contains much information about babies and their mothers for 1236 observations. Find the correlation coefficient (both Pearson and Spearman) between `age` and `weight`. Repeat for the relationship between `height` and `weight`. Make scatter plots of each pair and see if your answer makes sense.

**5.21 UŽDUOTIS**. Find a dataset that is a candidate for linear regression (you need two numeric variables, one a predictor and one a response.) Make a scatterplot with regression line using R.

**5.22 UŽDUOTIS**. The built-in data set `mtcars` contains information about cars from a 1974 Motor Trend issue. Load the data set (`data(mtcars)`) and try to answer the following:

1. What are the variable names? (Try `names`.)
2. what is the maximum `mpg`?
3. Which car has this?
4. What are the first 5 cars listed?
5. What horsepower (`hp`) does the "Valiant" have?
6. What are all the values for the Mercedes 450slc (Merc 450SLC)?
7. Make a scatterplot of cylinders (`cyl`) vs. miles per gallon (`mpg`). Fit a regression line. Is this a good candidate for linear regression?

**5.23 UŽDUOTIS**. Žemiau yra pateiktas vadinamasis Anskombės (Anscombe) kvartetas:

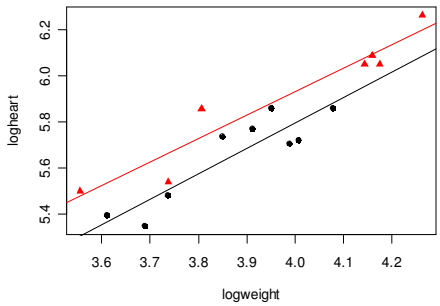
| x1 | y1 | x2 | y2 | x3 | y3 | x4 | y4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 8.04 | 10 | 9.14 | 10 | 7.46 | 8 | 6.58 |
| 8 | 6.95 | 8 | 8.14 | 8 | 6.77 | 8 | 5.76 |
| 13 | 7.58 | 13 | 8.74 | 13 | 12.74 | 8 | 7.71 |
| 9 | 8.81 | 9 | 8.77 | 9 | 7.11 | 8 | 8.84 |
| 11 | 8.33 | 11 | 9.26 | 11 | 7.81 | 8 | 8.47 |
| 14 | 9.96 | 14 | 8.10 | 14 | 8.84 | 8 | 7.04 |
| 6 | 7.24 | 6 | 6.13 | 6 | 6.08 | 8 | 5.25 |
| 4 | 4.26 | 4 | 3.10 | 4 | 5.39 | 8 | 5.56 |
| 12 | 10.84 | 12 | 9.13 | 12 | 8.15 | 8 | 7.91 |
| 7 | 4.82 | 7 | 7.26 | 7 | 6.42 | 8 | 6.89 |
| 5 | 5.68 | 5 | 4.74 | 5 | 5.73 | 19 | 12.50 |

Nežiūrint to, kad šios keturios poros pastebimai skiriasi (lengviausia tai pamatyti iš sklaidos diagramų; jas išdėstykite kaip 2x2 matricą), jų vienmatės ir dvimatės skaitinės charakteristikos sutampa. Negana to, sutampa jų regresijos tiesės ir visos tiesinių regresinių modelių `lin.i <- lm(yi~xi)` charakteristikos (pastarąjį faktą galima patikrinti su `summary(lin.i)`). Patikrinkite šiuos teiginius.

**5.24 UŽDUOTIS**. R konsolėje spragtelėkite File|Source R code…, nuvairuokite į kompaktinio disko R1 failą Data\Maindonald\dolphins.R ir spragtelėkite ant Open.

```
> source("E:/Data/Maindonald/dolphins.R")
> dolphins
   wt heart logweight logheart species
1  35   245  3.555348 5.501258    styx
2  42   255  3.737670 5.541264    styx
*****************
8  54   300  3.988984 5.703782   delph
9  59   350  4.077537 5.857933   delph
*****************
```

Pertvarkę (jei reikia) failą dolphins, išbrėžkite kintamųjų `logweight` (=x) ir `logheart` (=y) sklaidos diagramą. Skirtingas `species` grupes pavaizduokite skirtingais simboliais. Kiekvienai grupei išbrėžkite tiesinės regresijos tieses. Papildykite žemiau pateiktą paveikslą legenda ir antrašte.




5.16 pav. 5.23 užduoties iliustracija

***Nuoroda.*** Duomenų sistemą `dolphins` papildykite stulpeliu `spec` (naują sistemą pavadinkite `dolphins1`), sudarytu iš 1 (kai `styx`) ir 0 (kai `delph`). Gal būt, jums pravers tokia eilutė:

```
> abline(lm(logheart~logweight,subset(dolphins1,spec==1)),col=2)
```

**5.25 UŽDUOTIS.** Du skaitinius vektorius galima apjungti kaip į matricą, taip ir į duomenų sistemą:

```
x <- c(NA,1:5)
y <- c(6:10,NA)
xym <- cbind(x,y)        # Matricoje eilutės ir stulpeliai lygiateisiai
xyd <- data.frame(x,y)   # Duomenų sistema turi "natūralią" stulpelinę
> xym                    # struktūrą
     x   y
[1,] NA  6
[2,]  1  7
[3,]  2  8
[4,]  3  9
[5,]  4 10
[6,]  5 NA
> xyd
  x   y
1 NA  6
2  1  7
3  2  8
4  3  9
5  4 10
6  5 NA
```

Norint atrinkti šių objektų poaibius, nusakomus, tarkime, stulpelio `y` reikšmėmis, lengviau dirbti su duomenų sistemomis ir funkcija `subset`.

```
> subset(xyd,y>6)
  x  y
2 1  7
3 2  8
4 3  9
5 4 10
```

Dažnai reikia pašalinti eilutes, kuriose yra trūstamų duomenų.

```
> subset(xyd,y!="NA")
   x  y
1 NA  6
2  1  7
3  2  8
4  3  9
5  4 10
```

Pastarąjį rezultatą gautume ir su `na.omit` funkcija (ji patogesnė, nes pašalintų ir eilutes su blogais `x`'ais):

```
> na.omit(xyd)
  x  y
2 1  7
3 2  8
4 3  9
5 4 10
```

O dabar pati užduotis. MASS bibliotekoje yra duomenų rinkinys `Uscereal`. Aprašykite jį. Palikite jame tik eilutes, kuriose `vitamins` lygūs 100%. Atspausdinkite eilučių vardus tokiu pavidalu.

```
     [,1]
[1,] "Just Right Fruit & Nut"
[2,] "Product 19"
[3,] "Total Corn Flakes"
[4,] "Total Raisin Bran"
[5,] "Total Whole Grain"
```

**5.26 UŽDUOTIS.** Kompaktinio disko R1 direktorijoje Data\Misc yra failai ztemp.txt ir zdate.txt. Faile ztemp.txt yra pateikta Žuvinto ežero rajono pirmųjų 152 kiekvienerių metų (nuo 1966 iki 1977) dienų vidutinė paros oro temperatūra. Faile zdate.txt yra nurodyta pirmosios kuoduotosios anties pasirodymo Žuvinto ežere tais pačiais metais data (metų dienos numeris; kai kuriais metais duomenų trūksta).

a) Išbrėžkite visų metų temperatūrų grafikus
b) Ištirkite `zdate` duomenis.
c) Apskaičiuokite vidutinę 7 dienų prieš atskrendant šiam paukščiui temperatūrą (gali būti naudinga funkcija `is.na`)
d) Išbrėžkite šios temperatūros ir atskridimo datos sklaidos diagramą. Sudarykite atitinkamą tiesinį regresinį modelį. Ar turi temperatūra įtakos atskridimo datai?

**5.27 UŽDUOTIS**. Bibliotekoje MASS yra duomenų rinkinys `mammals`. Atlikite duomenų priešanalizę, identifikuokite išskirtis. Sudarykite du regresinius modelius 1) `brain~body` ir 2) `log(brain)~log(body)` . Kuris iš jų tinkamesnis?

# 6. Daugiamačiai duomenys: aprašomoji statistika ir duomenų priešanalizė

Dažnai tiriamas reiškinys yra aprašomas modeliu, kuriame yra daugiau kaip du kintamieji. Paprastai čia susiduriama su keliomis problemomis, kaip antai, patogus duomenų pateikimas, duomenų vizualizacija, tinkamas modelio parinkimas. Kai kurios iš problemų sprendžiamos kiek apibendrinant dvimatį atvejį, tačiau yra ir specifinių daugiamačių aspektų. Pradėkime nuo duomenų pateikimo.

## 6.1. Duomenų pertvarkos

Daugiamačius duomenis R pakete galima patalpinti įvairiais būdais. Tarkime, kad, analizuojant UAB Geronda darbą, buvo surinkti duomenys apie kiekvieną padalinį (iš viso jų trys). Buvo fiksuojamas kiekvieno darbuotojo amžius (skaitinis kintamasis) ir lytis (`v` ir `m` – tai faktorius). Štai dalis surinktų duomenų (patys sukurkite `pa1`[1]):

```
> pa1
  am ly
1 25  v
2 35  m
3 29  v
4 46  v
5 33  m

> pa2
  am ly
1 44  v
2 51  v
3 29  m

> pa3
  am ly
1 34  v
2 22  m
3 29  m
4 40  v
```

```
# pa1 yra duomenų sistema
> class(pa1)
[1] "data.frame"
# > class(pa1[,1])
# NULL
# > class(pa1[,2])
# [1] "factor"
```

Apjungti šiuos duomenis į vieną rinkinį `geronda` galima įvairiais būdais.

```
> geronda <- data.frame(pa1,pa2,pa3)  # Blogai
Error in data.frame(pa1, pa2, pa3) : arguments imply differing number
of rows: 5, 3, 4
> geronda <- list(pa1,pa2,pa3)        # Dabar gerai, bet dažniausiai
> geronda                             # mums reikia ne tokio pavidalo
```

[1] Pradėkite su

```
> am<-25
> pa1<-data.frame(am)
> pa1<-edit(pa1)
```

```
[[1]]
  am ly
1  1  v
2  4  m
3  2  v
4  5  v
5  3  m

[[2]]
  am ly
1 44  v
2 51  v
3 29  m

[[3]]
  am ly
1 34  v
2 22  m
3 29  m
4 40  v
```

Būtų patogiau, jei `geronda` atrodytų taip:

```
> geronda <- rbind(pa1,pa2,pa3)  # Apjungia tris duomenų sistemas
> geronda                        # (vieną po kita)
   am ly
1  25  v
2  35  m
3  29  v
4  46  v
5  33  m
6  44  v
7  51  v
8  29  m
9  34  v
10 22  m
11 29  m
12 40  v
```

Dar geriau būtų, jei `geronda` turėtų dar vieną stulpelį, kuriame būtų nurodytas padalinio numeris (tai faktorius su reikšmėmis 1, 2 ir 3).

```
> pa <- factor(c(1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,3,3)) # Surinkome rankomis
```

arba

```
> pa <- factor(rep(1:3,c(dim(pa1)[1],       # Jei duomenų daug, geriau
dim(pa2)[1],dim(pa3)[1])))                  # šitaip
> pa
 [1] 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 3
Levels:  1 2 3

> geronda.p <- data.frame(rbind(pa1,pa2,pa3),pa)
> geronda.p
   am ly pa
1  25  v  1
2  35  m  1
3  29  v  1
4  46  v  1
```

```
5  33  m  1
6  44  v  2
7  51  v  2
8  29  m  2
9  34  v  3
10 22  m  3
11 29  m  3
12 40  v  3
```

Dažnai duomenų sistema pateikiama dar kitokiu pavidalu, įvedant vadinamuosius *žymimuosius* (= dummy (angl.)) kintamuosius. Pvz., skaitinis kintamasis `p2` nurodo, kad šis įrašas priklauso 2-ajam padaliniui, jis apibrėžiamas taip:

```
> p1 <- ifelse(geronda.p[,3]==1,1,0)
> p2 <- ifelse(geronda.p[,3]==2,1,0) # Sukuriame kintamąjį p2 – vek-
> p3 <- ifelse(geronda.p[,3]==3,1,0) # torinės logikos pavyzdys
> geronda.d <- data.frame(geronda.p[,-3],p1,p2,p3)
> geronda.d
   am ly p1 p2 p3
1  25  v  1  0  0
2  35  m  1  0  0
3  29  v  1  0  0
4  46  v  1  0  0
5  33  m  1  0  0
6  44  v  0  1  0
7  51  v  0  1  0
8  29  m  0  1  0
9  34  v  0  0  1
10 22  m  0  0  1
11 29  m  0  0  1
12 40  v  0  0  1
```

Daugiau duomenų pertvarkymo pavyzdžių galima rasti [Ba, Skyriuje Reading and transforming data] arba [My, Exercise 2]). Pateiksime dar vieną pavyzdį. Failas `bwages` yra didelis ir su juo ne visuomet patogu dirbti. Imdami tik kas dešimtą `bwages` eilutę ir išmesdami visus logaritmų stulpelius, sukurkime mažesnį jo variantą `Bwages`:

```
> Bwages <- data.frame(bwages[seq(1,1472,10),c(1,3,4,7)],row.names =
  as.character(1:148))
> Bwages
         wage educ exper male
1    313.8528    1    23    1
2    281.1005    1    39    0
3    354.6364    1    20    1
.....................................................
146  555.5555    5    33    0
147  396.1039    5     5    0
148  631.3131    5    15    0
```

**6.1 UŽDUOTIS**. "Ilgoje" duomenų sistemoje `df.orig`

```
A111    1000
A111    1100
A111    1200
B123    2000
B123    2100
B123    2200
```

kiekvienas “asmuo” (A111, B123 ir t.t.) kartojasi tris kartus. Šią sistemą reikia transformuoti į “plačią” duomenų sistemą `df.fin`

```
A111    1000    1100    1200
B123    2000    2100    2200
```

Štai vienas tokios operacijos variantas:

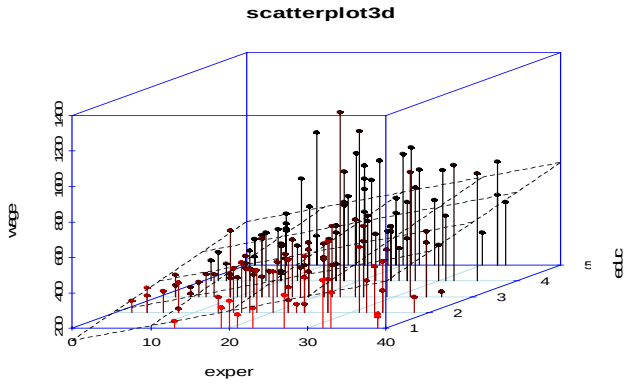
```
df.orig <- read.table("df_orig.txt")
N <- nrow(df.orig)
id <- df.orig[seq(1,N,by=3),1]
dat <- matrix(df.orig[,2], ncol=3, byrow=T)
df.fin <- data.frame(id, dat)
df.fin
    id   X1   X2   X3
1 A111 1000 1100 1200
2 B123 2000 2100 2200
```

Sukurkite savąjį variantą (plg. 6.22 užduotį).

## 6.2. Grafinė analizė

Akis labai geras matavimo instrumentas, tačiau jau trimatėse sklaidos diagramose ji gana sunkiai įžiūri tendencijas. Iš tikrųjų, panagrinėkime funkciją `scatterplot3d` iš tokio pat pavadinimo paketo (jis yra kompaktiniame diske R1; panašios funkcijos yra Duncan’o Murdoch’o rgl pakete, žr. R1 diską arba http://www.stats.uwo.ca/faculty/murdoch/software/.

```
attach(Bwages)
Bw3d <- scatterplot3d(exper,educ,wage,# Brėžiame 3-matę sklaidos
highlight.3d=TRUE,col.axis="blue",    # diagramą
col.grid="lightblue",
main="scatterplot3d",pch=20,type="h")
mano.lm <- lm(wage~exper+educ)   # Apskaičiuojame regresijos plokštumą
Bw3d$plane3d(mano.lm)            # Papildome sklaidos diagramą šia
                                 # regresijos plokštuma
```




6.1 pav. Trimatė sklaidos diagrama ir `wage` regresijos (`exper` ir `educ` atžvilgiu) plokštuma

Matome, kad jau trimačiu atveju sklaidos diagrama mažai naudinga (o kai matavimų skaičius didesnis, jos apskritai neįmanoma nubrėžti). Tai paaiškina, kodėl daugiamačiu atveju dažniausiai apsiribojama įvairiais pavidalais pateikiama dvimačių ryšių

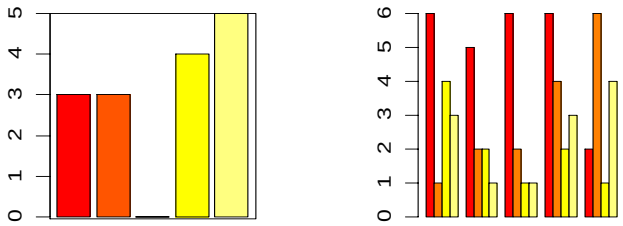
analize. Pradėkime nuo bendro pobūdžio pastabos. R funkcijos `plot`, `boxplot`, `barplot`, `matplot` (ir dar daug kitų) yra bendrinės, t.y., jų reikšmės priklauso nuo argumento tipo. Štai lentelė, kurioje pateikta mums reikalingų faktų santrauka.

6.1 lentelė.

| | vektorius | matrica | duomenų sistema |
|---|---|---|---|
| `plot` | x - koordinatės numeris, y – koordinatės reikšmė | x - pirmasis stulpelis, y - antrasis stulpelis | brėžia daug sklaidos diagramų: x - vienas stulpelis, y - kitas |
| `boxplot` | vienas stačiakampis visam vektoriui | vienas stačiakampis visai matricai | vienas stačiakampis kiekvienam stulpeliui (kintamajam) |
| `barplot` | po stulpelį kiekvienai koordinatei, jo aukštis lygus koordinatės reikšmei | po stulpelį kiekvienam matricos stulpeliui, eilutės skiriamos spalvomis | neapibrėžta |
| `matplot` | x - koordinatės numeris, y - koordinatės reikšmė su žyma | x - eilutės numeris, y - stulpelių reikšmės (kiekvienam stulpeliui sava žyma) | x - eilutės numeris, y - stulpelių reikšmės (kiekvienam stulpeliui sava žyma) |

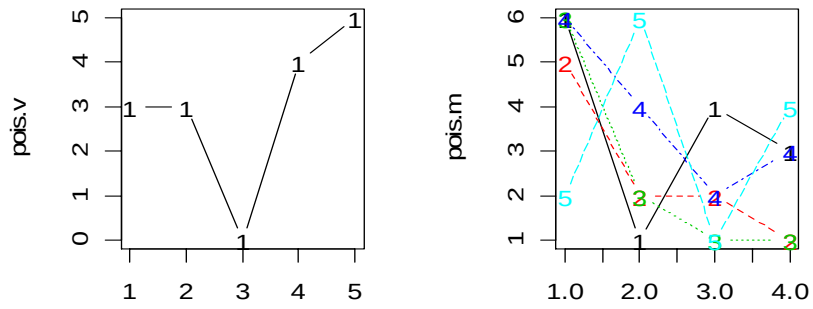
Štai kelios šios lentelės iliustracijos.

```
> par(mfrow=c(1,2))
> pois.v <- rpois(5,3)
> pois.v
[1] 3 3 0 4 5
> barplot(pois.v)
> box() # Diagramą patalpinsime į dėžutę
> pois.m <- matrix(rpois(20,3),ncol=5)
> pois.m
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    6    5    6    6    2
[2,]    1    2    2    4    6
[3,]    4    2    1    2    1
[4,]    3    1    1    3    4
> barplot(pois.m,beside=T)
```




6.2 pav. Vektoriaus (kairėje) ir matricos (dešinėje) stulpelinės diagramos

```
> matplot(pois.v,type="b")     # matplot=matrixplot; yra daug jos
> matplot(pois.m,type="b")     # variantų
```




6.3 pav. Vektoriaus grafikas (kairėje) ir matricos grafikas (dešinėje)

Priminsime, kad ir daugelio kitų R funkcijų elgesys (reikšmė) priklauso nuo argumento klasės. Žemiau esančioje lentelėje pateikta trumpa šių faktų santrauka.

| Funkcija | matrica | duomenų sistema |
|---|---|---|
| sum | vienas skaičius | vienas skaičius |
| max | vienas skaičius | vienas skaičius |
| median | vienas skaičius | neapibrėžta |
| mean | vienas skaičius | kiekvienam stulpeliui |
| sd | kiekvienam stulpeliui | kiekvienam stulpeliui |
| var | varcov matrica | varcov matrica |

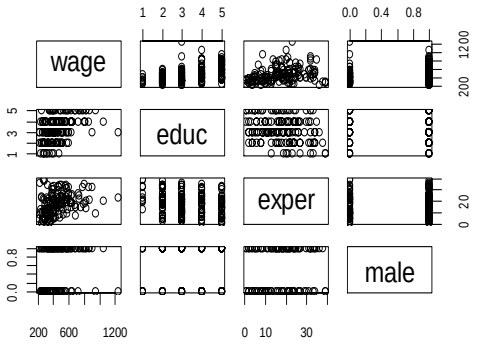
Tenka pripažinti, kad tokia įvairovė yra nepatogi, bet tai kaina, kurią tenka mokėti už programavimo suderinamumą. Priminsime, kad matrica R viduje pateikiama kaip ilgas vektorius su `dim` požymiu, ir, pvz., funkcija `sum` susumuoja visus šio vektoriaus elementus. Norint rasti stulpelių sumas, reiktų naudoti (žr. 3 sk.) vieną iš šių variantų:

```
apply(matrica,2,sum)
sapply(duomenų sistema,sum)
```

Grįžkime prie duomenų sistemos `Bwages`. Funkcija `plot` turėtų išbrėžti daug sklaidos diagramų, rodančių kiekvieno stulpelio priklausomybę nuo kitų.

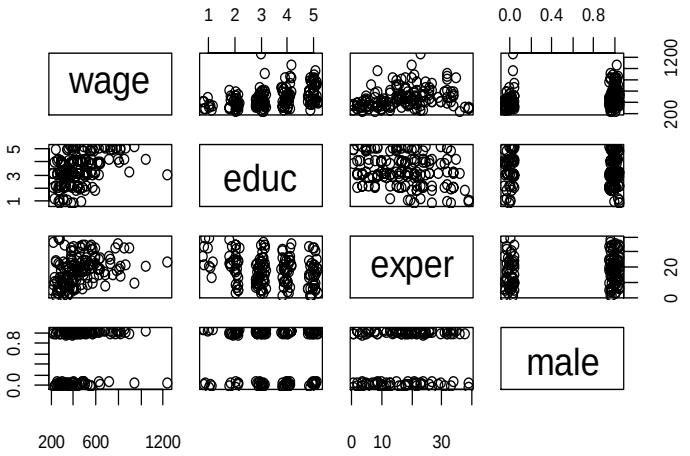
```
plot(Bwages)
```

Deja, šie grafikai mažai informatyvūs, nes daug taškų "sulimpa". Funkcija `jitter` duomenų sistemoms neapibrėžta, todėl taškus "padrebinkime" patys.




6.4 pav. Visų `Bwages` komponenių porinės sklaidos diagramos

```
Bw.jitt <- Bwages+data.frame(rep(0,148),runif(148,-0.2,0.2),
runif(148,-0.01,0.01),runif(148,-0.05,0.05))
plot(Bw.jitt)
```




6.5 pav. Visų "padrebintų" `Bwages` komponenčių porinės sklaidos diagramos

Mums labiausiai rūpi pirmoji eilutė – matome, kad didėjant išsilavinimui atlyginimas didėja, nuo patyrimo jis priklauso paraboliškai (kaip manote, kodėl?), o vyrų atlyginimas, apskritai, didesnis nei moterų. Beje, didžiausią atlyginimą gauna vidutinio amžiaus ir ne pačio aukščiausio išsilavinimo moteris. Ją nėra sunku rasti.

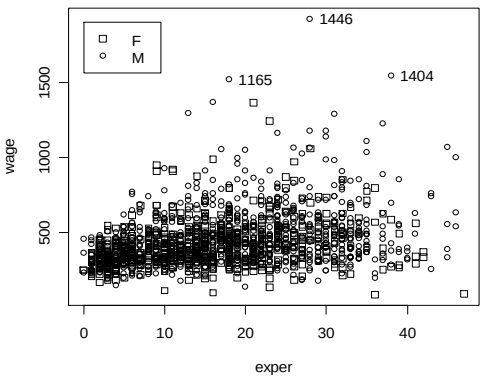
```
> max(wage)
[1] 1239.669
> which(wage==max(wage))
[1] 67
> Bwages[which(wage==max(wage)),]
       wage educ exper male
67 1239.669    3    23    0
```

Kitas variantas pagrįstas `identify` funkcija.

```
> plot(exper,wage)
> identify(exper,wage,n=1)
[1] 67
```

Surinkę antros eilutės tekstą ir perėję į grafikos langą, pamatysime kryželį (jis žymi kursoriaus padėtį). Nuveskime kryželį ant norimo taško ir spragtelėkime kairiuoju klavišu – pamatysime įrašo eilutės numerį.

**6.2 UŽDUOTIS**. Originaliajame rinkinyje `bwages` trys daugiausiai uždirbantys asmenys yra vyrai – patikrinkite (funkcijoje `identify` imdami n=3, išbrėžkite 6.6 paveikslą). Kokie jų atlyginimai?

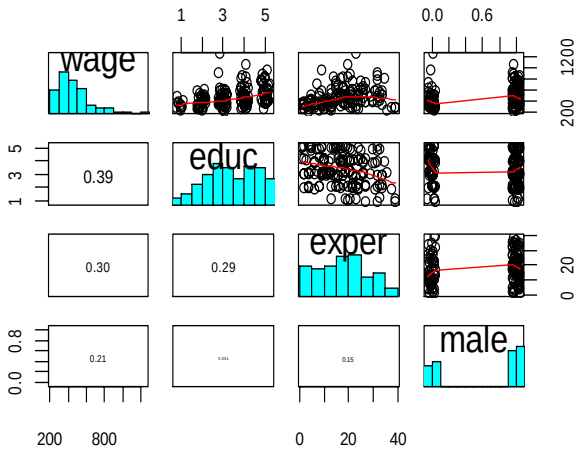



6.6 pav. Rinkinyje `Bwages` daugiausiai uždirbantis asmuo buvo 67-asis, o rinkinyje `bwages` – 1446-asis, 1165-asis ir 1404-asis

Panagrinėkime funkciją `pairs` – jos išbrėžtas grafikas panašus į funkcijos `plot`, tačiau ji pateikia žymiai daugiau variantų.

```
> pairs(Bw.jitt, upper.panel=panel.smooth, diag.panel=panel.hist,
  lower.panel=panel.cor)
```

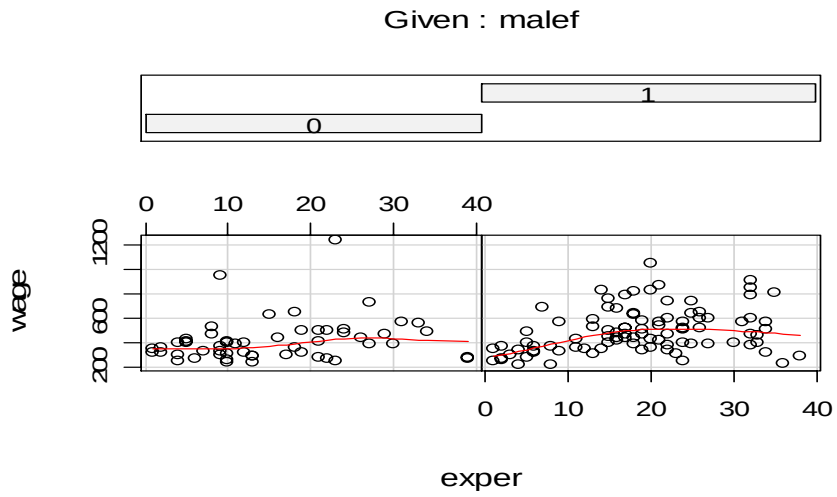
Čia `upper.panel` nurodo, kas bus virš įstrižainės (base paketo funkcija `panel.smooth` išbrėž kreivę, einančią per taškų "debesėlio" vidurį – jau turėjome tokios kreivės pavyzdį (regresijos tiesę), bet dabar remiamasi kitokiais principais (kreivę apskaičiuos neparametrinio glodinimo funkcija `lowess`)). Opcija `diag.panel` nurodo kas dar, be kintamojo vardo, bus ant įstrižainės (funkciją `panel.hist` galima surasti su `?pairs` (žr. pavyzdžių skyrių); prieš vykdant aukščiau užrašytą komandą, funkciją `panel.hist` reikia Paste to console). Opcija `lower.panel` nurodo, kas bus po įstrižaine (funkciją `panel.cor` irgi rasite funkcijos `pairs` help'o pavyzdžių skyriuje, ji apskaičiuoja koreliacijos koeficiento tarp atitinkamų kintamųjų modulį; koeficiento skaitmenų didumas proporcingas koeficiento reikšmei – tai, kad koreliacijos koeficientas tarp `educ` ir `male` praktiškai neįžiūrimas, reiškia, kad jis beveik 0).




6.7 pav. Funkcija `pairs` : duomenų sistemos `Bw.jitt` sklaidos diagramos, glodinančius regresijos kreivės, koreliacijos koeficientai ir histogramos

Kita funkcija, labai naudinga tiriant daugiamačius duomenis, yra `coplot(y~x|a)` arba `coplot(y~x|a*b)`. Ji brėžia keletą `y` sklaidos diagramų `x` atžvilgiu (visoms a reikšmėms arba, atitinkamai, visoms porų (a,b) reikšmėms). Norint, kad duomenų sistemos `Bwages` atveju `educ` ir `male` būtų "teisingai" traktuojami, reikėtų pabrėžti, kad jie faktoriai.

```
rm(educ,male) # Dėl viso pikto (kad nebūtų panaudoti panaudoti "pasi-
              # klydę" educ ir male (vietoje educ ir male iš Bwages))
detach(bwages)
attach(Bwages)
educf <- as.factor(educ) # Dabar educ tikrai iš Bwages (o ne gal būt
                         # kažkada atsiradę iš bwages)
malef <- as.factor(male)
Bwf <- data.frame(wage,exper,educf,malef)
rm(educf,malef)          # Žiūrėkime į ateitį - "šiukšles" pašalinkime
detach(Bwages)
coplot(wage~exper|malef,
panel=panel.smooth,data=Bwf)   # data=Bwf yra ekvivalentu komandai
                               # attach(Bwf)viena eilute anksčiau
```



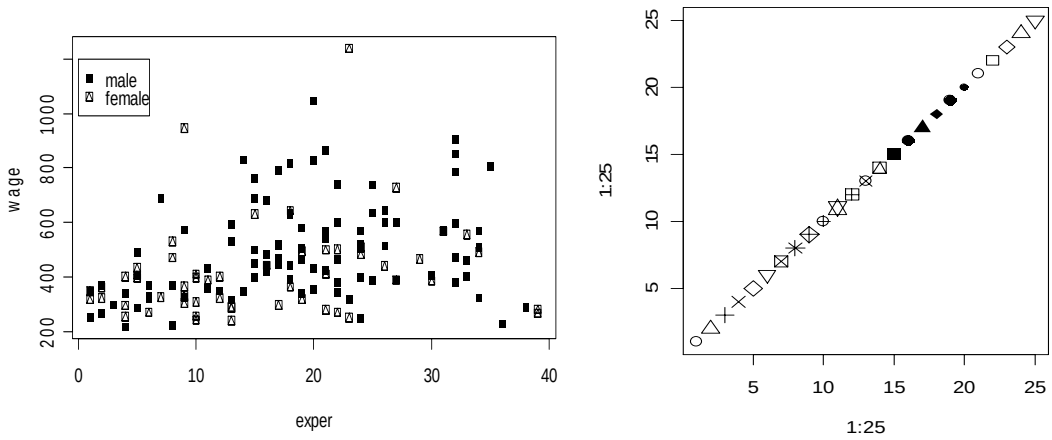

6.8 pav. Atlyginimas priklauso nuo patyrimo, bet vyrams ir moterims skirtingai

Šiuos du grafikus galima pateikti ir vienu paveikslu, bet tuomet vyrus ir moteris reikėtų žymėti skirtingais simboliais (žr. 6.9 pav., kairėje):

```
plot(wage~exper,pch=as.numeric(malef)+13)
legend(0,1200,c("male","female"),pch=as.numeric(malef)+13)
```

Beje, visų 25 R grafinių simbolių lentelę galima atspausdinti su tokiu kodu:

```
plot(1:25,1:25,pch=1:25,cex=1.5)     # pch=printing character
                                     # cex=simbolio dydis
```

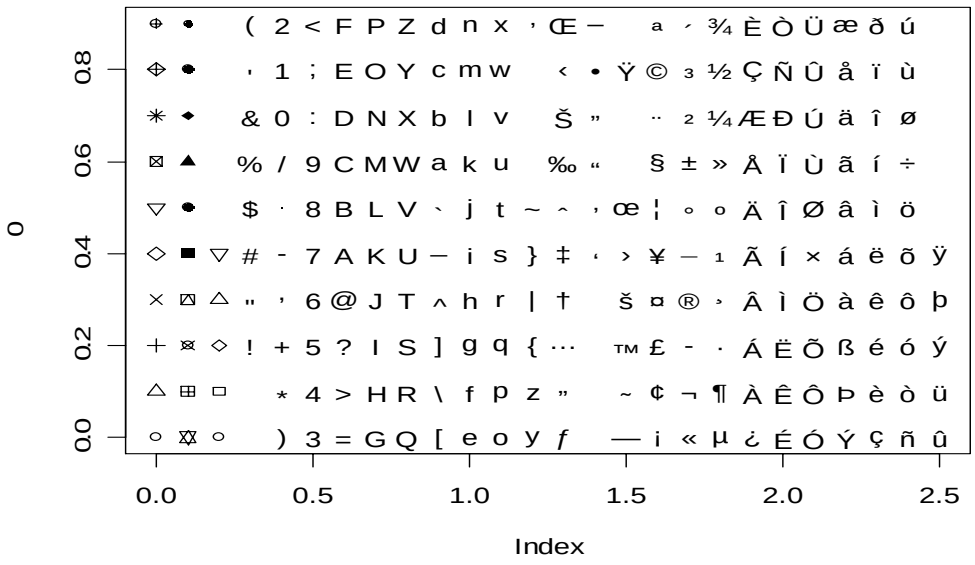



6.9 pav. Moterų ir vyrų atlyginimo ir patyrimo sklaidos diagramos (kairėje) ir grafinių simbolių lentelė (dešinėje)

Taigi grafinius R simbolius galima pasirinkti iš 6.9 pav. dešiniajame grafike pateiktų dvidešimt penkių, o apskritai visus `pch` variantus galima išbrėžti su šiuo kodu:

```
plot(x=0,type="n",xlim=c(0,2.5),ylim=c(0,0.9)) # Ką daro ši eilutė?
```

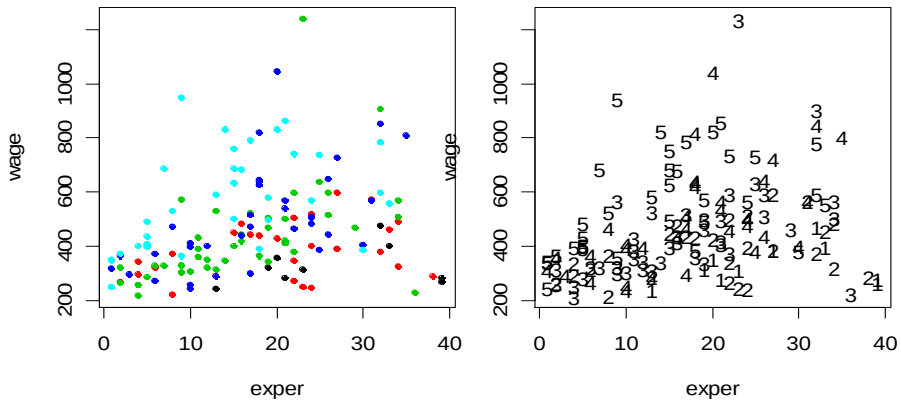
```
for(i in 1:260) {
   j <- i - 1
   x <- j%/%10/10 # Surinkite ?"%/%"
   y <- j%%10/10
   cat("(",x,",",y,",",i,")\n")
   points(x,y,pch=i)
                }
```




6.10 pav. Visų `pch` simbolių lentelė

Pažymėsime, kad taškų žymėjimo variantų yra dar daugiau – taškus galima nuspalvinti arba vietoje grafinių simbolių vartoti įvairius simbolinius kintamuosius:

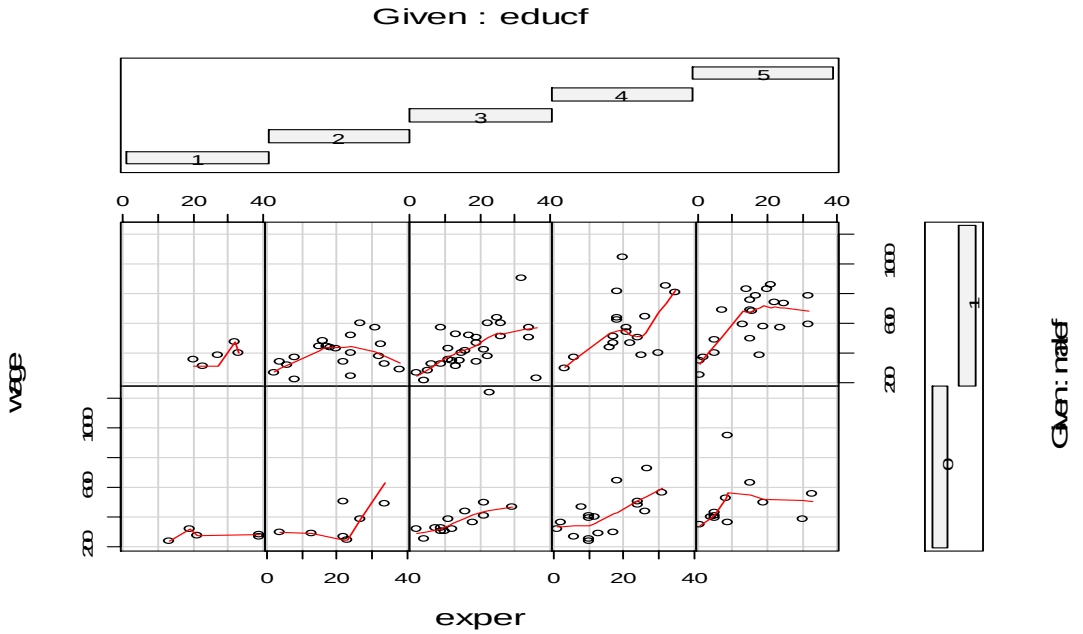
```
plot(wage~exper,pch=20,col=as.numeric(educf))
plot(wage~exper,pch=as.character(educf))
```




6.11 pav. Atlyginimo ir patyrimo sklaidos diagramos: skirtingomis spalvomis (kairėje) ar skirtingais skaitmenimis (dešinėje) žymima išsilavinimo grupė

Paskutiniuose grafikuose spalvų ir skirtingų simbolių aiškiai per daug, geriau vis dėlto būtų išbrėžti penkis atskirus grafikus. `coplot` leidžia pasirinkti du sąlyginius kintamuosius, mes pasirinksime `educf` ir `malef`.

```
> coplot(wage~exper|educf*malef,panel=panel.smooth,data=Bwf)
```




6.12 pav. Atlyginimo ir patyrimo kografikas (su fiksuotomis lyties ir išsilavinimo reikšmėmis)

Štai dar vienas `coplot` funkcijos vartojimo pavyzdys (čia įdomiausios yra duomenų rinkinio VADeaths[2] transformacijos – duomenų formatą gana dažnai reikia keisti).

```
> data(VADeaths)
> VADeaths
```

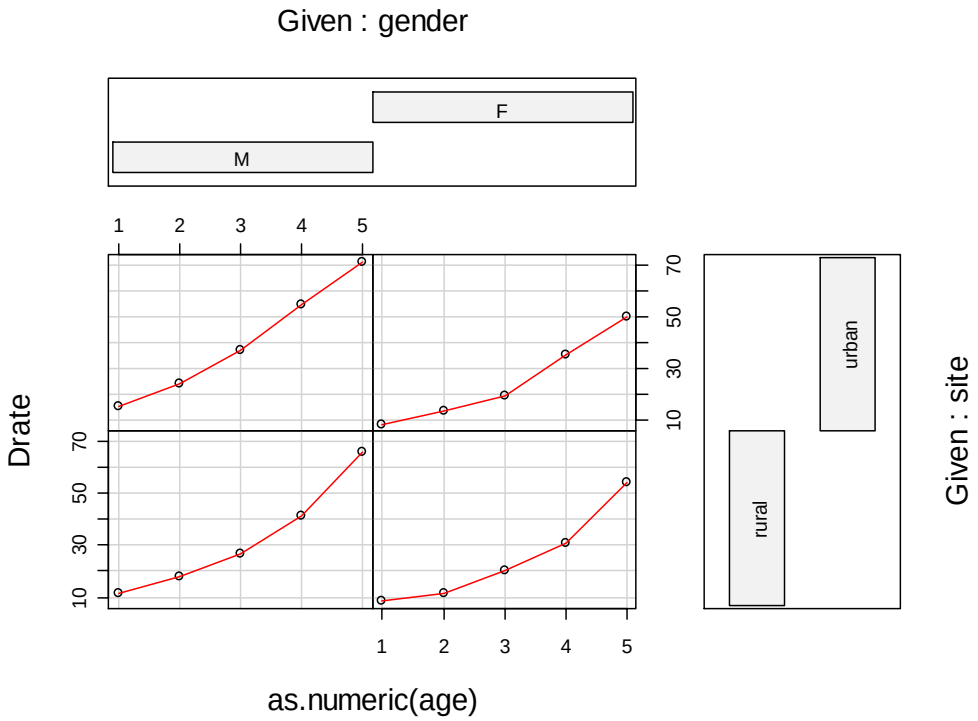
| | Rural Male | Rural Female | Urban Male | Urban Female |
|---|---|---|---|---|
| 50-54 | 11.7 | 8.7 | 15.4 | 8.4 |
| 55-59 | 18.1 | 11.7 | 24.3 | 13.6 |
| 60-64 | 26.9 | 20.3 | 37.0 | 19.3 |
| 65-69 | 41.0 | 30.9 | 54.6 | 35.1 |
| 70-74 | 66.0 | 54.3 | 71.1 | 50.0 |

Šią matricą perrašysime kaip stulpelį, tačiau dar sudarysime antrą, trečią ir ketvirtą stulpelius, kuriuose nurodysime amžių, lytį ir gyvenimo vietą.

```
> dr <- c(VADeaths) # Matricą VADeaths paversime vektoriumi
> dr
 [1] 11.7 18.1 26.9 41.0 66.0  8.7 11.7 20.3 30.9 54.3 15.4 24.3 37.0
[14] 54.6 71.1  8.4 13.6 19.3 35.1 50.0
> n <- length(dr)
> rep(ordered(rownames(VADeaths)),length=n)
 [1] 50-54 55-59 60-64 65-69 70-74 50-54 55-59 60-64 65-69 70-74
[11] 50-54 55-59 60-64 65-69 70-74 50-54 55-59 60-64 65-69 70-74
Levels:  50-54 < 55-59 < 60-64 < 65-69 < 70-74
>  gl(2,5,n, labels= c("M", "F")) # Funkcija gl gamina faktorius
 [1] M M M M M F F F F F M M M M M F F F F F
Levels:  M F
> gl(2,10,  labels= c("rural", "urban"))
 [1] rural rural rural rural rural rural rural rural rural rural
```

[2] Tai mirusiųjų skaičius 100-ui gyventojų įvairiose amžiaus grupėse. Duomenys sugrupuoti pagal gyvenamo vietą (kaimas ar miestas) ir lytį (vyras ar moteris).

```
[11] urban urban urban urban urban urban urban urban urban urban
Levels:  rural urban
> d.VAD <- data.frame (Drate=dr, age=rep(ordered(rownames(VADeaths)),
length=n),gender=gl(2,5,n,labels= c("M", "F")), site=gl(2,10,  labels
=c("rural", "urban")))
> d.VAD
   Drate   age gender  site
1   11.7 50-54      M rural
2   18.1 55-59      M rural
3   26.9 60-64      M rural
4   41.0 65-69      M rural
5   66.0 70-74      M rural
6    8.7 50-54      F rural
7   11.7 55-59      F rural
8   20.3 60-64      F rural
9   30.9 65-69      F rural
10  54.3 70-74      F rural
11  15.4 50-54      M urban
12  24.3 55-59      M urban
13  37.0 60-64      M urban
14  54.6 65-69      M urban
15  71.1 70-74      M urban
16   8.4 50-54      F urban
17  13.6 55-59      F urban
18  19.3 60-64      F urban
19  35.1 65-69      F urban
20  50.0 70-74      F urban
> mode(d.VAD)
[1] "list"
> class(d.VAD)
[1] "data.frame"
> coplot(Drate ~ as.numeric(age) | gender * site, data = d.VAD,
  panel = panel.smooth)
```




6.13 pav. `Drate` ir amžiaus kografikas (su fiksuotomis lyties ir gyvenamosios vietos reikšmėms)

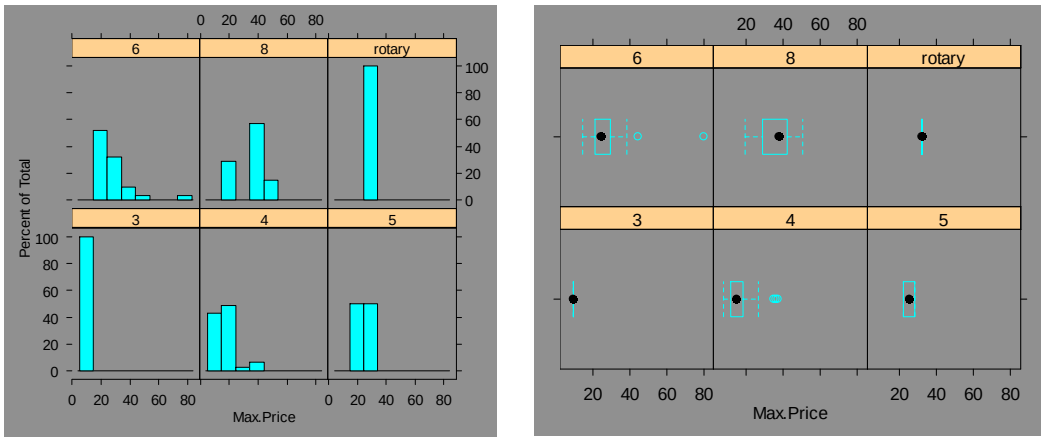
Kografikų metodas yra smarkiai patobulintas lattice bibliotekoje. Panagrinėkime `Cars93` duomenis iš MASS bibliotekos.

```
library(lattice); library(MASS)
data(Cars93) # ?Cars93
> Cars93[1:5,]
  Manufacturer   Model    Type Min.Price Price Max.Price MPG.city MPG.highway
1        Acura Integra   Small      12.9  15.9      18.8       25          31
2        Acura  Legend Midsize      29.2  33.9      38.7       18          25
3         Audi      90 Compact      25.9  29.1      32.3       20          26
4         Audi     100 Midsize      30.8  37.7      44.6       19          26
5          BMW    535i Midsize      23.7  30.0      36.2       22          30
             AirBags DriveTrain Cylinders EngineSize Horsepower  RPM
1               None      Front         4        1.8        140 6300
2 Driver & Passenger      Front         6        3.2        200 5500
3        Driver only      Front         6        2.8        172 5500
4 Driver & Passenger      Front         6        2.8        172 5500
5        Driver only       Rear         4        3.5        208 5700
  Rev.per.mile Man.trans.avail Fuel.tank.capacity Passengers Length Wheelbase
1         2890             Yes                13.2          5    177       102
2         2335             Yes                18.0          5    195       115
3         2280             Yes                16.9          5    180       102
4         2535             Yes                21.1          6    193       106
5         2545             Yes                21.1          4    186       109

Width Turn.circle Rear.seat.room Luggage.room Weight  Origin          Make
1    68          37           26.5           11   2705 non-USA Acura Integra
2    71          38           30.0           15   3560 non-USA  Acura Legend
3    67          37           28.0           14   3375 non-USA       Audi 90
4    70          37           31.0           17   3405 non-USA      Audi 100
5    69          39           27.0           13   3640 non-USA      BMW 535i
```

(mes pakrovėme `Cars93` duomenis, tačiau, norėdami pademonstruoti "`data=`" opciją (žr. komandas žemiau), neprijungsime jų su `attach`). Pagrindinė lattice idėja yra grafinį langą suskaidyti į keletą polangių (paprastai jie nusakomi kokiu nors sąlygos kintamuoju). Funkcijos (jų vardai natūralūs, tačiau skiriasi nuo įprastų – pvz., rašome `histogram` ir `bwplot` vietoje, atitinkamai, `hist` ir `boxplot`) naudoja formulių sintaksę (plg. 5.2 pvz., 5.2 užd., 5-10 psl.). Vienmačių grafikų atveju (o dvi aukščiau užrašytos funkcijos brėžia tokius) kairiąją formulės ženklo ~ pusę paliekame tuščią. Pvz., komandos

```
> histogram( ~ Max.Price | Cylinders , data = Cars93)
> bwplot( ~ Max.Price | Cylinders , data = Cars93)
```

pateikia tą pačią informaciją dviem skirtingais pavidalais:



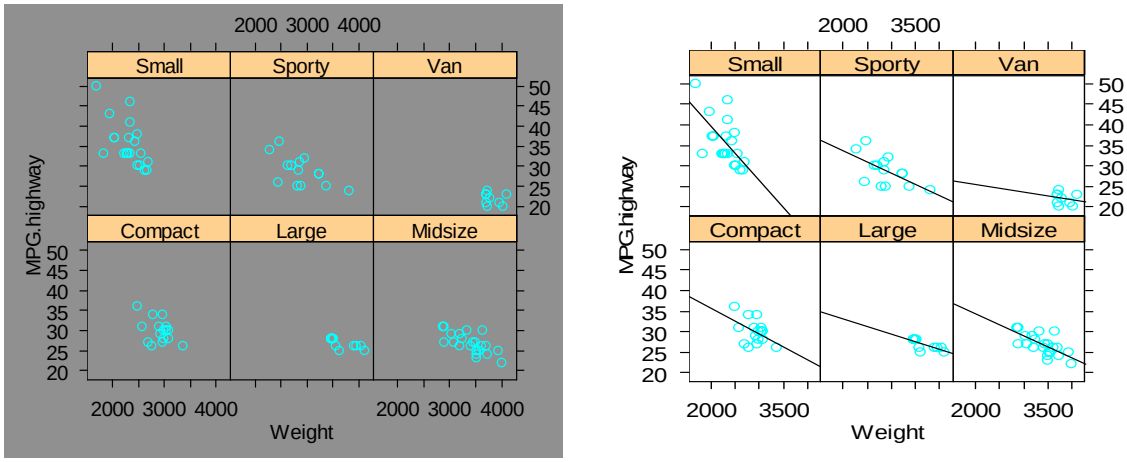

6.14 pav. Kiekvienam cilindrų skaičiaus variantui,
čia išbrėžtos maksimalios kainos histograma ir stačiakampė diagrama

Su lattice taip pat galima brėžti (sąlygines) sklaidos diagramas (tik vietoje `plot` reikės rašyti `xyplot` ir , be to, naudoti formulių sintaksę)).

```
attach(Cars93)
xyplot(MPG.highway ~ Weight | Type) # Žr. 6.15 pav., kairėje
```

Tendencijos yra aiškios: kuo didesnis automobilio svoris, tuo mažiau mylių su vienu kuro galonu galima nuvažiuoti. Antra vertus, šias tendencijas geriausiai pavaizduoti regresijos tiesėmis. Funkciją, brėžiančią šias tieses lattice atveju, teks parašyti patiems.

```
plot.regression=function(x,y) # Ženklas "=" yra ženklo "<-" sinonimas
{
panel.xyplot(x,y)
panel.abline(lm(y~x))
}

trellis.device(bg="white") # fonas bus baltas
xyplot(MPG.highway ~ Weight | Type, panel = plot.regression)
```




6.15 pav. Sunaudojamo kuro kiekio priklausomybės nuo automobilio svorio grafikai įvairiose automobilių grupėse (dešinėje – kartu su regresijos tiesėmis)

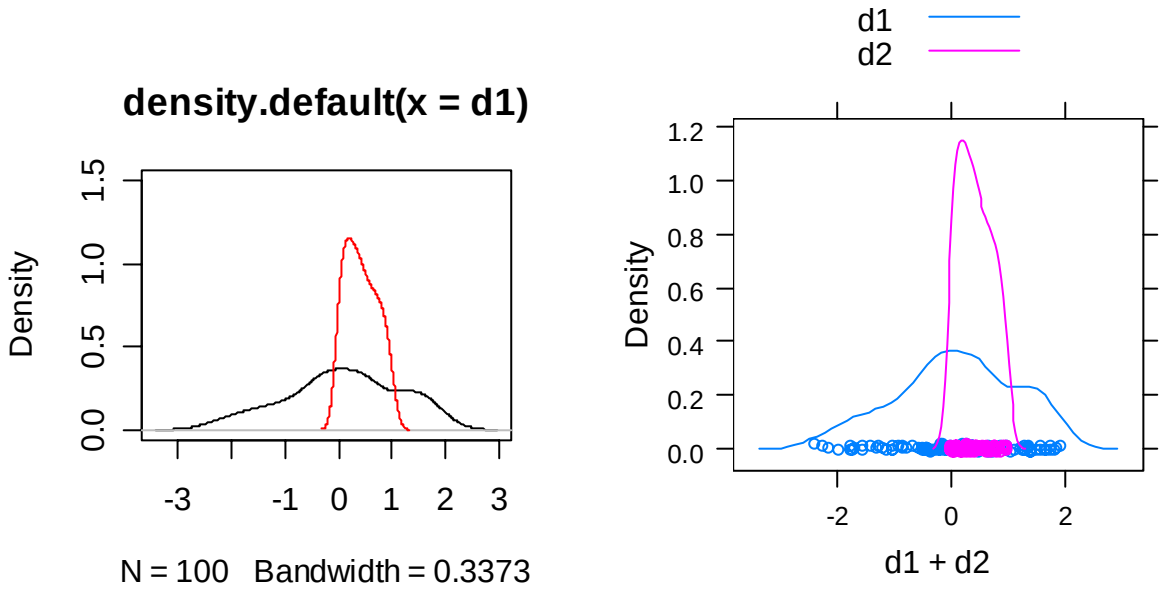
Matome, kad į svorį jautriausiai reaguoja mažieji automobiliai. Atkreipkite dėmesį į tai, kad `trellis.device` komanda standartinį (kiek tamsoką) foną pakeičia baltu.

Dar vienas pavyzdys. Funkcija `density` pateikia branduolinį tankio įvertį, tačiau norint išbrėžti dvi kreives viename grafike, reikia bandymais nustatyti x ir y ašių rėžius:

```
d1 <- rnorm(100)
d2 <- runif(100)
plot(density(d1),ylim=c(0,1.5))
lines(density(d2),col=2)
```

Tą patį darbą galima automatizuoti su funkcija `densityplot` iš lattice paketo:

```
library(lattice)
densityplot(~ d1 + d2, auto.key = TRUE)
```




**6.3 UŽDUOTIS**. Su lattice pakartokite keliais puslapiais aukščiau atliktą analizę su `Drate` ir `age`.

Daugiamačių duomenų vaizdavimas yra komplikuotas uždavinys. Be jau aptartų galimybių, dar paminėsime `cloud` ir `wireframe` funkcijas iš lattice bibliotekos, bibliotekas djmrgl ir rgl, o taip pat išorinę programinę įrangą xgobi ir ggobi.

## 6.3. Skaitinės charakteristikos

Jau žinome, kad dažnai naudingos imčių skaitinės charakteristikos. Daugiamačiu atveju be vidurkio (ar medianos) ir standarto (ar IQD) dar naudojama imties koreliacijos matrica. Pradėsime nuo vienmačių skaitinių charakteristikų.

```
> round(apply(bwages,2,summary),2) # Funkcijoje apply(…,2,…) skaičius
                                   # 2 reiškia "stulpeliams"
           wage lnwage educ exper lnexper lneduc male
Min.      88.38   4.48 1.00  0.00    0.00   0.00 0.00
1st Qu.  327.30   5.79 3.00  9.00    2.30   1.10 0.00
Median   408.50   6.01 3.00 16.50    2.86   1.10 1.00
Mean     445.80   6.03 3.38 17.22    2.69   1.14 0.61
3rd Qu.  514.60   6.24 4.00 24.00    3.22   1.39 1.00
Max.    1919.00   7.56 5.00 47.00    3.87   1.61 1.00
```

Matome, kad, pvz., vyrų imtyje yra 61% (kodėl?), o vidutinis išsilavinimas lygus 3,38 (neužmirškime, kad `educ` yra ranginis kintamasis, todėl šis skaičius nieko ypatingo nereiškia).

```
> round(apply(bwages,2,sd),2)  # Stulpelių (=kintamųjų) standartai
   wage  lnwage    educ   exper lnexper  lneduc    male
 179.53    0.36    1.20   10.17    0.73    0.43    0.49
```

Dabar apskaičiuosime koreliacijos matricą.

```
> round(cor(bwages),2)          # Koreliacijos matrica
        wage lnwage  educ exper lnexper lneduc  male
wage    1.00   0.95  0.39  0.31    0.33   0.36  0.14
lnwage  0.95   1.00  0.40  0.31    0.34   0.37  0.15
educ    0.39   0.40  1.00 -0.29   -0.27   0.97 -0.14
exper   0.31   0.31 -0.29  1.00    0.93  -0.31  0.16
lnexper 0.33   0.34 -0.27  0.93    1.00  -0.28  0.15
lneduc  0.36   0.37  0.97 -0.31   -0.28   1.00 -0.15
male    0.14   0.15 -0.14  0.16    0.15  -0.15  1.00
```

Matome, kad, pvz., paprastasis (Pearson'o) koreliacijos koeficientas tarp `educ` ir `male` lygus –0,14. Kadangi tai ranginiai kintamieji, vietoje paprastojo reikia skaičiuoti ranginį (Spearman'o) koreliacijos koeficientą. Jis pagrįstas ne kintamojo reikšmėmis, bet jų rangais (vieta).

```
> a <- c(3,8,6,6,9,100)
> rank(a)
[1] 1.0 4.0 2.5 2.5 5.0 6.0  # 3 yra mažiausias, todėl jo rangas 1;
                             # 6 užima 2-ą ir 3-ią vietas, todėl jo
                             # vidutinis rangas 2,5
> a <- c(3,8,6,6,9,10)
> rank(a)
[1] 1.0 4.0 2.5 2.5 5.0 6.0  # Nesvarbu kas, 10 ar 100 yra
                             # didžiausias - rangas nuo to nesikeičia
```

Jei `x` ir `y` surišti tikslia tiesine priklausomybe – jų Pirsono koreliacijos koeficientas lygus +1 arba –1, tačiau jei tikslia paraboline ar eksponentine – koeficientas nebūtinai artimas vienetui. Tuo tarpu, jei Spirmeno koeficiento reikšmės moduliu artimos 1, šitai signalizuoja apie monotoniško (bet nebūtinai tiesinio) trendo egzistenciją:

```
> x <- 1:50
> cor(x,x)
[1] 1                              # Priklausomybė tiesinė, todėl =1

> cor(x,exp(x))
[1] 0.3525162                      # Pirsono kor.koef. toli nuo 1
> cor(rank(x),rank(x))             # Spirmeno koreliacijos koeficientas
                                   # tarp x ir y apibrėžiamas kaip
                                   # cor(rank(x),rank(y))
[1] 1                              # Spirmeno k.k. lygus 1

> cor(rank(x),rank(exp(x)))        # Arba cor(x,exp(x),method="spearman")
[1] 1                              # Spirmeno k.k. vėl lygus  1 (kadangi
                                   # exp(x) monotoniškai priklauso nuo x)
```

Grįžkime prie koreliacijos tarp `educ` ir `male`.

```
> attach(bwages)
> cbind(educ,male,rank(educ),rank(male))   # Palyginkime tikrąsias
                                           # ir ranžuotas reikšmes
 educ male
 [1,]    1    1 50 1026        # educ reikšmių (suvidurkinti)
 [2,]    1    0 50  290        # rangai lygūs 50; 232; 574.5[3] ir t.t.
 [3,]    1    1 50 1026
 [4,]    1    1 50 1026        # male: (vidutinis) moters rangas
 [5,]    1    1 50 1026        # lygus 290, o vyro - 1026
 [6,]    1    0 50  290
 [7,]    1    1 50 1026
 [8,]    1    1 50 1026
 [9,]    1    1 50 1026
[10,]    1    1 50 1026
[11,]    1    0 50  290
[12,]    1    0 50  290
[13,]    1    1 50 1026
[14,]    1    0 50  290
[15,]    1    1 50 1026
[16,]    1    0 50  290
.....

> cor(educ,male)                   # Pearson'o koeficientas
[1] -0.1396446
> cor(rank(educ),rank(male))       # Spearman'o koeficientas
[1] -0.1389874
```

Pažymėsime, kad abu koeficientai praktiškai sutampa. Beje, minuso ženklas rodo neigiamo trendo buvimą – didėjant `educ` reikšmei, `male` reikšmė mažėja (nuo 1 link 0), kitais žodžiais, moterų išsilavinimas aukštesnis nei vyrų. Tai galima patikrinti dar ir taip:

```
> tapply(educ,male,mean)
       0        1
3.587219 3.243001
```

[3] 
```
> table(rank(educ))
   50    232  574.5  962.5 1306.5
   99    265    420    356    332
```

**6.4 UŽDUOTIS**. Išnagrinėkite trimatei grafikai skirtą D. Murdoch'o paketą djmrgl (žr. kompaktinį diską `R1` arba http://www.stats.uwo.ca/faculty/murdoch/software/) ir pateikite jo apžvalgą.

**6.5 UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite `plot.table` ir `mosaicplot` funkcijas. Išnagrinėkite duomenų rinkinį `UCBAdmissions`.

**6.6 UŽDUOTIS**. Išsinagrinėkite žemiau pateiktą pavyzdį (jis priklauso Ross'ui Ihaka'i, vienam iš R kūrėjų).

```
# First create some fake data.  The data will be in the form
# of a matrix, with each row summing to 100.

# Start by generating a matrix of random uniforms and adding 4.
xxx <- function(){
x <- matrix(runif(200), nc=4) + 4

# Compute the row sums and normalise each row by its sum.
rowsums <- apply(x, 1, "sum")
y <- 100 * apply(x, 2, "/", rowsums)

# Now replace each row by its cummulative sums
# The t() is needed to get the right shape
z <- t(apply(y, 1, "cumsum"))

# Get the "x" values to plot against (YMMV).
xvals <- 1:nrow(z)

# Ok, we're ready to plot.
# Start a new plot and set up the plot window.
# The xaxs= and yaxs= remove the 6% padding at the plot edges.
plot.new()
plot.window(xlim = c(0, nrow(z)), ylim=c(0, 100),
      xaxs="i", yaxs = "i")

# Now draw the bars for each time interval.
for(i in 4:1)
   rect(xvals - 1, 0, xvals, z[,i], col = i + 1, border = NA)

# Finally add the cross-hatching grid and axes.
# I've rotated the labels on the y axis so they are horizontal.
abline(h = seq(5, 95, by = 5))
abline(v = seq(5, 45, by = 5))
axis(1)
axis(2, las=1)
box()}
```

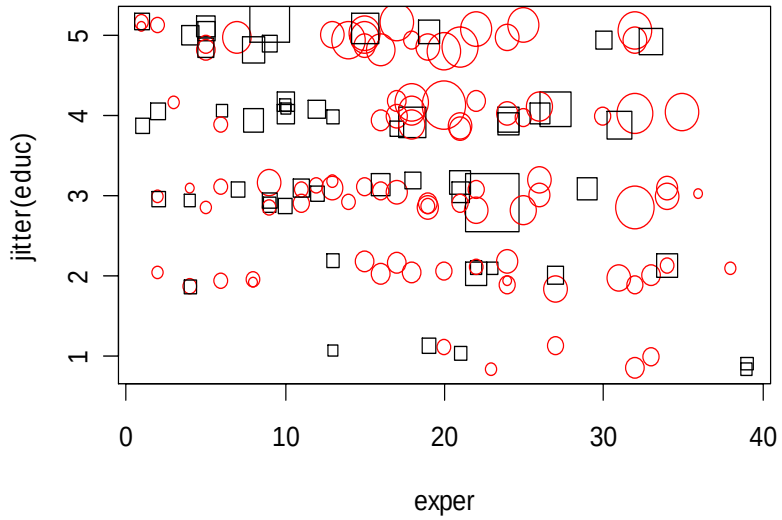
| Metai | Mieste | Kaime |
|---|---|---|
| 1970 | 1558 | 1561 |
| 1971 | 1602 | 1559 |
| 1972 | 1661 | 1536 |
| 1973 | 1721 | 1509 |
| 1974 | 1773 | 1486 |
| 1975 | 1828 | 1460 |
| 1976 | 1884 | 1431 |
| 1977 | 1934 | 1409 |
| 1978 | 1981 | 1386 |
| 1979 | 2035 | 1357 |
| 1980 | 2074 | 1330 |
| 1981 | 2121 | 1302 |
| 1986 | 2341 | 1219 |
| 1987 | 2390 | 1207 |
| 1988 | 2440 | 1195 |
| 1989 | 2487 | 1188 |
| 1990 | 2527 | 1181 |
| 1991 | 2557 | 1179 |
| 1992 | 2568 | 1179 |
| 1993 | 2549 | 1187 |
| 1994 | 2533 | 1191 |
| 1995 | 2526 | 1191 |
| 1996 | 2518 | 1193 |
| 1997 | 2534 | 1173 |

Šios programos idėjas panaudokite, vaizduodami Lietuvos miesto ir kaimo gyventojų santykio kitimą (žr. lentelę kairėje; joje gyventojų skaičius nurodytas tūkstančiais). Horizontalioje ašyje pažymėkite metus. Atspausdinkite

| | | |
|---|---|---|
| 1982 2167 1276<br>1983 2211 1259<br>1984 2256 1244<br>1985 2298 1230 | 1998 2525 1179<br>1999 2523 1178<br>2000 2522 1176<br>2001 2516 1177 | gautųjų santykių vektorių. Išbrėžkite panašų grafiką su `plot` funkcija |

**6.7 UŽDUOTIS.** Pateiksime "keturmačio" grafiko brėžimo pavyzdį:

```
attach(Bwages)
plot(exper,jitter(educ),cex=wage/250,col=male+1,pch=male)
```




6.16 pav. "Keturmatė" išsilavinimo ir patyrimo sklaidos diagrama

Paaiškinkite šį paveikslą. Patobulinkite jį, papildydami informatyvia legenda (iššifruokite simbolių ir simbolių didumo reikšmes). Išbrėžkite panašų grafiką su `Cars93` duomenimis iš MASS bibliotekos (imkite x=EngineSize, y=Price, o `cex` ir `col` parametrus pasirinkite patys).

**6.8 UŽDUOTIS.** Realiuose duomenų rinkiniuose dažnai būna praleistų duomenų (žemiau pateiktoje matricoje `xx` jie žymimi simboliu NA). Matricą `xx` pasigaminome taip: į "urną" supylėme visus 250 aibės `x` elementų, po to iš urnos "atsitiktinai" paėmėme vieną elementą, jį užregistravę gražinome atgal ir vėl procedūrą pakartojome (iš viso 30000 kartų – tai padarė funkcija `sample`).

```
x <- c(1:200,rep(NA,50))
set.seed(45)  # Duomenų sistema xx dabar bus reprodukuojama
xx <- data.frame(matrix(sample(x,30000,replace=T),ncol=3))
xxx <- xx[9900:9920,]
xxx
[,1] [,2] [,3]
 [1,]   16   NA  141
 [2,]   39  128   NA
 [3,]  194  185  144
 [4,]   NA   10   94
 [5,]  142   92   NA
 [6,]   52   42   41
```

```
 [7,]   NA   NA  188
 [8,]  140   NA  179
 [9,]   NA   NA  127
[10,]   54  173  123
[11,]   31   24   NA
[12,]   NA  117   52
[13,]   NA   49  178
[14,]   NA   NA   NA
[15,]  139  182   31
[16,]   15    8   20
[17,]   21  180   75
[18,]   27   64   NA
[19,]   11  196   NA
[20,]   73  134  152
[21,]   82   NA   NA
```

Kadangi matrica `xx` turi praleistų reikšmių, kai kurios funkcijos (pvz., `mean` ar `sum`) neveiks:

```
> apply(xx,2,sum) # Skaičiuojame stulpelių sumas
[1] NA NA NA
```

Aprašysime dvi procedūras, kurios pašalins iš duomenų sistemos su trim stulpeliais visas eilutes su bent vienu NA.

**1.**

```
d1 <- function(x){
x1 <- subset(x,!is.na(x[,1])) # subset yra base paketo funkcija
x2 <- subset(x1,!is.na(x1[,2]))
x3 <- subset(x2,!is.na(x2[,3]))
x3}
```

```
> d1(xxx)
      X1  X2  X3
9900 166 107   2
9901  36  25  63
9902  61  41  51
9904  47  43  72
9905 151  12 116
9909 174  16  66
9913 120  67 170
9915   8 172 103
9919  45 174  59
9920 185   6 152
```

Norint išsiaiškinti kaip dirba ši (ar kokia kita) funkcija, ją galima kiek modifikuoti:

```
d1.1 <- function(x){
x1 <- subset(x,!is.na(x[,1]))
print(is.na(x[,1]))  # Funkcijos is.na reikšmė yra loginis vektorius
print(!is.na(x[,1])) # Simbolis ! reiškia loginį neigimą
print(x1)      # Pašalintos eilutės, kurių 1-jame stulpelyje buvo NA
x2 <- subset(x1,!is.na(x1[,2]))
print(x2)
x3 <- subset(x2,!is.na(x2[,3]))
x3}
```

**2.**

```
d2 <- function(x){
x1 <- subset(x,!is.na(x[,1])&!is.na(x[,2])&!is.na(x[,3]))
x1}
```

Žemiau yra funkcijos, kurioms stulpelių skaičius nesvarbus.

**3.**

```
subset(xxx,complete.cases(xxx)) # complete.cases yra base paketo
                                # funkcija
```

**4.**

```
xxx[complete.cases(xxx),]
```

**5.**

```
xxx[-c(unique(which(apply(is.na(xxx),FUN=any,MARGIN=1)==TRUE))),]
```

**6.** Jei norite pašalinti eilutes, sudarytas tik iš NA, `FUN=any` pakeiskite į `FUN=all`.

**7.**

```
d7 <- function(x){
x1 <- x[!is.na(as.matrix(x) %*% rep(1, ncol(x))),  ]
x1}
```

**8.** Štai paprasčiausias variantas:

```
na.omit(xxx)
```

Kartais pageidautina, kad duomenų sistemoje nebūtų pasikartojančių eilučių. Tai galima pasiekti su funkcija `unique.data.frame`, štai vienas jos taikymo variantų:

```
dim(unique.data.frame(na.omit(xx)))
[1] 5164    3
```

Taigi iš pradinių 10000 eilučių beliko 5164.

O dabar pati

**6.9 UŽDUOTIS**. Nukopijavę eilutes

```
pradzia <- proc.time()
invisible(d1(xx))
(proc.time() - pradzia)[3]
```

į R konsolę, pamatysite kiek laiko truko `d1` procedūra[4]. Kuri iš pateiktų aštuonių funkcijų skaičiuoja greičiausiai? Kaip priklauso šis laikas nuo `xx` didumo? Parašykite funkcijų `d1` ir `d2` variantus, kurie išmestų tik eilutes, sudarytas vien iš NA.

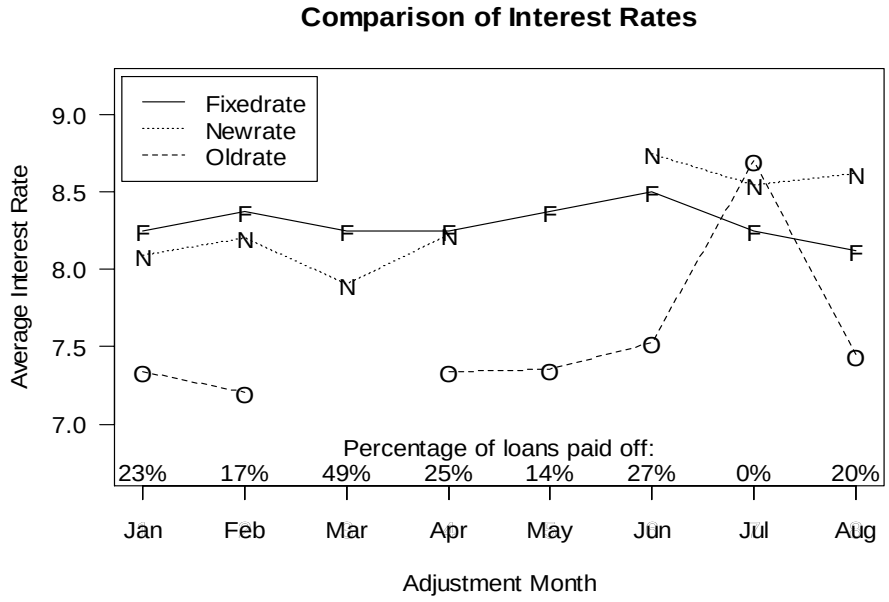
**6.10 UŽDUOTIS**. Štai duomenų rinkinys `loan.tab`:

```
 num adjmon  newrate oldrate fixedrate paid
 1  Jan-00  8.09091 7.33541     8.250 0.23
 2  Feb-00  8.20139 7.20833     8.375 0.17
```

[4] Pakartoję šią procedūrą kelis kartus, galite gauti kiek skirtingus laikus.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Mar-00 | 7.90457 | 8.03989 | 8.250 | 0.49 |
| 4 | Apr-00 | 8.22500 | 7.34167 | 8.250 | 0.20 |
| 5 | May-00 | 8.41346 | 7.35577 | 8.375 | 0.08 |
| 6 | Jun-00 | 8.75000 | 7.52273 | 8.500 | 0.27 |
| 7 | Jul-00 | 8.54348 | 8.70109 | 8.250 | 0.00 |
| 8 | Aug-00 | 8.61923 | 7.44231 | 8.125 | 0.08 |

Remdamiesi jo duomenimis, išbrėžkite žemiau pateiktą grafiką. Paaiškinkite jį.




6.17 pav. Paskolų palūkanų normų grafikas

**6.11 UŽDUOTIS**. Tiriant per savaitę alkoholiniams gėrimams išleidžiamų pinigų sumą (kintamasis `amount` – svarais sterlingų per savaitę), buvo gauti tokie duomenys (duomenų rinkinys `drink`):

| sex | age | empl | amount |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0 | 8.83 |
| 1 | 33 | 0 | 4.90 |
| 1 | 50 | 1 | 0.71 |
| 0 | 48 | 0 | 5.70 |
| 0 | 47 | 0 | 6.20 |
| 0 | 19 | 0 | 7.40 |
| 1 | 21 | 1 | 3.58 |
| 0 | 64 | 0 | 4.80 |
| 1 | 32 | 0 | 4.50 |
| 1 | 57 | 1 | 2.80 |
| 0 | 49 | 0 | 4.60 |
| 0 | 18 | 0 | 5.30 |
| 1 | 39 | 1 | 3.42 |
| 0 | 28 | 0 | 10.15 |
| 0 | 51 | 0 | 6.20 |
| 1 | 43 | 0 | 4.80 |
| 1 | 40 | 0 | 3.82 |
| 0 | 22 | 1 | 7.70 |
| 1 | 30 | 0 | 6.20 |
| 0 | 60 | 0 | 4.45 |

(`sex`: vyras 1, `empl`: dirba 0). Ištirkite kiekvieną kintamąjį ir jų tarpusavio ryšius.

**6.12 UŽDUOTIS**. Štai dvi pagalbinės funkcijos

```
panel.tab <- function (x, y)
        {
        par(new = TRUE)
        fourfoldplot(table(x, y))
        }
```

ir

```
panel.chisq <- function(x, y)
    {
    par(new = TRUE)
    usr <- par("usr")
    on.exit(par(usr))
    par(usr = c(0, 1, 0, 1))
    x2 <- formatC(chisq.test(table(x, y))$p.value,
                  digits = 4, format = "f")
    text(0.5, 0.5, x2, cex = 0.75)
    print(x2)
    }
```

dirbtiniai duomenys (tai dvi reikšmes įgyjančių vardinių kintamųjų pavyzdys)

```
x <- matrix(rbinom(300,1,0.5),100,3)
```

ir `pairs` funkcijos variantas:

```
pairs(x, upper.panel = panel.tab, lower.panel = panel.chisq)
```

Išsiaiškinkite visų pateiktų funkcijų darbą ir pateikite savą skaitinį pavyzdį.

**6.13 UŽDUOTIS.** Paketo Simple duomenų rinkinys `chips` yra sąrašas (kaip tai sužinoti?), turintis aštuonias komponentes. Išbrėžkite kiekvienos komponentės stačiakampę diagramą (grafiniame lange turi būti aštuonios diagramos, po kiekviena užrašykite jos vardą (plg. 4.3 užduotį). Kaip jums atrodo: ar "centrų" padėtys vienodos? O išsibarstymai?

**6.14 UŽDUOTIS.** Paketo Sample duomenų rinkinyje `chicken` pateikti duomenys apie viščiukų svorį trijose grupėse. Viename brėžinyje išbrėžkite visų trijų grupių stačiakampes diagramas. Kaip manote, ar vienodi svorių vidurkiai šiose grupėse? O reikšmių išsibarstymas?

**6.15 UŽDUOTIS.** Pakete base yra duomenų rinkinys `airquality`. Taikydami funkciją

```
> cor(airquality,use="pairwise.complete.obs"),
```

apskaičiuokite komponenčių koreliacijos koeficientų matricą. Parašykite funkciją, kuri atspausdintų tik tuos (ne ant įstrižainės esančius) koeficientus, kurių modulis didesnis už 0,5 (kartu su atitinkamų eilučių ir stulpelių vardais).

**6.16 UŽDUOTIS**. Su komandomis

```
library(MASS)
data(Cars93)
Cars93
```

galima apžiūrėti didžiulią duomenų sistemą `Cars93`.

```
> names(Cars93)
 [1] "Manufacturer"       "Model"              "Type"               "Min.Price"
 [5] "Price"              "Max.Price"          "MPG.city"           "MPG.highway"
 [9] "AirBags"            "DriveTrain"         "Cylinders"          "EngineSize"
[13] "Horsepower"         "RPM"                "Rev.per.mile"       "Man.trans.avail"
[17] "Fuel.tank.capacity" "Passengers"         "Length"             "Wheelbase"
[21] "Width"              "Turn.circle"        "Rear.seat.room"     "Luggage.room"
[25] "Weight"             "Origin"             "Make"
```

Kad tolimesnė analizė būtų paprastesnė, apsiribokime tik dalimi šių parametrų.

```
> cars <- Cars93[,c(1,3,5,8,25,26)]
> names(cars)
[1] "Manufacturer" "Type" "Price" "MPG.highway"  "Weight"  "Origin"
```

Bendrą supratimą apie `cars` galima susidaryti su `summary` (atkreipkite dėmesį į tai, kad ši funkcija atsižvelgia į kintamojo klasę).

```
> summary(cars)
  Manufacturer        Type           Price      MPG.highway        Weight        Origin
 Ford      : 8   Compact:16   Min.   : 7.40   Min.   :20.00   Min.   :1695   USA    :48
 Chevrolet : 8   Large  :11   1st Qu.:12.20   1st Qu.:26.00   1st Qu.:2620   non-USA:45
 Dodge     : 6   Midsize:22   Median :17.70   Median :28.00   Median :3040
 Pontiac   : 5   Small  :21   Mean   :19.51   Mean   :29.09   Mean   :3073
 Mazda     : 5   Sporty :14   3rd Qu.:23.30   3rd Qu.:31.00   3rd Qu.:3525
 Volkswagen: 4   Van    : 9   Max.   :61.90   Max.   :50.00   Max.   :4105
 (Other)   :57
```

Pažvelkime į `Weight` kintamąjį – skirtumas tarp minimumo ir maksimumo yra didelis, tačiau tai gali būti paaiškinta tuo, kad automobilio svoris priklauso nuo jo `Type`. Suskaidykime duomenų sistemą `cars` į grupes pagal `Type` reikšmes (plg. 6-15 psl.).

```
> names(split(cars,Type))
[1] "Compact" "Large"   "Midsize" "Small"   "Sporty"  "Van"
> summary(split(cars,Type)$Compact) # Sinonimas: summary(split(cars,Type)[[1]])
 Manufacturer          Type          Price      MPG.highway         Weight     Origin
 Chevrolet :2     Compact:16   Min.   :11.10   Min.   :26.00   Min.   :2490  USA    :7
 Volvo     :1     Large  : 0   1st Qu.:13.38   1st Qu.:27.75   1st Qu.:2783  non-USA:9
 Volkswagen:1     Midsize: 0   Median :16.15   Median :30.00   Median :2970
 Subaru    :1     Small  : 0   Mean   :18.21   Mean   :29.88   Mean   :2918
 Saab      :1     Sporty : 0   3rd Qu.:20.68   3rd Qu.:31.00   3rd Qu.:3043
 Pontiac   :1     Van    : 0   Max.   :31.90   Max.   :36.00   Max.   :3375
 (Other)   :9
```

Apskaičiuokite automobolių skaičių kiekvienoje `Type` ir `Origin` grupėje. Atspausdinkite `Price` skaitines charakteristikas ir išbrėžkite histogramas kiekvienai `Type` grupei. Nustatykite, keli kiekvieno gamintojo (`Manufacturer`) automobiliai yra rinkinyje `cars`; štai tie gamintojai:

```
> names(split(cars,Manufacturer)) # Sinonimas: levels(cars$Manufacturer)
 [1] "Acura"         "Audi"          "BMW"           "Buick"         "Cadillac"
 [6] "Chevrolet"     "Chrylser"      "Chrysler"      "Dodge"         "Eagle"
[11] "Ford"          "Geo"           "Honda"         "Hyundai"       "Infiniti"
[16] "Lexus"         "Lincoln"       "Mazda"         "Mercedes-Benz" "Mercury"
[21] "Mitsubishi"    "Nissan"        "Oldsmobile"    "Plymouth"      "Pontiac"
```

```
[26] "Saab"          "Saturn"        "Subaru"        "Suzuki"        "Toyota"
[31] "Volkswagen"    "Volvo"
```

Išbrėžkite benzino sunaudojimo `MPG.highway` ir svorio `Weight` sklaidos diagramą. Išbrėžkite joje regresijos tiesę.

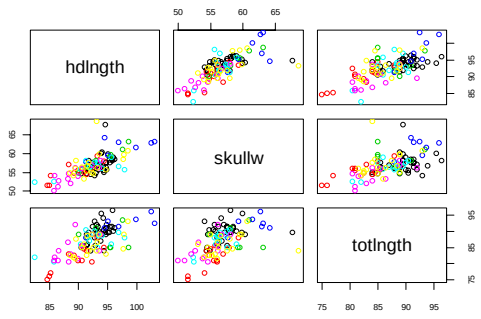
**6.17 UŽDUOTIS.** Su

```
library(MASS)
data(Insurance)
Insurance
> Insurance
   District  Group   Age Holders Claims
1         1    <1l   <25     197     38
2         1    <1l 25-29     264     35
*************************************
```

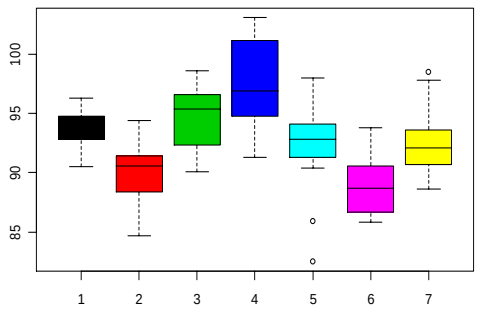
galima apžiūrėti duomenų rinkinį `Insurance`. a) Nustatykite kiekvieno kintamojo tipą ir klasę. b) Kiek įrašų yra kiekvienoje `Age` grupėje? c) Atspausdinkite lentelę, kurios eilutėse būtų `Group`, stulpeliuose - `Age`, o langeliuose – suminė `Claims` reikšmė. d) Išbrėžkite `Claims` stačiakampes diagramas kiekvienai `District` reikšmei. Identifikuokite išskirtis.

**6.18 UŽDUOTIS.** Su `source` nusikopijuokite duomenų rinkinį possum.R iš R1 direktorijos Data\Maindonald. Jame pateikti oposumų (sterblinių žiurkių) morfometrinių matavimų rezultatai (hdlngth = galvos ilgis, skullw = kaulolės svoris, totlngth = bendras ilgis).

```
> possum[1:5,c(2,4,6:8)]
    site sex hdlngth skullw totlngth
C3     1   m    94.1   60.4     89.0
C5     1   f    92.5   57.6     91.5
C10    1   f    94.0   60.0     95.5
C15    1   f    93.2   57.1     92.0
C23    1   f    91.5   56.3     85.5

pairs(possum[,6:8],col=palette()[as.integer(possum$sex)])
pairs(possum[,6:8],col=palette()[as.integer(possum$site)])
attach(possum); boxplot(hdlngth~site,col=1:7) # Žr. 6.19 pav.
```




6.18 pav. Oposumų morfometrinių matavimų porinės sklaidos diagramos



6.19 pav. `hdlngth` stačiakampės diagramos su visomis `site` reikšmėmis

Patobulinkite 6.18 pav. (ant įstrižainės atspausdinkite atitinkamo kintamojo stačiakampes diagramas (plg. 6.7 pav.)).

Pašalinkite iš `possum` visas eilutes su trūkstamais duomenimis. Apskaičiuokite ir "gražiai" atspausdinkite visų trijų kintamųjų vidurkius ir standartus kiekvienoje `sex` ir `site` grupėse.

**6.19 UŽDUOTIS.** Duomenų rinkinio `Bwages` kintamasis `educ` įgyja penkias reikšmes.

```
> attach(Bwages)
> levels(factor(educ))
[1] "1" "2" "3" "4" "5"
```

Norint išskirti įrašus tik su `educ` lygiu 2, reikia elgtis taip:

```
Bwages[educ==2,]
```

arba

```
Bwages[educ>1&educ<3,]
```

O kaip išskirtumėte įrašus su nelyginėmis `educ` reikšmėmis?

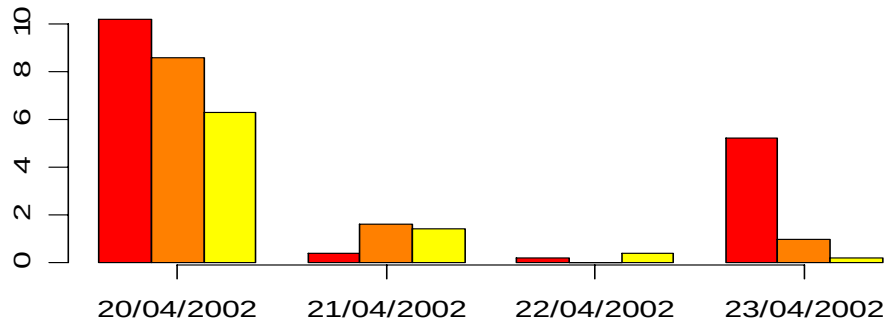
Beje, štai vienas variantas:

```
Bwages[is.element(educ, c(1,3,5)), ]
```

**6.20 UŽDUOTIS**. Kiekvieną dieną kritulių kiekis yra registruojamas trijuose punktuose:

```
      date   p1  p2  p3
20/04/2002 10.2 8.6 6.3
21/04/2002  0.4 1.6 1.4
22/04/2002  0.2 0.0 0.4
23/04/2002  5.2 1.0 0.2
```

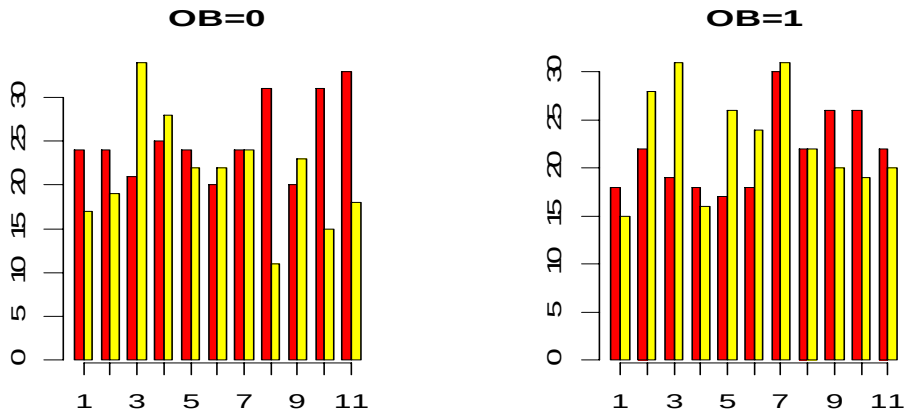
Išbrėžkite tokį grafiką:




6.20 pav. Kritulių kiekio trijuose stebėjimo punktuose stulpelinės diagramos

**6.21 UŽDUOTIS**. Dirbtiniame duomenų rinkinyje `mydata` (tai 1000x3 duomenų sistema) yra trys stulpeliai: OB - 0 reiškia, kad asmuo neturi viršsvorio, 1 – kad turi, GEN – 1 žymi moterį, 2 – vyrą ir AGEGR – tai kintamasis, įgyjantis reikšmes nuo 1 iki 11 (jis žymi amžiaus grupę). a) Generuokite matricą `mydata` su tokiomis sąvybėmis: jei GEN==1, OB dažniau įgyja reikšmę 1 (t.y., moterys dažniau turi viršsvorį); asmenų su viršsvoriu procentas didėja vyresnėse amžiaus grupėse; b) Išbrėžkite stulpelines diagramas, rodančias vyrų ir moterų su viršsvoriu skaičių įvairiose amžiaus grupėse. *Nuoroda*. Plg. skyrelį 10.2. Be to, atliekant b) užduotį, gali praversti `xtabs` funkcija:

```
mytable <- xtabs(~ GEN + AGEGR, data = subset(mydata,OB == 0))
```




6.21 pav. Atsakymas galėtų atrodyti maždaug taip

**6.22 UŽDUOTIS**. Keičiant "ilgą" sistemą į "plačią" (plg. 6.1 užd.) ir atvirkščiai, gali būti naudinga `reshape` funkcija. Remdamiesi šia funkcija (arba kaip nors kitaip), tranformuokite "plačią" sistemą

```
> xx
  Year Jan Feb Mar Apr May Jun Jul Aug Sep Oct Nov Dec
1 1993  -9 -10 -12 -24  -9 -18 -11 -18  -9 -15  -1   0
2 1994  -2  -1 -14 -26 -13 -12 -18 -20 -19 -16  -9 -15
3 1995  -4  -5   2 -19  -9  -3   4  -1   3  -2   0  -8
```

į "ilgą"

```
    Year Month   xx
 1  1993   Jan   -9
 2  1993   Feb  -10
 3  1993   Mar  -12
 4  1993   Apr  -24
 ...
36  1995   Dec   -8
```

(gal būt pravers `Month <- names(xx)[-1]` eilutė).

**6.23 UŽDUOTIS**. Matricoje

```
vv <- matrix(rnorm(100),ncol=4)
```

yra pateikti keturmačio vektoriaus stebėjimų rezultatai. Šio vektoriaus kovariacinę (koreliacinę) matricą galima suskaičiuoti su `Var <- var(vv)` (atitinkamai su `Cor <- cor(vv)`). Dabar tarkime, kad matricos `vv` nežinome, bet žinome tik jos kovariacinę $4 \times 4$ matricą `Var`. Apskaičiuokite koreliacinę matricą `Cor`.

# 7. Centrinė ribinė teorema ir didžiųjų skaičių dėsnis

Kartais sakoma, kad tikimybininkai turi vieną dievą – normalųjį arba Gauso skirstinį. Greitai pamatysime, kad šis teiginys nėra be pagrindo.

## 7.1. Centrinė ribinė teorema (vienmatis atvejis)

Tarkime, kad $\kappa_n$ yra sėkmių skaičius po $n$ Bernulio eksperimentų su sėkmės tikimybe $p$. Gerai žinoma, kad tikimybė $P(\kappa_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,...,n,$ o tikimybė

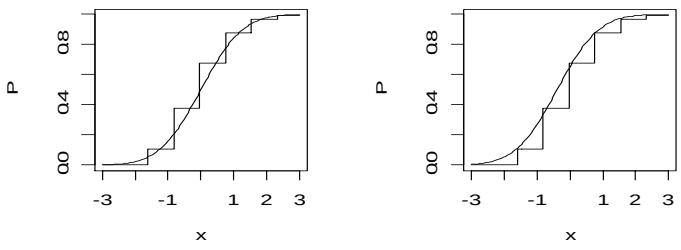
$$P(\kappa_n \le x) = \begin{cases} 0, & , x < 0, \\ \sum_{k=0}^{[x]} C_n^k p^k q^{n-k} & , x \in [0,n], \\ 1, & , x \ge n \end{cases}$$

(čia $[x]$ žymi sveikąją skaičiaus $x$ dalį). Kai $n$ nėra didelis, šias tikimybes nėra sunku apskaičiuoti tiesiogiai, tačiau augant $n$ skaičiavimai darosi vis sudėtingesni[1]. A. de Muavras 1718 m. ir nepriklausomai nuo jo P. Laplasas 1812 m. įrodė, kad, kai $n$ didelis, abi šias tikimybes galima gana sėkmingai apskaičiuoti, naudojant normalųjį skirstinį. Pavyzdžiui,

$$P(\kappa_n \le x^*) = P(\frac{\kappa_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{x^* - np}{\sqrt{npq}} = x) = P(\kappa_n \le x\sqrt{npq} + np) \approx \Phi(x),\ x \in R.$$

(čia $\Phi$ yra standartinio normaliojo skirstinio funkcija). Vietoje matematinio šio fakto įrodymo, pateiksime grafines iliustracijas.

```
n <- 10
p <- 0.2
x <- seq(-3,3,length=100)
P <- pbinom(x*sqrt(n*p*(1-p))+n*p,n,p)  # pbinom(x,n,p) skaičiuoja
                                        # tikimybę P(κn≤x)
plot(x,P,type="S")  # Brėžia laiptuotą ("S"=Step) grafiką
lines(x,pnorm(x))   # pnorm(x)=Φ(x)
```



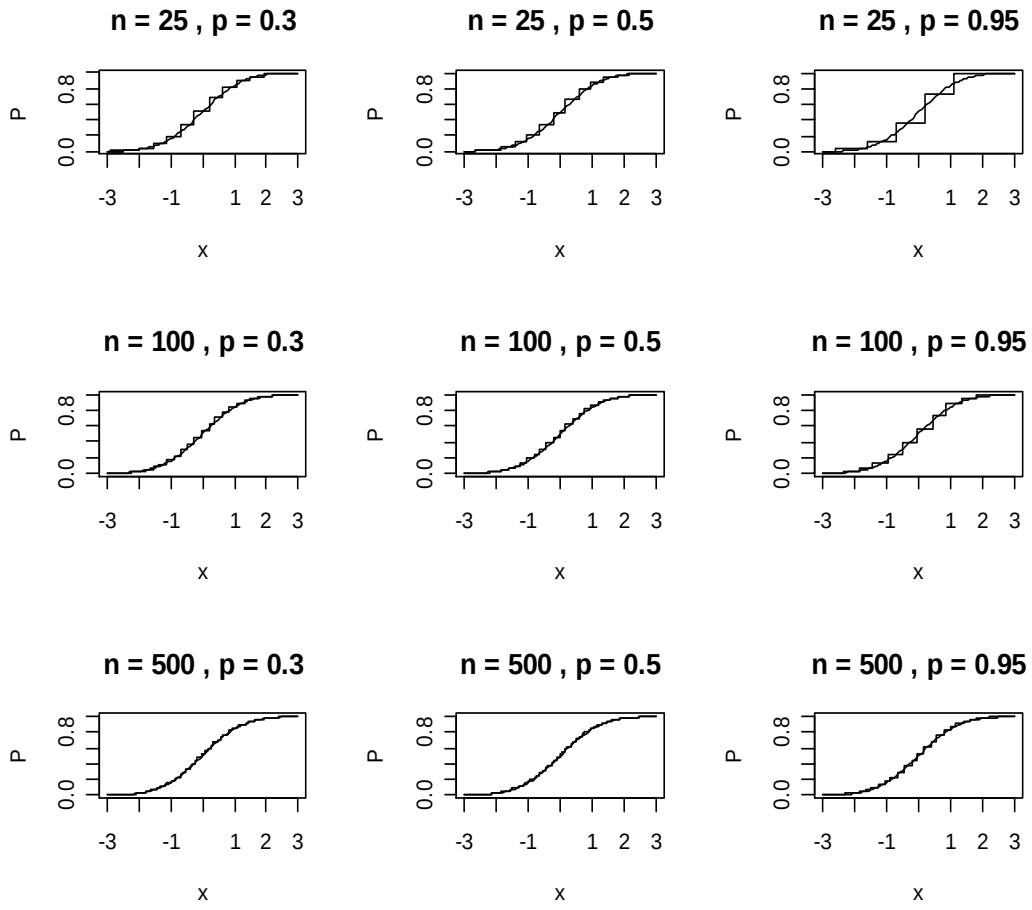

7.1 pav. Binominio dėsnio normalioji aproksimacija (be Yates'o pataisos kairėje ir su Yates'o pataisa dešinėje)

[1] Komputerių laikais tokie skaičiavimai nėra didelė problema. Svarbu tai, kad aproksimavomą normaliuju skirstiniu galima taikyti ne tik $\kappa_n$ skirstiniui.

Matome, kad $\Phi$ grafikas yra gana arti (normuoto) binominio. Tais atvejais, kai $x^*$ yra sveikas skaičius (ir *n* nėra didelis), tikslinga įvesti Jeitso diskretumo pataisą – vietoje $\Phi(x)$ imti $\Phi(x+1/2\sqrt{npq})$ (7.1 pav., grafikas dešinėje).

Normaliosios aproksimacijos tikslumas gerėja didėjant *n* (tikslumas taip pat geresnis, kai *p* arti 0,5). Norėdami tuo įsitikinti, parašykime funkciją `b.sim` (žemiau yra tvarkingo funkcijos rašymo pavyzdys; deja, tai ne Notepad'o darbas…):

```
b.sim <- function()
{
#function b.sim
       opar <- par(mfcol = c(3, 3))
       on.exit(par(opar))
       x <- seq(-3, 3, length = 100)
       for(p in c(0.3,0.5, 0.95)) {            # Išorinis ciklas
              for(n in c(25, 100, 500)) {      # Vidinis ciklas
                     P <- pbinom(x * sqrt(n * p * (1 - p)) + n * p, n, p)
                     plot(x, P, type = "S", main = paste("n =", n, ", p =", p))
                     lines(x, pnorm(x))
              }
       }
}
```



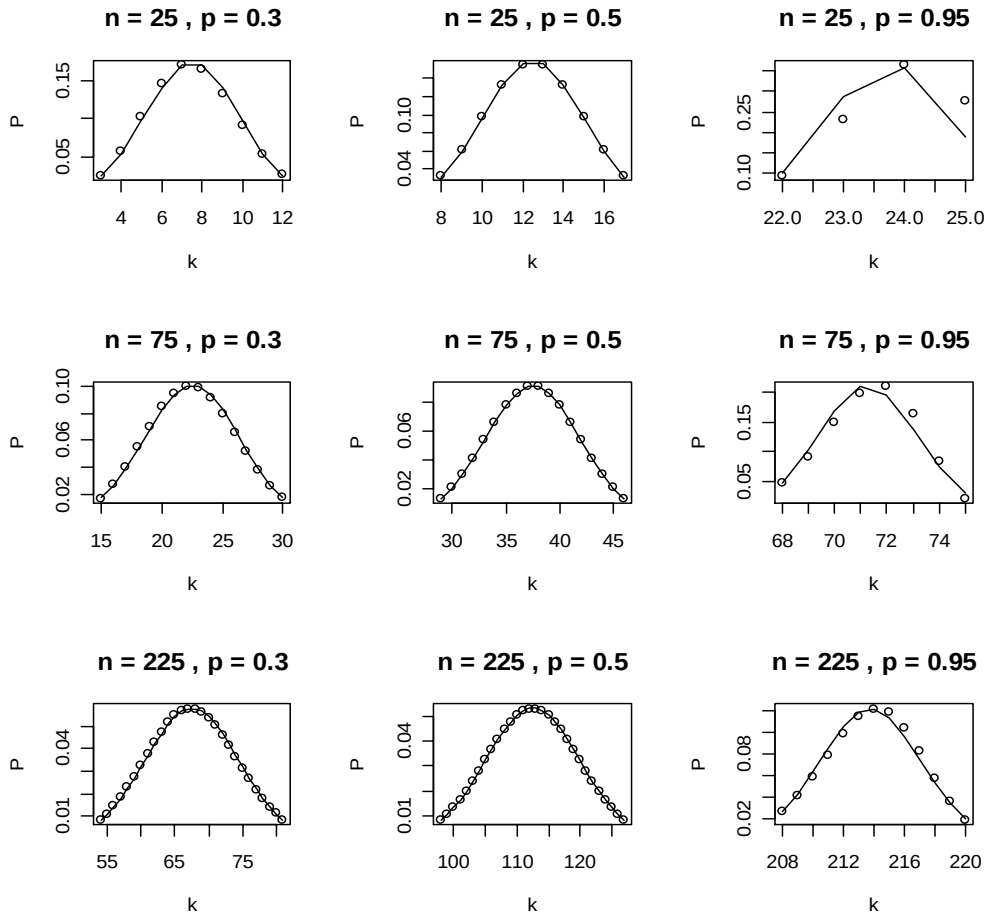

7.2 pav. Binominių skirstinių funkcijų normaliosios aproksimacijos

Tiesą sakant, aproksimacijų tikslumo skirtumai tarp *p*=0,3, 0,5 ir 0,95 nelabai pastebimi – akis blogai skiria skirstinio funkcijas (integralines charakteristikas), ji geriau pastebi

diferencialinius skirtumus (pvz., skirtumą tarp tikimybės $P(\kappa_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ir jos normaliojo artinio $\varphi((k-np)/\sqrt{npq})/\sqrt{npq}$). Parašysime atitinkamą funkciją `bb.sim`.

```
bb.sim <- function(){
#function bb.sim
        opar <- par(mfcol = c(3, 3))
        on.exit(par(opar))
        for(p in c(0.3, 0.5, 0.95)) {
                for(n in c(25, 75, 225)) {
                        k <- ceiling(n * p - 2 * sqrt(n * p * (1 - p))):floor(n
* p + 2 * sqrt(n * p * (1 - p)))
                        P <- dbinom(k, n, p) # dnorm(k,n,p)=P(κn=k)
                        plot(k, P, main = paste("n =", n, ", p =", p))
                        lines(k,  dnorm((k  -  n  *  p)/sqrt(n  *  p  *  (1  -
p)))/sqrt(n * p * (1 - p)))                    # dnorm(x)=φ(x)
                }
        }
}
```

Priminsime, kad standartinis normalus skirstinys yra praktiškai sukoncentruotas intervale (-2,+2) (iš tikrųjų, `> pnorm(2)-pnorm(-2)` [1] 0.9544997), todėl $k$ vidiniame cikle kinta tarp $np-2\sqrt{npq}$ ir $np+2\sqrt{npq}$.




7.3 pav. Binominių tikimybių normalioji aproksimacija

7.3 pav. matome, kad, kai $p$=0.5, normalioji aproksimacija yra tiksli jau kai $n$=25; jei $p$=0,3 – $n$ turi būti lygus bent 75, o kai $p$=0,95 net $n$=225 negarantuoja didelio tikslumo (kai $p$ arti 0 ar 1, geresnė yra Puasono aproksimacija).

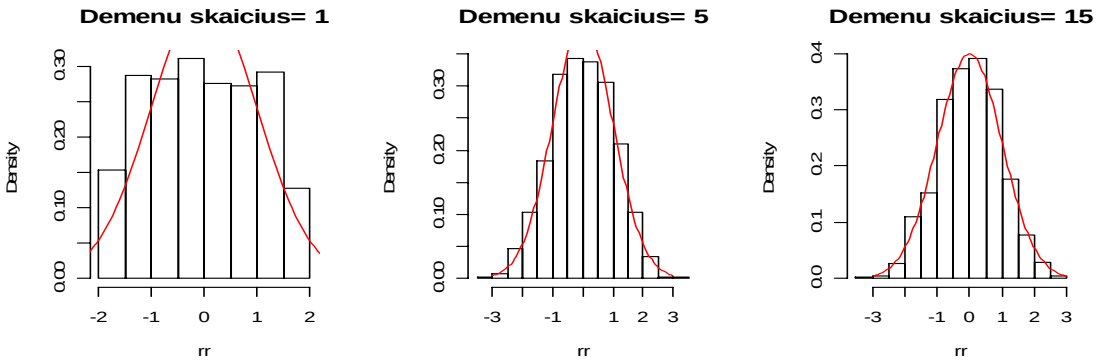
Muavro ir Laplaso teorema yra atskiras vadinamosios centrinės ribinės teoremos (CRT) atvejis. Tiksliau kalbant, tarkime, kad

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ su tikimybe } p, \\ 0, \text{ su tikimybe } q = 1 - p, \end{cases}$$

yra nepriklausomų Bernulio a.d. seka; tuomet sėkmių skaičius Bernulio modelyje $\kappa_n = S_n = X_1 + ... + X_n$. Pasirodo, kad vietoje Bernulio a.d. galime paimti beveik bet kokius[2] nepriklausomus vienodai pasiskirsčiusius a.d. – kai $n$ didelis, jų normuota suma $Z_n = (S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ turės (beveik) standartinį normalųjį skirstinį (tai ir vadinama CRT). Štai paaiškina, kodėl normalusis dėsnis taip dažnai sutinkamas gyvenime – stebimą reiškinį nusako daug maždaug vienos svarbos priežasčių.

"Įrodykime" CRT nepriklausomų a.d., turinčių tolygų skirstinį intervale [-1,+1], sekai. Deja, jau dviejų tokių dydžių sumos tankio išraiška gana sudėtinga[3], todėl sumos tankį pakeisime histograma.

```
uni.sim <- function(){
opar <- par(mfcol = c(1, 3))
on.exit(par(opar))
for(i in c(1,5,15)){      # Ciklas: imsime 1, 5 ar 15 dėmenų
rr <- numeric(1000)       # Ilgio 1000 nulinis vektorius
for(n in 1:1000) {rr[n] <- sum(runif(i,-1,1))}
rr <- rr*sqrt(3/i)        # Normuota suma
# Žemiau pateiktos eilutės skirtos normalumui įrodyti; vietoje hist
# galėtume vartoti ir eda.shape funkcija
hist(rr,prob=T,main=paste("Dėmenu skaicius=",i))
k <- seq(-3,3,length=100)
lines(k, dnorm(k),col=2)}}
```




7.4 pav. Jau kai dėmenų penki, normuota suma $Z_5$ yra beveik normali

[2] Vienintelis reikalavimas: baigtinė a.d. $X_i$ dispersija. Beje, kai kurie dydžiai ekonometrijoje turi tiek sunkias uodegas, kad ši sąlyga nėra patenkinta.

[3] Graži CRT iliustracija (ji remiasi tiksliomis tankio formulėmis, bet parašyta ne R kalba) yra http://www.statisticalengineering.com/central_limit_theorem.htm

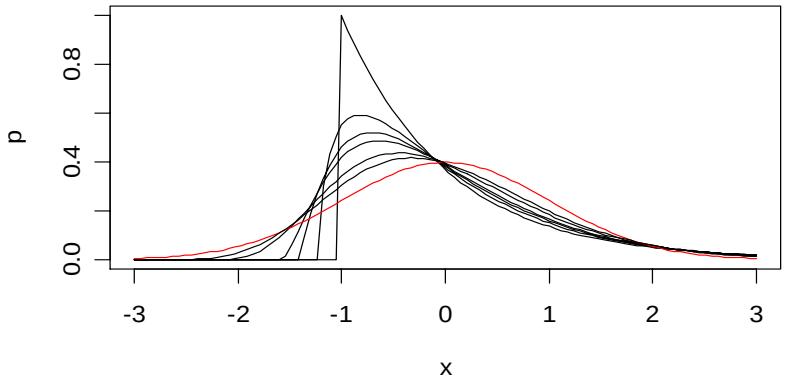
Panagrinėkime dar vieną pavyzdį. Tarkime, n.v.p.a.d. $X_i$, $i=1,...,n$, turi tokį pat skirstinį, kaip ir standartinio normaliojo a.d. kvadratas $N^2$. Galėtume, kaip ir praeitame pavyzdyje, nagrinėti jų sumų histogramas, tačiau šį kartą pasiremsime tuo, kad $S_n$ skirstinys yra žinomas – tai vadinamasis $\chi_n^2$ (chi kvadrato su *n* laisvės laipsniais (l.l.)) skirstinys. Kadangi $\chi_n^2$ yra sumos skirstinys, todėl, kai *n* didelis, jis turėtų beveik sutapti su normaliuoju. Tiksliau[4],

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\chi_n^2 - E\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P(\chi_n^2 < \sqrt{2n}x + n) = \Phi(x),$$

arba, diferencijuojant šį reiškinį ir pereinant prie tankių[5],

$$\lim_{n\to\infty} p_{\chi_n^2}(\sqrt{2n}x + n)\cdot\sqrt{2n} = \varphi(x).$$

Išbrėšime kelių tankių grafikus ir patikrinsime šį teiginį.




7.5 pav. Normuoto $\chi_n^2$ tankis, kai n=2,3,4,5,10 ir 20 (juodos linijos) ir standartinis normalusis tankis (raudona linija) ( $X_1$ tankis labai nesimetriškas, todėl konvergavimas lėtas)

**7.1 UŽDUOTIS**. Nagrinėkime normuotą sumą $Z_n = (S_n - nEX_1)/\sqrt{nDX_1}$ ; čia $S_n$ yra n.v.p.a.d. $X_1,...,X_n$ suma. Palyginkite $P(Z_n \le x)$ ir $\Phi(x)$, $x = -3; -2,9; -2,8, ..., 2,9; 3$ kai $X_1$ yra 1) Bernulio a.d. su $p = 0,6;\ n = 50000$ (remkitės tuo, kad $S_{50000}$ turi binominį skirstinį su parametrais *n*=50000, *p*=0,6), 2) $\chi_1^2$ , $n = 1000$ (remkitės tuo, kad $S_{1000}$ turi $\chi^2$ skirstinį su 1000 l.l.), 3) eksponentinis a.d. su tankiu $\alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$, `rate` parametru ($\alpha$ =)2 (žr. `?rexp`) ir *n*=1000 (remkitės tuo, kad $S_{1000}$ turi gama skirstinį su

[4] $E\chi_n^2 = n,\ D\chi_n^2 = 2n.$

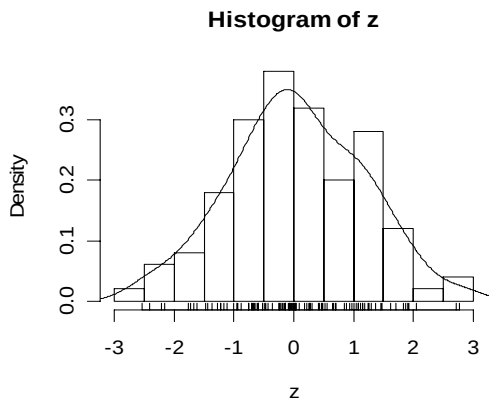
[5] Beje: jei CRT galioja skirstinio funkcijoms (integralinė teorema), tai iš čia ne visuomet išplaukia ribinė teorema tankiams (lokalinė teorema)!

parametrais (žr. `?rgamma`) `shape`=1000 ir `scale`=1/$\alpha$ ). Atsakymą pateikite penkių stulpelių matricos pavidalu (pirmajame stulpelyje patalpinkite *x* reikšmes).

7.2 **UŽDUOTIS**. Nagrinėkime Pareto atsitiktinius dydžius (žr. 9 skyrių) su rodikliais 1) *c*=3, 2) *c*=2 ir 3) *c*=1. Remdamiesi histogramomis ir kitais jums prieinamais būdais, patikrinkite ar galioja šiems a.d. CRT.

7.3 **UŽDUOTIS**. Pateiksime kelis būdus, kaip rasti visų matricos stulpelių sumas:

```
> suma <- function(n)
      {# Stulpelių bus n
       # Eilučių bus 100
      m <- matrix(runif(100 * n, -1, 1), ncol = n)
      laikas <- numeric(5)
      #1 būdas (ciklas)
      dabar <- proc.time()[3]
      s <- NULL # Stulpelių sumų vektorius
      for(i in 1:n) {s[i] <- sum(m[, i])}
      laikas[1] <- proc.time()[3] - dabar
      # Dabar išbrėšime (normuotų) sumų histogramą
      z <- s/sqrt(100/3) # Normuojame sumas (CRT!)
      hist(z,probability=T)
      rug(z) # Pažymi s reikšmes ant x ašies
      lines(density(z))
      #2 būdas (apply funkcija)
      dabar <- proc.time()[3]
      s <- numeric(n) # Kitaip užrašytas stulpelių sumų vektorius
      s <- apply(m, 2, sum)
      laikas[2] <- proc.time()[3] - dabar
      #3 būdas
      dabar <- proc.time()[3]
      s <- NULL
      s <- drop(rep(1, nrow(m)) %*% m)
      laikas[3] <- proc.time()[3] - dabar
      #4 būdas (colSums kreipiasi į greitą vidinę funkciją)
      dabar <- proc.time()[3]
      s <- NULL
      s <- colSums(m)
      laikas[4] <- proc.time()[3] - dabar
      #5 būdas (lapply funkcija)
      dabar <- proc.time()[3]
      s <- NULL
      s <- unlist(lapply(split(m, col(m)), sum))
      laikas[5] <- proc.time()[3] - dabar
      cat(" Komputavimo trukme:\n", round(laikas, 4), "\n")

}


> suma(100) # Bus 100 stulpelių
 Komputavimo trukme:
 0.09 0.11 0 0.02 0.08
```




7.6 pav. Suglodintas empirinis z tankis panašus į normalųjį (kodėl?)

Pažymėsime, kad jei šią funkciją pakartotume kelis kartus, gautume skirtingus komputavimo laikus. Beje, šį kartą ciklas nėra pats lėčiausias būdas!

O dabar pati UŽDUOTIS. Pakeistite šią funkciją taip, kad ji skaičiuotų eilučių sumas. Išbrėžkite keturias histogramas viename lange, kai n=1, 2, 4 ir 10. Matome, kad kai *n* didėja, z histograma darosi vis panašesnė į normaląją. Kodėl? (Užuomina: CRT!)

# 7.2. Centrinė ribinė teorema (daugiamatis atvejis)

CRT galioja ir daugiamačiu atveju. Tiksliau, jei stebime (pvz., dvimačių) atsitiktinių vektorių seką $(X_{1i}, X_{2i})$, $i = 1,...,n,$ tai "gerais" atvejais jų normuotos sumos $Z_n$ konverguoja į dvimatį normalųjį skirstinį (o "dar geresniais" atvejais - $Z_n$ tankis konverguoja į dvimatį normalųjį tankį $\varphi_{\vec{a},\Sigma}(\vec{x})$). Čia

$$\varphi_{\vec{a},\Sigma}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{x}\Sigma^{-1}\vec{x}^T\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

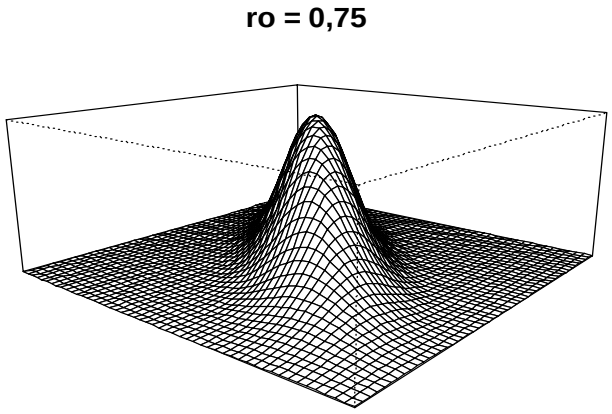
$\vec{a}$ yra vidurkių vektorius, o $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ - kovariacijos matrica. Žemiau yra pateikta funkcija `mvdnorm`, kuri skaičiuoja šį tankį. Atkreipiame dėmesį į dar vieną galimybę: visiems funkcijos argumentams nurodytos standartinės reikšmės (pvz., pirmosis komponentės vidurkis `a1=0`), jei norime, kad koreliacijos koeficientas $\rho$ būtų lygus, tarkime, 0,75, turime rašyti `mvdnorm(…,ro=0.75)`.

```
mvdnorm <- function(x1,x2,a1=0,a2=0,s1=1,s2=1,ro=0){
# funkcija mvdnorm
# x1,x2 - bet kokie (skaiciai)
# a1,a2 - bet kokie
# s1,s2 - teigiami
# ro kinta nuo -1 iki +1
F1 <- 1/(2*pi*s1*s2*sqrt(1-ro^2))
F2 <- -1/(2*(1-ro^2))
```

```
S1 <- (x1-a1)^2/s1^2
S2 <- -2*ro*(x1-a1)*(x2-a2)/(s1*s2)
S3 <- (x2-a2)^2/s2^2
z <- F1*exp(F2*(S1+S2+S3))
z
}
```

Deja, jau žinome, kad daugiamačiu atveju grafinės galimybės gana ribotos. Štai vienas iš variantų (funkcija `persp`, ji turi labai daug opcijų), leidžiantis vizualizuoti dvimatę tankio funkciją. Prieš kreipdamiasi į funkciją `persp`, iš vektorių `x1` ir `x2` reikšmių turime sukurti stačiakampę gardelę ir kiekviename jos taške apskaičiuoti funkciją `mvdnorm` (tai atlieka funkciją `outer`, žr. žemiau; daugiklis 10 išryškina tankio kalvos pavidalo formą).

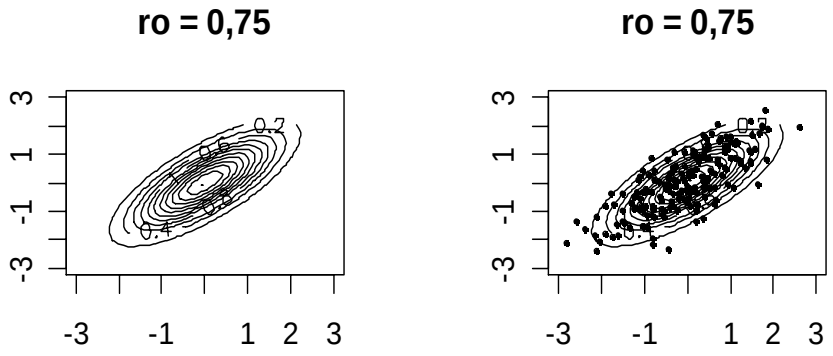
```
x1 <- seq(-3,3,len=50)
x2 <- x1
z <- 10*outer(x1,x2,function(x1,x2) mvdnorm(x1,x2,ro=0.75))
persp(x1,x2,z,theta=130,phi=15,scale=FALSE,axes=FALSE,main="ro=0,75")
```




7.7 pav. Dvimačio normaliojo tankio grafikas

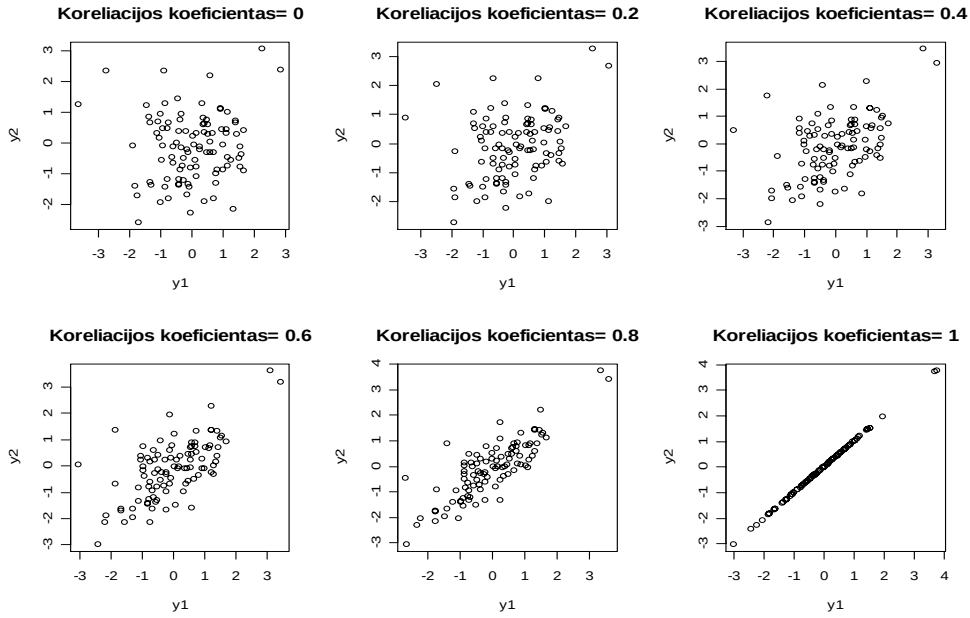
Geresnį supratimą apie tankio paviršiaus formą susidarysime, išbrėžę jo lygio linijas. Tai galime atlikti su funkcija `contour` (žr. 7.8 pav žemiau: dvimačio normaliojo tankio lygio linijos yra elipsės; atkreipsime dėmesį: kuo $\rho$ modulis arčiau 1, tuo elipsės labiau "ištemptos"). Beje, `MASS` pakete yra funkcija `mvrnorm`, kuri generuoja daugiamačius normaliuosius a.d.. 7.8 pav. (dešinėje) lygio linijų grafikas yra papildytas sugeneruotų taškų vaizdais. Matome, kad tai būdingas sklaidos diagramos paveikslas, kitais žodžiais, dažnai stebime būtent dvimatį normalųjį skirstinį.

```
par(mfrow=c(1,2))
contour(x1,x2,z,main="ro = 0,75")
library(MASS)
Sigma <- matrix(c(1,0.75,0.75,1),2,2)
mvn <- mvrnorm(100,c(0,0),Sigma))
contour(x1, x2, z,main="ro = 0,75")
points(mvn[,1],mvn[,2],pch=16,cex=0.5)
```




7.8 pav. Dvimačio normaliojo tankio grafiko lygio linijos

Koreliacijos koeficientas $\rho$ rodo vektoriaus koordinčių ryšio tamprumą (jei stebime dvimatį normalųjį a.d., sąlyga $\rho = 0$ yra ekvivalenti koordinačių nepriklausomumui). Nesunku įsitikinti, kad tik tuomet, kai $|\rho|$ didesnis už maždaug 0,6, elipsinė struktūra darosi ryškesnė (jei $\rho$ lygus, pvz., 0,8, tai, žinant stebimojo atsitiktinio vektoriaus pirmąją koordinatę `y1`, galima gana tiksliai prognozuoti antrosios koordinatės `y2` reikšmę).



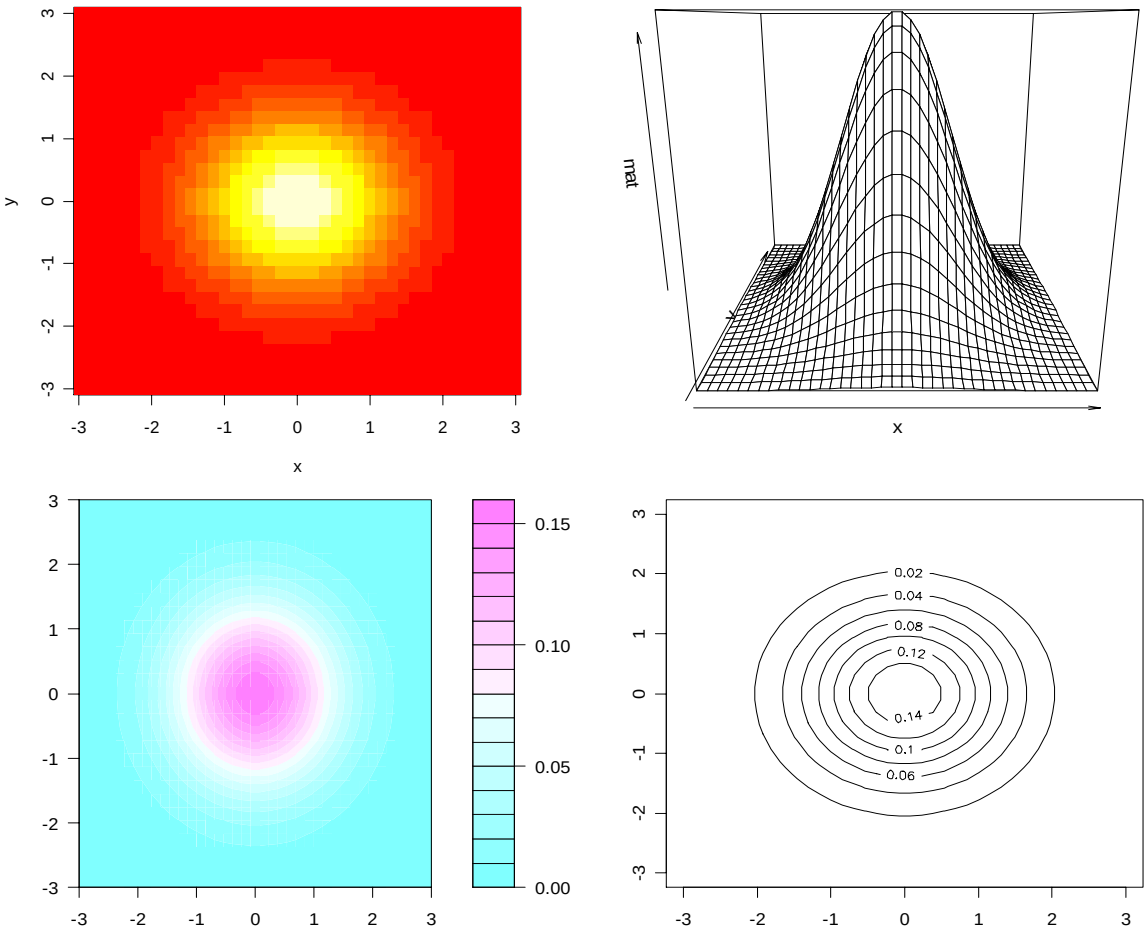

7.9 pav. Dvimačio normaliojo a.d. sklaidos diagramos su įvairiomis ρ reikšmėmis

7.4 **UŽDUOTIS**. Išbrėžkite 7.9 paveikslą.

Dar keli žodžiai apie dviejų kintamųjų funkcijų (jų grafikai – paviršiai) vizualizaciją. Jau minėjome du variantus: funkcijas `persp` ir `contour`. Čia aptarsime dar dvi funkcijas: `image` ir `filled.contour`.

```
par(mfrow=c(1,1))
dens <- function(x, y) { dnorm(x) * dnorm(y) }
```

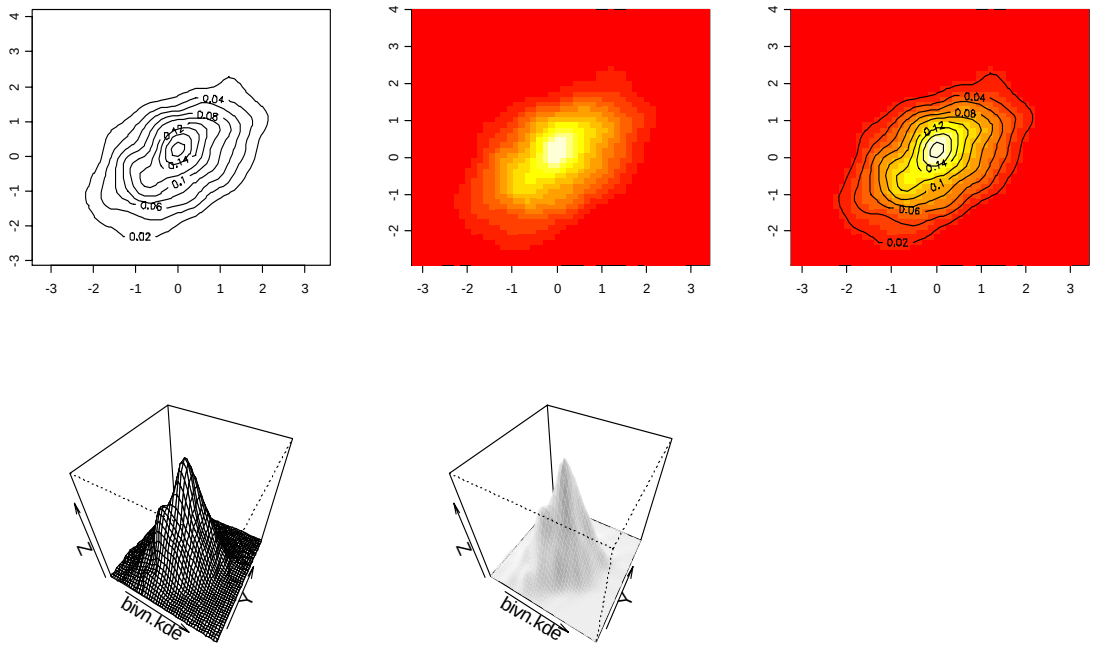
```
# Kuo ypatingas šis dvimatis normalusis tankis? Užuomina:
# nepriklausomumas.
x <- seq(-3, 3, len = 40)
y <- seq(-3, 3, len = 30)
g <- expand.grid(x, y)
mat <- matrix(dens(g[,1], g[,2]), nrow = 40, ncol = 30)
# Dvi aukščiau esančios eilutės yra funkcijos outer ekvivalentas
image(x,y,mat)
win.graph() # Atidaro naują grafinį langą
persp(x,y,mat)
win.graph()
filled.contour(x,y,mat)
win.graph()
contour(x,y,mat)
```




7.10 pav. Keturi dvimačio normaliojo tankio grafikai: `image` (kairėjė viršuje), `persp` (dešinėje viršuje), `filled.contour` (kairėje apačioje) ir `contour` (dešinėjė apačioje)

Vėliau visus papildomai atidarytus grafinius langus galima uždaryti su `dev.off()`.

**7.5 UŽDUOTIS**. Aukščiau esančiame paveiksle išbrėžti teorinio dvimačio normaliojo tankio grafikai. Parašykite programą, kuri išbrėžtų žemiau pateiktus suglodinto "empirinio tankio" grafikus.




7.11 pav. Dvimačio empirinio normaliojo tankio branduolinio įverčio įvairūs vizualizacijos tipai

*Nuoroda*. `MASS` bibliotekoje yra funkcija `mvrnorm`, kuri generuoja dvimačius normaliuosius a.d. Ten taip pat yra funkcija `kde2d`, kuri pateikia branduolinį dvimačio empirinio tankio įvertį (maždaug taip: `bivn.kde <- kde2d(bivn[,1], bivn[,2], n = 50)`). Brėždami paskutinį grafiką, pasinaudokite opcija `shade = 0.1`.

## 7.3. Didžiųjų skaičių dėsnis

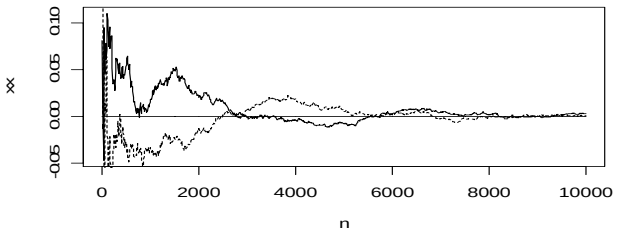
Be CRT tikimybių teorijoje svarbų vaidmenį vaidina dar viena didelė ribinių teoremų klasė – tai didžiųjų skaičių dėsniai (DSD). Jei $X_1, X_2, \ldots$ yra n.v.p.a.d. seka su vidurkiu $EX_i \equiv a$, tai galima įrodyti, kad $S_n / n \to a$ (pagal tikimybę ir netgi, kas dar stipriau, su tikimybe 1), kai $n \to \infty$. Šitai ekvivalentu tam, kad

$$F_{(S_n/n)-a}(x) \to \begin{cases} 0, \ kai \ \ x \le 0, \\ 1, \ kai \ \ x > 1. \end{cases}$$

Iš DSD išplaukia, kad imties vidurkis $\overline{x}$ (arba dispersija $s^2$) konveguoja į populiacijos vidurkį $a$ (atitinkamai, dispersiją $\sigma^2$), santykinis dažnis konverguoja į tikimybę, empirinė skirstinio funkcija – į teorinę skirstinio funkciją. Didžiųjų skaičių dėsniu yra pagrįstas Monte Carlo metodas (žr. 3.3 skyrelį).

DSD pailiustruosime dviem pavyzdžiais. Pirmiausiai, parodysime, kad didinant dėmenų skaičių, imties vidurkis artėja į populiacijos vidurkį.

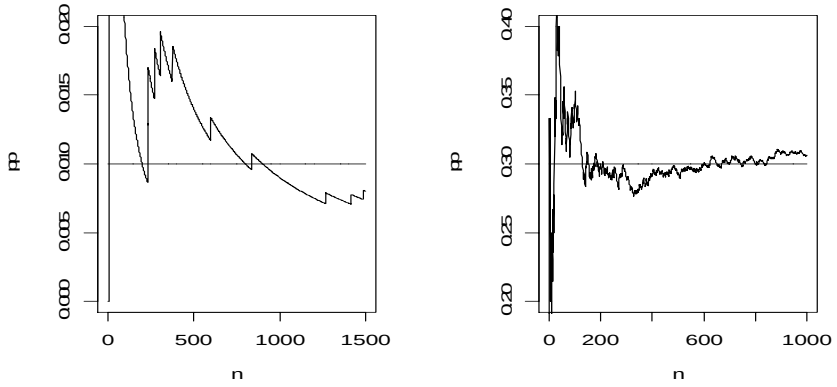
```
DSD <- function(){
# funkcija DSD
n4 <- rnorm(10^4)    # Generuojame 10000 standartinių normaliųjų ats.
                     # skaičių
xx <- numeric(1000)
for(i in 1:1000) xx[i] <- mean(n4[1:(10*i)])
                 # Ciklas: kaskart imtį padidiname dešimčia (jei
                 # ciklo turinys telpa į vieną eilutę, figūrinių
                 # skliaustų nereikia)
n <- seq(10,10000,10)
plot(n,xx,type="l")
n4 <- rnorm(10^4)    # Pakartojame visą procedūrą su kita seka
xx <- numeric(1000)
for(i in 1:1000) xx[i] <- mean(n4[1:(10*i)])
n <- seq(10,10000,10)
lines(n,xx,lty=2)
lines(n,rep(0,1000))
}
```




7.12 pav. Imties vidurkis (nemonotoniškai!) artėja
į teorinį vidurkį (lygų nuliui)

**7.6 UŽDUOTIS**. Štai dinaminis ("kaip kine") aukščiau pateiktos programos variantas, perrašytas Bernulio atsitiktiniams dydžiams (atitinkama DSD teorema vadinama Bernulio teorema, žr. [Ku, 145 p.]).

```
Bernoulli <- function(p,N=1000,lo=max(0,p-0.1),up=min(1,p+0.1))
{
# p - sekmes tikimybe, N - bandymu skaicius,
# lo - y ašies minimumas, o up - maksimumas
set.seed(4)
n <- 1:N
pp <- rep(p,N)
cum.b <- cumsum(rbinom(N,1,p))
plot(n,pp,xlim=c(1,N),ylim=c(lo,up),type="l")
   for(i in 1:(N-1)) segments(i,cum.b[i]/i,i+1,cum.b[i+1]/(i+1))
cat("Sekmes tikimybes p ivertis \n(santykinis daznis)=", cum.b[N]/N,
"\n")
}
par(mfrow=c(1,2))
Bernoulli(0.01,N=1500,lo=0,up=0.02)
# Sekmes tikimybes p ivertis
# (santykinis daznis)= 0.008
Bernoulli(0.3)
# Sekmes tikimybes p ivertis
# (santykinis daznis)= 0.306
```



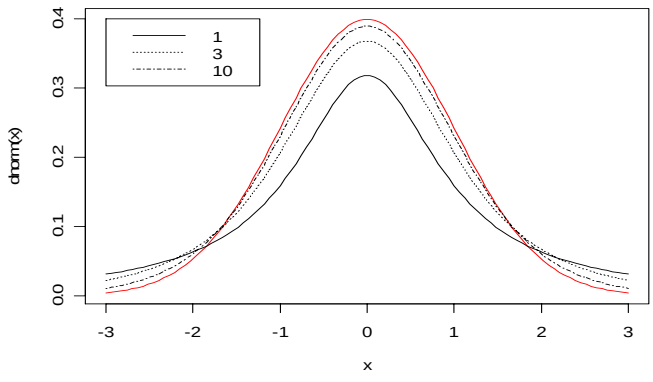

7.13 pav. Tipiškos santykinių dažnių kitimo trajektorijos (kairėje p=0,01, dešinėje p=0,3)

O dabar pati UŽDUOTIS: išsiaiškinkite visus programos žingsnius ir pakomentuokite grafikus. Grafikams suteikite antraštes. Parašykite šios programos variantą Košy atsitiktiniams dydžiams. Pakomentuokite.

Antrajame pavyzdyje aptarsime Student'o su $n$ l.l. skirstinį. Pagal apibrėžimą, šio a.d. tankis sutampa su a.d.

$$T_n = \frac{N}{\sqrt{(N_1^2 + N_2^2 + ... + N_n^2)/n}} = \frac{N}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$$

tankiu; čia $N, N_1, N_2, ..., N_n$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji a.d. Pagal DSD vardiklis $\chi_n^2 / n$ turi artėti į $EN^2 = 1$, t.y. $T_n$ tankis tikriausiai artės prie $N$ tankio. Pasirodo, kad taip ir yra.



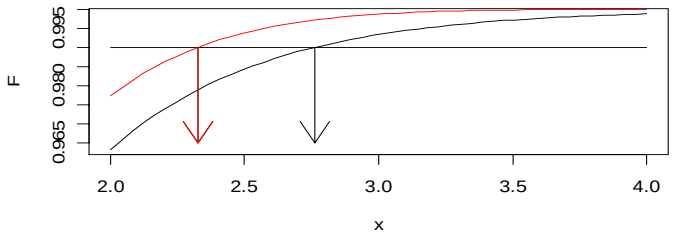

7.14 pav . Student'o tankio su 1, 3 ir 10 l.l. grafikai; kai l.l. skaičius neaprėžtai didėja, Student'o tankis artėja prie standartinio normaliojo (raudonas grafikas)

**7.7 UŽDUOTIS**. Nubrėžkite 7.14 paveikslą.

$T_n$ tankio uodegos sunkesnės už normaliojo, todėl jo didelių $\alpha$ reikšmių kvantiliai (priminsime: skaičius $x_\alpha$ vadinamas a.d. $X$ $\alpha$ eilės kvantiliu, jei jis tenkina lygybę $P(X < x_\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0,1)$ ) bus didesni už atitinkamus normaliuosius. Šitai galima

patikrinti bent trim būdais: 1) brėžiant kvantilių grafiką (žr. 4 skyrių); 2) lyginant skirstinio funkcijas (žr. 7.14 pav.); štai atitinkamos komandos:

```
x <- seq(2,4,length=50)
F <- pt(x,10)            # pt(x,10) skaičiuoja Stjudento su 10 l.l.
                         # skirstinio f-ją "taške" x[6]
plot(x,F,col=1,type="l")
lines(x,pnorm(x),col=2)
arrows(qnorm(0.99),0.99,
qnorm(0.99),0.965,col=2)
# Žr. ?arrows
arrows(qt(0.99,10),0.99,
qt(0.99,10),0.965)
```




7.15 pav. Standartinio normaliojo (raudonas) ir Student'o su 10 l.l. (juodas) skirstinio funkcijų grafikai ( *x* tarp 2 ir 4)

matome, kad standartinio normaliojo dėsnio 0,99 kvantilis (pažymėtas raudona strėle – jis lygus maždaug 2,35) yra mažesnis už Stjudento su 10 l.l. atitinkamą kvantilį (juoda strėlė – tai maždaug 2,75)). Žinoma, galime ir 3) tiesiogiai apskaičiuoti kvantilius (rezultatams suteiksime lentelės pavidalą)

```
alpha <- seq(0.8,0.99,0.01)
t10 <- round(qt(alpha,10),2)
n <- round(qnorm(alpha),2)
matrix(c(t10,n),nrow=2,byrow=T,dimnames=list(c("t10","norm"),alpha))

      0.8 0.81 0.82 0.83 0.84 0.85 0.86 0.87 0.88 0.89
t10  0.88 0.92 0.96 1.00 1.05 1.09 1.14 1.19 1.25 1.31
norm 0.84 0.88 0.92 0.95 0.99 1.04 1.08 1.13 1.17 1.23

      0.9 0.91 0.92 0.93 0.94 0.95 0.96 0.97 0.98 0.99
t10  1.37 1.44 1.52 1.60 1.70 1.81 1.95 2.12 2.36 2.76
norm 1.28 1.34 1.41 1.48 1.55 1.64 1.75 1.88 2.05 2.33
```

**7.8 UŽDUOTIS**. Papildykite šią lentelę naujomis eilutėmis (kai l.l. skaičius kinta nuo 2 iki "daug") ir išbrėžkite kvantilių elgesį iliustruojantį grafiką (x ašyje atidėkite `alpha`, o y ašyje `t2`, `t3`, …, `t10`, …, `norm`).

**7.9 UŽDUOTIS**. Tarkime, kad nepriklausomi a.d. $X_i$ , $i$=1,…,6, įgyja tris reikšmes: 0 su tikimybe 0,3, 1 su 0,1 ir 2 su 0,6. Tarkime, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$. Naudodamiesi Monte-Karlo metodu (jis – DSD išvada!), apskaičiuokite apytiksles $S_1,...,S_6$ reikšmių tikimybių reikšmes ir išbrėžkite jų grafikus.

**7.10 UŽDUOTIS**. Išsiaiškinkite ir pakomentuokite šias eilutes:

```
foo <- matrix(0, 49, 100)
for (i in 1:49)
    foo[i, ] <- density(rnorm(5000,mean = sqrt(i),sd = i^0.25),
    from = sqrt(1)-3*1, to = sqrt(49)+3*49^0.25, n = 100)$y
```

[6] Priminsime, kad R pagrįstas vektorine aritmetika (čia x iš tikrųjų yra vektorius).

```
persp(foo, theta = 80, phi = 30, scale = FALSE, ltheta = -120, shade =
0.75, border = NA)
```

Papildykite šią programą keliomis eilutėmis, kurios išbrėžtų gauto paviršiaus kontūrines linijas.

**7.11 UŽDUOTIS**. Sunku įsitikinti imties normalumu, remiantis vien histograma (nes yra daug varpo pavidalo tankių – normalusis, Student‘o tankių šeima, Cauchy). Tam geriau tinka kvantilių-kvantilių grafikas. Išsiaiškinkite ir pakomentuokite vieno didžiausių R specialistų Bill‘o Venables‘o parašytą programą.

```
N <- 10000
graphics.off()
par(mfrow = c(1,2), pty = "s")
for(k in 1:20) {
    m <- (rowMeans(matrix(runif(N*k), N, k)) - 0.5)*sqrt(12*k)
    hist(m, breaks = "FD", xlim = c(-4,4), main = k,
            prob = TRUE, ylim = c(0,0.5), col = "lemonchiffon")
    pu <- par("usr")[1:2]
    x <- seq(pu[1], pu[2], len = 500)
    lines(x, dnorm(x), col = "red")
    qqnorm(m, ylim = c(-4,4), xlim = c(-4,4), pch = ".", col = "blue")
    abline(0, 1, col = "red")
    Sys.sleep(1)
}
```

**7.12 UŽDUOTIS**. Štai dar kelios funkcijos, iliustruojančios CRT. Išsiaiškinkite jas ir pakomentuokite jų rezultatus.

**1**.

```
m<-numeric(10000);
for(k in (1:20)){
    for(i in(1:10000)){m[i]<-(mean(runif(k))-0.5)*sqrt(12*k)}
    hist(m,breaks=0.3*(-15:15),xlim=c(-4,4),main=sprintf("%d",k))
}

}
```

**2.**

```
m <- replicate(10000, (mean(runif(k))-0.5)*sqrt(12*k))

m<-numeric(10000);
p<-0.75; for(j in (1:50)){ k<-j*j
    for(i in(1:10000)){m[i]<-(mean(rbinom(k,1,p))-p)/sqrt(p*(1-p)/k)}
    hist(m,breaks=41,xlim=c(-4,4),main=sprintf("%d",k))
}
```

Šias funkcijas galima užrašyto ir be vidinio `for` ciklo, pvz. taip:

```
m<-numeric(10000);
for(k in (1:20)){
       m <- replicate(10000, (mean(runif(k))-0.5)*sqrt(12*k))
       hist(m,breaks=0.3*(-15:15),xlim=c(-4,4),main=sprintf("%d",k))
```

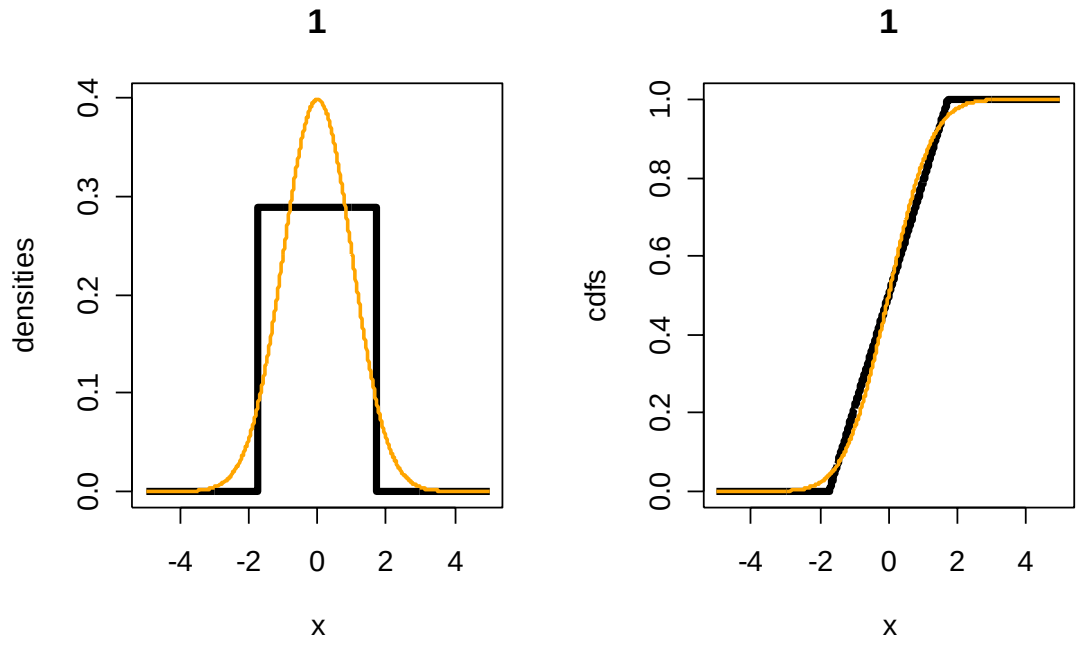
**7.13 UŽDUOTIS**. CRT efektus galima pailiustruoti ir remiantis **distr** paketu[7]. Išsiaiškinkite ir pakomentuokite funkcijos `CLT` (angl. Central Limit Theorem) darbą.

```
require(distr)     # Pakrauname paketą distr
CLT <- function(Distr, n, sleep = 1)
{
# Distr: "AbscontDistribution" klasės objektas
# n: iteracijų (sąsukų) skaičius
# sleep: koks laiko tarpas tarp gretimų paveiksliukų
    graphics.off()
    par(mfrow = c(1,2))

# skirstinio Distr vidurkis
    fun1 <- function(x, Distr){x*d(Distr)(x)}
    E <- try(integrate(fun1, lower = q(Distr)(0), upper = q(Distr)(1),
Distr = Distr)$value, silent = TRUE)
    if(!is.numeric(E))
        E     <-     try(integrate(fun1,     lower     =     q(Distr)
(distr::TruncQuantile),upper = q(Distr)(1-distr::TruncQuantile),
Distr = Distr)$value, silent = TRUE)

# skirstinio distr standartinis nuokrypis
    fun2 <- function(x, Distr){x^2*d(Distr)(x)}
    E2 <- try(integrate(fun2, lower = q(Distr)(0), upper = q(Distr)(1),
Distr = Distr)$value, silent = TRUE)
    if(!is.numeric(E2))
        E2   <-   try(integrate(fun2,   lower   =   q(Distr)   (distr::
TruncQuantile), upper = q(Distr)(1-distr::TruncQuantile),
Distr = Distr)$value, silent = TRUE)
    std <- sqrt(E2 - E^2)

    Sn <- 0
    N <- Norm()
    for(k in 1:n) {
        Sn <- Sn + Distr
        Tn <- (Sn - k*E)/(std*sqrt(k))
        x <- seq(-5,5,0.01)
        dTn <- d(Tn)(x)
        ymax <- max(1/sqrt(2*pi), dTn)
        plot(x, d(Tn)(x), ylim = c(0, ymax), type = "l", ylab =
"densities", main = k, lwd = 4)
        lines(x, d(N)(x), col = "orange", lwd = 2)
        plot(x, p(Tn)(x), ylim = c(0, 1), type = "l", ylab = "cdfs",
main = k, lwd = 4)
        lines(x, p(N)(x), col = "orange", lwd = 2)
        Sys.sleep(sleep)
    }
}
```

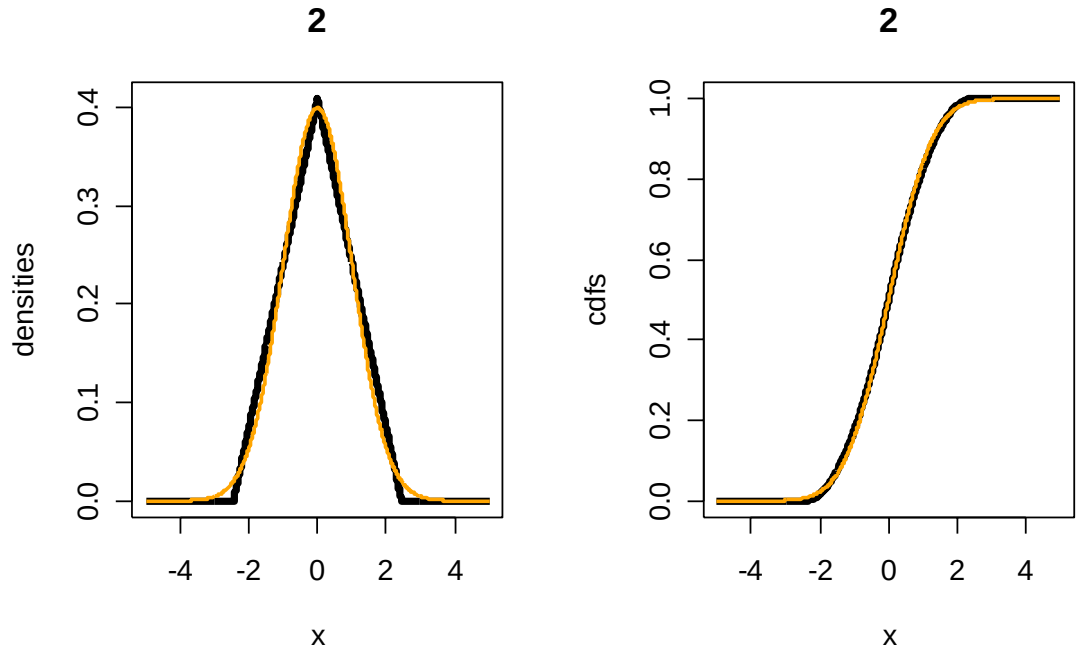
Štai keli funkcijos CLT taikymo pavyzdžiai:

```
distroptions("DefaultNrFFTGridPointsExponent", 13)
CLT(Distr = Unif(), n = 1, sleep = 0)
```

[7] Šis paketas traktuoja atsitiktinius dydžius, remdamasis S4 klasės sąvoka. Tai gana sudėtinga procedūra, tačiau jums nėra būtina gilintis į subtilybes.




```
CLT(Distr = Unif(), n = 2, sleep = 0)
```




```
CLT(Distr = Unif(), n = 20, sleep = 0)
CLT(Distr = Exp(), n = 20, sleep = 0)
CLT(Distr = Chisq(), n = 20, sleep = 0)
CLT(Distr = Td(df = 5), n = 20, sleep = 0)
CLT(Distr = Beta(), n = 20, sleep = 0)
distroptions("DefaultNrFFTGridPointsExponent", 14)
CLT(Distr = Lnorm(), n = 20, sleep = 0)
```

# 8. Sprendžiamoji statistika: parametrų įverčiai

Nors matematinės statistikos tikslas yra įvertinti visos populiacijos parametrus, tačiau ji gali remtis tik jos dalimi – imtimi. Jau žinome, kad iš DSD išplaukia, kad populiacijos vidurkis maždaug lygus imties vidurkiui, tačiau jei norėtume apskaičiuoti ne populiacijos vidurkį, bet kitus ją aprašančio skirstinio parametrus, reikėtų kitokių samprotavimų (žemiau aptarsime du metodus – momentų ir didžiausio tikėtinumo). Bet kuriuo atveju, dėl atsitiktinės imties prigimties, gautasis įvertis (jis vadinamas taškiniu) bus tik apytiksliai lygus populiacijos vidurkiui ar parametrų reikšmėms. Norint nusakyti įverčio paklaidą, galima remtis pasikliauties intervalais – tai toks atsitiktinis intervalas, kuris su didele tikimybe uždengia atitinkamų populiacijos parametrų reikšmes. Aišku, matematika turėtų pasiūlyti metodus, kaip surasti patį "geriausią" (pvz., trumpiausią) tokį intervalą.

## 8.1. Taškiniai įverčiai

Tarkime, kad turimi duomenys neprieštarauja hipotezei, jog stebimasis a.d. turi tam tikrą skirstinį, priklausantį nuo vieno ar kelių nežinomų parametrų. Parametrų įverčiams rasti naudojami keli metodai - paprastas, bet nelabai tikslus momentų metodas, ir sudėtingesnis, bet tikslesnis (nes įverčių dispersijos mažesnės) didžiausio tikėtinumo (DT) metodas (= maximum likelihood estimate (MLE) (angl.)). Dažnai (pvz., binominio, Puasono ar normaliojo skirstinio atvejais) abu įverčiai sutampa, tačiau kartais išspręsti DT lygtis nėra lengva.

Priminsime apibrėžimus. Tarkime, kad stebimojo a.d. $X$ skirstinio funkcija $F_\Theta(x)$ priklauso nuo nežinomo $s$-mačio parametro $\Theta = (\theta_1,...,\theta_s)$. Iš DSD žinome, kad $l$-tasis imties (arba *empirinis*) momentas $A_l = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i^l$ apytiksliai lygus $l$-tajam populiacijos momentui $\alpha_l = \alpha_l(\theta_1,...,\theta_s)$. Jei a.d. X turi $s$ momentų, tai galima sudaryti $s$ lygčių su $s$ nežinomaisiais sistemą: $A_l = \alpha_l(\theta_1,...,\theta_s)$, $l = 1,...,s$. Jei ją galima išspręsti $\theta_1,...,\theta_s$ atžvilgiu, tai sprendinys $\theta_l^* = \theta_l^*(A_1,...,A_s) = \theta_l^*(x_1,...,x_n)$, $l = 1,...,s$, vadinamas parametro $(\theta_1,...,\theta_s)$ momentų metodo įverčiu.

Šis įvertis yra palyginti lengvai randamas. Sunkiau yra su geresniuoju DT įverčiu. Tarkime, kad a.d. $X$ turi tankį $p(x;\Theta)$. Funkcija

$$l(\Theta) = l_{x_1,...,x_n}(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\Theta)$$

kaip ir jos logaritmas

$$L(\Theta) = \ln l(\Theta)$$

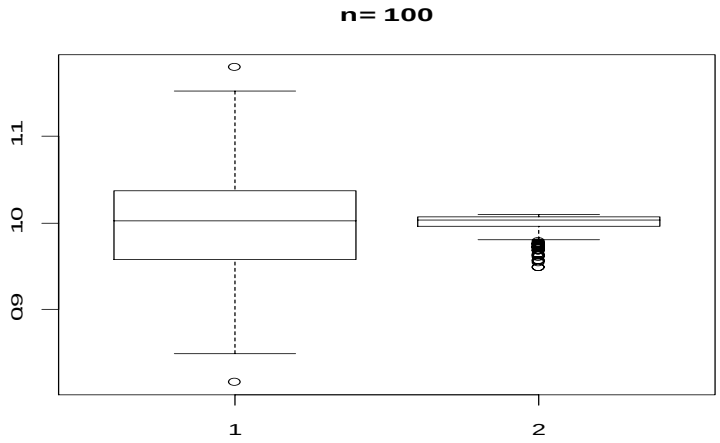
vadinamos DT funkcijomis[1], o visos DT procedūros tikslas yra rasti tokias $\theta_1^*,...,\theta_s^*$ reikšmes, su kuriomis $l(\Theta)$ arba, kas tas pat (kodėl?), $L(\Theta)$ įgyja didžiausią reikšmę. Tai atliekama standartiniu būdu: randame visas dalines išvestines, prisilyginame jas nuliui ir išsprendžiame gautąją sistemą (deja, ši sistema kartais būna gana sudėtinga).

[1] Diskrečiuoju atveju tankį keičiame tikimybėmis.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, $X \sim N(a,\sigma)$ yra normalusis a.d. su dviem nežinomais parametrais $a$ ir $\sigma$. Žinome, kad $EX = a$, o $\sqrt{DX} = \sigma$. Momentų metodas siūlo populiacijos momentus sulyginti su imties momentais: $a = \bar{x}$, $\sigma = s_1$ (čia $s_1^2$ yra nepaslinktas dispersijos įvertis: $s_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2/(n-1)$). Šios sistemos sprendinys akivaizdus: $a^* = \bar{x}$, o $\sigma^* = s_1$. Priminsime (žr. [Ku, 287 p.]), kad DT metodas siūlo praktiškai tuos pačius įverčius: $a^* = \bar{x}$, o $\sigma^* = s$ (čia $s$ yra kiek paslinktas standarto įvertis: $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$).

Momentų ir DT metodų įverčiai sutampa ne visuomet. Tarkime, X turi tolygų skirstinį intervale $[0,\theta]$; čia $\theta$ yra nežinomas dešinysis intervalo galas. Momentų metodas siūlo tokį nežinomo parametro įvertį (žr. [ČM, 1.6 sk.]): $\theta_1^* = 2\bar{x}$, o didžiausio tikėtinumo – kitokį: $\theta_2^* = \max_i x_i$. Įvertis $\theta_1^*$ yra nepaslinktas, t.y. $E\theta_1^* = \theta$, tačiau $\theta_2^*$ - ne: $E\theta_2^* = \theta(n/(n+1))$. Pakeiskime įvertį $\theta_2^*$ į $\theta_2^{**} = ((n+1)/n)\theta_2^*$ - dabar vidurkių prasme jie abu bus vienodai geri. Antra vertus, $\theta_2^{**}$ yra vis tik "geresnis": jo reikšmės bus arčiau tikrosios $\theta$ reikšmės negu $\theta_1^*$, nes $D\theta_1^* = (1/3n)\theta^2$, o $D\theta_2^{**} = (1/n(n+2))\theta^2$. Pailiustruosime šį teiginį.

```
sim.unif <- function(n){              # n yra imties dydis
#funkcija sim.unif
mm <- numeric(500)
dtm <- numeric(500)
for (i in 1:500) {ru <- runif(n,0,1)# Tikroji θ reikšmė lygi 1, tačiau
                                      # "apsimeskime", kad to nežinome
mm[i] <- 2*mean(ru)
dtm[i] <- ((n+1)/n)*max(ru)}
boxplot(mm,dtm)
title(main=paste("n=",n))
cat("E(theta1)=",mean(mm),"E(theta2)=",mean(dtm),"\n")
cat("D(theta1)=",var(mm),"D(theta2)=",var(dtm),"\n")
}

> sim.unif(10)
E(theta1)= 1.015739, E(theta2)= 0.99365  # Kadangi abu įverčiai
                                         # nepaslinkti, E(…) turėtų
                                         # būti maždaug 1
D(theta1)= 0.036887, D(theta2)= 0.00840  # Apskaičiuokite šias
                                         # dispersijas pagal aukš-
                                         # čiau pateiktas formules

> sim.unif(100)
E(theta1)= 1.000885,     E(theta2)= 0.9998426
D(theta1)= 0.003496,     D(theta2)= 0.0001093
```



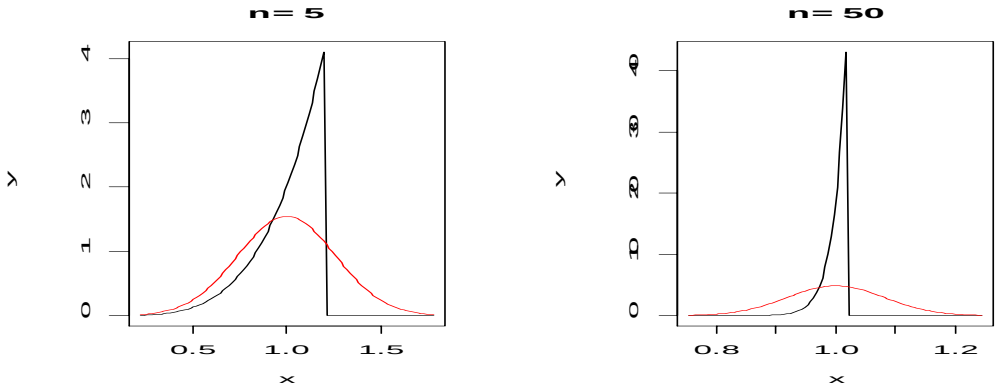

8.1 pav. Matome, kad $\theta_2^{**}$ reikšmės žymiai arčiau 1, negu $\theta_1^{*}$ reikšmės; antra vertus, $\theta_2^{**}$ skirstinys aiškiai nesimetriškas (kuri uodega "sunkesnė"?)

Pakomentuosime 8.1 paveikslą. Kadangi $\theta_1^{*} = (2/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$ yra a.d. suma, tai pagal CRT šis a.d. yra maždaug normalus: $\theta_1^{*} \sim N(\theta, \theta/\sqrt{3n})$. Galima įrodyti, kad $\theta_2^{**}$ turi nesimetrišką tankį:

$$p_{\theta_2^{**}}(x) = \frac{n^2}{(n+1)\theta}\left(\frac{nx}{(n+1)\theta}\right)^{n-1} 1_{\left(0,\frac{n+1}{n}\theta\right)}(x).$$

Abu tankiai, didėjant *n*, kaupiasi apie tikrąją $\theta$ reikšmę (todėl galima vis tiksliau "atkurti" $\theta$), tačiau antrasis tankis yra labiau sukoncentruotas apie $\theta$ ir todėl jis tai daro "geriau".

```
> theta <- function(n){
#funkcija theta                                          # Tarkime, θ=1
x <- seq(1-3/sqrt(3*n),1+3/sqrt(3*n),length=100)        # Trijų sigmų taisyklė
y <- ifelse(x<0|x>(n+1)/n,                              # Skaičiuojame antrojo
0,n*n*((n*x/(n+1))^(n-1))/(n+1))                        # tankio reikšmes
plot(x,y,type="l")
lines(x,dnorm(x,1,1/sqrt(3*n)),col=2)
title(main=paste("n=",n))}
> par(mfrow=c(1,2))
> theta(5)
> theta(50)
```




8.2 pav. Juoda linija - $\theta_2^{**}$ tankis, raudona - $\theta_1^{*}$ tankis
( atkreipkite dėmesį į *x* ir *y* ašis)

R programos privalumai išaiškėja sudėtingais atvejais. Panagrinėkime gama skirstinį. Šio a.d. tankis priklauso nuo dviejų nežinomų parametrų – formos parametro $a$ ir mastelio parametro $s$:

$$p(x;a,s)=\frac{1}{s^a\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x/s}1_{(0,\infty)}(x),\ \ a,s>0,$$

jo vidurkis $EX=as$, o dispersija $DX=as^2$. Išsprendę šias dvi lygtis, gauname $a=(EX)^2/DX$, o $s=DX/EX$. Kitais žodžiais, momentų metodas siūlo tokius lengvai apskaičiuojamus nežinomų parametrų įverčius: $a^*=\overline{x}^2/s_1^2$ ir $s^*=s_1^2/\overline{x}$. Deja, šie įverčiai nelabai tikslūs (jų dispersijos didelės). Pabandykime rasti šių parametrų DT įverčius. Tikėtinumo funkcija dabar atrodo taip

$$l(a,s)=l_{X_1,\dots,X_n}(a,s)=\prod_{i=1}^n p(X_i;a,s)=\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{a-1}e^{-\sum_{i=1}^n X_i/s}s^{-na}\Gamma^{-n}(a),$$

o štai jos logaritminis variantas:

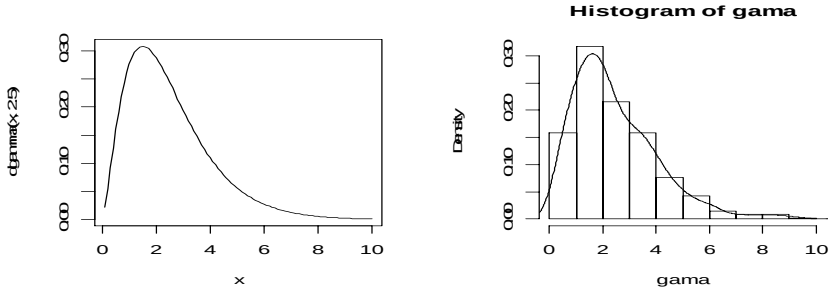
$$L(a,s)=\ln l(a,s)=(a-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i-s^{-1}\sum_{i=1}^n X_i-na\ln s-n\ln\Gamma(a).$$

Suradę $L(a,s)$ dalines išvestines ir prisilyginę jas nuliui, gauname reikalingą sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a}=\sum_{i=1}^n \ln X_i-n\ln s-n\Gamma'(a)/\Gamma(a)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial s}=s^{-2}\sum_{i=1}^n X_i-na/s=0\end{cases}$$

(šios sistemos šaknys ir bus ieškomi parametrų $a$ ir $s$ DT įverčiai). Tai komplikuota netiesinė sistema, o spręsti ją reikia iteraciniais metodais – pasirodo, kad R kalba tai galima atlikti keliomis eilutėmis:

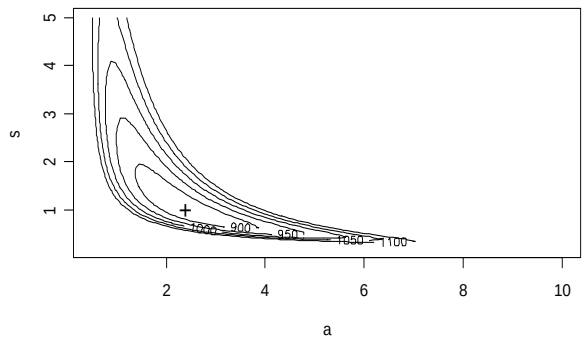
```
par(mfrow=c(1,2))
x <- (1:100)/10
plot(x,dgamma(x,2.5),type="l")
gama <- rgamma(500,2.5) # Generuojame 500 gama a.d. su parametrais
                        # a=2,5 ir s=1

hist(gama,prob=TRUE)
lines(density(gama))
```




8.3 pav. Gama skirstinio tankis (kairėje) ir gama imties histograma ir tankio branduolinis įvertis

Dabar pagal imtį bandysime atstatyti (atrodo, kad) gama skirstinio parametrų reikšmes.

```
mean(gama)^2/var(gama)
#[1] 2.405004
#Kadangi imtis didelė, tai MM duoda gana tikslų parametro a įvertį
var(gama)/mean(gama)
#[1] 0.997878
#Formos parametro s įvertis irgi gana tikslus
mlgamma <- function( x)
-sum(dgamma(gama,shape= x[1],scale= x[2],log = TRUE))
# Funkcija mlgamma skaičiuoja gama skirstinio DT funkciją L(a,s)
mle <- nlm(mlgamma, c(shape = 2.4, scale = 1), hessian = TRUE)
# Minimizuojame DT funkciją, nulinė iteracija yra MM įvertis
mle$estimate
#[1] 2.519790 1.007186 a ir s įverčiai
solve( mle$hessian)
# [,1] [,2]       Informacijos (atvirkštinė Heso) matrica
# [1,]  0.022550172 -0.009016688       0,022 yra a įverčio dispersija
# [2,] -0.009016688  0.004410811       0,004 yra s įverčio dispersija
avals <- seq( 0.5, 10, len = 101)
svals <- seq( 0.2, 5, len = 101)
grid <- matrix( 0.0, nrow = 101, ncol = 101)
for (i in seq( along = avals)){
 for (j in seq( along = svals)){
  grid[ i, j] <- mlgamma( c( avals[ i], svals[ j]))}}
# grid yra 101x101 DT funkcijos reikšmių minimumo aplinkoje matrica
min(grid)
# 871.1726 Minimali mlgamma reikšmė
par(mfrow=c(1,1))
contour(avals, svals, grid, levels = seq(900,1100, 50))
# Išbrėžėme DT funkcijos kontūrini grafiką minimumo aplinkoje
points( mle$estimate[1], mle$estimate[2], pch = "+", cex = 1.5)
title( xlab = "a", ylab = "s")
```




8.4 pav. Gama skirstinio tikėtinumo funkcijos lygio linijos

Matome, kad tikėtinumo funkcijos lygio linijos yra mažai panašios į elipses, todėl informacijos matricos naudojimas parametrų dvimatei pasikliovimo sričiai skaičiuoti būtų nepagrįstas. Vis tik įrodysime, kad DT įverčių dispersijos yra mažesnės už MM įverčių dispersijas. Tam parašysime funkciją `disp`:

```
> disp <- function(N){
 aMM <- sMM <- aDT <- sDT <- numeric(N)
 set.seed(3)
 for(i in 1:N){
 gama <- rgamma(500,2.5)
```

```
 v <- var(gama)
 m <- mean(gama)
 aMM[i] <- m^2/v
 sMM[i] <- v/m
 mlgamma <- function( x)
 {-sum( dgamma( gama, shape= x[1], scale= x[2], log = TRUE))}
 mle <- nlm(mlgamma, c(shape = aMM[i], scale = sMM[i]))
 aDT[i] <- mle$estimate[1]
 sDT[i] <- mle$estimate[2]}
 cat("dispersija aMM=",var(aMM),", dispersija sMM=",var(sMM),"\n")
 cat("dispersija aDT=",var(aDT),", dispersija sDT=",var(sDT),"\n")
}

> disp(1000)
dispersija aMM= 0.03353019 , dispersija sMM= 0.00625129
dispersija aDT= 0.02135913 , dispersija sDT= 0.004266431
```

DT metodo dispersija iš tikro mažesnė, tačiau tik maždaug 1,5 karto.

**8.1 UŽDUOTIS**. Šio skyrelio pradžioje yra pateikti normaliojo skirstinio parametrų $a$ ir $\sigma$ DT metodo įverčių formulės. Pakartokite tik ką aprašytąją procedūrą ir šiuos įverčius raskite skaitmeniškai. Ar jie sutampa su aukščiau minėtais?

**8.2 UŽDUOTIS**. Gaminių patikimumas dažnai aprašomas Veibulo (Weibull) skirstiniu, kurio tankis atrodo taip:

$$p(x;a,s)=\frac{a}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{a-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{s}\right)^{a}\right)1_{(0,\infty)}(x),\ \ a,s>0.$$

Nesunku įsitikinti, kad $EX=s\Gamma(1+\frac{1}{a})$, o $DX=s^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)$.

i) Išbrėžkite kelis Veibulo tankio grafikus,
ii) Pakartokite aukščiau aprašytą analizę su Veibulo skirstiniu.

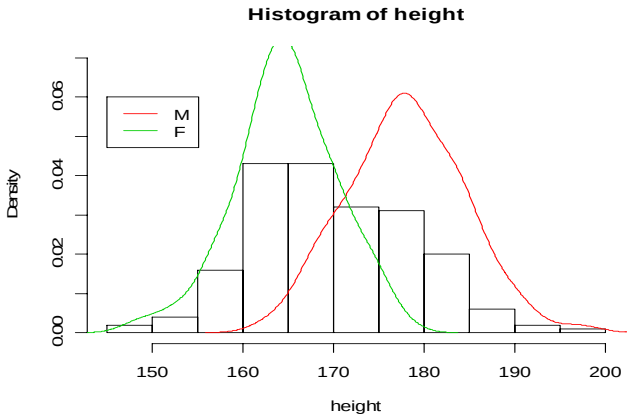
**8.3 UŽDUOTIS**. Pakete `MASS` yra funkcija `fitdistr`, kuri skaičiuoja daugelio (įskaitant gama ir Veibulo) skirstinių parametrų DT įverčius. Generuokite 200 gama atsitiktinių skaičių, įvertinkite skirstinio parametrus aukščiau aprašytu metodu ir naudodami `fitdistr` funkciją. Palyginkite rezultatus.

**8.4 UŽDUOTIS**. Mes jau nagrinėjome duomenų rinkinį `Davis` ir jo "pataisytą" variantą `davis` (tai duomenys apie reguliariai sportu užsiiminėjančių asmenų svorį ir ūgį):

```
> summary(davis)
 sex         weight           height          repwt           repht
 F:112   Min.   : 39.00   Min.   :148.0   Min.   : 41.00   Min.   :148.0
 M: 88   1st Qu.: 55.00   1st Qu.:164.0   1st Qu.: 55.00   1st Qu.:160.5
         Median : 63.00   Median :169.5   Median : 63.00   Median :168.0
         Mean   : 65.25   Mean   :170.6   Mean   : 65.62   Mean   :168.5
         3rd Qu.: 73.25   3rd Qu.:177.3   3rd Qu.: 73.50   3rd Qu.:175.0
         Max.   :119.00   Max.   :197.0   Max.   :124.00   Max.   :200.0
                                          NA's   : 17.00   NA's   : 17.0
```

Aišku, kad kintamasis `height` neturėtų būti normalus (nes ši imtis yra dviejų (tikriausiai) normaliųjų a.d. (būtent, vyrų ir moterų ūgių) mišinys, žr. 8.5 pav.; pakartokite šį pa-

veikslą – jame raudona ir žalia kreivės išbrėžtos su `density` funkcija). Beje, tikrinant normalumo hipotezę su `shapiro.test` funkcija (plg. 9-9 psl.), normalumo hipotezė nėra atmetama (nes *p* reikšmė didesnė už 0,05):




8.4 pav. Kintamojo `davis$height` histograma ir
vyrų bei moterų ūgio tankių branduolinių įverčių grafikai

```
> shapiro.test(height)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  height
W = 0.9898, p-value = 0.1697
```

Taigi, formaliai žiūrint, kintamasis `height` yra normalusis, nors taip tikriausiai nėra. Dabar užmirškime, ką mes žinome apie šį kintamąjį ir pabandykime atstatyti jo struktūrą, remdamiesi prielaida, kad `height` yra dviejų imčių (su nežinoma proporcija `p`) mišinys, o kiekviena mišinio komponentė yra normali su nežinomais parametrais, t.y., `height` tankis yra pavidalo

```
mixt <- function(x,p,mean1,sd1,mean2,sd2)
{p*dnorm(x,mean1,sd1)+(1-p)*dnorm(x,mean2,sd2)}
```

(`p` turėtų būti lygus moterų daliai imtyje, t.y., 112/(112+88)=0,56, `mean1` maždaug lygus `mean(height[sex=="F"])=164.7` ir t.t.). Šį uždavinį išspręskite remdamiesi didžiausio tikėtinumo principu ir taikydami funkciją `fitdistr`. Gal būt jums pagelbės atsakymas:

```
          p          mean1            sd1          mean2            sd2
  0.5987635   165.2547700      5.9410993   178.4856961      6.3547038
(0.1899365)   (2.0607014)   (0.9848752)   (3.3615904)   (1.5020201)
```

**8.5 UŽDUOTIS**. Stebimasis a.d. $X$ turi normalųjį skirstinį su nežinomais $a$ ir $\sigma^2$. Generuokite "daug" normaliųjų a.d. ir "įrodykite", kad 1) $s_1$ yra paslinktas standarto $\sigma$ įvertis; 2) statistikos

$$\sigma_1^* = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)} s_1 \quad \text{ir} \quad \sigma_2^* = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(n-1)}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}|$$

yra nepaslinkti standarto įverčiai, bet $\sigma_1^*$ geresnis (nes $D\sigma_1^* < D\sigma_2^*$). *Nuoroda.* Lengviau dirbti, kai $n$ nėra didelis (pvz., $n$=4). Monte Carlo replikų skaičių $N$ imkite lygiu 10000.

**8.6 UŽDUOTIS**. Tarkime, kad $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ $(x_1^* \le x_2^* \le ... \le x_n^*)$ yra variacinė seka, gauta iš imties $x_1, x_2, ..., x_n$, o $\theta_1^* = \overline{x}, \theta_2^* = (x_1^* + x_n^*)/2$. Ištirkite $E\theta_k^*$ ir $D\theta_k^*$ $(k = 1,2)$ savybes tuomet, kai a) $X$ turi $(0, 2\theta)$ tolygų skirstinį ir b) $X$ yra eksponentinis a.d. su tankiu $p(x) = (1/\theta)\exp(-x/\theta)1_{(0,\infty)(x)}$ (abiem atvejais parametras $\theta$ nežinomas).

**8.7 UŽDUOTIS.** Nežinomo parametro $\theta$ įvertis $\theta^*(n)$ vadinamas suderintu, jei $\theta^*(n)$, kai $n \to \infty$, konverguoja pagal tikimybę į $\theta$ (t.y., jei $P_\theta\{|\theta^*(n) - \theta| \ge \varepsilon\} \to 0$ koks bebūtų $\varepsilon > 0$). Tarkime, kad a.d. $X$ turi normalųjį skirstinį su nežinomu vidurkiu $\theta$. "Įrodykite", kad empirinis vidurkis $\theta^*(n) = \overline{x}$ yra suderintas $\theta$ įvertis. *Nuoroda.* Tarkime, $\varepsilon = 0.25$. Generuokite $N$=10000 normaliojo a.d. $N(2,1)$ dydžio $n$=10 imčių ir apskaičiuokite kiekvieno jų vidurkį. Apskaičiuokite santykinį dažnį $n(|\overline{x} - 2| > 0.25)/n$. Pakartokite šią procedūrą, kai $n$ =100 ir kai $n$=1000. Įsitikinkite, kad gautieji santykiniai dažniai artėja į nulį.

**8.8 UŽDUOTIS**. Nežinomo parametro $\theta$ įvertis $\theta^*(n)$ vadinamas suderintu, jei $\theta^*(n)$, kai $n \to \infty$, konverguoja pagal tikimybę į $\theta$ (t.y., jei $P_\theta\{|\theta^*(n) - \theta| \ge \varepsilon\} \to 0$ koks bebūtų $\varepsilon > 0$). Tarkime, kad a.d. $X$ turi apibendrintą Koši skirstinį su tankiu $p_\theta(x) = 1/(\pi(1 + (x - \theta)^2))$ (taškas $\theta$ yra tankio simetrijos centras arba "vidutinė" reikšmė; priminsime, kad a.d. $X$ vidurkis neegzistuoja). "Įrodykite", kad a) empirinis vidurkis $\theta^*(n) = \overline{x}$ yra nesuderintas $\theta$ įvertis, tačiau b) empirinė mediana yra suderintas (populiacijos medianos) $\theta$ įvertis. *Nuoroda.* Perskaitykite 8.7 užduoties nuorodą.

**8.8a UŽDUOTIS.**
>I also try to fit a skewed distribution (like skewed student t) to data points. Do you have an idee how to do this???

```
library(skewt)
y <- rskt(500,2,2) # simulate 500 observations from the
                   # skew t distribution with df=2 and gamma=2
skewtmle <- function(df,gamma){return(-sum(log(dskt(y, df, gamma))))}
fit <- mle(skewtmle,start=list(df=1,gamma=3), method="L-BFGS-B", lower=
c(1e-8,-Inf))
summary(fit)
logLik(fit)
vcov(fit)
plot(profile(fit), absVal=F)
confint(fit)
```

## 8.2. Intervaliniai įverčiai

Praėjusiame skyrelyje buvo paaiškinta, kaip galima rasti nežinomo parametro $\theta$ įverčius $\theta^*$. Būtų gerai, jei sugebėtume nurodyti, kiek gautasis įvertis skiriasi nuo tikrosios pa-

rametro reikšmės, t.y. jeigu sugebėtume rasti $\varepsilon\,(>0)$ tokį, kad $|\theta^* - \theta| \le \varepsilon$. Deja, kadangi $\theta^*$ yra a.d., tai galima kalbėti tik apie įvykio $\{|\theta^* - \theta| \le \varepsilon\}$ tikimybę. Tarkime, kad egzistuoja dvi statistikos[2], $\theta_1^*$ ir $\theta_2^*$, $\theta_1^* < \theta_2^*$, tokios, kad $P_\theta(\theta_1^* \le \theta \le \theta_2^*) = \alpha$. Jei $\alpha$ mažai skiriasi nuo 1, tai galima laikyti, kad praktiškai visuomet $\theta_1^* \le \theta \le \theta_2^*$. Atsitiktinis intervalas $[\theta_1^*, \theta_2^*]$ yra vadinamas parametro $\theta$ pasikliauties intervalu, atitinkančiu pasikliauties tikimybę (ar lygį) $\alpha$. Paprastai imama $\alpha = 0{,}9;\, 0.95;\, 0{,}99$ ir pan., o statistikos $\theta_1^*$ ir $\theta_2^*$ parenkamos taip, kad su duota tikimybe $\alpha$ intervalas $[\theta_1^*, \theta_2^*]$ būtų kuo trumpesnis.

Pradėsime vienu pavyzdžiu. Iš DSD žinome, kad, didėjant imties dydžiui, jo vidurkis konverguoja į populiacijos vidurkį. Antra vertus, nedideliems *n* šie du skaičiai gali pastebimai skirtis. Pamodeliuokime šį reiškinį – kelis kartus generuokime po 10 $N(0,1)$ atsitiktinių skaičių ir apskaičiuokime jų empirinius vidurkius ir standartus:

```
> set.seed(1)       # Dabar rezultatai bus reprodukuojami
> rn <- rnorm(10)
> rn
 [1] -0.9746257 -0.5607552 -2.1839227  0.0895115  0.9695195
 [6] -0.4447884 -0.0228788  0.0996069 -0.3551539  0.5429091
> mean(rn)
[1] -0.2840578      # Imties vidurkis (jis turėtų būti maždaug 0)
> sd(rn)
[1] 0.8694902       # Imties standartas (jis turėtų būti maždaug 1)
> rn <- rnorm(10)   # Dar kartą generuokime 10 normalių skaičių
> rn
 [1] -1.9304081 -0.9490871 -1.5298516  0.8682471  2.0663557
 [6]  0.5861246 -1.2559018 -0.6659785  2.8956619  1.0220281
> mean(rn)
[1] 0.1107190       # Antrosios imties vidurkis arčiau 0 nei pirmojo
> sd(rn)            # Antrosios imties standartas toliau nuo 1
[1] 1.621472
```

Matome, kad imties `rn` vidurkis (kaip ir standartas) gana pastebimai kinta, kitaip sakant, nelogiška tvirtinti, kad "nežinomas" populiacijos vidurkis $a = -0{,}284$ ir, kartu, $a = 0{,}111$. Teisinga būtų teigti, kad $a \approx -0{,}284$ ir $a \approx 0{,}111$, tačiau gerai būtų, jei kartu galėtume nurodyti ir daromą paklaidą. Elgsimės taip: tarkime, kad populiacijos dispersija $\sigma^2$ yra žinoma; tuomet iš CRT gauname, kad a.d. $Z = \sqrt{n}(a - \bar{x})/\sigma$ turi maždaug standartinį normalųjį[3] skirstinį. Jei simboliu $z(\alpha)$ pažymėtume standartinio normaliojo skirstinio $\alpha$-ąjį kvantilį, $z_1 = z(\alpha_1)$, $z_2 = z(\alpha + \alpha_1)$, $0 \le \alpha_1 \le 1 - \alpha$, tai tuomet

$$P(z_1 \le \sqrt{n}(a - \bar{x})/\sigma \le z_2) \approx P(z_1 \le N \le z_2) = \alpha(\approx 0{,}95).$$

Kitaip sakant,

$$P(\bar{x} + \frac{z_1\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x} + \frac{z_2\sigma}{\sqrt{n}}) \approx \alpha,$$

[2] *Apibrėžimas*. Bet kokia imties funkcija $\theta$ vadinama statistika. Štai keli statistikų pavyzdžiai: $\theta_1 = \bar{x}$, $\theta_2 = \max\limits_k x_k$.

[3] Mūsų pavyzdyje ėmėme iš normaliosios populiacijos, todėl ši statistika turi tiksliai normalųjį skirstinį.

t.y. $[\overline{x}+z_1\sigma/\sqrt{n}, \overline{x}+z_2\sigma/\sqrt{n}]$ yra nežinomo vidurkio *a* lygmens $\alpha$ pasikliauties intervalas. Galima įrodyti, kad šis intervalas trumpiausias, kai $\alpha_1=(1-\alpha)/2$, $\alpha_2=(1+\alpha)/2$, t.y. kai abiejų "uodegų" tikimybės lygios. Jei pasirinktume populiariausią reikšmę $\alpha=0,95$, tai tuomet $z_1=-1,96$, $z_2=1,96$, o (nežinomo) vidurkio *a* pasikliauties intervalas lygus $[\overline{x}-1,96\,\sigma/\sqrt{n},\ \overline{x}+1,96\,\sigma/\sqrt{n}]$. Didinant *n*, intervalas siaurėja (vidurkis *a* bus nustatomas vis tiksliau), bet lėtai – kaip $const/\sqrt{n}$ (norint intervalą susiaurinti dvigubai, imties dydį reikia padidinti keturis kartus!).

Aptartasis pasikliauties intervalas vadinamas centriniu. Kartais naudingi kitokie intervalai: pasirinkę $z_1=z(0)=-\infty$ ir $z_2=z(\alpha)$, gautume vadinamąjį apatinį[4] (arba kairinį), o pasirinkę $z_1=z(1-\alpha)$ ir $z_2=z(1)=+\infty$ - viršutinį[5] (arba dešininį) pasikliauties intervalus. Nors visų jų pasikliauties lygis $\alpha$, trumpiausias yra centrinis intervalas.

Grįžkime prie mūsų pavyzdžio. Kadangi $\sigma=1$, $n=10$, tai abiem atvejais "tikrasis" vidurkis 0 priklauso intervalams $[-0,284-1,96\cdot1/\sqrt{10};-0,284+1,96\cdot1/\sqrt{10}]$=[-0,904; 0,336] ir $[0,111-1,96\cdot1/\sqrt{10};0,111+1,96\cdot1/\sqrt{10}]$=[-0,509;0,731].

Tiriant realius duomenys, populiacijos dispersija $\sigma^2$ žinoma retai. Tokiais atvejais, logiška vietoje nežinomo $\sigma^2$ imti jo nepaslinktą įvertį $s_1^2$. Galima įrodyti, kad dabar a.d. $T_{n-1}=\sqrt{n}(a-\overline{x})/s_1$ turi jau ne (beveik) normalų, bet (beveik[6]) Stjudento skirstinį su *n*-1 l.l. Trumpiausias lygio $\alpha$ pasikliauties intervalas yra pavidalo $[\overline{x}+t_{n-1}((1-\alpha)/2)\cdot s_1/\sqrt{n}, \overline{x}+t_{n-1}((1+\alpha)/2)\cdot s_1/\sqrt{n}]$ (čia $t_n(\alpha)$ yra Stjudento su *n*-1 l.l. $\alpha$ eilės kvantilis). Priminsime, kad $t_{n-1}(\alpha)\to z(\alpha),\ n\to\infty,$ bet nedideliems *n* Stjudento kvantilių moduliai yra didesni už normaliųjų kvantilių modulius (taigi dabar pasikliauties intervalai kiek platesni).

Grįžkime prie savo pavyzdžio. Tarę, kad dabar mes nežinome ne tik vidurkio, bet ir dispersijos, pirmuoju atveju randame

```
> -0.284+qt((1-0.95)/2,9)*0.869/sqrt(10)
[1] -0.9056451
> -0.284+qt((1+0.95)/2,9)*0.869/sqrt(10)
[1] 0.3376451
```

(t.y., "nežinomo vidurkio" pasikliauties intervalas dabar kiek platesnis: pirmuoju atveju jis lygus [-0,906; 0,338]), o antruoju – [-1,049; 1,271]).

R neturi funkcijos vidurkio pasikliauties intervalui skaičiuoti (dabar (2006.x) tokia funkcija jau yra – tai `smean.cl.normal` iš `Hmisc` paketo). Šią funkciją galima parašyti pačiam (tai kelių eilučių funkcija, parašykite ją!) arba pasinaudoti funkcija `t.test`:

---

[4] Jei $\alpha$=0,95, tai $z_2$=1,64.

[5] Jei $\alpha$=0,95, tai, kadangi standartinio normaliojo tankis yra lyginė funkcija, $z_1$=-1,64.

[6] Jei stebime normalųjį a.d. X, tai statistika $T_{n-1}$ turi tiksliai Stjudento skirstinį. Pažymėsime, kad net tuomet, kai stebimasis a.d. "nelabai normalus", $T_{n-1}$ skirstinys mažai nutolsta nuo Stjudento.

```
> set.seed(1111)
> rn <- rnorm(10)
> t.test(rn)$conf.int
[1] -0.4601601  1.3999891
attr(,"conf.level")
[1] 0.95 # Skaičiuojame 95% pasikliauties intervalą
```

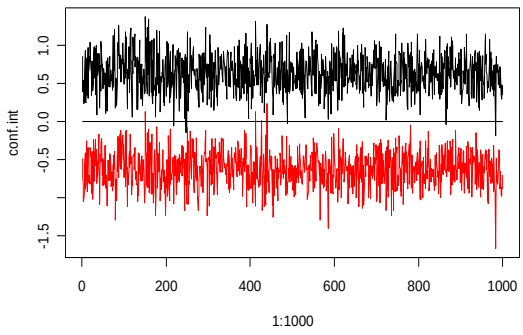
Beje, šį intervalą galima apskaičiuoti ir taip:

```
> confint(lm(rn~1))
                2.5 %    97.5 %
(Intercept) -0.4601601 1.399989
```

Padarysime dar vieną pastabą. Mes netvirtiname, kad nežinomas vidurkis visuomet yra pasikliauties intervalo viduje – jei pasikliauties (pasitikėjimo) tikimybė $\alpha = 0,95$ , tai mes tvirtiname tik tiek, kad pasikliauties intervalas (maždaug) 95 procentams imčių uždengs vidurkį (taigi kartais galime suklysti, bet tai bus retai). Patikrinsime savo teiginį.

```
> conf <- function(){
# funkcija conf
# imties dydis=20
# alpha=0.99              # Imame "nestandartinį" reikšmingumo lygm.
set.seed(5)
t.lo <- qt(0.005,19)
t.up <- qt(0.995,19)
coef.lo <- t.lo/sqrt(20)
coef.up <- t.up/sqrt(20)
up <- numeric(1000)
lo <- numeric(1000)
sk <- 0                   # "Teisingų" atvejų (kai pasikl. intervalas
                          # uždengia 0) skaitiklis
for(i in 1:1000){
      rn <- rnorm(20)
      m <- mean(rn)
      st <- sd(rn)
      lo[i] <- m+coef.lo*st # Pasikliauties intervalo apatinis rėžis
      up[i] <- m+coef.up*st # Pasikliauties intervalo viršutinis rėžis
      sk <- sk+ifelse(lo[i]>0|up[i]<0,0,1)} # Jei pasikl. intervalas
                                            # "teisingas"-pridedame 1
plot(1:1000,up,type="l", # Viršutinis rėžis (juoda spalva)
ylim=c(min(lo),max(up)),ylab="conf.int")
lines(1:1000,lo,col=2)   # Apatinis rėžis (raudona spalva)
lines(1:1000,rep(0,1000))
cat("Daznis=",sk/1000,"\n")
}

> conf()
Daznis= 0.99
```

Stebime idealų atitikimą – teoriškai turėtų būti 0,99, gavome 0,99 (plg. 8.6 pav.).




8.6 pav. Tik dešimt kartų iš tūkstančio pasikliovimo intervalas neuždengia 0 (ar galite nurodyti tuos atvejus?)

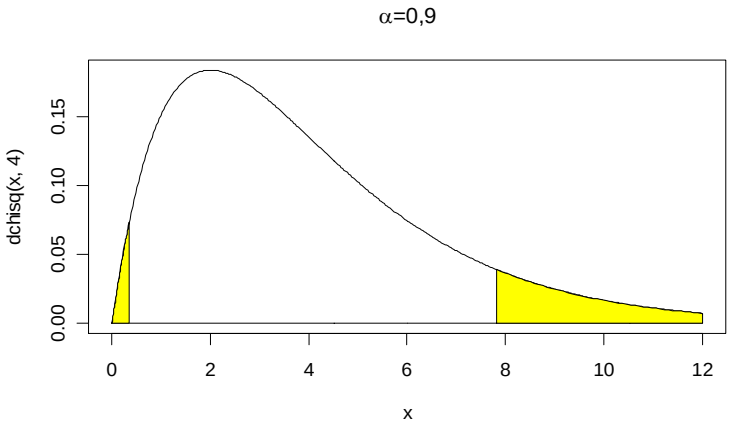
Aukščiau pateiktus samprotavimus galima pakartoti dispersijoms ir išvesti, kad tuomet, kai stebime normalųjį[7] a.d. $X$ su nežinomais vidurkiu ir dispersija, dispersijos $\sigma^2$ lygmens $\alpha$ pasikliauties intervalas atrodo taip:

$$[(n-1)s_1^2/\chi^2_{n-1}((1+\alpha)/2),(n-1)s_1^2/\chi^2_{n-1}((1-\alpha)/2)]$$

(čia $\chi^2_n(\alpha)$ yra chi kvadrato su $n$ l.l. $\alpha$ eilės kvantilis).

Štai funkcija, kuri pateikia geometrinę dispersijos pasikliauties intervalo interpretaciją:

```
> chi <- function(){
# funkcija chi
x <- seq(0,12,length=400)
plot(x,dchisq(x,4),type="l",              # Laisvės laipsnių skaičius =4
main=expression(paste(alpha,"=0,9")))     # Gali būti net formulės!
lines(x,rep(0,400))
xx.lo <- seq(0,qchisq(0.05,3),length=50) # Reikšmingumo lygmuo α=0,9
XX.lo <- c(xx.lo,-sort(-xx.lo),0)
YY.lo <- c(rep(0,50),dchisq(-sort(-xx.lo),4),0)
polygon(XX.lo,YY.lo,col="yellow")      # Nuspalvinsime kairiąją uodegą
                                       # (iki 0,05-jo kvantilio))
xx.up <- seq(qchisq(0.95,3),12,length=50)
XX.up <- c(xx.up,-sort(-xx.up),xx.up[1])
YY.up <- c(rep(0,50),dchisq(-sort(-xx.up),4),0)
polygon(XX.up,YY.up,col="yellow")     # Nuspalvinsime dešinę uodegą;
                                      # jos plotas irgi lygus (1-0,9)/2
}
```




8.7 pav. Galima įrodyti, kad $(n-1)s_1^2/\sigma^2$ turi $\chi^2_{n-1}$ skirstinį; todėl

$$P(\chi^2_{n-1}((1-\alpha)/2)<(n-1)s_1^2/\sigma^2<\chi^2_{n-1}((1+\alpha)/2)=\alpha$$

R neturi funkcijos dispersijos pasikliauties intervalui skaičiuoti, ją parašysime patys.

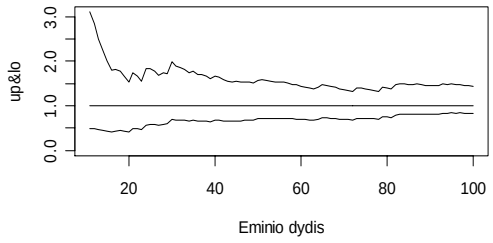
```
> conf.var <- function(x,conf.level=0.95){   # Standartine α reikšme
                                             # imame 0,95
```

[7] Stjudento statistika nelabai jautri nuokrypiams nuo normalumo, tačiau su $\chi^2$ procedūra reikia elgtis atsargiau. Pažymėsime, kad nenormaliuoju atveju dispersija apskritai nėra geras reikšmių sklaidos matas (pvz., gali negalioti 3σ taisyklė), todėl tokiu atveju sklaidai matuoti reikėtų vartoti kitas charakteristikas (pvz., tarpkvartilinį atstumą *iqd*).

```
# funkcija conf.var
n <- length(x)
s1 <- var(x)
s1*(n-1)/c( qchisq((1+conf.level)/2,n-1),qchisq((1-conf.level)/2,n-1))
}

> conf.var(rn)
[1] 0.4012191 1.4799255
```

Matome, kad "tikroji" dispersijos reikšmė (priminsime: $\sigma^2 = 1$) priklauso pasikliauties intervalui (jei tokį eksperimentą pakartosime daug kartų, tai tik maždaug penkis kartus iš šimto suklysime, teigdami, kad gautasis intervalas uždengia populiacijos dispersiją).

**8.9 UŽDUOTIS**. Dispersijos pasiliauties intervalas siaurėja, kai *n* didėja, tačiau iš jo išraiškos to nesimato. Parašykite funkciją, kuri išbrėžtų tai iliustruojantį grafiką (maždaug tokį kaip 8.8 pav.).




8.8 pav. Didėjant imties dydžiui, dispersijos pasikliauties intervalas (nemonotoniškai) siaurėja

Dabar aptarkime binominį atvejį. Paskutiniuose rinkimuose už Laimės žiburio partiją balsavo 13,2% rinkėjų. Po metų buvo atlikta sociologinė apklausa, kurioje iš 1000 apklaustųjų 170 pareiškė, kad, jei rinkimai būtų rytoj, jie balsuotų už šią partiją. Ar suderinami šie duomenys su LŽP oponentų teigimu, kad "šitai dar nieko nereiškia"? Oponentų teiginį galima iššifruoti taip: šios partijos gerbėjų procentas nepasikeitė, o padidėjimą galima paaiškinti imties atsitiktinumu. Formalizuokime jų teiginį. Tarkime, kad *p* yra tikimybė, kad jog rinkėjas rytoj balsuotų už LŽP, t.y., *p*=(kiek bus "už")/(turi balso teisę)=0,13[8]. Simboliu $p^*$ pažymėkime šios tikimybės empirinį ekvivalentą: $p^*$=(kiek '"už" buvo tarp apklaustųjų)/1000=0,17. Tikslūs (dabartinio) *p* pasikliauties intervalo rėžiai užrašomi gana komplikuotai (žr. [Kr, 193 p., (6.94)]), tačiau, naudojant R paketą, to nesijaučia:

```
>  binom.test(170,1000,p=0.132)

        Exact binomial test

data:  170 and 1000
number of successes = 170, number of trials = 1000, p-value = 0.000633
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to
0.132
95 percent confidence interval:
0.1472170 0.1947441 # Proporcijos p centrinis pasikliauties intervalas
sample estimates:
probability of success
                  0.17
```

[8] Kitais žodžiais, *p* yra LŽP gerbėjų dalis visoje populiacijoje.

Taigi, centrinis nežinomos proporcijos *p* pasikliauties intervalas [0,147; 0,195] neuždengia 0,13, todėl apklausos duomenys paneigia oponentų teiginį – LŽP gerbėjų dalis per metus padidėjo ir su tikimybe 0,95 yra nurodytame intervale. Beje, kadangi LŽP gerbėjų skaičius padidėjo, tai jie mielai pasirinktų kitą, viršutinį[9], pasikliauties intervalą, kuris pateiktų jiems dar palankesnį prognozės rezultatą:

```
> binom.test(170,1000,p=0.132,alt="g")$conf.int      # "g"=greater
[1] 0.1507 1.0000        # Viršutinis 95% pasikliauties intervalas
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Antra vertus, LŽP oponentams labiau patiktų mažos *p* reikšmės, todėl jie mielai paskelbtų apatinį intervalą:

```
> binom.test(170,1000,p=0.132,alt="l")$conf.int        # "l"=less
[1] 0.0000000 0.1907543  # Apatinis 95% pasikliauties intervalas
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Matome, kad dabar apklausos rezultatai neprieštarauja oponentų teiginiui, kad *p* liko toks koks buvo (ar net pasidarė visai mažas; teisybė, jis neprieštarauja ir tam, kad dabar tikimybė *p* lygi, pvz., 0,19). Taigi pasikliauties intervalas nenurodo tikslios *p* reikšmės[10], jis tik duoda jos reikšmes, kurios (su 95% tikimybe) yra suderinamos su turimais duomenimis (pasikliauties intervalas pateikia intervalinį *p* įvertį, tikslią *p* reikšmę galėtų pateikti tik rytoj įvyksiantys rinkimai).

Iki šiol nagrinėjome tikslų nežinomos tikimybės *p* pasikliauties intervalą. Apytikslį intervalą nesunku gauti iš CRT. Sakysime, kad $X_i = 1$, jei *i*-asis apklausos dalyvis atsakė, kad jis balsuotų už LŽP (to tikimybė *p*) ir $X_i = 0$ - priešingu atveju (tikimybė $q = 1 - p$). Reiškinys $p^* = S_n / n$ turi maždaug normalų skirstinį $N(p, \sqrt{pq/n})$, todėl su tikimybe 0,95

$$p - z\sqrt{pq/n} \le p^* \le p + z\sqrt{pq/n}$$

(čia $z = 1{,}96$). Išsprendę šią nelygybę *p* atžvilgiu, gauname nežinomos tikimybės *p* centrinį 95% pasikliovimo intervalą

$$\frac{n}{n+z^2}\left(p^* - \frac{z^2}{2n} - z\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} - \frac{z^2}{4n^2}}\right) \le p \le \frac{n}{n+z^2}\left(p^* - \frac{z^2}{2n} + z\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} - \frac{z^2}{4n^2}}\right).$$

Šia formule remiasi funkcija `prop.test`:

```
> prop.test(170,1000)$conf.int
[1] 0.1475206 0.1950591
```

[9] Objektas `binom.test(170,1000,p=0.132,alt="g")` yra sąrašas. Norint sužinoti visas jo komponentes, reikia surinkti `names(binom.test(170,1000,p=0.132,alt="g"))` (mums reikia komponentės `"conf.int"`).

[10] Negana to, jis dar priklauso nuo "užsakovo". Sekančiame skyrelyje kalbėsime apie hipotezių tikrinimą ir ten aptarsime intervalo pasirinkimo principus.

```
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

arba

```
> prop.test(170,1000,alt="less")$conf.int
[1] 0.0000000 0.1909442
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Kadangi imtis didelis, šie intervalai tik nežymiai skiriasi nuo tikslių.

**8.10 UŽDUOTIS**. Išsinagrinėkite funkciją `prop.test` ir jos tekste raskite nurodytą formulę.

**8.11 UŽDUOTIS**. Pakete MASS yra funkcija `fitdistr` , kuri pateikia populiacijos parametrų DT įverčius. Pavyzdžiui,

```
> library(mass)
> x <- rnorm(30, 4, 1.5)
> fitdistr(x,"normal",list(mean=0,sd=1))
     mean         sd
  4.1058149   1.7049985
 (0.3112887) (0.2201328)
```

(skliausteliuose yra parametrų įverčių standartinių paklaidų įverčiai). O dabar UŽDUOTIS. Raskite imties `ga` iš

```
set.seed(1)
ga <- rgamma(500,shape=2.5,rate=0.1)
```

parametrų DT įverčius su a) `fitdistr` funkcija ir b) kartodami procedūrą iš 8-5 psl.

**8.12 UŽDUOTIS**. Su

```
library(Simple)
data(exec.pay)
?exec.pay
```

pakraukite duomenų rinkinį `exec.pay` (tai JAV vadovaujančių darbuotojų (CEO = Chief Executive Officer (angl.)) atlyginimai). Raskite 90%, 95% ir 99% vidurkio ir medianos pasikliauties intervalus. “Gražiai” juos atspausdinkite. Paieškokite “informatyvių” šio kintamojo grafikų. *Nuoroda.* Kadangi skirtinys nesimetriškas, šią užduotį geriausiai atlikti butstrepo metodu (plg. 4.13 ir 4.22 užduotis).

**8.13 UŽDUOTIS**. Tais atvejais, kai populiacijos skirstinys priklauso nuo kelių parametrų, didžiausio tikėtinumo įverčių radimas kartais būna gana komplikuotas (plg. 8-4 – 8-6 psl.). Vienmačiu atveju dažnai viskas būna paprasčiau. Pvz., Puasono skirstinio su nežinomu parametru $\lambda > 0$ tikėtinumo funkcija atrodo taip (kodėl?):

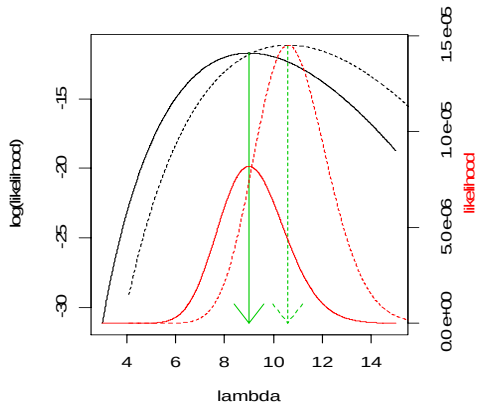
$$l(\lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_n}}{x_1!\ldots x_n!}, \lambda > 0 .$$

Jos išvestinę prilyginę 0, matome, kad maksimumą ši funkcija pasiekia taške $\hat{\lambda} = (x_1 + ... + x_n)/n = \bar{x}$ - tai ir bus nežinomo parametro $\lambda$ didžiausio tikėtinumo įvertis (jis, beje, sutampa su momentų metodu gautuoju (kodėl?)).

Žemiau pateiktas funkcijos `mle.pois`, brėžiančios Puasono skirstinio tikėtinumo funkcijos grafiką, kodas. Pažymėsime, kad nedidelių papildomų komplikacijų atsiranda dėl to, kad viename grafike norime išbrėžti dvi kreives (tikėtinumo funkcijos ir jos logaritmo) su dviem *y* ašimis, grafiko kairėje ir dešinėje (šios komandos pažymėtos melsva spalva).

```
> mle.pois <- function(){
#Puasono skirstinio tiketinumo funkcija
x_rpois(5,10)        # Generuojame penkis Puasono su λ=10 ats. skaičius
lhat_mean(x)
lambda_seq(lhat-2*sqrt(lhat),lhat+2*sqrt(lhat),by=0.01)#Teig.parametro
lambda_lambda[lambda>0]  # λ kitimo rėžius nustatome pagal 2σ taisyklę
likelihood_exp(-lambda*length(x))*lambda^sum(x)/prod(gamma(x+1))
x2_rpois(5,10)  # Generuojame dar penkis Puasono su λ=10 ats. skaičius
lhat2_mean(x2)
lambda2_seq(lhat2-2*sqrt(lhat2),lhat2+2*sqrt(lhat2),by=0.01)
lambda2_lambda2[lambda2>0]
likelihood2_exp(-lambda2*length(x2))*lambda2^sum(x2)/prod(gamma(x2+1))
par(mar=c(5,4,4,4)) #Paruošiame vietos dviem papildomoms linijoms deš.
yMIN.log <- min(min(log(likelihood),min(log(likelihood2))))
yMAX.log <- max(max(log(likelihood),max(log(likelihood2))))
plot(lambda,log(likelihood),type="l",ylim=c(yMIN.log,yMAX.log))
lines(lambda2,log(likelihood2),lty=2)
MAX <- which.max(likelihood)
MAX2 <- which.max(likelihood2)
arrows(lambda[MAX],log(likelihood)[MAX],lambda[MAX],yMIN,col=3)
arrows(lambda2[MAX2],log(likelihood2)[MAX2],lambda2[MAX2],yMIN,col=3,
lty=2)       # Strėlės (arrows) žymės tikėt. funkcijų maksimumus
par(new=T)   # Kita plot komanda neištrins ankstesnio grafiko
yMIN <- min(min(likelihood,min(likelihood2)))
yMAX <- max(max(likelihood),max(likelihood2))
plot(lambda,likelihood,type="l",ylim=c(yMIN,yMAX),col=2,axes=F,
xlab="",ylab="")
axis(side=4,col=2)
lines(lambda2,likelihood2,lty=2,col=2)
mtext("likelihood",side=4,line=2,col=2)
print(list(mean=lhat,mean2=lhat2))} # Spausdiname imčių vidurkius

> mle.pois()
$mean
[1] 9.4

$mean2
[1] 11.8
```

8.9 pav. (žr. žemiau) matome, kad ir tikėtinumo funkcija (raudona spalva), ir jos logaritmas (juoda spalva) maksimumą pasiekia tame pačiame taške (jis lygus imties vidurkiui ir kartu su imtimi gali keistis).




8.9 pav. Dvi Puasono tikėtinumo funkcijos (jos atitinka dvi imtis su vidurkiais 9,4 ir 11,8)

O dabar

8.14 **UŽDUOTIS**. Išbrėžkite grafiką su viena kreive (stebimo a.d. tikėtinumo funkcija) ir su viena $y$ ašimi, kai stebime a.d. $X$ su eksponentiniu skirstiniu, t.y., kai

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & kai \;\; x < 0, \\ \theta \exp(-\theta x), & kai \;\; x \geq 0. \end{cases}$$

(parametras $\theta > 0$ nežinomas).

# 9. Sprendžiamoji statistika: hipotezių tikrinimas (viena imtis)

Pasikliauties intervalų skaičiavimas yra glaudžiai susijęs su hipotezių tikrinimu. Pirmuoju atveju randame intervalą, kuriame turėtų būti nežinoma parametro reikšmė. Antruoju atveju tariame, kad parametras turi konkrečią reikšmę ir klausiame, ar ši prielaida (hipotezė) yra suderinama su turimais duomenimis. Vienas iš šios problemos sprendimo variantų yra toks: jei tinkamai parinktas pasikliauties intervalas uždengia hipotetinę reikšmę, tai (kiek diplomatiškai) sakome, kad turimi duomenys neprieštarauja mūsų hipotezei. Dažniausiai ta pati R funkcija skaičiuoja ir pasikliauties intervalus ir tikrina hipotezes.

Dauguma šiame skyriuje aptariamų testų priklauso base ir/arba ctest (=classical test) paketams. Štai visų R 1.7.1 paketo ctest funkcijų sąrašas:

```
> library(help=ctest)

                Information on Package 'ctest'

Description:

Package: ctest
Version: 1.7.1
Priority: base
Title: Classical Tests
Author: Kurt Hornik <Kurt.Hornik@ci.tuwien.ac.at>, with major
        contributions by Peter Dalgaard <p.dalgaard@kubism.ku.dk> and
        Torsten Hothorn <Torsten.Hothorn@rzmail.uni-erlangen.de>.
Maintainer: R Core Team <R-core@r-project.org>
Description: A collection of classical tests, including the
        Ansari-Bradley, Bartlett, chi-squared, Fisher, Kruskal-Wallis,
        Kolmogorov-Smirnov, t, and Wilcoxon tests.
License: GPL
Built: R 1.7.1; i386-pc-mingw32; 2003-06-16 08:49:22

Index:

ansari.test             Ansari-Bradley Test
bartlett.test           Bartlett Test for Homogeneity of Variances
binom.test              Exact Binomial Test
chisq.test              Pearson's Chi-squared Test for Count Data
cor.test                Test for Association/Correlation Between
                        Paired Samples
fisher.test             Fisher's Exact Test for Count Data
fligner.test            Fligner-Killeen Test for Homogeneity of
                        Variances
friedman.test           Friedman Rank Sum Test
kruskal.test            Kruskal-Wallis Rank Sum Test
ks.test                 Kolmogorov-Smirnov Tests
mantelhaen.test         Cochran-Mantel-Haenszel Chi-Squared Test for
                        Count Data
mcnemar.test            McNemar's Chi-squared Test for Count Data
mood.test               Mood Two-Sample Test of Scale
oneway.test             Test for Equal Means in a One-Way Layout
pairwise.prop.test      Pairwise comparisons of proportions
```

```
pairwise.t.test          Pairwise t tests
pairwise.table           Tabulate p values for pairwise comparisons
pairwise.wilcox.test     Pairwise Wilcoxon rank sum tests
power.anova.test         Power calculations for balanced one-way
                         analysis of variance tests
power.prop.test          Power calculations two sample test for of
                         proportions
power.t.test             Power calculations for one and two sample t
                         tests
print.power.htest        Print method for power calculation object
prop.test                Test for Equal or Given Proportions
prop.trend.test          Test for trend in proportions
quade.test               Quade Test
shapiro.test             Shapiro-Wilk Normality Test
t.test                   Student's t-Test
var.test                 F Test to Compare Two Variances
wilcox.test              Wilcoxon Rank Sum and Signed Rank Tests
```

Nemažai šių (ir kitų) testų taikymo pavyzdžių galima rasti, pvz., svetainėse http://www.sjsu.edu/faculty/gerstman/EpiInfo/ arba http://www.math.yorku.ca/SCS/friendly.html

## 9.1. Hipotezės apie proporciją

Pradėkime hipotezėmis apie nežinomas tikimybes (proporcijas populiacijoje). Tą uždavinį, kurį anksčiau formulavome intervalų terminais, dabar spręsime kitaip. LŽP oponentai teigia, kad, nežiūrint apklausos rezultatų, šiai partijai prijaučiančių dalis liko ta pati. Šis teiginys vadinamas pagrindine[1] (arba nuline) hipoteze ir žymimas $H_0 : p = p_0 (= 0.132)$. Kadangi pagal DSD santykinis dažnis $p^* = \kappa_n / n$ turi būti maždaug lygus "tikrajai" tikimybei $p$, tai "nedidelės" skirtumo $p^* - p_0$ reikšmės turėtų liudyti hipotezės $H_0$ naudai, o "didelės" – prieš ją. Taigi esminis klausimas yra toks: ar skirtumas $p^* - p_0 = 0{,}17\text{-}0{,}132 = 0{,}038$ didelis? Aišku, kad šis klausimas nėra prasmingas, nes, jį performulavę procentų terminais, galėtume paklausti: ar skirtumas 17-13,2=3,8 (procento) didelis? Šį skirtumą reikėtų kažkokia prasme normuoti ir padaryti jį nepriklausomą nuo parametro "dimensijos". Elgsimės taip: jei teisinga $H_0$, tai (pagal CRT) nuokrypio (kitaip - kriterijaus) statistika $z^* = (p^* - p_0) / \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$ turi (maždaug) standartinį normalųjį skirstinį[2] $N$ ir todėl labiausiai tikėtina, kad $z^*$ reikšmės bus artimos 0. Tolesni samprotavimai priklauso nuo pasirinktos alternatyvos, t.y., nuo sprendimo, kurį darysime, kai $z^*$ bus "toli" nuo 0. Jei mūsų tikslas būtų įrodyti, kad LŽP rėmėjų dalis visoje populiacijoje pasikeitė (nesvarbu, padidėjo ar sumažėjo), tai alternatyvioji hipotezė būtų formuluojama taip: $H_1 : p \neq p_0$. Tarkime, kad gautas nuokry-

[1] Nulinė hipotezė paprastai pateikia konservatyvų situacijos vertinimą: dabar yra taip kaip buvo anksčiau. Pats terminas "nulinė hipotezė" atsirado kartu su matematine statistika XX a. pradžioje ir reiškė, kad, pvz., papildomas tręšimas duoda nulinį derlingumo priedą.

[2] Tuo pačiu simboliu $z^*$ žymime du skirtingus dalykus: skirtingose imtyse $z^*$ įgyja skirtingas reikšmes (taigi tai a.d.; jis turi standartinį normalųjį skirstinį $N$); mūsų imtyje jis įgijo konkrečią skaitinę reikšmę (taigi dabar tai skaičius). Kai kuriuose matematinės statistikos tekstuose atsitiktinius dydžius žymi didžiosiomis raidėmis, o konkrečias (skaitines) jų reikšmes – mažosiomis. Mes abiem atvejais vartosime tą patį simbolį.

pis $|z^*|$ yra "labai" didelis, tiksliau, įvykio $|N| \geq z^*$ tikimybė tiek maža, kad šį įvykį galima pavadinti (beveik) negalimu. Kadangi neįtikėtini įvykiai paprastai nepasirodo, tai jo pasirodymas matyt reiškia, kad mūsų hipotezė $H_0$ neteisinga. Tikimybė $P(|N| \geq z^*)$ vadinama kriterijaus $p$ reikšme (p-value), jei ji mažesnė už kriterijaus reikšmingumo lygmenį $\alpha$ (jo standartinė reikšmė 0,05) - $H_0$ atmetame ir priimame $H_1$.

```
> prop.test(170,1000,p=0.132,alt="two.sided")$p.value
[1] 0.0004594326  # H0 neabejotinai atmetame
```

Tuo atveju, kai pagrindinė hipotezė yra ta pati $H_0: p = p_0 (= 0{,}132)$, bet alternatyva $H_1: p > p_0$, $H_0$ teks atmesti, jei nuokrypio statistika $z^*$ įgis dideles teigiamas reikšmes, tiksliau, kai tikimybė $P(N \geq z^*)$ bus mažesnė už $\alpha$.

```
> prop.test(170,1000,p=0.132,alt="greater")$p.value
[1] 0.0002297163 # H0 neabejotinai atmetame
```

Alternatyva $H_1: p < p_0$ nėra labai prasminga (kadangi $p^* = 0{,}17$, tai aišku, kad iš dviejų hipotezių, $H_0: p = 0{,}132$ ir $H_1: p < 0{,}132$, rinksimės pirmąją), tačiau, formaliai taikydami savo kriterijų, gauname

```
> prop.test(170,1000,p=0.132,alt="less")$p.value
[1] 0.9997703 # Nėra mažiau už 0,05 - priimame H0
```

taigi nėra jokio pagrindo atmesti $H_0$.

Pažymėsime, kad šioms hipotezėms tikrinti galime taikyti ir tikslų kriterijų, tačiau, kadangi imtis didelė, išvados bus tos pačios.

```
> binom.test(170,1000,p=0.132,alt="g")$p.value
[1] 0.0003509407  # H0 neabejotinai atmetame
```

**9.1 pvz.** Išspręsime vieną uždavinį (žr. ČM1, 171 psl., 7 uždavinys). Naujo medikamento reklamoje teigiama, kad jis sukelia pašalines reakcijas ne daugiau kaip 1% pacientų. Ištyrus 1000 vaistą vartojusių ligonių nustatyta, kad pašalinį poveikį pajuto 32 ligoniai. Ar duomenys neprieštarauja reklaminiam teiginiui? ($\alpha$=0,05)

Nulinė hipotezė suformuluota uždavinyje - $H_0: p \leq p_0 = 0{,}01$. Jei ši hipotezė būtų teisinga, nežinomos tikimybės $p$ įvertis $\hat{p}$ (t.y., procentas ligonių, pajutusių pašalinį poveikį) turėtų būti maždaug lygus (arba mažesnis už) $p_0$. Kadangi $\hat{p} = 32/1000$ yra maždaug tris kartus didesnis už $p_0$, kyla įtarimas, kad ko gero teisinga ne hipotezė $H_0$, o $H_1: p > p_0$. Taigi tikrinsime hipotezę $H_0: p \leq p_0 = 0{,}01$ su alternatyva $H_1: p > p_0$ (pažymėsime, kad sprendimo procedūra (tiksliau, kritinė sritis ar $p$ reikšmė) liks tokia pati, jei nulinę hipotezę pakeisime į $H_0: p = p_0$). Aišku, kad mūsų eksperimentai aprašomi Bernulio modeliu (n=1000), kiekvieną ligonį, pajutusį pašalinį poveikį, sąlyginai pavadinkime sėkme (iš viso sėkmių yra $\kappa_{1000} = 32$, o sėkmės tikimybė, kai teisinga $H_0$, lygi $p_0$). Kadangi $H_0$ nenaudai turėtų liudyti didelis "sėkmių" skaičius, apskaičiuokime

kriterijaus $p$ reikšmę, t.y., (stebėto arba dar didesnio nuokrypio į dešinę) tikimybę $P(\kappa_{1000} \geq 32; p = p_0)$ (plg. formules [ČM1, 164 psl.]):

```
> 1-pbinom(31,1000,0.01)
[1] 1.938156e-08
```

Kadangi ši tikimybė aiškai mažesnė už (pageidaujamą reikšmingumo lygmenį, t.y., $\alpha =$) 0,05, todėl $H_0$ neabejotinai reikia atmesti. Pažymėsime, kad lygiai tą patį rezultatą gauname ir su

```
> binom.test(32,1000,p=0.01,alt="greater")

        Exact binomial test

data:  32 and 1000
number of successes = 32, number of trials = 1000, p-value = 1.938e-08
alternative hypothesis: true probability of success is greater than
0.01
95 percent confidence interval:
 0.02338818 1.00000000 # Kadangi šis intervalas neuždengia 0,01, todėl
sample estimates:      # H0 (su 95 % reikšm. lygmeniu) reikia atmesti
probability of success
                 0.032
```

"Klasikiniai" vadovėliai siūlo tikimybę $P(\kappa_{1000} \geq 32; p = p_0)$ apskaičiuoti apytiksliai, remiantis CRT (arba, kitais žodžiais, Muavro ir Laplaso integraline teorema):

$$P(\kappa_{1000} \geq 32; p_0) = P\left( \frac{\kappa_{1000} - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} \geq \frac{32 - 1000 \cdot 0,01}{\sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} \right)$$

Jei šią tikimybę aproksimuotume dydžiu $P(\mathrm{N} \geq 6,992)$ (t.y., nenaudotume Yates'o tolydumo pataisos), tai

```
> 1-pnorm(6.992)
[1] 1.355027e-12
```

Skaitmeniškai rezultatai skiriasi (kadangi visos skirstinio funkcijos aproksimacijos, kai argumentas (šiuo atveju, 6.992) yra "toli nuo vidurkio" (t.y. šiuo atveju, "toli" nuo 0) yra netikslios), tačiau atsakymas toks pat - $H_0$ reikia neabejotinai atmesti. Pažymėsime, kad lygiai tokį patį atsakymą gautume ir su apytiksliu

```
> prop.test(32,1000,p=0.01,alt="greater",correct=FALSE)

        1-sample proportions test without continuity correction

data:  32 out of 1000, null probability 0.01
X-squared = 48.8889, df = 1, p-value = 1.354e-12
alternative hypothesis: true p is greater than 0.01
95 percent confidence interval:
 0.02403373 1.00000000
sample estimates:
    p
0.032
```

Iš esmės tokią pačią išvadą darome ir su kiek tikslesniu `prop.test` variantu:

```
 > prop.test(32,1000,p=0.01,alt="greater")

        1-sample proportions test with continuity correction

data:  32 out of 1000, null probability 0.01
X-squared = 46.6919, df = 1, p-value = 4.154e-12 # H0 reikia atmesti
alternative hypothesis: true p is greater than 0.01
95 percent confidence interval:
 0.02360359 1.00000000
sample estimates:
    p
0.032
```

Panagrinėkime dar du, kiek nestandartinius, hipotezių tikrinimo pavyzdžius (šį kartą hipotezės $H_0 : p = p_0$ nenaudai liudys ne didelės skirtumo $|\kappa_n / n - p_0|$ reikšmės, bet (įtartinai) mažos!) 3-20 psl. buvo aprašyta Monte Carlo procedūra skaičiaus $\pi$ apytikslei reikšmei rasti. Priminsime: metame "taškus" į kvadratą $[-1,1]\times[-1,1]$; jei taškų metame "daug", tai "sėkmių" (t.y., taškų, pakliuvusių į vienetinį skritulį arba, kitaip sakant, tenkinančių sąlygą $x_i^2 + y_i^2 < 1$) santykinis dažnis $\kappa_n / n$ turėtų būti maždaug lygus $\pi/4$.

**9.2 pvz.** Žinomas statistikas D.B. (vardas ir pavardė autoriui žinomi) tašką metė 10000 kartų ir gavo, kad $\kappa_{10000}/10000 = 0,7854$, taigi[3] sutampa su $p = \pi/4$

```
> options(digits=8)
> pi
[1] 3.1415927
> pi/4
[1] 0.78539816
> eps <- 0.7854-pi/4
> eps
[1] 0.0000018
```

penkių ženklų po kablelio tikslumu. Ar negalima įtarti, kad tikslumas `eps` yra "per daug geras"? Apskaičiuokime gauto (arba dar geresnio) tikslumo tikimybę:

$$P\left(\left|\frac{\kappa_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\kappa_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right| \le \frac{10000\cdot 0,0000018}{\sqrt{10000\cdot\pi/4\cdot(1-\pi/4)}}\right) \approx$$

$$\approx P(|N| \le 0,00045)$$

```
> stat <- (10000*eps)/sqrt(10000*(pi/4)*(1-pi/4))
> pnorm(stat)-pnorm(-stat)
[1] 0.00035694
```

[3] Tiksliau sakant,

```
rdat <- matrix(runif(10000 * 2, min = -1 , max = 1), nrow = 2)
sum(colSums(rdat * rdat) < 1) # Ar aišku, kas čia vyksta?
[1] 7854
```

Taigi tokį arba dar geresnį tikslumą galime gauti tik 1 kartą iš 2778 – rezultatas neįtikėtinai[4] tikslus. (Tai dar kartą įrodo, kad D.B. yra reikšmingas!)

**9.3 pvz.** Tarkime, kad plokštuma suliniuota lygiagrečiomis linijomis, tarp kurių atstumas $2a$. Jei ant šios plokštumos mestume ilgio $2l$, $l<a$, adatą, tai galima įrodyti (tai vadinamasis Buffon'o uždavinys), kad tikimybė $p$ adatai kirsti vieną iš linijų yra $2l/a\pi$. Šį faktą vėl galėtume panaudoti skaičiui $\pi$ apytiksliai apskaičiuoti. Pasiremsime žinomu Lazzarini'o rezultatu: 1901 metais jis metė adatą 3408 kartus ir nustatė, kad $\pi \approx 3{,}1415929$. Įsitikinsime, kad toks "tikslumas" mažai tikėtinas.

Lazzarini'o eksperimente $\pi$ apskaičiuotas su šešiais tiksliais skaitmenimis po kablelio. Antra vertus, jei kirtimų skaičius (tarkime $\kappa_{3408}=m$) pasikeistų vienetu, šitai pakeistų bent ketvirtą dešimtainį $\pi$ įverčio skaitmenį. Iš tikro, jei $n$ mažesnis už 5000,

$$\frac{a(m+1)}{2nl} - \frac{am}{2nl} = \frac{a}{2nl} \geq \frac{1}{2n} > 0{,}0001\,.$$

Vadinasi, yra tik viena $m$ reikšmė, su kuria Lazzarini's galėjo gauti savo įvertį. Pagal lokaliąją Muavro ir Laplaso teoremą,

$$P(\kappa_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}} \leq \left.\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\right|_{n=3408}.$$

Tarkime, kad $a = 2l$; tuomet $p = 1/\pi \approx 1/3$, o $P(\kappa_{3408} = m) \leq 0{,}015$. Taigi, jei Lazzarini's savo eksperimentą pakartotų 100 kartų, tokį tikslumą jis gautų tik maždaug vieną kartą - mažai tikėtina, kad tai buvo pats pirmasis kartas. Kitaip sakant, jis savo rezultatus, matyt, kiek "pakoregavo"…

## 9.2. Hipotezės apie vidurkį

Norėdami patikrinti, ar kintamojo vidurkis įgyja konkrečią reikšmę, remsimės Student'o kriterijumi `t.test`. Šį kriterijų naudojame, kai populiacija yra (maždaug) normali (jei taip nėra, tuomet neparametriniai testai (pvz., Wilcoxon'o ranginis kriterijus) labiau tinka populiacijos centro nustatymui).

4 skyriuje nagrinėjome duomenų rinkinį `davis` (jame buvo pateikti duomenys apie tikrąjį ir praneštąjį apklaustųjų asmenų ūgį ir svorį). Patikrinkime hipotezę, kad moterys teisingai pranešė savo ūgį (tiksliau kalbant, kad moterų tikrojo ūgio vidurkis lygus praneštojo ūgio vidurkiui).

```
> attach(davis)
> davisF_davis[sex=="F",] # Atrenkame tik moteris
> detach(davis)
> attach(davisF)
> dim(davisF)
[1] 112   5
```

[4] Standartinė "neįtikėtino" įvykio reikšmė yra 0,05 (taigi 1 kartas iš 20).

```
> mean(height)
[1] 164.7143
> var(height)
[1] 32.02574
> mean(repht)
[1] NA                          # Kadangi dalies duomenų trūksta…
> mean(repht,na.rm=T)           # Trūstamus duomenis išmesime
[1] 162.1980
```

Anksčiau matėme, kad moterų ūgis `hF` turi beveik normalųjį skirstinį, todėl hipotezę formuluosime vidurkių terminais: $H_0: a = 162{,}1980$, $H_1: a \neq 162{,}1980$ (čia $a$ yra tikrojo ūgio vidurkis). Jei $H_0$ teisinga, tai pagal DSD skirtumas $\overline{x} - 162{,}1980$ neturėtų būti didelis. Tiksliau kalbant, neturėtų būti didelė normuotos statistikos $t_{n-1} = (\overline{x} - 162{,}1980)/\sqrt{s_1^2/n}$ modulio reikšmė. Kadangi tikimybė

$$P\left(|T_{112-1}| > \left|\frac{164{,}7143 - 162{,}1980}{\sqrt{32{,}0257/112}}\right|\right) = 2P(T_{111} < -4{,}7057) = 7{,}345 \cdot 10^{-6}$$

mažesnė už 0,05, tai nulinę hipotezę tenka atmesti – moterys klaidingai pranešė savo ūgį. Pažymėsime, kad lygiai tokį patį rezultatą gautume su funkcija `t.test`:

```
> t.test(height,mu=mean(repht,na.rm=T))

        One Sample t-test

data:  height
t = 4.7056, df = 111, p-value = 7.347e-06
alternative hypothesis: true mean is not equal to 162.1980
95 percent confidence interval:
 163.6547 165.7739
sample estimates:
mean of x
 164.7143
```

**9.1 UŽDUOTIS**. Surinkę

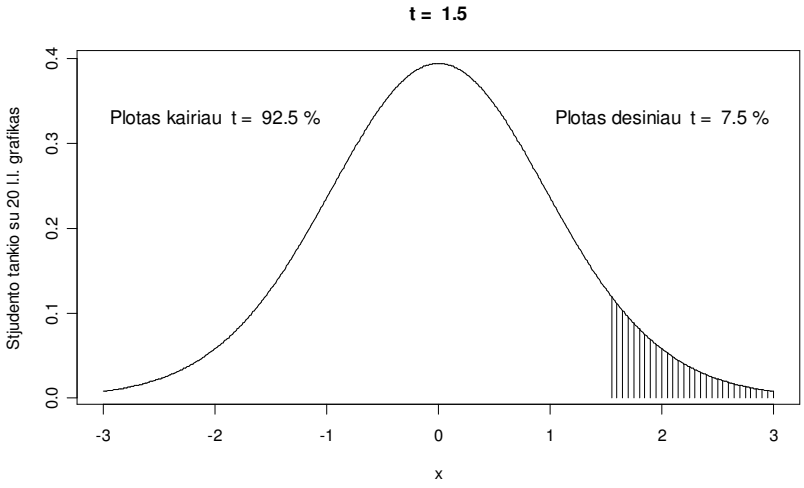
```
library(MASS)
data(michelson)
michelson
    Speed Run Expt
1     850   1    1
2     740   2    1
3     900   3    1
******************
```

pamatysite garsiuosius Michelson'o šviesos greičio matavimų (atliktų 1879 m.) rezultatus (norint gauti tikrąjį greitį, prie šių skaičių reikia pridėti 299000 km/s). a) Ką galite pasakyti apie `Speed` skirstinį? b) Ar matavimo rezultatai suderinami su anksčiau žinomu šviesos greičiu lygiu 0 (prancūzas Cornu, 1876)? c) Ar skiriasi matavimų rezultatai skirtingose `Expt` grupėse? d) Kam "lygus šviesos greitis" po Michelsono bandymų?

9.2 **UŽDUOTIS**. Hipotezių apie vidurkį tikrinimas yra pagrįstas Student'o kriterijaus *p* reikšmių skaičiavimu. Štai funkcija `p.value`, kuri pateikia grafinę šio skaičiavimo interpretaciją.

```
p.value<-function(t, df)
{
      z1 <- seq(-3, 3, 0.01)
      tankis <- dt(z1, df)
      PlotasKairiau <- round(pt(t,df), 3)
      PlotasDesiniau <- round(1 - PlotasKairiau, 3)
      plot(z1, tankis, type = "l",xlab = "x", ylab =
            paste("Student'o tankio su",as.character(df),
            "l.l. grafikas"),main = paste("t = ",
            t))
      text(-2, 0.33, paste("Plotas kairiau  t = ",
            100 * PlotasKairiau,"%"), cex = 1.2)
      text(2, 0.33, paste("Plotas desiniau  t = ",
            100 * PlotasDesiniau,"%"), cex = 1.2)
      z2 <- seq(-3, 3, 0.05)
      height2 <- dt(z2, df)
      len <- length(z2[z2 > t])
      segments(z2[z2 > t], rep(0,len), z2[z2 > t],
            height2[z2 > t])
      cat("p.value=",
            PlotasDesiniau, "\n")
}
```

```
> p.value(1.5,20)
p.value= 0.075
```




9.1 pav. Dešininė *p* reikšmė

Modifikuokite šią funkciją: 1) vietoje vieno grafiko išbrėžkite tris greta vieną kito (su kairiąja, dvipuse ir dešiniąja *p* reikšmėmis), 2) atitinkamą uodegą ne užbrūkšniuokite, bet nuspalvinkite (žr. `?polygon`).

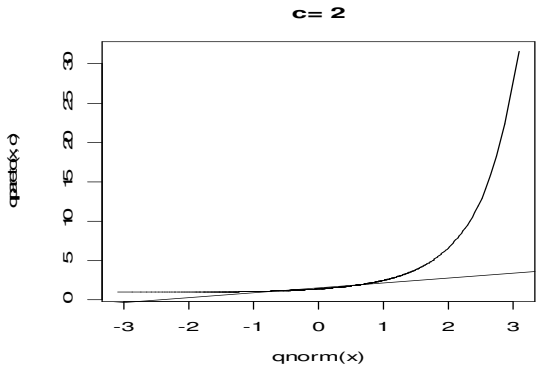
## 9.3. Pareto skirstinys

Populiariausios populiacijos centro charakteristikos yra jos vidurkis ir mediana. Mes jau aptarėme Student'o kriterijų hipotezėms apie vidurkį tikrinti. Deja, jis nėra tikslus, jei nagrinėjame nedidelę imtį iš akivaizdžiai nenormalios populiacijos. Be to, šis testas apskritai nepritaikomas, jei nagrinėjamasis a.d. neturi baigtinio vidurkio (tai atitinka gana populiarų ekonometrijoje "sunkių uodegų" atvejį). Imtyse su sunkiomis uodegomis yra (gal ir nedaug, bet) "didelių" reikšmių (Lietuvoje yra žmonių, turinčių labai dideles pajamas (teisybė, jų nedaug); internetu kartas nuo karto perduodami labai dideli failai ir pan.). Abiem šiais atvejais remsimės Wilcoxon'o kriterijumi medianoms. Tačiau prieš tai pakalbėkime apie Pareto skirstinį.

Sakome, kad a. d. $X$ turi Pareto skirstinį, jei jo tankis yra pavidalo $p(x) = cx^{-(c+1)}1_{(1,\infty)}(x),\ c > 0.$ Šis a.d. turi baigtinį vidurkį tik tuomet, kai $c > 1$:

$$m_1 = EX = \int_1^\infty x \cdot cx^{-(c+1)}dx = c/(c-1),\ c > 1;$$

antra vertus, koks bebūtų $c$, a.d. $X$ turi visus momentus iki $c$: $m_\nu = EX^\nu = c/(c-\nu),\ 0 < \nu < c$. Taigi, jei $c \le 1$, a.d. $X$ vidurkio neturi, nors jo mediana egzistuoja visuomet: $mX = \sqrt[c]{2},\ c > 0.$ Vidurkio egzistavimas yra glaudžiai susijęs su "uodegos sunkumu": kuo sunkesnė uodega (t.y., kuo lėčiau artėja į nulį tikimybė $P(X > x)$, kai $x \to \infty$), tuo mažiau momentų turi a.d. $X$.




9.2 pav. Pareto skirstinio kvantilių grafikas (plg. 4 skyrių);
dešinioji uodega "labai sunki"

Parašysime keturias R funkcijas, kurios skaičiuos Pareto tankio funkciją `dpareto`, skirstinio funkciją `ppareto`, kvantilius `qpareto` ir generuos Pareto atsitiktinius skaičius `rpareto`.

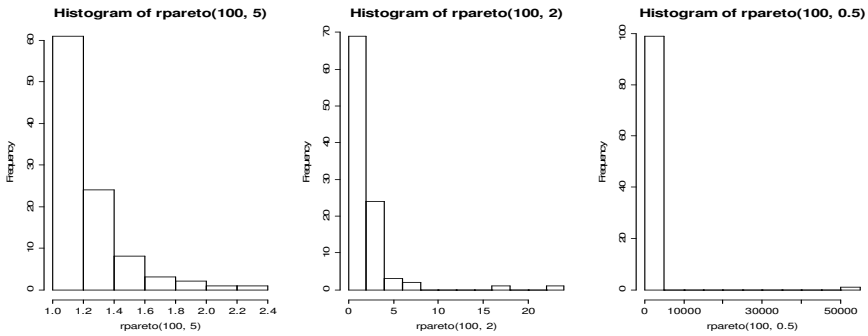
```
dpareto <- function(x,c){
if(c<=0)stop("c turi buti > 0") # Diagnostinis žingsnis
ifelse(x<1,0,c/x^(c+1))}

ppareto <- function(q,c){
if(c<=0)stop("c turi buti > 0")
ifelse(q<1,0,1-1/q^c)}
```

```
qpareto <- function(p,c){
if(c<=0) stop("c turi buti > 0")
if(any(p<0)|any(p>1)) # Simbolis | žymi loginį AR
stop("p turi buti tarp 0 ir 1")
q_(1-p)^(-1/c)
q}
```

Tarkime, kad α yra [0,1] tolygusis a.d. Tuomet a.d. $X = F^{-1}(\alpha)$ skirstinio funkcija yra $F$ (iš tikrųjų, $P(X < x) = P(F^{-1}(\alpha) < x) = P(\alpha < F(x)) = F(x)$; tai standartinis, nors ne visuomet pats efektyviausias atsitiktinių skaičių generavimo būdas). Kadangi Pareto atveju $F^{-1}(\alpha) = \sqrt[c]{\frac{1}{1-\alpha}}$, o a.d. 1-α skirstinys sutampa su α skirstiniu, tai

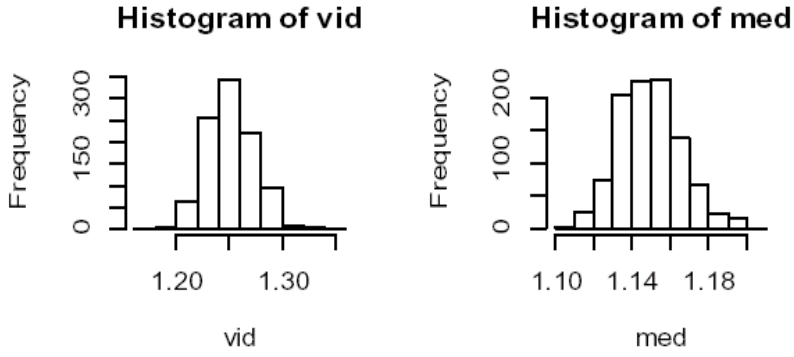
```
rpareto <- function(n,c){
if(c<=0) stop("c turi buti >0")
rp_runif(n)^(-1/c)
rp}
```

Išbrėšime tris Pareto imčių histogramas.

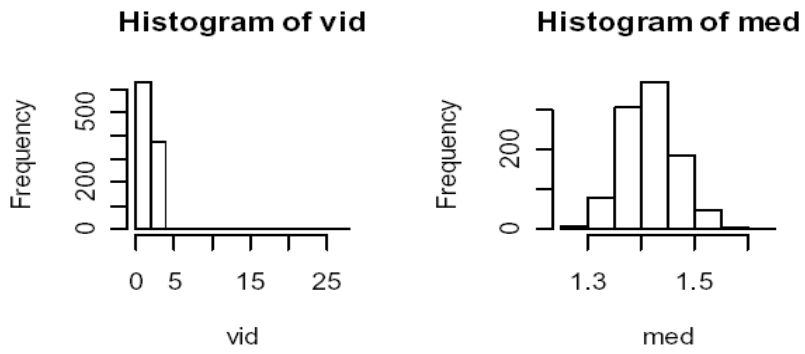



9.3 pav. Kuo *c* mažesnis, tuo didesnės reikšmės gali būti imtyje
(kai $c = 2$ - dispersija begalinė, kai $c = 0.5$ - begalinis ir vidurkis)

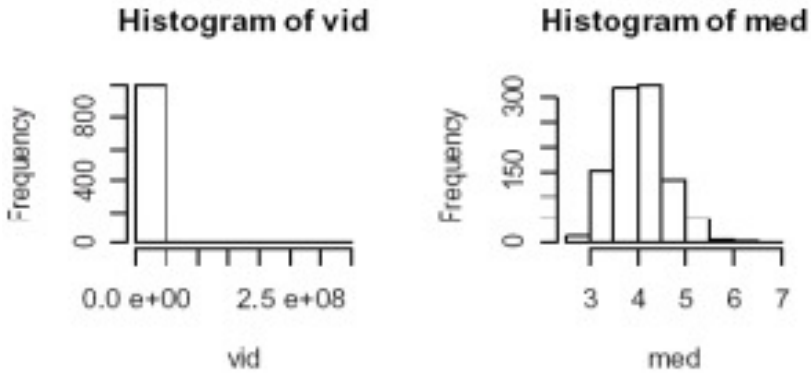
Pademonstruosime, kad tuomet, kai *c* mažas, geresnė "centro" charakteristika yra mediana, o ne vidurkis. Generuosime 1000 imčių po 200 Pareto atsitiktinių skaičių, apskaičiuosime kiekvienos imties vidurkį ir medianą ir pasižiūrėsime jų histogramas (kuo *c* mažesnis, tuo didesni medianos pranašumai).




9.4 pav. *c*=5 – medianų histograma (dešinėje)
kiek siauresnė už vidurkių histogramą




9.5 pav. $c$=2 – medianų histograma (dešinėje)
žymiai siauresnė už vidurkių histogramą




9.6 pav. $c$=0.5 – medianų histograma (dešinėje)
yra žymiai siauresnė už vidurkių histogramą

**9.3 UŽDUOTIS**[5]. Pareto skirstiniui, kaip ir daugeliui kitų, be formos parametro $c$ galima įvesti ir dar vieną, mastelio, parametrą $\sigma$:

$$p(x) = c\sigma^c x^{-(c+1)} 1_{(\sigma,\infty)}(x).$$

1) Perrašykite `dpareto`, `ppareto`, `qpareto` ir `rpareto` funkcijas dviejų parametrų atvejui.
2) Tarkime, kad kažkokios populiacijos pajamos yra aprašomos Pareto skirstiniu su formos parametru 3 ir mastelio parametru 1000. Kokios populiacijos dalies pajamos yra tarp 2000 ir 4000?
3) Apskaičiuokite pajamų medianą ir 90% kvantilį.
4) Apskaičiuokite pirmąjį ir trečiąjį kvartilius ir IQD.
5) Apskaičiuokite pajamų vidurkį.
6) Apskaičiuokite pajamų standartą.

[5] Tai tikimybių teorijos, o ne matematinės statistikos uždavinys.

## 9.4. Hipotezės apie medianą

Priminsime, kad duomenų rinkinio `bwages` poaibį `w0` (`w1`) sudaro duomenys apie Belgijos moterų (atitinkamai, vyrų) atlyginimus. Ar galime teigti, kad moterų atlyginimas yra toks pat kaip ir vyrų? Abi procedūros,

```
> attach(bwages)
> tapply(wage,male,mean)
       0        1
413.9497 466.4193
```

ir

```
> tapply(wage,male,median)
       0        1
383.5227 422.8220
```

tvirtina, kad vyrų atlyginimas didesnis. Tačiau ar negalima šio skirtumo paaiškinti vien imties atsitiktinumu? Šį klausimą galima suformuluoti kaip hipotezių tikrinimo uždavinį: $H_0 : a_m = 466,4193\,(= a_v)$ (diskriminacijos nėra) su alternatyva $H_1 : a_m < 466,4193$ (gal vis tik "skaičiai nemeluoja"?). Deja, taip formuluoti uždavinį negerai, nes

1) moterų atlyginimo imtis yra aiškiai nenormalus.

R turi kelias normalumo tikrinimo procedūras[6]. Kolmogorovo ir Smirnovo testas `ks.test` mums netinka, kadangi jis reikalauja, kad normaliojo a.d. parametrai būtų žinomi iš anksto (t.y., jie negali būti pakeičiami empiriniais imties momentais). Tokiu atveju galima taikyti chi kvadrato kriterijų, tačiau R funkcija `chisq.test` nėra tam tiesiogiai pritaikyta. Normalumą patikrinsime su Shapiro ir Wilk'o kriterijumi [Li, 493 p.]:

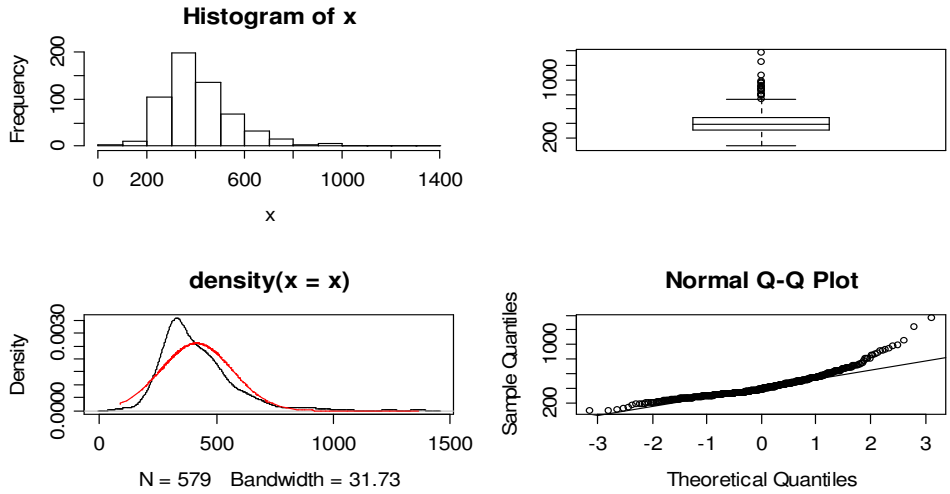
```
 > shapiro.test(w0)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  w0
W = 0.9011, p-value = < 2.2e-16
```

Kadangi *p* reikšmė yra labai maža, nulinę hipotezę apie `w0` normalumą tenka neabejotinai atmesti.

2) Tai, kad `w0` skirstinys nėra normalus – pusė bėdos. Blogiau yra tai, kad, atrodo, jis turi sunkias uodegas ir galimas daiktas neturi baigtinio (teorinio) vidurkio:

```
> eda.shape(w0)
Vidurkis= 413.9497 , Mediana= 383.5227 (simetriniu atveju turi beveik sutapti)
Standartas= 153.6380 , MAD= 122.1459 (kai nera isskirciu, turi beveik sutapti)
Asimetrijos koeficientas= 1.576122 (simetriniu atveju turi buti 0)
Ekscesas= 7.823961 (normaliuoju atveju turi buti 3)
```

[6] Procedūros, tikrinančios hipotezes apie stebimojo a.d. skirstinio funkciją, vadinamos suderinamumo (=goodness of fit arba tiesiog gof (angl.)) kriterijais. Kolmogorovo ir Smirnovo kriterijus tinka tik tolydiems skirstiniams, o chi kvadrato – tolydiems ir diskretiems.




9.7 pav. Kintamojo `w0` skirstinio priešanalizės grafikai

Tokiu įtartinu atveju geriau hipotezes formuluoti medianoms: $H_0 : med(w0) = 422,8220\,(= med(w1))$ su alternatyva $H_1 : med(w0) < 422,8220$. Taikysime Wilcoxon'o kriterijų:

```
> wilcox.test(w0,mu=median(w1),alt="l")

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  w0
V = 67201, p-value = 1.590e-05
alternative hypothesis: true mu is less than 422.822
```

Kadangi p reikšmė žymiai mažesnė už 0,05, nulinę hipotezę apie atlyginimų (medianų) lygybę atmetame. Pažymėsime, kad tam tikra prasme jungtinė hipotezė[7] $H_0 : med(w1) = 383,5227\,(= med(w0))$ su alternatyva $H_1 : med(w1) > 383,5227$ yra atmetama dar ryžtingiau:

```
> wilcox.test(w1,mu=median(w0),alt="g")

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  w1
V = 284298, p-value = < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mu is greater than 383.5227
```

Taigi, moterų atlyginimas neabejotinai mažesnis.

[7] Vyrų atlyginimo skirstinys dar labiau panašus į Pareto (pasižiūrėkite su `eda.shape(w1)`).

## 9.5. Suderinamumo kriterijai

Daugelis statistinių procedūrų galioja tik tuomet, kai populiacija turi konkretų (pvz., normalųjį) skirstinį. Aptarsime du kriterijus, kurie leidžia patikrinti hipotezes apie stebimojo a.d. skirstinį. Pirmasis jų yra $\chi^2$ kriterijus, kuris taikomas kaip diskretiems taip ir tolydiems a.d. Jis pagrįstas tuo, kad (tuomet kai teisinga nulinė hipotezė apie skirstinį) empiriniai dažniai negali labai skirtis nuo teorinių. Taikant $\chi^2$ kriterijų, tolydžius duomenis reikia grupuoti, dėl ko prarandama dalis informacijos. Todėl tolydžių stebėjimų atveju geriau taikyti kitą, būtent Kolmogorovo kriterijų (žr. `?ks.test`), kuris remiasi tuo, kad (tuomet kai teisinga nulinė hipotezė apie skirstinį) empirinė skirstinio funkcija negali labai skirtis nuo teorinės. Kolmogorovo kriterijaus pagrindinis trūkumas yra tas, kad hipotetinės skirstinio funkcijos parametrai turi būti žinomi iš anksto, jų negalime vertinti iš imties[8].

**9.3 pavyzdys.** Žemiau pateikti klasikiniai Bortkiewicz'iaus duomenys apie skaičių žmonių, užmuštų arklio kanopos smūgiu 10-tyje prūsų armijos korpusų per 20 metų (1875-1894).

| $\nu_i$ – mirčių skaičius viename korpuse per metus | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Skaičius atvejų, kai įvyko *i* mirčių | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 | $n$=200 |

Kadangi kareivių korpuse daug, o tokios mirties tikimybė maža, tikėtina, kad mirčių skaičius turi (diskretųjį) Puasono skirstinį. Šią hipotezę tikrinsime su $\chi^2$ kriterijumi. Priminsime, kad mūsų atveju nuokrypio statistika[9]

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=\right)\quad\sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_i-np_i(\hat{\lambda}))^2}{np_i(\hat{\lambda})}$$

(čia $k$ (=5) yra grupių (reikšmių) skaičius, $\hat{\lambda}$ yra Puasono skirstinio parametro $\lambda$ $\chi^2$ minimumo įvertis [Ku, 324 psl.] (paprastai $\hat{\lambda}\approx\overline{x}$), o $p_i(\hat{\lambda})=e^{-\hat{\lambda}}\hat{\lambda}^i/i!$ yra Puasono tikimybės) turi (beveik) $\chi^2_{k-2}$ skirtinį[10] tik tuomet, kai imties dydis $n$ pakankamai didelis. Praktinės rekomendacijos įvairuoja: kartais reikalaujama, kad visi $np_i$ būtų[11] $\geq 10$ [ČM1, 198 psl.], kartais $\geq 5$ [Ku, 324 psl.], o kartais tiesiog $\geq 1$ [LL1, 365 psl.]. Šį kartą remsimės paskutiniąja rekomendacija (R paketo funkcija `chisq.test` remiasi viduriniąja: jei bent vienas $np_i<5$, R atspausdina įspėjimą (`warning`) apie galimai neteisingą rezultatą). Iš pradžių šio testo reikalingas statistikas apskaičiuosime "rankomis".

```
> B_as.matrix(read.table("bort.txt"))
> B
```

[8] Yra dvi malonios išimtys: tai normalusis ir eksponentinis skirstiniai. Vistik ir tuomet reikia naudotis ne Kolmogorovo statistika, o jos modifikacijomis (plg. 9.12 užduotį).
[9] Čia $O_i$ yra registruotų (*O*bserved), o $E_i$ – prognozuojamų (*E*xpected) stebėjimų skaičius $i$-joje grupėje.
[10] Laisvės laipsnių skaičius yra ne $k$-1, bet (kadangi (vieną) parametrą $\lambda$ reikia įvertinti iš imties) $k$-2.
[11] Atkreipiame dėmesį: ne $\nu_i$, bet $np_i$!

```
   V1 V2 V3 V4 V5
1   0  1  2  3  4
2 109 65 22  3  1

> wm <- weighted.mean(B[1,],B[2,]/200)
> wm
[1] 0.61 # Tai x̄.

>cbind(B[2,],200*dpois(0:4,wm),(B[2,]-200*dpois(0:4,wm))^2/
(200*dpois(0:4,wm)))
   [,1]        [,2]        [,3]
V1  109 108.6701738 0.001001060
V2   65  66.2888060 0.025057337
V3   22  20.2180858 0.157048402
V4    3   4.1110108 0.300253401
V5    1   0.6269291 0.222005731 # Šios grupės teorinis dažnis <1!
```

Kadangi paskutinės grupės teorinis dažnis 0,6269291<1, paskutines dvi grupes apjungsime į vieną.

```
> B2_c(B[2,1:3],B[2,4]+B[2,5]) # Sudedame dažnius
> pB2_c(dpois(0:2,wm),dpois(3,wm)+dpois(4,wm)) # Sudedame tikimybes
> sB2 <- sum((B2-200*pB2)^2/(200*pB2))
> sB2 <- sum((B2-200*pB2)^2/(200*pB2))
> sB2
[1] 0.2980418
> 1-pchisq(sB2,4-2)
[1] 0.8615511
```

Taigi,

$$P(\chi_2^2 \geq 0,298) = 0,86$$

yra žymiai didesnė už 0,05 ir todėl nėra nė menkiausio pagrindo atmesti hipotezę apie tai, kad mirčių skaičius turi Puasono skirstinį.

Visus skaičiavimus gali pagreitinti funkcija `chisq.test`. Vienintelė problema čia ta, kad ši funkcija taria, kad l.l. skaičius lygus *k*-1, o ne mums reikalingas *k*-2.

```
> chiB2_chisq.test(B2,p=pB2)
Warning message:
Chi-squared approximation may be incorrect in: chisq.test(B2, p = pB2)
> chiB2

        Chi-squared test for given probabilities

data:  B2
X-squared = 0.298, df = 3, p-value = 0.9604
# Neteisigas l.l. skaičius ir neteisinga p reikšmė
> 1-pchisq(chiB2$statistic,2) # Rankomis įrašome teisingą l.l. skaičių
X-squared
0.8615511 # Teisingas atsakymas
```

**9.4 UŽDUOTIS**. R1 disko direktorijoje ...\Data\Misc yra failas FlowMeter.txt. Jame pateikti šilumos srauto matavimo prietaiso kalibravimo rezultatai (tai "gerų" duomenų pavyzdys). Atlikite šių duomenų priešanalizę. Be kitų procedūrų, patikrinkite ar imtis turi išskirčių. Tam taikykite Grubbs'o kriterijų: jei

$$G > \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t^2_{\alpha/2n}(n-2)}{n-2+t^2_{\alpha/2n}(n-2)}}$$

(čia $G = \frac{\max |x_i - \overline{x}|}{s}$, o $t_\alpha(n)$ yra Student'o skirstinio su $n$ l.l. lygmens $\alpha$ viršutinė kritinė reikšmė, t.y., $P(T_n > t_\alpha(n)) = \alpha$, $\alpha \approx 0.05$), tai hipotezė $H_0$: *išskirčių imtyje nėra* yra atmetama su reikšmingumo lygmeniu $\alpha$. Tokiu atveju, toliausiai nuo $\overline{x}$ nutolęs narys pašalinamas iš imties, likę nariai ($n$ pakeitus į $n$-1) tikrinami iš naujo ir t.t. Taip pat apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas ir jų pasikliauties intervalus. Patikrinkite hipotezę $H_0 : a = 5$ su visomis trijomis ($\neq$, > ir <) alternatyvomis.

**9.5 UŽDUOTIS**. Su File|Source R code...|rw1051|library|Simple|data nusiskaitykite cancer.R duomenų rinkinį (po to pabandykite `> cancer`). Kokias išvadas galima padaryti iš `cancer$colon`[12] histogramos? Ką reiškia, kad mediana lygi 372, o vidurkis 457?

```
> median(cancer$colon)
[1] 372
> mean(cancer$colon)
[1] 457.4118
```

Kodėl vidurkis yra žymiai didesnis už medianą? Ką aktualiau šiuo atveju žinoti ligoniui (ir gydytojui) – medianą ar vidurkį? Yra žinoma, kad ligonių, nevartojančių vitamino C, gyvenimo trukmės mediana yra 350. Patikrinkite hipotezę, kad mūsų atveju mediana lygi 350 (t.y., vitamino C teikiamas gyvenimo trukmės priedas yra nereikšmingas) su alternatyva, kad iš tikrųjų ji didesnė (taikykite a) ženklų kriterijų `simple.median.test` iš paketo simple (žr. [Ku], 4 sk. 15 skyrelis) ir b) Wilcoxon'o ranginį kriterijų `wilcox.test`).

**9.6 UŽDUOTIS**. JAV gimstančių kūdikių svoris turi maždaug normalų skirstinį su vidurkiu 115,2 uncijos (= 3,2659 kg). Pediatras surinko duomenis apie 20-ties smarkiai rūkančių moterų pagimdytų vaikų svorį – jo vidurkis buvo 114,0, o $s$=4,3. Patikrinkite hipotezę, kad rūkančių moterų pagimdytų vaikų svoris mažesnis negu visoje populiacijoje.

**9.7 UŽDUOTIS.** Kompakto R1 direktorijoje Data\StatLab yra duomenų rinkinys babies1-data. Štai jo pradžia:

```
bwt smoke
120 0
113 0
128 1
123 0
.....
```

Čia `bwt` yra gimusio kūdikio svoris, o `smoke` = 0, jei motina niekuomet nerūkė ir =1, jei nėštumo metu rūkė (plg. 9.6 užduotį). a) Patikrinkite hipotezę, kad rūkančių moterų pagimdytų vaikų svoris mažesnis negu visoje populiacijoje, b) Patikrinkite hipotezę, kad

[12] `cancer$colon` komponentėje yra duomenys apie ligonių, naudojančių didelius kiekius vitamino C, gyvenimo trukmę.

visų vaikų svorio vidurkis lygus 115,2 ir c) Patikrinkite hipotezę, kad rūkančių motinų vaikai sveria mažiau negu 115,2[13].

**9.8 UŽDUOTIS**. Uždaviniai, kuriuose reikia patikrinti konservatyvią hipotezę, kad "niekas nepasikeitė", dažnai atsiranda medicinoje – tai vadinamieji "prieš ir po" uždaviniai (pvz., to paties ligonio kraujospūdį matuojame prieš ir po gydymo). Formalizuoti šią hipotezę galime įvairiai, pvz., kaip hipotezę apie skirstinio funkcijų lygybę $H_0 : F_{prieš} = F_{po}$ (žr. Kolmogorovo-Smirnovo kriterijų 10 sk.) arba kaip[14] $H_0 : stebėjimų\ \ skirtumo\ vidurkis = 0$ arba kaip $H_0 : stebėjimų\ skirtumo\ \ mediana = 0$. Tarkime, kad $x$ yra ligonio depresijos skalės reikšmė pirmojo vizito pas gydytoją metu, o $y$ – praėjus tam tikram laikui nuo gydymo pradžios (žr. `?wilcox.test`):

```
x <- c(1.83,  0.50,  1.62,  2.48, 1.68, 1.88, 1.55, 3.06, 1.30)
y <- c(0.878, 0.647, 0.598, 2.05, 1.06, 1.29, 1.06, 3.14, 1.29)
```

Patikrinkite hipotezes, kad skirtumo a) vidurkis, b) mediana lygūs nuliui. Išbrėžkite sklaidos diagramą bei patikrinkite hipotezę, kad $x$ ir $y$ koreliacijos koeficientas lygus nuliui.

**9.9 UŽDUOTIS**. Rutherford'as, Chadwick'as ir Ellis'as atliko $N$=2608 bandymus[15], kurių metu stebėjo radioaktyvią medžiagą. Kiekvienas bandymas truko 7,5 s, jo metu buvo registruojamas dalelių, pasiekusių Geigerio skaitiklį, skaičius $i$:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu_i$ | 57 | 203 | 383 | 525 | 532 | 408 | 273 | 139 | 45 | 27 | 16 | 2608 |

Patikrinkite hipotezę, kad skaitiklį pasiekusių dalelių skaičius turi Puasono skirstinį. Palyginkite santykinių dažnių ir Puasono tikimybių grafikus.

**9.10 UŽDUOTIS.** Žemiau pateikti Weldon'o[16] eksperimento duomenys: 4096 kartus buvo metami 12 žaidimų kauliukų ir kiekvieną kartą registruojamas iškritusių šešiukių skaičius $i$:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\geq 7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu_i$ | 447 | 1145 | 1181 | 796 | 380 | 115 | 24 | 8 | 4096 |

Patikrinkite hipotezę, kad kauliukai taisyklingi.

**9.11 UŽDUOTIS.** Žemiau esančioje lentelėje pateikti duomenys apie kritulių kiekį $X$ tam tikroje vietovėje ($x_i$ žymi kritulių kiekį cm)

---

[13] Daugiau informacijos apie šį eksperimentą galima rasti kompakto R1 faile Knygos_apie_R&S\ StatLab\sample.pdf.

[14] Čia nagrinėjame vadinamuosius porines (paired, matched) imtis – aišku, kad įrašų kiekis abiejose imtyse yra vienodas, o reikšmės $x_i$ ir $y_i$ yra priklausomos.

[15] Tai klasikiniai fizikos bandymai. Ką žinote apie juos?

[16] Plg. http://psychclassics.yorku.ca/Fisher/Methods/chap3.htm

9.1 lentelė

| $x_i$ | $\nu_i$ | $x_i$ | $\nu_i$ | $x_i$ | $\nu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 24 | 2 | 32 | 7 |
| 17 | 0 | 25 | 12 | 33 | 4 |
| 18 | 0 | 26 | 4 | 34 | 4 |
| 19 | 3 | 27 | 7 | 35 | 4 |
| 20 | 2 | 28 | 4 | 36 | 3 |
| 21 | 3 | 29 | 8 | 37 | 3 |
| 22 | 0 | 30 | 9 | 38 | 0 |
| 23 | 3 | 31 | 6 | 39 | 1 |
| | | | | | $n$=90 |

Mes norėtume patikrinti hipotezę apie kritulių kiekio normalumą. Tai galima atlikti bent penkiais būdais.

**1-asis būdas.** Palyginkite *X* asimetriją ir ekscesą su normaliojo a.d. tais pačiais parametrais. Priminsime (plg. 4.16+ psl.), kad empiriniu asimetrijos koeficientu vadiname

$$ask = m_3 / m_2^{3/2}$$

(čia $m_r = \sum_i \nu_i (x_i - \overline{x})^r / n$), o empiriniu ekscesu

$$eks = m_4 / m_2^2 - 3 .$$

Fisher'is siūlo vietoje *ask* nagrinėti "patobulintą" asimetriją $g_1 = k_3 / k_2^{3/2}$, kurioje $k_3 = m_3 / \{(1-1/n)(1-2/n)\}$, o $k_2 = m_2 / (1-1/n)$. Jei *X* turi normalųjį skirstinį, tai tokį pat skirstinį turi ir $g_1$ (su vidurkiu 0 ir dispersija $6n(n-1)/\{(n+3)(n+1)(n-2)\}$). Panašiai, vietoje dydžio *eks* tikslinga nagrinėti reiškinį $g_2 = k_4 / k_2^2$, kuriame $k_4 = m_4 / \{(1-2/(n+1))(1-2/n)(1-3/n)\} - 3m_2^2 / \{(1-2/n)(1-3/n)\}$. Dydis $g_2$ turi dabar normalųjį skirstinį su vidurkiu 0 ir dispersija $24n(n-1)^2 / \{(n+5)(n+3)(n-2)(n-3)\}$. Patikrinkite, kad $g_1 = -0,231$ su standartine paklaida $\pm 0,254$, o $g_2 = -0,302$ su standartine paklaida $\pm 0,503$. Kitaip sakant, turimi duomenys neprieštarauja hipotezei apie kritulių kiekio normalumą.

**2-asis būdas.** Taikysime $\chi^2$ kriterijų. Pirmiausiai įvertinsime nežinomus skirstinio parametrus *a* ir $\sigma^2$. Remsimės vidurkio ir dispersijos formulėmis grupuotiems duomenims (grupavimo intervalo plotis (kitaip sakant, apvalinimo dydis) *h*=1) su Šepardo pataisomis (žr., pvz., [LL1, 351 psl.]):

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \nu_i x_i ,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \nu_i (x_i - \hat{a})^2 - \frac{h^2}{12} .$$

Apskaičiavę gauname, kad $\hat{a} = 28,62$, $\hat{\sigma}^2 = 23,013 - 1/12 = (4,788)^2$. Norėdami taikyti $\chi^2$ kriterijų, (jau kiek grupuotus) duomenis reikia sugrupuoti į stambesnius intervalus. Pradėti reiktų nuo "uodegų". Remiantis Kokreno rekomendacija tolydiesiems skirstiniams, grupes "uodegose" reiktų apjungti taip, kad teorinis dažnis grupėje būtų nemažesnis už 1, o kitur – bent 5 (grupavimo intervalų pločiai nebūtinai vienodi). 9.1 lentelėje gretimos grupės (iš viso jų 12) nuspalvintos skirtingomis spalvomis[17].

| Grupavimo intervalas | Elementų skaičius $\nu_i$ | Tikimybė $np_i$ |
|---|---|---|
| $(-\infty;16,5)$ | 1 | $90 \cdot \Phi(\frac{16,5-28,62}{4,788})$ |
| (16,5:20,5) | 5 | $90 \cdot (\Phi(\frac{20,5-28,62}{4,788}) - \Phi(\frac{16,5-28,62}{4,788}))$ |
| … | … | … |
| $(38,5;\infty)$ | 1 | $90 \cdot (1 - \Phi(\frac{38,5-28,62}{4,788}))$ |

Apskaičiuokite $\chi^2$ statistiką (ji turės 12-1-2=9 l.l.) ir patikrinkite hipotezę apie kritulių kiekio normalumą.

**9.12 UŽDUOTIS.** Išnagrinėkite 9.11 užduoties duomenis ir dar dviem būdais patikrinkite hipotezę apie duomenų normalumą.

**<u>3-asis būdas</u>**. Taikant $\chi^2$ kriterijų, duomenis grupuoti galima įvairiai ir todėl atsakymas nėra vienareikšmis. Antra vertus, grupuodami duomenis neišvengiamai prarandame dalį informacijos, todėl dar ir dėl šios priežasties verta paieškoti kitokių suderinamumo hipotezių tikrinimo kriterijų. Vienas iš jų – Kolmogorovo kriterijus. Deja, Kolmogorovo kriterijus taikomas tik duomet, kai hipotetinės (tolydaus) skirstinio funkcijos visi parametrai žinomi. Kadangi mūsų atveju vidurkį ir dispersiją reikia skaičiuoti pagal imtį, taikysime Kolmogorovo kriterijaus Lillienfors'o modifikaciją. Šiuo atveju reikės apskaičiuoti dydį

$$D_n = \sup_{x \in R} | F_n(x) - \Phi((x - \overline{x}) / s_1) | .$$

Viena iš problemų, atsirandančių skaičiuojant šį dydį, yra ta, kad tarp mūsų duomenų $x$ = {16,19,19,19,20,20,21,…} yra pasikartojančių (Kolmogorovo kriterijus skirtas tolydiems duomenims, todėl to neturėtų būti). Kadangi tai atsirado dėl apvalinimo, duomenis "atapvalinkime":

```
x <- x + runif(90,-0.5,0.5)
```

Dabar komanda

[17] Įvairiai grupuojant duomenis, galima gauti skirtingus atsakymus (tačiau labai skirtis jie neturėtų).

```
ks.test(x,"pnorm",mean=mean(x),sd=sd(x))$statistic
```

apskaičiuotų dydį $D_n$ . Norint nustatyti, ar šis skirtumas reikšmingas, reikėtų pasinaudoti Lillienfors'o lentelėmis. Jose pateikti statistikos $D_n$ 1-α eilės kvantiliai $D_n(1-\alpha)$: jei $D_n > D_n(1-\alpha)$, tai hipotezė $H_0$ : *dydis X turi normalųjį skirstinį* atmetama su reikšmingumo lygmeniu α.

Lillienfors'o (testo kritinių reikšmių) lentelė

| n | α | | | n | α | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.05 | 0.01 | | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 4 | 0.352 | 0.381 | 0.417 | 15 | 0.201 | 0.220 | 0.257 |
| 5 | 0.315 | 0.337 | 0.405 | 16 | 0.195 | 0.213 | 0.250 |
| 6 | 0.294 | 0.319 | 0.364 | 17 | 0.189 | 0.206 | 0.245 |
| 7 | 0.276 | 0.300 | 0.348 | 18 | 0.184 | 0.200 | 0.239 |
| 8 | 0.261 | 0.285 | 0.331 | 19 | 0.179 | 0.195 | 0.235 |
| 9 | 0.249 | 0.271 | 0.311 | 20 | 0.174 | 0.190 | 0.231 |
| 10 | 0.239 | 0.258 | 0.294 | 25 | 0.158 | 0.173 | 0.200 |
| 11 | 0.230 | 0.249 | 0.284 | 30 | 0.144 | 0.161 | 0.187 |
| 12 | 0.223 | 0.242 | 0.275 | >30 | $0.805/\sqrt{n}$ | $0.886/\sqrt{n}$ | $1.031/\sqrt{n}$ |
| 13 | 0.214 | 0.234 | 0.268 | | | | |
| 14 | 0.207 | 0.227 | 0.261 | | | | |

i) Remdamiesi Lilliefors'o kriterijumi, patikrinkite hipotezę apie mūsų duomenų normalumą.

ii) Taikydami Monte-Carlo metodą, apytiksliai apskaičiuokite eilutės su $n$=8 nurodytus kvantilius. Tam generuokite 8 standartinius normaliuosius a.d. ir apskaičiuokite Lilliefors'o $D_8$; šią procedūrą pakartokite 100000 kartų ir raskite gautojo rinkinio 0.9, 0.95 ir 0.99 kvantilius.

**4-asis būdas**. Vienas efektyvių būdų normalumui tikrinti yra `shapiro.test`. Patikrinkite mūsų duomenų normalumą šiuo būdu.

**********

**9.13 UŽDUOTIS.** Jei teisinga hipotezė apie duomenų normalumą, vadinamoji Jarque-Bera statistika

$$JB = \frac{n}{6}\left( ask^2 + \frac{1}{4}(eks-3)^2 \right)$$

turi $\chi^2$ skirstinį su 2 laisvės laipsniais. Patikrinkite 9.11 užduoties duomenų normalumą.

**9.14 UŽDUOTIS**. Nuvairuokite į http://psychclassics.yorku.ca/Fisher/Methods/chap3.htm. Pakartokite TABLE 10 pateiktą analizę. Ar taisyklingas aprašytasis žaidimų kauliukas?

**9.15 UŽDUOTIS**. Genų jungimasi ir paveldimumą valdo tikimybiniai dėsniai. Snedecor'as yra pateikęs tokius kukurūzo chlorofilo paveldimumo duomenis: tarp 1103 savidulkių heterozigotinių žalių sėjinukų, 854 buvo žali, o 249 – geltoni. Teorija tvirtina, kad šis santykis turėtų būti lygus 3:1. Atspausdinkite turimus ir prognozuojamus dažnius. Patikrinkite ar šie duomenys neprieštarauja teorijai.

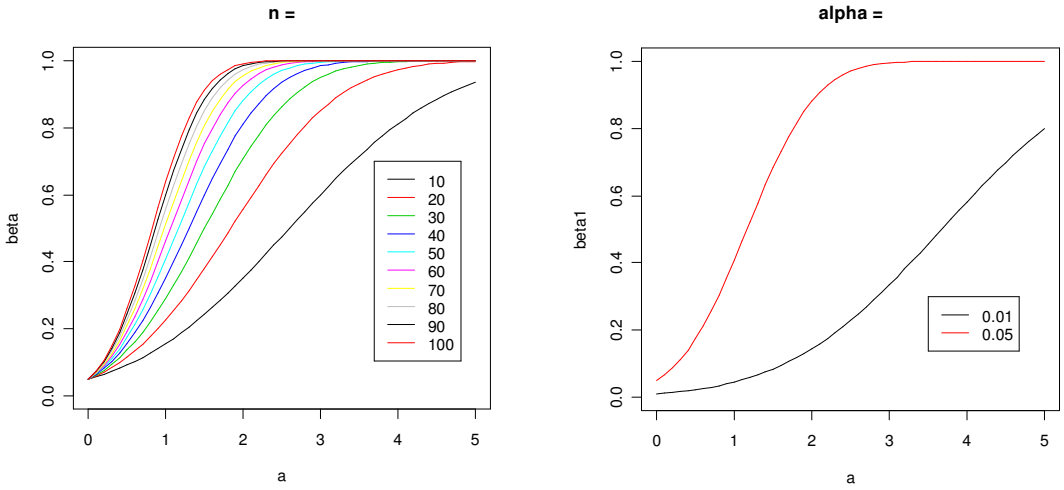
**9.16 UŽDUOTIS**. Nagrinėkime imtį iš normaliosios populiacijos su nežinomu vidurkiu $a$, bet žinoma dispersija $\sigma^2$, ir tikrinkime hipotezę $H_0: a = a_0$ su dešinine alternatyva $H_1: a = a_1 > a_0$. Kaip žinia, hipotezę $H_0$ atmetame, jei statistikos $z = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma$ reikšmė yra didesnė už kritinę reikšmę $u = u_\alpha$ (arba, kitais žodžiais, $z$ priklauso kritiniam intervalui $(u, \infty)$; čia $\alpha$ yra kriterijaus reikšmingumo lygmuo – paprastai tai 0,05, 0,01 ir pan. – o $u$ randamas iš lygybės

$$P_{a_0}((\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/\sigma \geq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2/2} dx = 1 - \Phi(u) = \alpha$$

(kitaip sakant, $u$ yra standartinio normaliojo skirstinio $1-\alpha$ eilės kvantilis)). Į kritinį intervalą pakliūti (ir todėl atmesti $H_0$) deja galima ir tuomet, kai $H_0$ yra teisinga (tai vadinama 1-osios rūšies klaida, jos tikimybė yra maža ir lygi $\alpha$). Antra vertus, būtų gerai, jei tuomet, kai teisinga alternatyva, statistika $z$ į kritinį intervalą pakliūtų su kiek galint didesne tikimybe. Ši tikimybė vadinama kriterijaus galios funkcija ir paprastai žymima raide $\beta$. Aišku, kad ji priklauso nuo $a_1$, $\beta = \beta(a_1)$, o ją apskaičiuoti galima pagal formulę

$$\beta(a_1) = P_{a_1}((\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/\sigma \geq u) = P_{a_1}((\overline{X} - a_1)\sqrt{n}/\sigma \geq u + (a_0 - a_1)\sqrt{n}/\sigma) =$$
$$= 1 - \Phi(u + (a_0 - a_1)\sqrt{n}/\sigma)$$

Štai du galios funkcijos grafikai ($a_0 = 0$, $\sigma = 5$):




9.8 pav. Galios funkcijos grafikai: kairėje $\alpha$ = 0,05 ir n=10, 20,…,100, dešinėje n=50 ir $\alpha$ = 0,01 ir 0,05

Matome, kad (žr. kairįjį grafiką), didinant imties dydį *n*, galios funkcija didėja; jei *n* fiksuotas, tai (žr. dešinįjį grafiką), sumažinus pirmos rūšies klaidą $\alpha$, antros rūšies klaida (ji lygi 1-β) padidėja (ją galima sumažinti tik padidinus imties dydį).

O dabar pati UŽDUOTIS: parašykite programą, kuri išbrėžtų šiuos du grafikus.

# 10. Sprendžiamoji statistika: hipotezių tikrinimas (dvi imtys)

R pakete yra daug statistinių kriterijų skirtų dviejų populiacijų parametrų lyginimui, kitais žodžiais, hipotezėms $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ (čia $\theta_1$ ir $\theta_2$ yra tie patys abiejų populiacijų parametrai) tikrinti. Štai trumpa šių kriterijų apžvalga.

- Dviejų populiacijų proporcijų lygybės testas `prop.test`.
- Dviejų požymių nepriklausomumo testai `fisher.test` ar `chisq.test` (tai vadinamieji dažnių lentelių uždaviniai).
- Dviejų populiacijų Stjudento kriterijus `t.test` – jis skirtas hipotezei $H_0 : a_1 = a_2$ tikrinti (čia $a_1$ ir $a_2$ yra populiacijų vidurkiai). Jei duomenų rinkiniai nedideli, jie turėtų būti maždaug normalūs. Šis testas turi keletą variantų: jį galima taikyti suporuotiems įrašams, o taip pat tam atvejui, kai populiacijų dispersijos nėra lygios.
- Dviejų populiacijų Vilkoksono testas `wilcox.test`. Šiuo atveju nulinė hipotezė tvirtina, kad abiejų populiacijų skirstiniai sutampa, o alternatyva – kad skirstiniai skiriasi tik postūmiu (normaliuoju atveju tai reikštų, kad nesutampa vidurkiai).
- Kolmogorovo ir Smirnovo dviejų populiacijų kriterijus `ks.test`. Nulinė hipotezė teigia, kad abi populiacijos turi tą patį (tolydų) skirstinį.

## 10.1. Hipotezės apie proporcijas

Diske R1 (žr. Data\Verbeek\Verbeek_Data\DataSets) yra failas benefits (žr. www.econ.kuleuven.ac.be/GME), kuriame pateikti 4877 įrašai apie netekusius darbo darbininkus JAV 1982-1991 metais. Be kitų duomenų, jame pateikti faktai apie darbininkų odos spalvą (fiktyvus kintamasis `nwhite` lygus 1, jei ne baltasis, ir 0 – jei baltasis) ir ar gavo bedarbystės pašalpą (fiktyvus kintamasis `y` lygus 1, jei gavo). Kadangi faile `benefits` (skaitinių) kintamųjų yra net 22, o vienas įrašas užima keturias eilutes, todėl importuoti šį failą į R šį kartą reikia ne su `read.table`:

```
> benefits <- scan("benefits.dat",what=list(rep(0,22)),multi.line=T)
> matrix(unlist(benefits),byrow=T,ncol=22)[1:5,]
     [,1] [,2] [,3] [,4]  [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13]
[1,]  4.5  167   42   49 240.1   21    0    0    0     0     0     1     1
[2,] 10.5  251   55   26  67.6    2    1    0    0     0     0     1     1
[3,]  7.2  260   21   40 160.0   19    0    0    0     0     1     0     1
[4,]  5.8  245   56   51 260.1   17    1    0    0     1     0     0     1
[5,]  6.5  125   58   33 108.9    1    1    0    0     0     1     1     1
     [,14] [,15] [,16] [,17] [,18]     [,19]     [,20] [,21] [,22]
[1,]     1     0     0     0     7 0.2906310 0.0844664     1     1
[2,]     1     0     1     1    10 0.5202020 0.2706102     1     0
[3,]     1     1     0     0    10 0.4324895 0.1870471     1     1
[4,]     1     1     0     0    10 0.5000000 0.2500000     0     1
[5,]     1     1     1     1     4 0.3906250 0.1525879     1     0
```

Kintamasis `nwhite` yra įrašytas 10-ajame šios matricos stulpelyje, o `y` – 22-ajame:

```
> nwhite <- matrix(unlist(benefits),byrow=T,ncol=22)[,10]
> y <- matrix(unlist(benefits),byrow=T,ncol=22)[,22]
> benef <- data.frame(nwhite,y)
> rm(nwhite,y,benefits)
> attach(benef)
> tapply(y,nwhite,mean) # Atskirai skaičiuoja y vidurkį baltųjų
        0         1     # (nwhite==0) ir nebaltųjų (nwhite==1)
0.6821351 0.6935933     # grupėse
```

Kintamasis `y` įgyja tik dvi reikšmes, todėl jo teorinis vidurkis yra ne kas kita kaip vienetukų (t.y., gavusiųjų pašalpą) dalis visoje populiacijoje. Matome, kad šių vidurkių įverčiai abiejose imtyse beveik lygūs: $(0,682 =)\hat{p}_0 \approx \hat{p}_1 (= 0,694)$, kitais žodžiais labai panašu, kad visoje populiacijoje pašalpą gavusių baltųjų dalis $p_0$ yra lygi pašalpą gavusių nebaltųjų daliai $p_1$. Hipotezę $H_0 : p_0 = p_1$ galima patikrinti keliais būdais.

**1**. Taikysime proporcijų lygybę tikrinantį testą `prop.test`. Į jį kreiptis galima įvairiai, mes pradėsime nuo požymių sąveikos lentelės skaičiavimo.

```
> tableb <- table(benef)
> tableb
      y
nwhite    0    1   # Langelyje (0,0) yra negavusių pašalpos baltųjų
     0 1322 2837   # skaičius 1322, langelyje (0,1) - pašalpą gavusių
     1  220  498   # baltųjų skaičius 2837 ir t.t.

> prop.test(cbind(tableb[,2],tableb[,1])) # Alternatyva H1:p0≠p1

        2-sample test for equality of proportions with continuity
correction

data:  cbind(tableb[, 2], tableb[, 1])
X-squared = 0.3207, df = 1, p-value = 0.5712
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.04884403  0.02592766
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.6821351 0.6935933
```

Šio kriterijaus *p* reikšmė lygi 0,5712, todėl nėra jokio pagrindo atmesti nulinę hipotezę. Tą pačią išvadą galime padaryti ir kitaip: proporcijų skirtumo $p_0 - p_1$ 95% pasikliovimo intervalas (-0,0488;0,0259) uždengia nulį, todėl su 5% (ar bet kuriuo reikšmingesniu[1]) lygmeniu hipotezę $H_0$ priimame.

**2**. Nulinę hipotezę galima interpretuoti kaip hipotezę, kad abiejose populiacijose pašalpą gavusiųjų dalys yra lygios. Šios hipotezės (apie požymio homogeniškumą) tikrinimas pagristas $\chi^2$ statistika [ČM, (3.5.9)]

[1] Jei pasikliauties lygmuo yra 95%, tai atitinkamos hipotezės reikšmingumo lygmuo lygus (100-95)%=5%; kuo šis skaičius mažesnis, tuo reikšmingumo lygmuo "aukštesnis".

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(o_{ij} - n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n},$$

kuri, kai hipotezė $H_0$ teisinga, neturėtų būti "didelė". Kadangi ši statistika, kai $H_0$ teisinga ir $n$ didelis, turi $\chi^2_{(2-1)\cdot(2-1)} = \chi^2_1$ skirstinį, reikia apskaičiuoti tikimybę $P(\chi^2_1 > \chi^2)$ - jei ji mažesnė už 0,05, $H_0$ atmetame. $\chi^2$ reikšmę pirmiausiai apskaičiuosime "rankomis":

```
> simple.marginals(tableb)
         0    1 Total
0     1322 2837  4159
1      220  498   718
Total 1542 3335  4877

>  (1322-(a11<-4159*1542/4877))^2/a11+(2837-(a12<-4159*3335/4877))^2/
a12+(220-(a21<-718*1542/4877))^2/a21+(498-(a22<-718*3335/4877))^2/a22
[1] 0.3718071
```

(atkreipkite dėmesį į galimybę vienu metu atlikti veiksmus ir kartu sukurti naują objektą: `(a11<-4159*1542/4877)`). Gautoji reikšmė nesutampa su aukščiau pateiktu skaičiumi 0,3207, tačiau priežastis čia ta, kad `prop.test` naudojo tolydumo korekciją. Jei jos nenaudotume, gautume tiksliai tą pačią reikšmę:

```
> prop.test(cbind(tableb[,2],tableb[,1]),correct=F)

        2-sample test for equality of proportions without continuity
        correction

data:  cbind(tableb[, 2], tableb[, 1])
X-squared = 0.3718, df = 1, p-value = 0.542
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.04802743  0.02511106
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.6821351 0.6935933
```

Beje, tą patį rezultatą galime gauti ir su

```
> summary(tableb)
Number of cases in table: 4877
Number of factors: 2
Test for independence of all factors:
        Chisq = 0.3718, df = 1, p-value = 0.542
```

Priminsime, kad funkcija `summary` yra bendrinė, todėl priklausomai nuo argumento klasės[2] jos reikšmė keičiasi. Sąveikos lentelėms ji tikrina požymių nepriklausomumo hipotezę ir skaičiuoja atitinkamą *p* reikšmę (komentarą apie ryšį tarp nepriklausomumo ir homogeniškumo galite rasti [ČM, 207 p.]). Čia pažymėsime, kad "išoriškai" abi procedūros nesiskiria, skiriasi tik jų interpretacija.

[2] `> class(tableb)`
`[1] "table"`

**10.1 UŽDUOTIS**. Remdamiesi duomenų rinkinio `bwages` duomenimis (žr. 5.1 skyrelį), patikrinkite ar vyrai ir moterys yra vienodai išsilavinę.

**10.2 UŽDUOTIS**. 5.2 skyrelyje buvo nagrinėjami kintamųjų `wage` ir `male` tarpusavio santykiai. Ar vyrų ir moterų atlyginimai `wage` (tiksliau - `cut(wage,breaks=c(80, 320,410,520,1920))` yra vienodi?

## 10.2. Hipotezės apie požymių nepriklausomumą (dažnių lentelės)

Aptarkime kelis uždavinius, kurie dažnai vadinami dažnių lentelių uždaviniais. Kaip žinia, bendrojo $\chi^2$ kriterijaus (žr. [ČM1, 197+ psl.])

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)}{E_i}$$

(čia $O_i$ yra stebėtieji (=*O*bserved) dažniai, o $E_i$ yra teoriniai arba tikėtini (=*E*xpected) dažniai) taikymų yra labai daug. Tikrinkime hipotezę, kad diskretūs a.d. $X$ ir $Y$ yra nepriklausomi, t.y. $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j$ kokie bebūtų $i$ ir $j$. Jei stebėjimų duomenys yra pateikti lentele

| | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_c$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $o_{11}$ | $o_{12}$ | $\cdots$ | $o_{1c}$ | $n_{1\bullet}$ |
| $x_2$ | $o_{21}$ | $o_{22}$ | $\cdots$ | $o_{2c}$ | $n_{2\bullet}$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $x_r$ | $o_{r1}$ | $o_{r2}$ | $\cdots$ | $o_{rc}$ | $n_{r\bullet}$ |
| $\sum$ | $n_{\bullet 1}$ | $n_{\bullet 2}$ | $\cdots$ | $n_{\bullet c}$ | $n$ |

tai $\chi^2$ statistika tuomet atrodo taip:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - n_{i\bullet}n_{\bullet j}/n)^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}/n}.$$

Jei skirtumai tarp stebėtųjų reikšmių $O_{ij}$ ir teorinių reikšmių $n_{i\bullet}n_{\bullet j}/n$ yra dideli, tiksliau, jei apskaičiuotoji $\chi^2$ statistikos reikšmė yra didesnė už a.d. $\chi^2_{(r-1)(c-1)}$ $(1-\alpha)$ eilės kvantilį (čia $\alpha$ yra kriterijaus reikšmingumo lygmuo), tai hipotezę apie a.d. (požymių) $X$ ir $Y$ nepriklausomumą atmetame.

**10.1 pvz**. Žemiau esančioje lentelėje yra pateikti garsiųjų Salk'o poliomelito vakcinacijos tyrimų rezultatai.

| | Nesusirgo poliomelitu | Neparaližuojantis poliome-litas | Paraližuojantis poliomelitas | Iš viso |
|---|---|---|---|---|
| Vakcinuoti | 200688 | 24 | 33 | 200745 |
| Placebo[3] | 201087 | 27 | 115 | 201229 |
| Iš viso | 401775 | 51 | 148 | 401974 |

Aukščiau pateikto pavidalo lentelės yra vadinamos sąveikos lentelėmis (šį kartą joje pateikti dviejų vardinių kintamųjų, vakcinacijos metodo ir ligos eigos, sąveikos rezultatai). Paprastai domimasi ar šie kintamieji yra susieti kokia nors (statistine) priklausomybe, o nulinė hipotezė teigia, kad jie yra nepriklausomi. Šia hipotezę galima tikrinti arba su asimptotiniu chi kvadrato testu `chisq.test` arba su tiksliu Fisher'io testu `fisher.test`. Tais atvejais, kai yra papildomų (stratifikuojančių) kintamųjų, nepriklausomumas tikrinamas su Mantelhaen'o (arba Cochran'o, Mantel'io ir Haenszel'io) testu[4] `mantelhaen.test` iš ctest bibliotekos. Jei sąveikos lentelėse yra poruotų duomenų, reikia taikyti `mcnemar.test`[5].

Grįžkime prie Salk'o duomenų. Mūsų duomenis reikia pateikti matricos arba dviejų vektorių pavidalu.

```
> salk.matr <- rbind(c(200688,24,33),c(201087,27,115))
> salk.matr
       [,1] [,2] [,3]
[1,] 200688   24   33
[2,] 201087   27  115
> chisq.test(salk.matr)

        Pearson's Chi-squared test

data:  salk.matr
X-squared = 45.4224, df = 2, p-value = 1.370e-10
```

Kadangi *p* reikšmė yra ženkliai mažesnė už 0,05, vakcinacija neabejotinai turi įtakos[6] ligos eigai (pažymėsime, kad tikslusis Fisher'io kriterijus dėl didelio įrašų skaičiaus šiuo atveju negali būti taikomas).

**10.2 pvz**. Viena teorijų teigia, kad "kai kurie žmonės jau gimsta nusikaltėliais", kitaip sakant, polinkį nusikalsti nusako genai. Žemiau pateiktoje (žr. [LL1, 241 psl] ir [LL1, 376 psl.]) lentelėje yra duomenys apie brolių dvynių nusikaltimus. Nulinė hipotezė teigia, kad du požymiai, giminystės ryšys ir brolio teistumas, yra nepriklausomi.

| | Brolis yra teistas | Brolis nėra teistas | |
|---|---|---|---|
| Vieno kiaušinėlio dvyniai[7] | 10 | 3 | 13 |

[3] Placebo = "netikra" vakcina, neutrali medžiaga.
[4] Žr. pavyzdį [Splus6_1, 192 psl.]
[5] Žr. pavyzdį [Splus6_1, 195 psl.]
[6] Maža *p* reikšmė nebūtinai reiškia didelį vakcinacijos efektą, dažnai ji būna maža tiesiog dėl didelio įrašų skaičiaus.
[7] Tokių brolių genai identiški.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dviejų kiaušinėlių dvyniai | 2 | 15 | 17 |
| | 12 | 18 | 30 |

```
dvy.matr <- rbind(c(10,3),c(2,15))
```

Kadangi alternatyva šį kartą yra ne bet koks nuokrypis nuo prognozuojamų reikšmių, bet tik ryšį tarp požymių įrodantis, Fisher'io kriterijuje alternatyva pasirinksime "greater":

```
> fisher.test(dvy.matr,alternative="greater")

        Fisher's Exact Test for Count Data

data:  dvy.matr
p-value = 0.0004652
alternative hypothesis: true odds ratio is greater than 1
95 percent confidence interval:
 3.509263      Inf
sample estimates:
odds ratio
  21.30533
```

Taikydami apytikslį chi kvadrato kriterijų, gauname panašų atsakymą (kadangi renkamės vienpusę alternatyvą, *p* reikšmę daliname iš 2):

```
> chisq.test(dvy.matr)$p.value/2
[1] 0.0006105493
```

Taigi, kokį kriterijų betaikytume, nulinę hipotezę reikia neabejotinai atmesti.

Iki šiol dirbome su sąveikos lentelėmis. Tais atvejais, kai pateikti "žali" duomenys, juos pirmiau reikia apdoroti.

**10.3 pvz**. Ar didėja žmogaus svoris su amžiumi? Į šį klausimą atsakyti nėra lengva – tam reikėtų daugiamečių stebėjimų. Norėdami pailiustruoti metodus, modeliuokime du stulpelius: `ob` (=obesity=nutukimas: 1-nutukęs, 0-ne) ir `agegr` (=age group=amžiaus grupė: 1-jauniausi, …, 11-vyriausi). Tarkime, kad nutukimo tikimybė didėja su amžiumi. Štai vienas iš galimų modeliavimo (ir tikimybių pasirinkimo) variantų:

```
set.seed(5)
agegr <- sample(1:11,200,repl=T)
ob <- numeric(200)
for(i in 1:200) ob[i] <- sample(1:0,1,prob=c(pr <- agegr[i]/12,
1-pr)) # Didėjant amžiaus grupei, 1-tuko tikimybė didėja
mytable1 <- table(ob,agegr)
mytable1

agegr
 ob  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11
  0 13 14 14 10 12  8  6  5  5  2  0
  1  1  4  3 10  8 10 12 14  8 19 22
```

Nulinę hipotezę “svoris nepriklauso nuo amžiaus” galima patikrinti ir su `summary` funkcija (kai jos argumentas – dvimatė lentelė, atsakymas praktiškai sutampa su `chisq.test` rezultatu (patikrinkite)).

```
summary(mytable1)
Number of cases in table: 200
Number of factors: 2
Test for independence of all factors:
        Chisq = 65.07, df = 10, p-value = 3.937e-10
```

Dar vienas variantas:

```
> mytable2 <- xtabs(~ob+agegr)
> mytable2
 agegr
ob  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11
  0 13 14 14 10 12  8  6  5  5  2  0
  1  1  4  3 10  8 10 12 14  8 19 22
> summary(mytable2) # Bus kaip mytable1
Call: xtabs(formula = ~ob + agegr)
Number of cases in table: 200
Number of factors: 2
Test for independence of all factors:
        Chisq = 65.07, df = 10, p-value = 3.937e-10
```

Dar vieną galimybę (atsakymas, teisybė, nėra kompaktiškas, bet užtai panašus į SAS’o) suteikia paketo gregmisc funkcija `CrossTable`.

```
> library(gregmisc)
> cross.ob <- CrossTable(agegr, ob, expected = TRUE)

   Cell Contents
|-----------------|
|               N |
|      Expected N |
|   N / Row Total |
|   N / Col Total |
| N / Table Total |
|-----------------|


Total Observations in Table:  200


             | ob
       agegr |         0 |         1 | Row Total |
-------------|-----------|-----------|-----------|
           1 |        13 |         1 |        14 |
             |     6.230 |     7.770 |           |
             |     0.929 |     0.071 |     0.070 |
             |     0.146 |     0.009 |           |
             |     0.065 |     0.005 |           |
-------------|-----------|-----------|-----------|
           2 |        14 |         4 |        18 |
             |     8.010 |     9.990 |           |
             |     0.778 |     0.222 |     0.090 |
             |     0.157 |     0.036 |           |
             |     0.070 |     0.020 |           |
-------------|-----------|-----------|-----------|
```

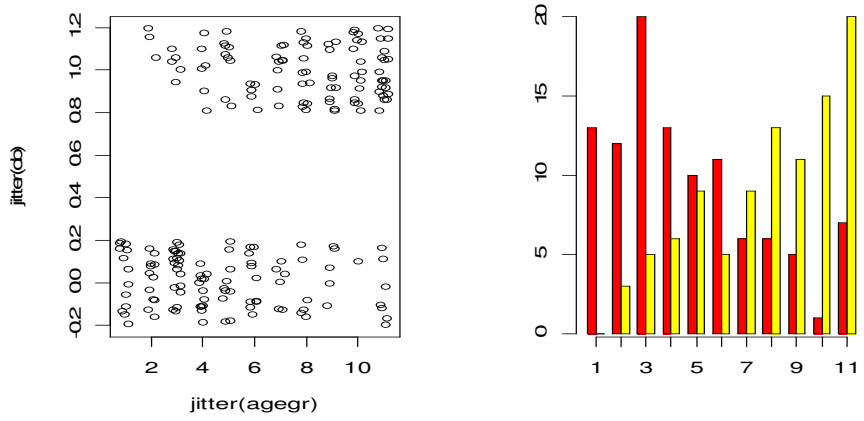
```
             3 |         14 |          3 |         17 |
               |      7.565 |      9.435 |            |
               |      0.824 |      0.176 |      0.085 |
               |      0.157 |      0.027 |            |
               |      0.070 |      0.015 |            |
-------------|------------|------------|------------|
********************************
-------------|------------|------------|------------|
            11 |          0 |         22 |         22 |
               |      9.790 |     12.210 |            |
               |      0.000 |      1.000 |      0.110 |
               |      0.000 |      0.198 |            |
               |      0.000 |      0.110 |            |
-------------|------------|------------|------------|
Column Total |         89 |        111 |        200 |
               |      0.445 |      0.555 |            |
-------------|------------|------------|------------|


Statistics for All Table Factors


Pearson's Chi-squared test
------------------------------------------------------------
Chi^2 =  65.0658     d.f. =  10     p =  3.937487e-10
```

Priminsime, kad R gali atspausdinti ir tik esminę informaciją:

```
> names(cross.ob)
1] "t"         "prop.col" "prop.row" "prop.tbl" "chisq"
> cross.ob$chisq

        Pearson's Chi-squared test

data:  t
X-squared = 65.0658, df = 10, p-value = 3.937e-10
```

Kaip visuomet, grafikai irgi gali būti naudingi:

```
par(mfrow=1:2)
plot(jitter(agegr),jitter(ob))
barplot(mytable2,beside=TRUE)
```




10.1 pav. Senstant nutukusiųjų skaičius didėja

**10.3 UŽDUOTIS**. Atsakykite į klausimą, pateiktą 1 skyriaus 1.4 pavyzdyje.

## 10.3. Hipotezės apie vidurkius

Štai klasikiniai Student'o duomenys apie papildomas miego valandas (buvo tiriamos dvi grupės po 10 žmonių, grupės vartojo du skirtingus migdomuosius vaistus).

```
> data(sleep)
> sleep
   extra group
1    0.7     1
2   -1.6     1
3   -0.2     1
4   -1.2     1
5   -0.1     1
6    3.4     1
7    3.7     1
8    0.8     1
9    0.0     1
10   2.0     1
11   1.9     2
12   0.8     2
13   1.1     2
14   0.1     2
15  -0.1     2
16   4.4     2
17   5.5     2
18   1.6     2
19   4.6     2
20   3.4     2
```

Kadangi kiekvienoje grupėje duomenys beveik normalūs:

```
> attach(sleep)
> shapiro.test(extra[group==1])
        Shapiro-Wilk normality test
data:  extra[group == 1]
W = 0.9258, p-value = 0.4079

> shapiro.test(extra[group==2])
        Shapiro-Wilk normality test
data:  extra[group == 2]
W = 0.9193, p-value = 0.3511,
```

o jų dispersijos lygios[8]

```
>var.test(extra[group == 1], extra[group == 2]) # H0:σ1^2=σ2^2
F test to compare two variances
data:  extra[group == 1] and extra[group == 2]
F = 0.7983, num df = 9, denom df = 9,
p-value = 0.7427 # p reikšmė >0,05 - nulinės hipotezės neatmetame
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
```

[8] Tiksli formuluotė būtų tokia: stebėjimo duomenys neprieštarauja hipotezei apie populiacijų dispersijų lygybę.

```
95 percent confidence interval:
 0.198297 3.214123  # Pasikliauties intervalas uždengia 1
sample estimates:
ratio of variances
         0.7983426
```

remsimės Student'o dviejų imčių su lygiomis dispersijomis testu:

```
> t.test(extra[group == 1], extra[group == 2],var.equal=T)

        Two Sample t-test

data:  extra[group == 1] and extra[group == 2]
t = -1.8608, df = 18, p-value = 0.07919
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -3.3638740  0.2038740
sample estimates:
mean of x mean of y
     0.75      2.33
```

Taigi nors grupių grupių vidurkiai pastebimai skiriasi (atitinkamai, 0,75 ir 2,33 papildomo miego valandos), $t$ statistikos reikšmė (žr. [ČM, (3.4.5)]) –1,8608 nėra tiek didelė, kad nulinę hipotezę $H_0 : a_1 = a_2$ atmestume[9] su standartiniu 5% reikšmingumo lygmeniu[10]. Antra vertus, "slidi" 7,9% $p$ reikšmė reiškia, kad bandymus geriausia būtų pakartoti su didesniu žmonių skaičiumi. Iš tikrųjų, jei teisinga alternatyva $H_1 : a_1 - a_2 = a \neq 0$, tai, pvz., 95% vidurkių skirtumo pasikliauties intervalo formulė (žr. [ČM, 174 p.])

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{0,025}(2n-2)\sqrt{2S_p^2 / n} \approx a \pm c/\sqrt{n}$$

teigia, kad, kai $n$ pakankamai didelis, 0 šiam intervalui nepriklausys.

Paskutiniam teiginiui pailiustruoti parašysime funkciją `t.testas`, kuri įrodys, kad kai $n$ didelis, galime atskirti net labai artimas hipotezes.

```
t.testas <- function()
{
# Funkcija t.testas
# Viena imtis iš N(0,1), o kita - iš N(0.2,1)
# Ar galima teigti, kad jų vidurkiai skiriasi?
opar <- par(mfrow = c(1, 2))
on.exit(par(opar))
p.reiksme <- numeric(100)
vid.skirtumas <- numeric(100)
for(i in 1:100) {
      imtis1 <- rnorm(i * 10, 0, 1)
      imtis2 <- rnorm(i * 10, 0.2, 1)
      vid.skirtumas[i] <- mean(imtis1) - mean(imtis2)
# Funkcijos t.test(x1,x2) reikšmė - sąrašas; imame jo
```

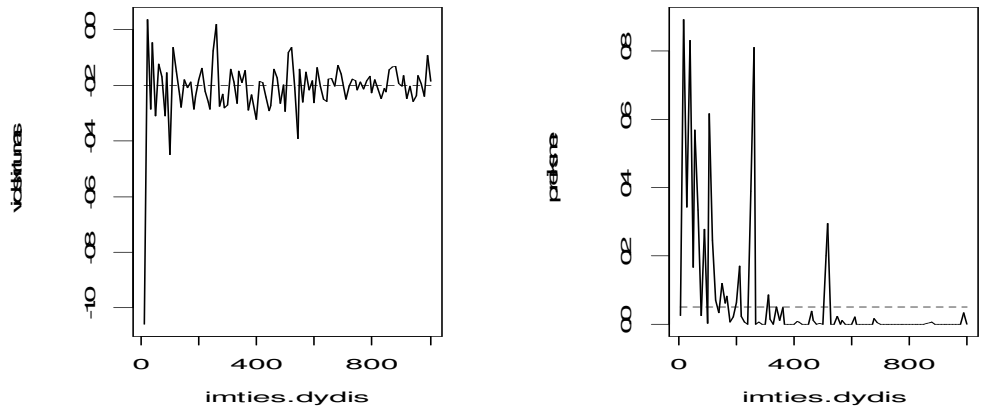
[9] Abiejose grupėse duomenų nėra daug, todėl šią analizę gerai būtų pakartoti su tinkamu neparametriniu Stjudento testo analogu (žr. 10.6 užduotį).

[10] Atkreipkite dėmesį į 95% vidurkų skirtumo $a_1 - a_2$ pasikliauties intervalą – jis uždengia nulį, kas dar kartą patvirtina, kad atmesti $H_0$ 5% reikšmingumo lygmeniu nėra pagrindo.

```
# p.value komponentę
      p.reiksme[i] <- t.test(imtis1, imtis2)$p.value
                }
      imties.dydis <- (1:100) * 10
      plot(imties.dydis, vid.skirtumas, type = "l")
      lines(imties.dydis, rep(-0.2, 100), lty = 2)
      plot(imties.dydis, p.reiksme, type = "l")
      lines(imties.dydis, rep(0.05, 100), lty = 2)
}
```

Kelis kartus išbandome savo funkciją (žr. 10.2 pav.):

```
> t.testas()
> t.testas()
```




10.2 pav. Imčių vidurkių skirtumas artėja į -0.2, hipotezė apie vidurkių lygybę $H_0$: $a1$-$a2$=0 galų gale bus atmesta, o hipotezė $H_1$: $a1$<$a2$ priimta

**10.4 UŽDUOTIS**. Nagrinėkite dvi imtis – vieną iš N(0;1), o kitą iš N(0;1,2). Parašykite funkciją `var.testas` ir įrodykite, kad, kai $n$ pakankamai didelis, hipotezė $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ bus atmesta.

Iki šiol nagrinėjome atvejį, kai stebėjome dvi nesusijusias populiacijas. Prisiminkime, kad rinkinyje `davis` turėjome duomenis apie tikrąjį ir praneštąjį svorį ir ūgį (tai žmonių, reguliariai užsiimančių fizinėmis pratybomis, svoris ir ūgis; pamatysime, kad jie gana gerai žino savo svorį, bet prasčiau ūgį).

```
> davis[1:5,]
  sex weight height repwt repht
1   M     77    182    77   180
2   F     58    161    51   159
3   F     53    161    54   158
4   M     68    177    70   175
5   F     59    157    59   155
```

Ar teisingai moterys praneša savo svorį? Aišku, kad stulpeliai `weight` ir `repwt` yra priklausomi ir todėl kriterijaus Student'o statistika turės kitokį laisvės laipsnių skaičių. Tokiems uždaviniams spręsti naudojame Student'o porinį kriterijų.

```
> attach(davis)
> t.test(weight[sex=="M"],repwt[sex=="M"],paired=T)

        Paired t-test

data:  weight[sex == "M"] and repwt[sex == "M"]
t = -2.1294, df = 81, p-value = 0.03625
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.13231233 -0.03841937
sample estimates:
mean of the differences
             -0.5853659
```

Nors skirtumas tarp tikrojo ir praneštojo svorio yra nedidelis (tik –0,585 kg; praneštasis svoris didesnis), *p* reikšmė (lygi 0,036 (<0,05) rodo, kad hipotezę apie tai, kad svoris pranešamas visai tiksliai tenka atmesti. Tai nėra keista – kai *n* didelis, `t.test` fiksuoja net mažus skirtumus. Taigi ateityje, norėdami sužinoti tikslų šių moterų svorį, iš praneštojo svorio reikia (vidutiniškai!) atimti 0,585 kg (jei nulinės hipotezės nebūtume atmetę, atimti nieko nereiktų).

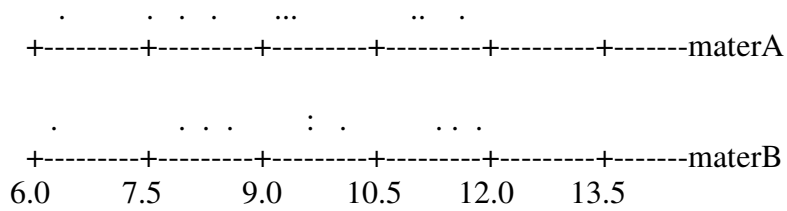
**10.5 UŽDUOTIS**. Štai ištrauka iš http://www.anu.edu.au/nceph/surfstat/surfstat-home/ (žr. Statistical inference|Comparing means of two continuous variables ):

A shoe company wanted to compare two materials (A and B) for use on the soles of boys' shoes. We could design an experiment to compare the two materials in two ways. One design might be to recruit ten boys (or more if our budget allowed) and give five of the boys shoes with material A and give five boys shoes with material B. Then after a suitable length of time, say three months, we could measure the wear on each boy's shoes. This would lead to independent samples. Now, you would expect a certain variability among ten boys - some boys wear out shoes much faster than others. A problem arises if this variability is large. It might completely hide an important difference between the two materials.

An alternative design, a paired design, attempts to remove some of this variability from the analysis so we can see more clearly any differences between the materials we are studying. Again, suppose we started with the same ten boys, but this time had each boy test both materials. There are several ways we could do this. Each boy could wear material A for three months, then material B for a second three months. Or we could give each boy a special pair of shoes with the sole on one shoe made from material A and the other from material B. This latter procedure produced the date in the table below:

| **Boy** | **Material A** | **Material B** |
|---|---|---|
| 1 | 13.2 | 14.0 |
| 2 | 8.2 | 8.8 |
| 3 | 10.9 | 11.2 |
| 4 | 14.3 | 14.2 |
| 5 | 10.7 | 11.8 |
| 6 | 6.6 | 6.4 |
| 7 | 9.5 | 9.8 |
| 8 | 10.8 | 11.3 |
| 9 | 8.8 | 9.3 |
| 10 | 13.3 | 13.6 |

MINITAB (toks statistikos paketas) pateikia tokius grafinį ir skaitinį abiejų imčių aprašymą:




| | N | MEAN | MEDIAN | TRMEAN | STDEV | SEMEAN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| materA | 10 | 0.630 | 0.750 | 10.675 | 2.451 | 0.775 |
| materB | 10 | 1.040 | 11.250 | 11.225 | 2.518 | 0.796 |

| | MIN | MAX | Q1 | Q3 |
|---|---|---|---|---|
| materA | 6.600 | 14.300 | 8.650 | 13.225 |
| materB | 6.400 | 14.200 | 9.175 | 13.700 |

The first design results in two independent samples, while the second design contains dependent samples. Different methods of analysis are appropriate in each case.

Išbrėžkite panašų grafiką ir pateikite panašiai suformatuotas skaitines charakteristikas. Patikrinkite hipotezę apie tai, kad abi medžiagos yra vienodai atsparios dilimui.

## 10.4. Hipotezės apie "centrų" lygybę

9 skyriuje nagrinėjome `bwages` duomenų rinkinį ir, remdamiesi Wilcoxon'o (rangų ženklų) kriterijumi, tikrinome hipotezę $H_0 : med(w0) = 422,8220\ (= med(w1))$ su alternatyva $H_1 : med(w0) < 422,8220$. Panašias (bet ne tapačias) hipotezes galima suformuluoti taip: $H_0 : med(w0) = med(w1)$ su alternatyva $H_1 : med(w0) < med(w1)$. Taikydami Wilcoxon'o (rangų sumų) kriterijų dviem imtims, gauname

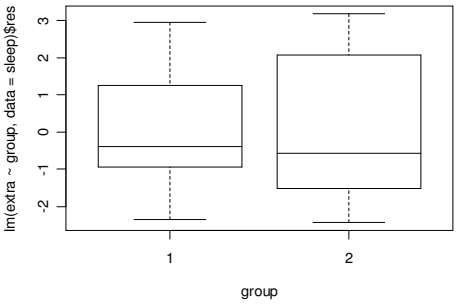
```
> wilcox.test(w0,w1)

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  w0 and w1
W = 214892, p-value = 4.33e-08
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0,
```

taigi nulinę hipotezę vėl neabejotinai atmetame.

**10.6 UŽDUOTIS**. Duomenų rinkinyje `sleep` kiekvienoje grupėje buvo tik po 10 įrašų. Antra vertus, 10.3 paveiksle matome, kad tiesinio modelio likučiai kažin ar tenkina klasikinius tiesinio modelio reikalavimus.

```
> plot(sleep.lin1$res~group)
```

Visa tai reiškia, kad hipotezę apie papildomo miego trukmės lygybę abiejose grupėse tikslinga pakartoti, naudojant neparametrinį Wilcoxon'o kriterijų. Šią analizę atlikite su `wilcox.test` ir su `wilcox.exact` iš exactRankTests paketo.




10.3 pav. Modelio paklaidos grupėse nesimetriškos, dispersijos nevienodos

**10.4 pvz**. 1 skyriaus 1.3 pavyzdyje buvome suformulavę tokį uždavinį. Marketingo padalinys nori išsiaškinti, kuris iš dviejų naujų gaminių bus labiau perkamas. Kadangi skonis yra pakankamai subjektyvus kriterijus, potencialūs pirkėjai buvo prašomi įvertinti abu gaminius skaičiais nuo 0 iki 4 (jų prasmė paaiškinta lentelėje):

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Labai nepatiko | Nepatiko | Neturiu nuomonės | Patiko | Labai patiko |

Pirmąjį gaminį vertino $n = 15$, o antrąjį gaminį – $m = 15$ pirkėjų, štai jų atsakymai:
pirmojo gaminio įverčiai: `x <- c(3, 2, 3, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 4, 3, 2, 0, 3)`
antrojo gaminio įverčiai: `y <- c(4, 2, 2, 0, 3, 3, 1, 2, 2, 4, 3, 2, 3, 2, 2)`

Atrodo, kad antrasis gaminys vertinamas geriau, tačiau kaip šitai (jei tai tiesa) pagrįsti? Vienas iš būdų yra toks - apjunkime abi imtis į vieną ir išdėstykime įverčius didėjimo tvarka: 0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4. Jei pirmasis gaminys būtų tiek pat geras kaip ir antrasis, tai pirmojo gaminio įverčiai (jie pabraukti) būtų daugmaž tolygiai išsidėstę jungtinėje imtyje. Matome, kad daugiau pabrauktų įverčių yra kairėje, todėl matyt geresnis yra antrasis produktas. Šį teiginį galima patikrinti tokiais samprotavimais. Kiekvienam įverčiui priskirkime jo rangą, t.y., vietą bendroje sekoje. Kadangi 0 kartojasi šešis kartus, reikšmei 0 suteikime vidutinį rangą (1+2+3+4+5+6)/6=3,5. Reikšmės 1 vidutinis rangas yra 8; 2 – 14,5; 3 – 23,5 ir 4 – 29. Vadinasi, pirmojo gaminio rangų suma yra $S$=5*3.5+2*8+3*14.5+ 4*23.5+1*29= 200. Formaliai žiūrint (žr. [Ku, 346 p.]), Wilcoxon'o rangų sumų (kitaip – Mann'o ir Whitney'o) testas yra skirtas tolydiesiems a.d. ir tikrina hipotezę, kad "a.d. X ir Y skirstiniai yra vienodi" su alternatyva "skirstiniai skiriasi". Iš tikrųjų, šio testo taikymas kiek siauresnis – alternatyva yra "skirstiniai skiriasi postūmiu[11]". Jei teisinga nulinė hipotezė, galima įrodyti, jog nuokrypio statistikos

$$W = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

[11] Kitaip sakant, "centrai skiriasi".

skirstinys nepriklauso nuo (bendro a. dydžių $X$ ir $Y$) skirstinio, o priklauso tik nuo "laisvės laipsnių" skaičių $n$ ir $m$. Deja, mūsų atveju, $X$ ir $Y$ nėra tolydūs, be to yra pasikartojančių reikšmių, todėl remsimės tuo faktu, kad a.d.

$$\frac{S-(m/2)(m+n+1)}{\sqrt{(mn/12)(m+n+1)}}$$

turi maždaug standartinį normalųjį skirstinį[12]. Kaip ten bebūtų, R pakete kreipiamės į funkciją `wilcox.test`:

```
> wilcox.test(x,y)
        Wilcoxon rank sum test with continuity correction
W = 80, p-value = 0.1699 # Daugiau už 0,05!
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0
```

Komputavimo rezultatas kiek netikėtas: atmesti hipotezę apie skirstinių[13] lygybę pagrindo nėra!

## 10.5. Hipotezės apie skirstinių lygybę

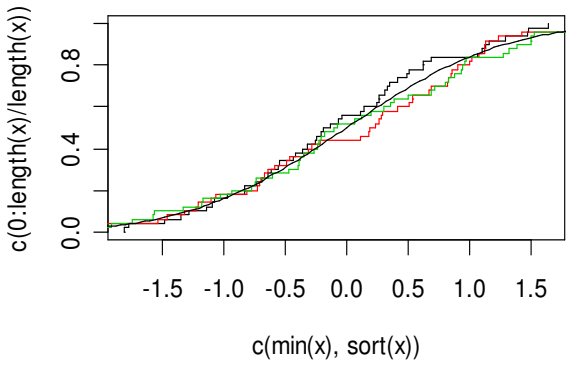
Tarkime, kad, stebėdami a.d. $X$, gavome imtį $x_1, x_2, ..., x_n$, o stebėdami a.d. $Y$ – imtį $y_1, y_2, ..., y_m$. Pagal šias imtis norime nustatyti, ar $X$ ir $Y$ skirstiniai (atitinkamai, $F$ ir $G$) sutampa (tuomet, pvz., galėtume apjungti abi imtis į vieną). Hipotezę $H_0 : F \equiv G$ galima tikrinti keliais būdais, o būdo pasirinkimas priklauso nuo alternatyvos. Jei alternatyvioji hipotezė yra $H_1 : F(x) \neq G(x)$ *bent vienam* $x$, taikysime Kolmogorovo-Smirnovo dviejų imčių testą (jis taikomas, kai abi skirstinio funkcijos tolydžios). Jei $H_1 : F(x) = G(z-\delta), \delta \neq 0$, taigi skirstinio funkcijos skiriasi tik postūmiu, taikysime Wilcoxon'o rangų sumos testą `wilcox.test` iš ctest arba, kai imčių dydžiai nėra dideli, `wilcox.exact` iš exacRankTests (stebimieji dydžiai dabar gali būti ir ranginiai). Tuo atveju, kai tikrinama "sukeičiamumo" (exchangeability) galimybė, taikysime keitinių testą `perm.test` iš exacRankTests paketo (stebimieji dydžiai turi įgyti sveikas reikšmes).

Štai dvi paprastos funkcijos, kurios brėžia empirinės skirstinio funkcijos grafikus ("gražesnis" variantas yra stepfun pakete):

```
plot.sdf <- function(x) plot(c(min(x),sort(x)),c(0:length(x)/length
(x)),type="s")
lines.sdf <- function(x,col=2) lines(c(min(x),sort(x)),c(0:length(x)/
length(x)),type="s",col=col)

plot.sdf(rnorm(50))          # Pirmoji empirinė skirstinio funkcija
lines.sdf(rnorm(50))         # Antroji empirinė skirstinio funkcija
lines.sdf(rnorm(50),col=3)   # Trečioji empirinė skirstinio funkcija
curve(pnorm,-2,2,add=T)      # Dar viena funkcija grafikams brėžti
```

[12] Mūsų atveju kai kurie įverčiai kartojasi, todėl reiškinį po šaknies ženklu reikia pakoreguoti. Vieną korekciją galima rasti [LL2, 130 psl.], kitą – funkcijos `wilcox.test.default` tekste.

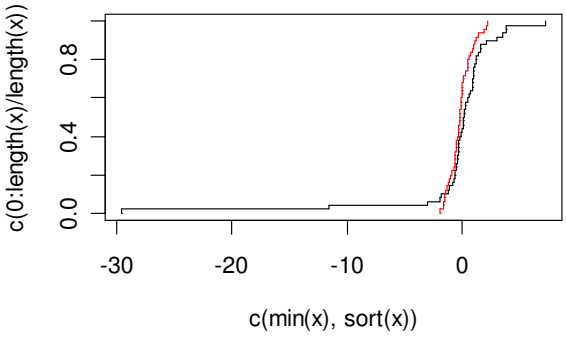
[13] Tiksliau sakant, atsakymą formuluojame taip: abiejų produktų vertinimai vidutiniškai (tiksliau, "medianiškai") vienodi.




10.4 pav. Trijų imčių iš standartinės normaliosios populiacijos empirinės skirstinio funkcijos (laiptuotos kreivės) ir standartinė normalioji skirstinio funkcija (glodi kreivė)

Išbandykime KS testą su dviem nedidelėmis imtimis.

```
set.seed(1)
rst <- rt(50,2)   # Generuojame Stjudento su 2 l.l. a. skaičius
rn <- rnorm(50)
plot.sdf(rst)
lines.sdf(rn)
```

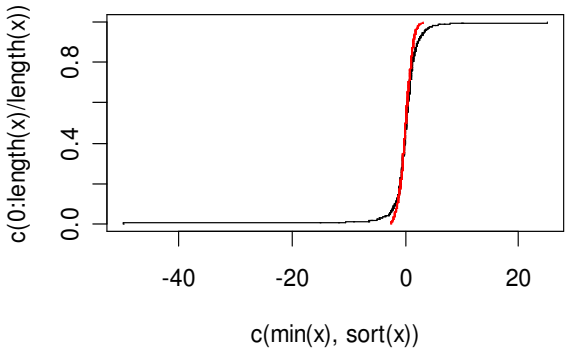



10.5 pav. Standartinio normaliojo ir Stjudento imčių empirinės skirstinio funkcijos (abiejų imčių dydis 50)

```
> ks.test(rst,rn)

        Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  rst and rn
D = 0.14, p-value = 0.7166
alternative hypothesis: two.sided
```

Taigi, KS testas nemato pagrindo atmesti hipotezę apie skirstinių lygybę. Antra vertuis, kai imtys didesnės, skirtumai išryškėja.

```
rst <- rt(500,2)
rn <- rnorm(500)
plot.sdf(rst)
lines.sdf(rn)
```



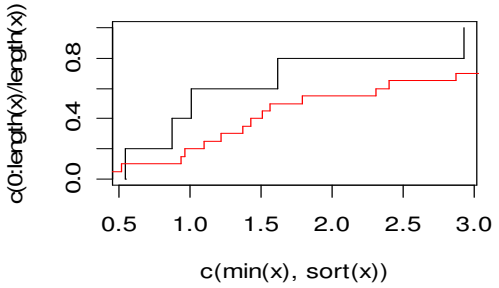

10.6 pav. Standartinio normaliojo ir Stjudento imčių empirinės skirstinio funkcijos (abiejų imčių dydis 500)

```
ks.test(rst,rn)

        Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  rst and rn
D = 0.08, p-value = 0.08152
alternative hypothesis: two.sided

> wilcox.test(rst,rn)

        Wilcoxon rank sum test with continuity
        correction

data:  rst and rn
W = 119867, p-value = 0.2611
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0
```

Matome, kad KS testas beveik atmeta hipotezę apie skirstinių lygybę, tuo tarpu kai Vilkoksono testas to nesiūlo. Antra vertus, jei dvi imtys skiriasi tik postūmiu, rezultatai atrodo taip:

Be postūmio

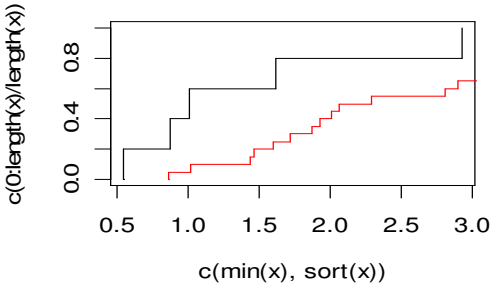
```
set.seed(1)
rg <- rgamma(5,shape=2)
rg1 <- rgamma(20,shape=2)
plot.sdf(rg)
lines.sdf(rg1)
```




```
> ks.test(rg,rg1)

        Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

Su postūmiu 0,5

```
set.seed(1)
rg <- rgamma(5,shape=2)
rg1 <- rgamma(20,shape=2)+0.5
plot.sdf(rg)
lines.sdf(rg1)
```




```
> ks.test(rg,rg1)

        Two-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

```
data:  rg and rg1
D = 0.4, p-value = 0.4906
alternative hypothesis: two.sided

> wilcox.test(rg,rg1)

        Wilcoxon rank sum test

data:  rg and rg1
W = 32, p-value = 0.2431
alternative hypothesis: true mu is not
equal to 0

> wilcox.exact(rg,rg1)

        Exact Wilcoxon rank sum test

data:  rg and rg1
W = 32, p-value = 0.2431
alternative hypothesis: true mu is not
equal to 0
```

```
data:  rg and rg1
D = 0.55, p-value = 0.1441
alternative hypothesis: two.sided

> wilcox.test(rg,rg1)

        Wilcoxon rank sum test

data:  rg and rg1
W = 20, p-value = 0.04235
alternative hypothesis: true mu is not
equal to 0

> wilcox.exact(rg,rg1)

        Exact Wilcoxon rank sum test

data:  rg and rg1
W = 20, p-value = 0.04235
alternative hypothesis: true mu is not
equal to 0
```

**10.7 UŽDUOTIS**. Lentelėje pateikti duomenys apie mieste ir kaime paimtų mėginių užterštumą polichloruotu bifenilu (PCB) (dešimttūkstantosiomis gramo dalimis vienam kilogramui dirvos).

| Kaime | | | | Mieste | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.5 | 1.0 | 1.6 | 12.0 | 24.0 | 11.0 | 107.0 | 18.0 |
| 8.1 | 5.3 | 23.0 | 8.2 | 29.0 | 49.0 | 94.0 | 12.0 |
| 1.8 | 9.8 | 1.5 | | 16.0 | 22.0 | 141.0 | 18.0 |
| 9.0 | 15.0 | 9.7 | | 21.0 | 13.0 | 11.0 | |

a) Miesto ir kaimo duomenis palyginkite grafiškai; b) įrodykite, kad “miesto ir kaimo užterštumas reikšmingai skiriasi”.

**10.8 UŽDUOTIS**. 6 skyriaus gale, užduočių skyrelyje, yra duomenų rinkinys `drink`. Patikrinkite hipotezes apie kintamojo `amount` vidurkių lygybę įvairiose `sex` ir `empl` grupėse.

**10.9 UŽDUOTIS**. Funkcija `twoWay` yra dar vienas funkcijos, tiriančios sąveikos lenteles, variantas (plg. 5 skyriaus pradžią).

```
twoWay <- function (x = NA, y = NA, userDefined = NA)
{if (is.na(userDefined)){result <- chisq.test(table(x, y))}
    else {result <- chisq.test(userDefined)}
    print(result)
    observed <- result$observed
    expected <- result$expected
    chi.table <- ((observed - expected)^2)/expected
    row.sum <- apply(observed, 1, sum)
    col.sum <- apply(observed, 2, sum)
    N <- sum(observed)
    fullArray <- cbind(observed, row.sum)
    fullArray <- rbind(fullArray, c(col.sum, N))
    rownames(fullArray)<- c(rownames(observed), "Total")
    colnames(fullArray)<-c(colnames(observed),"Total")
    proportion <- fullArray/N
    row.proportion <- fullArray/c(row.sum, N)
    col.proportion <- t(t(fullArray)/c(col.sum, N))
```

```
        return(list(fA = fullArray,e = expected,ct = chi.table,
        p = proportion, rp = row.proportion, cp = col.proportion))
    }


> twoWay(male,educ)$rp

         Pearson's Chi-squared test

data:  table(x, y)
X-squared = 61.2132, df = 4, p-value = 1.612e-12

                1         2         3         4         5 Total
0     0.03972366 0.1208981 0.2797927 0.3316062 0.2279793     1
1     0.08510638 0.2183651 0.2889138 0.1836506 0.2239642     1
Total 0.06725543 0.1800272 0.2853261 0.2418478 0.2255435     1
```

Išsiaiškinkite šios funkcijos tekstą. Kaip reikia interpretuoti gautąją *p* reikšmę?

**10.10 UŽDUOTIS**. Žemiau pateikta ištrauka iš garsiojo Fisher'io (kai kas tvirtina, kad Andersono) duomenų rinkinio apie trijų vilkdalgio rūšių (setosa, versicolor ir virginica) taurėlapio (=sepal) ir vainiklapio (=petal) ilgį ir plotį (cm) (žr. `?iris` ir `iris`).

```
    Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width    Species
1            5.1         3.5          1.4         0.2     setosa
*************************************************************
50           5.0         3.3          1.4         0.2     setosa
51           7.0         3.2          4.7         1.4 versicolor
*************************************************************
100          5.7         2.8          4.1         1.3 versicolor
101          6.3         3.3          6.0         2.5  virginica
*************************************************************
150          5.9         3.0          5.1         1.8  virginica
```

Pateikite grafines (žr. taip pat `?matplot`) ir skaitines kiekvieno parametro ir jų porų charakteristikas, patikrinkite tinkamas hipotezes.

**10.11 UŽDUOTIS**. Ledas turi vadinamąją latentinę tirpimo šilumą. Štai dviem metodais gauti rezultatai:

```
Metodas A: 79.98 80.04 80.02 80.04 80.03 80.03 80.04 79.97
80.05 80.03 80.02 80.00 80.02
Metodas B: 80.02 79.94 79.98 79.97 79.97 80.03 79.95 79.97
```

a) įveskite šiuos skaičius su `scan`
b) ar abu metodai duoda tą patį rezultatą? (pasinaudokite `boxplot`, `t.test`; `shapiro.test`, `var.test` ir `wilcox.test` iš paketo ctest).

**10.12 UŽDUOTIS.** Pakete MASS yra duomenų rinkinys `fgl`, kurį apžiūrėti galima su

```
library(MASS)
?fgl
```

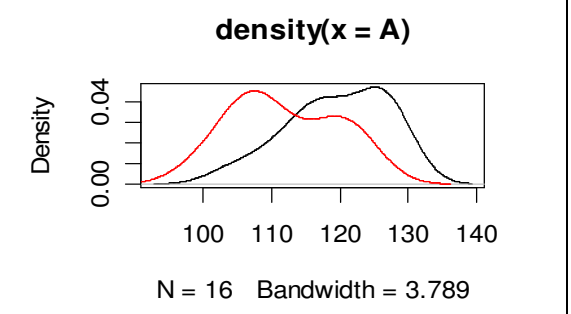
Išbrėžkite RI, Na ir Mg stačiakampes diagramas visoms type grupėms. Patikrinkite hipotezes apie RI "centrų" lygybę visose grupių porose. Pritaikykite pairs funkciją grupėje WinF ir išbrėžkite grafiką panašų į 6.7 pav.

**10.13 UŽDUOTIS.** Pakete MASS yra duomenų rinkinys Aids2. Ar vienoda šiame sąraše esančių vyrų ir moterų amžiaus struktūra?

**10.14 UŽDUOTIS**. Kolmogorovo kriterijus taikomas tuomet, kai stebimieji a.d. yra tolydūs. Antra vertus, matavimai paprastai apvalinimi, todėl netgi tuomet, kai dydžiai "iš tikrųjų" yra tolydūs, gali atsirasti susietų (vienodų) reikšmių (angl. ties). Viena išeitis yra padrebinti (=jitter (angl.)) šiuos dydžius ir tuomet taikyti KS testą.

Žemiau pateikiame duomenis iš Sokal'o ir Rohlf'o knygos "Biometry" (tikslaus duomenų apibrėžimo nėra, bet šio konspekto autoriaus mano, kad tai dviejų rūšių (A ir B) gyvūnų svorio matavimai; kadangi grupėje būna kelių kartų atstovai, tokie skirstiniai paprastai turi kelias modas).

```
A<-
c(104,109,112,114,116,118,118,117
,121,123,125,126,126,128,128,128)

B<-
c(100,105,107,107,108,111,116,120
,121,123)

plot(density(A))
lines(density(B),col=2)
```




Padrebinkite duomenis (pridėdami tolygų atsitiktinį skaičių iš intervalo [-0,5;+0,5]) ir patikrinkite hipotezę apie skirstinių lygybę su KS testu. Tą patį atlikite su Wilcoxon'o ir perstatinių testais, taikydami juos pradiniams duomenims.

**10.15 UŽDUOTIS**. Kompaktinio disko R1 direktorijoje Data\Misc yra failas iqdata.txt. Jame pateikti du skaitiniai stulpeliai (tai penkiamečių vaikų iq (intelektualumo koeficientas) ir bp (=behavioral problem score=elgesio koeficientas)) ir simbolinis stulpelis ms (=mental state=psichinė būsena: ND=non-depressed mother, D=depressed mother), kuris vaikus suskirsto į dvi grupes. Prašom atsakyti į šiuos klausimus:

- ar šiose grupėse iq (ir/arba bp) skiriasi?
- ar šie du kintamieji susiję?

Priminsime, kad Student'o testas taikuomas tuomet, kai stebėjimai

- skirtingose grupėse yra nepriklausomi;
- yra gauti stebint normaliuosius a.d.;
- yra iš populiacijų su vienodomis dispersijomis.

Neparametrinė šio testo alternatyva yra Wilcoxon'o rangų sumų testas.

Taigi, išbrėžkite `iq` (`bp`) stačiakampes diagramas, histogramas ir kvantilių-kvantilių grafikus. Ar yra išskirčių? Jei taip, gal geriau jas pašalinti? Ar galima duomenims taikyti Student'o kriterijų? Ar Wilcoxon'o kriterijus duoda tą patį atsakymą? Ką galima pasakyti apie koreliaciją (regresiją) tarp `iq` ir `bp`? Ar vaiko elgesio problemos (pvz., `bp>8` ar `bp≤8`) susijusios su motinos psichine būsena[14]?

**10.16 UŽDUOTIS**. R1 disko Data\Misc direktorijoje yra failas ceramic.txt:

```
 Run  Lab Batch         Y  X1   X2   X3
   1    1     1   608.781  -1   -1   -1
   2    1     2   569.670  -1   -1   -1
   3    1     1   689.556  -1   -1   -1
   4    1     2   747.541  -1   -1   -1
.....
 957    8     1   611.999   1   -1   -1
 958    8     2   748.130   1   -1   -1
 959    8     1   530.680   1   -1   -1
 960    8     2   689.942   1   -1   -1
```

Jame `Run` yra mėginio numeris, `Lab` – laboratorijos numeris (nuo 1 iki 8), `Batch` – partijos numeris (1 arba 2), `Y` – keraminio mėginio stiprumas. Ištirkite ar skiriasi mėginio stiprumo matavimo rezultatai `Y` abiejose partijose.

**10.17 UŽDUOTIS**. Požymių sąveikos lentelės

```
behaviour =   no yes
    emo=1     51   3
    emo=2     69  11
    emo=3     28  22
    emo=4      7  13
```

eilutėse yra nurodytas vaiko emocionalumo lygmuo (1-mažas, …, 4-didelis), o stulpeliuose – ar stebimas nenorminis elgesys (ne/taip). Ar priklausomi šie du požymiai?

**10.18 UŽDUOTIS**. Žemiau užrašytos matricos `taxrevenue.txt` eilutėse pateikti valstybės surinkti mokesčiai už nurodytus produktus:

```
                1990     1991     1992
tobacco       5035.3   5636.0   6289.5
spirits       1513.5   1703.0   1742.1
beer          2074.2   2290.0   2324.9
wine           791.2    855.3    924.5
cider           58.8     68.6     73.8
betting        976.1   1006.4   1052.8
```

Nusiskaitykite šią matricą su, pvz.,

```
tax <- scan("taxrevenue.txt",list(names="",x=0,y=0,z=0),skip=1)
```

Apibrėžkite metinę prieaugio normą

```
a <- (x-y)/x; b <- (z-y)/y
```

[14] Taikykite `chisq.test` arba `fisher.test`.

ir patikrinkite hipotezes, kad *a* "centras" lygus 0,1 (taikykite parametrinį Student'o ir neparametrinį Wilcoxon'o kriterijus). Ar tiesa, kad *a* ir *b* "centrai" lygūs? (kokį kriterijų reikia taikyti – poruotoms ar neporuotoms imtims?) Ar koreliuoti vektoriai *a* ir *b*? Koks koreliacijos koeficientas labiau tinka – Pearson'o ar Spearman'o? O gal čia geriau taikyti `friedman.test`?

**10.19 UŽDUOTIS**.

a) Požymių sąveikos lentelės atrodo taip:

i) $\begin{bmatrix} 25 & 24 \\ 26 & 25 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 25 & 17 \\ 12 & 25 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 2 & 26 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} 25 & 3 \\ 26 & 2 \end{bmatrix}$

Pabandykite atspėti požymių priklausomybės laipsnį visais trimis atvejais.

b) Lentelėje pateikti atsitiktinės apklausos rezultatai (eilutėse – miesto rajonas, kuriame gyvena apklaustoji šeima, stulpeliuose – šeimos pajamos per metus):

| | < 12000 | tarp 12000 ir 50000 | > 50000 |
|---|---|---|---|
| A | 20 | 22 | 3 |
| B | 10 | 9 | 15 |

Ar priklauso gyvenamasis rajonas nuo šeimos pajamų?

**10.20 UŽDUOTIS**. Pasikraukite iš Simple paketo duomenų rinkinį `blood` (kiekvienas kraujo mėginys vertinamas dviem metodais, Machine ir Expert). Ar skiriasi šie metodai?

**10.21 UŽDUOTIS**. Žemiau pateiktoje lentelėje yra duomenys iš 1984 General Social Survey of the National Data Program in the United States (Norušis, 1988):

| | Pasitenkinimas darbu | | | |
|---|---|---|---|---|
| Pajamos (US$) | Labai nepatenkintas | Nelabai patenkintas | Visai neblogas | Labai patenkintas |
| <6000 | 20 | 24 | 80 | 82 |
| 6000-15000 | 22 | 38 | 104 | 125 |
| 15000-25000 | 13 | 28 | 81 | 113 |
| >25000 | 7 | 18 | 54 | 92 |

Patikrinkite hipotezę $H_0$: *pasitenkinimas darbu nepriklauso nuo pajamų*. Atspausdinkite panašią lentelę, kurioje šalia esamų skaičių dar būtų ir prognozuojamų dažnių reikšmės.

**10.22 UŽDUOTIS**. Duomenų rinkinyje `Guns`

```
"Guns" <- structure(.Data = list(
"pop" = c(4089, 2372, 30380, 3291, 598, 13277, 1135, 2795,
11543,5996, 4860, 9368, 4432, 5158, 6737, 635, 7760, 18058, 10939,
11961, 1004, 3560, 4953, 17349, 1770, 5018, 570, 3750, 3377, 680,
```

```
6623, 1039, 5610, 2495, 3713, 4252, 1235, 2592, 808, 1593, 1105,
1548, 1284, 3175, 2922, 703, 6286, 567, 4955, 1801, 460.), "area" =
c(52.4, 53.2, 163.7, 5.5, 0.1, 65.8, 10.9, 56.3, 57.9, 10.6, 12.4,
96.8, 86.9, 69.7, 53.8, 70.7, 8.7, 54.5, 44.8, 46.1, 1.5, 32, 42.1,
268.6, 84.9, 71.3, 656.4, 114, 104.1, 2.5, 59.4, 83.6, 36.4, 82.3,
40.4, 51.8, 35.4, 48.4, 147, 77.4, 9.4, 121.6, 110.6, 69.9, 98.4,
77.1, 42.8, 9.6, 65.5, 24.2, 97.8),
"urban" = c(60, 54, 93, 79, 100, 85, 89, 61, 85, 84, 81, 70, 71, 53,
50, 53, 89, 84, 74, 69, 86, 55, 61, 80, 87, 76, 68, 88, 82, 73, 63,
57, 65, 69, 52, 68, 45, 47, 53, 66, 51, 73, 88, 68, 71, 50, 69, 32,
66, 36, 65.),
"poverty" = c(19, 18.4, 14.2, 5.8, 19.2, 14.1, 10, 10.1, 13.3, 10.2,
9.3, 13.9, 12, 13.6, 13.2, 13.5, 9, 14.1, 11.8, 10.8, 8.2, 16.5,
16.9, 16.8, 9.8, 26.2, 11.2, 14.2, 12.1, 8.1, 16, 13.7, 14.1,
11.1, 17.4, 22, 12.5, 23.8, 15.8, 10.9, 7.1, 20.9, 10.7, 15.8, 11.3,
13.5, 10.6, 7.1, 9.2, 17.2, 10.6),
"gunreg" = c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.),
"homicides" = c(410, 240, 3710, 170, 489, 1300, 44, 62, 1270, 200,
540, 1020, 100, 550, 730, 11, 350, 2550, 760, 740, 38, 350, 470,
2660, 43, 220, 56, 290, 155, 32, 720, 21, 380, 150, 260, 760, 23,
370, 29, 43, 32, 160, 135, 220, 120, 9, 550, 24, 240, 135, 20.)),
names = c("pop", "area", "urban", "poverty", "gunreg", "homicides"),
row.names = c("AL", "AR", "CA", "CT", "DC", "FL", "HI", "IA", "IL",
"MA", "MD", "MI", "MN", "MO", "NC", "ND", "NJ", "NY", "OH", "PA",
"RI", "SC", "TN", "TX", "UT", "WA", "AK", "AZ", "CO", "DE", "GA",
"ID", "IN", "KS", "KY", "LA", "ME", "MS", "MT", "NE", "NH", "NM",
"NV", "OK", "OR", "SD", "VA", "VT", "WI", "WV", "WY"),
class = "data.frame")
```

Kintamasis `homicides` nurodo žmogžudysčių skaičių valstijoje per metus, o `gunreg` lygus 1, jei toje valstijoje yra privaloma ginklų registracija ir 0 priešingu atveju. Ar teisybė, kad privaloma ginklų registracija sumažina nusikalstamumą? Ar teisybė, kad skurdas `poverty` (tiksliau kalbant, tai procentas gyventojų, gyvenančių žemiau skurdo ribos) skatina nusikalsti? Ar teisybė, kad urbanizacija `urban` (tai miesto gyventojų procentas) didina nusikalstamumą?

# Literatūra


[Intro] R|Rgui|Help|Manuals|An Introduction to R

[Ba] Baron J., Li Y. Notes on the use of R for psychology experiments and questionnaires http://www.psych.upenn.edu/~baron/rpsych.htm

[ČM1] Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai.I. 2001, TEV

[ČM2] Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai.II. 2002, TEV

[Fa] Faraway J.J. Practical Regression and Anova using R, http://www.stat.lsa.umich. edu/~faraway/book/

[Fo] Fox J. Applied regression analysis, linear models , and related methods, 1997 Sage Publications.

[Kr] Kruopis J. Matematinė statistika. 2-asis leidimas, 1993, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius.

[Ku] Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Antrasis leidimas, 1996, Vilniaus universiteto leidykla.

[Ma] Maindonald J.H. Data Analysis and Graphics Using R – An Introduction http://wwwmaths.anu.edu.au/~johnm/

[My] Myatt M. Open source solutions – R http://www.myatt.demon.co.uk

[Li] Lindgren B. Statistical theory, Third edition, 1976 Macmilllan Publishing Co., Inc. NY, Collier Macmillan Publishers, London.

[LL1] Справочник по прикладной статистике, т.1, под ред. Э. Ллойда , У. Ледермана, Москва, Финансы и статистика, 1989

[LL2] Справочник по прикладной статистике, т.2, под ред. Э. Ллойда , У. Ледермана, Москва, Финансы и статистика, 1990

[Pa] Paradis E. R for beginners http://cran.r-project.org/

[Splus6_1] http://www.insightful.com/DocumentsLive/23/11/statman1.pdf

[Splus6_2] http://www.insightful.com/DocumentsLive/23/11/statman2.pdf

[Ve] Verzani J. simpleR – Using R for Introductory Statistics. http://www.math.csi. cuny.edu/Statistics/R/simpleR

[V&R] Venables W.N., Ripley B.D. Modern Applied Statistics with S-PLUS. Third edition, 1999 Springer-Verlag New York, Inc.