ISSN 0102 - 745X

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CNPq

CBPF

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

COLEÇÃO GALILEO: TEXTOS DE FÍSICA

I. DOCUMENTOS HISTÓRICOS

CBPF-DH-001/86

PRINCÍPIOS DA MECÂNICA

por

Mario Schenberg

RIO DE JANEIRO
1986

ISSN 0102-745x

CBPF-DH-001/86

PRINCÍPIOS DA MECÂNICA*

por

Mario Schenberg[1]

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq/CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Tese de concurso, cadeira de Mecânica Racional e Celeste da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, originalmente publicada em São Paulo no ano de 1944.

[1]Professor Emérito, Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

CBPF-DH-001/86

APRESENTAÇÃO

Com este trabalho do nosso físico teórico maior Mario Schenberg, Professor Emérito da Universidade de São Paulo, o CBPF tem o prazer de inaugurar uma coleção de documentos históricos relativos à física no Brasil.

Estou certo de que se trata de monografia que despertará o maior interesse entre os físicos e os jovens estudantes de pós-graduação das nossas universidades e institutos de pesquisa.

Rio de Janeiro, dezembro 1986

J. Leite Lopes

Diretor do
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudaremos os princípios fundamentais da Mecânica, isto é, as leis básicas das quais decorrem todas as demais. Procuraremos salientar os pontos que devem ser modificados, para levar em conta o desenvolvimento das idéias físicas.

Os problemas da axiomática constituem o objeto da primeira parte. Adotamos um ponto de vista mais físico do que lógico-formal, dando mais ênfase ao conteúdo experimental que às exigências de completo acabamento lógico e metodológico.

A segunda parte trata dos princípios de conservação. O estudo da conservação do momento angular dos sistemas isolados nos permite introduzir o spin de um modo muito elementar. São também analisadas as limitações impostas pelos princípios de conservação e de Hamilton aos tipos possíveis de forças entre pontos materiais.

Na terceira parte estudamos o princípio de relatividade de Galileu. Filiamos ao princípio de relatividade as invariâncias por deslocamentos de modo a revelar sua natureza mais profunda e suas relações com os princípios de conservação.

Na quarta parte damos uma formulação nova dos princípios da Mecânica, modificando a de Mach-Blondlet de modo a fazer desaparecerem os inconvenientes e insuficiências apontados nas seções precedentes.

Algumas questões complementares são examinadas nas notas finais.

PRIMEIRA PARTE

O OBJETO DA MECÂNICA TEÓRICA

1- Nos primórdios da ciência moderna se admitia que a finalidade duma teoria física consistisse na explicação duma determinada categoria de fenômenos. Só em fins do século passado foi prevalecendo outra concepção da teoria física, que parece ter sido formulada explicitamente por Kirchhof e Mach: as teorias físicas são descrições de classes de fenômenos correlatos.

Em que diferem uma explicação e uma descrição dum fenômeno? Para fixar as idéias consideremos o caso particular do movimento dum sistema mecânico. Atribuir o movimento à ação de certas forças, ou às trocas de energia e momento entre os corpúsculos são explicações. Dar simplesmente as equações de movimento sob forma finita, diferencial ou integral é uma descrição. Uma teoria explicativa dá ao mesmo tempo uma descrição dos fenômenos que estuda, mas não é biunívoca a correspondência entre descrição e explicação. A cada descrição podem corresponder várias teorias explicativas.

Objetivamente o que importa numa teoria é a descrição dos fenômenos que ela contém. Subjetivamente as explicações, além de seu imenso valor heurístico, são indispensáveis. Cada teoria contém necessariamente uma explicação, ou como diz Hertz, uma imagem do fenômeno físico. Um filósofo idealista diria que só há imagens, mas tal não é nossa opinião.

2- Qualquer teoria dum fenômeno deve satisfazer à duas condições:

a) Coerência lógica

b) Veracidade experimental

Aliás se constata que a condição (b) sempre acarreta a condição (a). Estritamente nenhuma teoria satisfaz a condição (b). Cada teoria corresponde a uma determinada fase histórica do conhecimento e cedo ou tarde entra em conflito com os dados experimentais, devendo ser substituída por outra mais aperfeiçoada. Assim a mecânica newtoniana teve que ser substituída pela relativista quando sua oposição com a realidade se tornou manifesta ao serem estudados fenômenos em que intervêm grandes velocidades. A mecânica clássica relativista também sofreu revisões drásticas para se adaptar aos processos atômicos. As teorias sucessivas devem ser consideradas como aproximações cada vez melhores no progresso dos conhecimentos.

A condição (b) significa que a teoria em consideração descreve corretamente os fenômenos ou simplesmente descreve os fenômenos de que trata. Naturalmente a correção da explicação depende da precisão da experiência comprobatória. Uma teoria pode explicar corretamente o resultado de uma experiência grosseira e discordar do que é obtido por outra mais aperfeiçoada. Vemos portanto que de fato a condição (b) deve ser formulada da maneira seguinte:

"Uma teoria satisfatória deve estar de acordo com os resultados das experiências mais precisas feitas até o momento de sua formulação".

3 - Entre as várias teorias coerentes e experimentalmente satisfatórias há algumas que se assinalam por sua comodidade. A comodidade de uma teoria depende do grau de esforço mental necessário para deduzir as consequências das premissas fundamentais. Es-

te grau de esforço depende da mentalidade dos cientistas de cada época histórica e na mesma época pode variar de um indivíduo a outro.

Outra característca importante de uma teoria é o seu valor heurístico, isto é, a facilidade com que sugere novos desenvolvimentos. Um exemplo notável de teoria altamente heurística é o do tratamento hamiltoniano da dinâmica. Hamilton compara o movimento dum corpúsculo ao dum raio luminoso num meio transparente. A imagem hamiltoniana além de ter conduzido ao desenvolvimento da teoria das transformações da dinâmica e à descoberta da equação às derivadas parciais de Hamilton-Jacobi levou Schrödinger à elaboração da mecânica ondulatória.

Convém distinguir o valor heurístico teórico ou melhor intrínseco que foi exemplificado no parágrafo precedente de um valor heurístico experimental. Uma teoria pode ser sugestiva do ponto de vista experimental e levar a realização de experiências que confirmarão ou desmentirão a sua descrição dos fenômenos. Nada mais útil ao progresso da ciência que uma teoria que sugere uma experiência que a desminta.

O conceito de comodidade ou de simplicidade também tem um duplo aspecto como o de valor heurístico. Há uma comodidade teórica e outra experimental. Uma imagem dum fenômeno pode ser de uma grande simplicidade teórica mas os seus conceitos podem ser dificilmente interpretáveis experimentalmente. A mecânica de Hertz exemplifica esta possibilidade, outro exemplo é dado pela mecânica das matrizes de Heisenberg, Born e Jordan. Em geral a dificuldade de interpretação experimental ou intuitiva dos conceitos, implica numa perda de valor heurístico.

4- As considerações precedentes nos permitem precisar o objeto da mecânica teórica e classificar os diversos modos de realização deste objetivo, isto é, diferentes explicações ou imagens mecânicas.

A mecânica teórica tem por finalidade descrever o movimento dos corpos, em particular descrever o movimento futuro.

Para que seja possível a previsão do movimento futuro é necessário que a experiência demonstre que o movimento se processa de modo tal que o conhecimento do movimento anterior a um instante qualquer e das condições ambientais posteriores, determinam inteiramente o movimento futuro, isto é, do movimento em tempos posteriores ao instante considerado. No campo em que os efeitos quânticos são ignoráveis a experiência mostra que há de fato este determinismo: ao conhecimento do estado de movimento dum sistema mecânico num instante qualquer t e das condições ambientais a posteriores ao instante t determinam o movimento do sistema nos instantes posteriores a t. Atualmente, já parece provável que haja casos de efeitos hereditários. Mais precisamente que em alguns casos não basta conhecer o movimento num instante t mas que seja necessário conhecê-lo igualmente durante todo ou parte do passado. Justifica-se portanto dizer que o objetivo da mecânica consiste em descrever o movimento futuro, dados o passado e as condições ambientais enquanto puderem ser ignorados os efeitos quânticos.

5- Para efetuar a descrição dos fenômenos são introduzidos conceitos. Estes conceitos são idealizações das condições físicas observadas. Por meio de postulados atribuem-se aos conceitos certas propriedades. Os postulados são generalizações e idealizações das leis físicas. Idealizações porque se referem aos conceitos que também o são e generalizações porque são sempre aplicados em casos que escapam de todo ou em parte ao conhecimento experimental.

As diversas teorias explicativas dum fenômeno usam idealizações diferentes dos dados experimentais e por isso dão imagens diferentes dos fenômenos. A imagem contida numa teoria é caracterizada pela escolha dos seus conceitos e postulados, isto é, pelo que se chama axiomática da teoria.

Em seguida consideraremos duas imagens diversas dos fenômenos: a newtoniana e a helmholtziana. Na imagem newtoniana os fenômenos mecânicos são explicados pela ação das forças sobre os pontos materiais. Na de Helmholtz ou energética a explicação de movimento é dada pela troca de energia e de momento entre os corpúsculos.

AXIOMÁTICA DUMA CIÊNCIA FÍSICA

1- Na construção de qualquer sistema dedutivo parte-se de um sistema de noções não definidas - os conceitos fundamentais - e de um corpo de postulados. Os postulados são relações entre os conceitos.

O propósito duma disciplina objetiva consiste em achar as proposições que decorrem logicamente dos postulados. Daí resulta que o corpo dos postulados pode ser substituído por qualquer outro equivalente, isto é, qualquer sistema de proposições que possa ser deduzido dos postulados e do qual seja possível deduzi-los. Um exemplo bem conhecido deste fato é o da geometria euclidiana. O postulado de Euclides pode ser substituído pela proposição de que a soma dos ângulos dum triângulo vale dois retos.

Um corpo de postulados deve satisfazer a duas condições:

compatibilidade e irredutibilidade.

Um sistema de postulados é compatível quando não existir nenhum par de proposições contraditórias decorrentes dos postulados. Essa restrição é absolutamente fundamental, pois como se sabe, de duas proposições contraditórias se pode deduzir qualquer proposição.

Diz-se que um sistema de postulados é irredutível quando nenhum dos postulados decorre logicamente dos demais. Noutras palavras, um sistema de postulados é irredutível quando não há nenhuma redundância de proposições não demonstradas. A irredutibilidade é uma propriedade desejável mas não indispensável. Um sistema redutível de postulados não conduz a proposições absurdas contanto que eles sejam compatíveis.

2 - Historicamente muitas ou talvez todas as ciências dedutivas tiveram um desenvolvimento assaz insatisfatório do ponto de vista lógico. Alguns dos postulados foram admitidos explicitamente, outros tacitamente. Só num estágio posterior é que se começou a fazer a crítica dos princípios e a procurar sistemas completos de postulados e de conceitos fundamentais.

O estabelecimento dum sistema completo de postulados para uma ciência dedutiva é de certo modo, o processo inverso do seu desenvolvimento. Tem-se um conjunto enorme de proposições e procura-se escolher umas poucas que admitam todas as demais como consequências. Como ponto de partida, podemos assumir todas as proposições como postulados, assim se tem o máximo de redundância. Outra alternativa consiste em só admitir algumas das proposições, correndo o risco de uma insuficiência de postulados. Por meio de uma série de tentativas acaba-se chegando ao resultado.

A escolha dos conceitos fundamentais não pode ser feita com inteira liberdade, sem levar em conta os postulados. Pode acontecer que em virtude dos postulados uma das noções possa ser definida em termos das demais. Neste caso o sistema dos conceitos é redutível e pode ser substituído por outro mais simples.

Como no caso do corpo de postulados, há também a necessidade de se ter um sistema suficiente de conceitos ou noções fundamentais. Isto é, dada uma disciplina dedutiva cuja axiomática se procura estabelecer, é necessário ter um sistema de conceitos bastante amplo para que suas propriedades decorrentes dos postulados englobem todas as proposições da disciplina considerada.

3- As considerações precedentes são aplicáveis à axiomática dum sistema dedutivo qualquer, à do cálculo vetorial como à do eletromagnetismo. No caso da axiomática duma ciência física, além das condições de compatibilidade, irredutibilidade e suficiência dos corpos de conceitos e postulados há outras que devem ser satisfeitas.

Constitui o objeto da axiomática duma ciência física estabelecer um sistema de conceitos e postulados que permita dar uma descrição dos fenômenos em apreço. Às exigências de compatibilidade, irredutibilidade e suficiência se deve juntar outra: a de veracidade.

Cada conceito duma ciência física deve corresponder a algo observável e geralmente a uma grandeza mensurável, isto é, a uma grandeza física. Os postulados devem ser leis físicas. Tal o conteúdo da condição de veracidade.

A suficiência é a condição de que a extensão do sistema de conceitos e postulados baste para dar uma descrição completa dos fenômenos.

Numa ciência dedutiva os conceitos primários são noções não definidas. Isto também ocorre no caso da axiomática duma ciência física, mas há uma circunstância especial neste caso: os conceitos devem ser susceptíveis de especificação experimental. Noutras palavras, deve haver uma correspondência entre conceitos e características observáveis dos fenômenos, como foi dito acima. Daí resulta que os postulados devem bastar para o estabelecimento de métodos de medida ou de observação dos elementos observáveis correspondentes aos conceitos.

AXIOMÁTICA DA IMAGEM NEWTONIANA

1- A primeira tentativa de axiomática da mecânica newtoniana se encontra nos "Principia de Newton" (*). Apesar de ser insatisfatória sob vários aspectos a formulação de Newton subsistiu inalterada durante quase dois séculos. Só em fins do século passado é que começaram a surgir novos modos de formular a axiomática da imagem newtoniana. Começaremos examinando os princípios da Mecânica, tais como os enunciou Newton e depois estudaremos as modificações propostas por Mach, Boltzmann e outros.

G. Hamel na sua estéreomecânica substitui os pontos materiais por sólidos de dimensões finitas. Este modo de agir correspondia ao pensamento dominante em princípios deste século, que repudiava a possibilidade de existirem corpúsculos rigorosamente puntiformes. Mas hoje a concepção de corpúsculos elementares sem dimensões, torna a prevalecer e não nos deteremos longamente sobre as imagens do tipo estéreomecânico.

(*) Isaac Newton, Philosopiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.

Atualmente a questão mais interessante da axiomática da Mecânica é a da suficiência dos conceitos e postulados newtonianos para a descrição de todos os tipos de fenômenos mecânicos conhecidos. Veremos que tal não acontece.

A FORMULAÇÃO DOS PRINCIPIA

2 - Nos Principia, Newton introduz oito definições que passamos a reproduzir:

I) A quantidade de matéria é a medida da mesma, resultando da densidade e do volume conjuntamente.

II) A quantidade de movimento é a medida do mesmo, resultando da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.

III) A "vis insita" ou força inata da matéria, é um poder de resistência, pelo qual cada corpo, por quanto de si depender, continua no seu estado presente, seja de repouso ou de movimento para diante em linha reta.

Essa "vis insita" é também chamada de força de inércia ("vis inertiae").

IV) Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo, para mudar seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta.

Esta força só existe enquanto dura a ação.

V) Uma força centrífuga é a que atrai ou impele ou, de qualquer modo, faz tender os corpos para um centro.

VI) A quantidade absoluta de uma força centrífuga é a medida da mesma, proporcional a eficiência da causa que a propaga do centro, pelo espaço em redor.

VII) A quantidade aceleradora de uma força centrífuga é a medida da mesma, proporcional à quantidade de velocidade que gera num tempo dado.

VIII) A quantidade motora duma força centrífuga é a medida da mesma, proporcional ao movimento que gera num tempo dado.

Scholium

"Até agora enunciei as definições das palavras menos conhecidas e expliquei o sentido em que desejo sejam compreendidas no discurso seguinte".

Depois de ter exposto as definições precedentes, Newton passa a enunciar os

3- Axiomas ou leis do movimento

Lei I.

Cada corpo continua no seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, salvo se for compelido a mudar este estado por forças sobre ele impressas.

Lei II.

A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa, e é feita na direção em que a força é impressa.

Lei III.

A toda ação corresponde uma reação igual oposta, ou: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas de lados contrários.

4 - Das leis, Newton deduz seis corolários:

1) Um corpo, ativado simultaneamente por duas forças, descreverá a diagonal do paralelogramo no mesmo tempo em que descreveria os lados pelas forças separadamente.

2) E daí fica explicada a composição de uma força direta AD, a partir de duas forças oblíquas AC e CD; e inversamente, a resolução de qualquer força direta AD em duas forças oblíquas AC e CD; as quais composição e resolução são abundantemente confirmadas pela Mecânica.

3) A quantidade de movimento, que se obtém tomando a soma dos movimentos dirigidos para as mesmas partes, e as diferenças dos que são dirigidos para partes contrárias, não sofre variação pela ação dos corpos entre si.

4) O centro de gravidade comum a dois ou mais corpos não altera seu estado de repouso ou movimento pelas ações dos corpos entre si; e portanto o centro de gravidade comum a todos os corpos agindo uns sobre os outros (excluindo ações externas e impecilhos) está em repouso ou se move uniformente em linha reta.

5) Os movimentos mútuos dos corpos incluídos num certo espaço são os mesmos, quer o espaço em repouso ou se mova uniformemente para diante em linha reta sem nenhum movimento circular.

6) Se corpos, movendo-se de qualquer modo entre si mesmos, são impelidos na direção de linhas paralelas por forças aceleradoras iguais, continuarão todos a se mover entre si, do mesmo modo como se não fossem impelidos por tais forças.

As citações dos "Philosopiae Naturalis Principia Mathematica" foram tomadas da tradução inglesa de Motte revista por Cafori, edição da University of California Press de 1934. A tradução inglesa de Motte foi feita da terceira edição dos "Principia" de 1726. O prefácio da primeira data de 1686. Procuramos conservar na medida do possível a linguagem newtoniana. Por não coincidir ela com a nossa de hoje, espero que se compreenda o seu exotismo.

5- Exame das definições de Newton

Há dois tipos de definições: lógicas e experimentais. Uma definição lógica reduz uma noção a outras, isto é, mostra a equivalência de uma noção a grupo de outras. Uma definição experimental descreve um método de observação de algum elemento observável. Vejamos a que tipos pertencem as várias definições de Newton.

A definição I deve ser tomada como experimental, indicando como se pode determinar a massa, conhecidos o volume e a densidade. Não é uma definição lógica, pois depende do conceito de massa da unidade de volume, pressuposto no termo densidade. Procedendo deste modo evitam-se as confusões sobre o sentido que se deve atribuir a essa definição newtoniana, que se encontra frequentemente nas críticas feitas pelos matemáticos, esquecedores da existência de duas modalidades de definição.

É de tipo lógico a definição II, pois exprime o conceito de quantidade de movimento aos de massa e velocidade.

Quanto a definição III de fato nem é uma definição. É uma forma disfarçada da primeira lei.

Também é de tipo experimental a definição IV. Ela indica um modo de se constatar a existência de uma força. Não especifica porém se o conceito de força é susceptível de expressão quantitativa.

Entre as ações que se exercem sobre os corpos Newton distingue três tipos: choques, pressões e forças centrífugas. Supoẽ conhecidos o choque e a pressão e caracteriza a força centrífuga (hoje dir-se-ia centrípeta) pela definição V. É interessante esta divisão das forças em três categorias. Os choques e as pressões são forças que se transmitem diretamente, as forças centrífugas podem ser ações a distância. A intuição física de Newton repugnava a idéia de ações a distância, mas viu-se obrigado a introduzi-las para descrever os efeitos gravitacionais.

Nas definições VI, VII e VIII acham-se caracterizados três elementos de que depende uma força centrífuga. Sua quantidade absoluta depende da intensidade da fonte que a cria: massa gravitacional, imã, etc. A quantidade aceleradora corresponde as que hoje chamaríamos de intensidade dum campo e a quantidade absoluta a força total que atua sobre um corpo submetido ao campo.

A definição VII atribui um caráter vetorial à força. Cumpre observar que a definição VIII é na realidade uma lei física e um caso particular da segunda lei de movimento. É digno de nota que a definição VII implica numa proporcionalidade da força e aceleração, isto é, a constância da massa. Tal não acontece com a definição VIII em que a força motriz é proporcional a derivada da quantidade de movimento em relação ao tempo.

6 - Exame das leis de Newton

A primeira lei é o princípio de inércia. Seu enunciado é indubitavelmente insatisfatório e presta-se a crítica feita por Eddington que o interpreta da maneira seguinte: "every particle continues in its state of rest or uniform motion in a straight line, except in so far as it doesn't". Isto resulta de fato da força impressa ser definida como ação que muda o estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme. Na realidade a situação não é tão desesperadora. Newton indubitavelmente conhecia outros métodos de medida de força que não o da definição IV. Supondo conhecida a força impressa, a lei de inércia adquire um sentido bem claro.

A segunda lei de Newton traduzida analiticamente, dá a equação fundamental da dinâmica:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \qquad \text{(I)}$$

É importante observar que até agora nada faz supor que a massa seja constante nem a escrever a equação (I) sob a forma:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{(II)}$$

A terceira lei é o princípio da ação e da reação e tem uma natureza peculiar. Este princípio impoẽ uma restrição aos tipos possíveis de forças. Como é bem sabido, assegura a conservação da quantidade de movimento de um sistema de dois corpos sobre o qual não atuam forças exteriores.

7- Exame dos seis corolários

Os corolários (1) e (2) equivalem à lei de composição das forças aplicadas a um ponto material. Na realidade o raciocínio pelo qual Newton os estabelece, contém uma petição de princípio. Não é evidentemente possível das suas três leis concluir nada sobre a ação simultânea de várias forças ou melhor, qualquer relação entre a variação da quantidade de movimento sob a ação simultânea de várias forças e as variações que sofreria o momento se elas agissem separadamente. Newton observa que as acelerações se compoẽm pela regra do paralelogramo e tomando as forças proporcionais às acelerações, conclui que as forças também se compoẽm vetorialmente. O seu raciocínio admite tacitamente a independência dos efeitos das forças, isto é, que cada força produz a mesma variação elementar da quantidade de movimento que produziria se as outras não atuassem.

O terceiro corolário é a lei da conservação da quantidade de movimento dum sistema isolado. O quarto é o teorema do centro de gravidade no caso particular dum sistema livre de ações exteriores.

O quinto corolário é o princípio de relatividade da mecânica newtoniana - o chamado princípio de relatividade de Galileu. É digno de nota que para estabelecer este princípio é preciso supor que a massa não depende da velocidade, restrição que não está contida nas três leis. Aliás pode-se mostrar - falo-e-mos mais adiante - que impor o princípio de relatividade de Galileu e admitir a cinemática clássica acarreta necessariamente a constância da massa.

CRÍTICA DA AXIOMÁTICA NEWTONIANA

8 - Newton supõe conhecidos os conceitos geométrico-cinemáticos de tempo, espaço e movimento. Chama porém a atenção do leitor para os conceitos de espaço relativo e de movimento absoluto e relativo, assim como o de tempo relativo e absoluto.

"O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua própria natureza flue igualmente sem relação com nada de externo e, com outro nome, é chamado de duração. Tempo relativo, aparente e comum, é qualquer medida sensível e exterior (precisa ou não) da duração por meio de movimento, que é usada em vez do tempo verdadeiro, tais como uma hora, um dia, um mês, um ano". (*)

"O espaço absoluto, por sua própria natureza, sem relação com nada externo, permanece semelhante e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, que nossos sentidos determinam por suas posições em relação aos corpos e que é geralmente tomado por espaço imóvel; tal é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado por sua posição em relação à terra. Os espaços absolutos e relativos são iguais em figura e magnitude, mas não permanece sempre numericamente iguais. Pois se a Terra, por exemplo, se move, um espaço de nosso ar, que relativamente em relação à Terra permanece sempre igual, será num tempo uma parte do espaço absoluto pelo qual o ar passa, noutro tempo será outra parte dele, e assim, entendido absolutamente, terá continuamente mudado". (**)

"Movimento absoluto é a translação dum corpo, dum lugar absoluto a outro, e movimento relativo a translação dum lugar relativo a outro". (***)

"O tempo absoluto, em Astronomia, é distinguido do relativo, pela equação ou correção do tempo aparente". (****)

"Talvez não exista, coisa tal como um movimento igual pelo qual o tempo possa ser medido rigorosamente. Todos os movimentos podem ser acelerados e retardados, mas o fluir do tempo absoluto não está sujeito a nenhuma mudança". (*****)

9- Vemos que para Newton as relações dos tempos absolutos e relativos, e dos espaços absolutos e relativos são essencialmente

---

(*) Loc. cit. pag.6
(**) Idem, " 7
(***) Loc. cit. pag.7
(****) Idem, " 7 e 8
(*****) Loc. cit. pag.8

diferentes. O tempo absoluto poderia ser medido pelo movimento de um corpo de movimento rigorosamente uniforme. O espaço absoluto seria o espaço relativo a um sistema absolutamente fixo, mas Newton não indicou nenhum critério que permitisse distinguir um sistema desses, de outro em movimento retilíneo e uniforme. Aliás o corolário (5) mostra que tal distinção não pode ser feita por meios mecânicos.

Da existência do tempo absoluto, decorre a da simultaneidade absoluta.

10-Na axiomática newtoniana, além dos conceitos geométricos e cinemáticos há os mecânicos de corpo, massa e força. Vejamos se as leis ou postulados bastam para a especificação experimental das massas e forças.

Para Newton as massas podiam ser medidas com a balança. A medida das massas ficava reduzida a das forças em virtude da segunda lei.

Para medir uma força, basta equilibrá-la por outra conhecida. Isto é, aplicar ao ponto material sobre o qual a primeira força atua outra que anule sua aceleração. Em virtude da 1ª lei a força resultante será nula e pelo teorema de composição as duas forças terão mesma intensidade e linha de ação e sentidos contrários. O problema da medida das forças fica assim reduzido ao do estabelecimento dum tipo padrão de forças.

Pode-se tomar como padrão a força elástica das molas ou fios e utilizar o dinamômetro. (*) Em princípio esta escolha é insatis-

---

(*) Reech, Cours de Mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps, Paris, 1852.
Andrade, Leçons de Mécanique Physique, 1898.

fatória porque depende de conhecimento das propriedades das substâncias elásticas, materiais particulares, cujas propriedades não decorrem imediatamente dos princípios.

Tomando a gravidade como estação, aparece o mesmo inconveniente, pois dos princípios newtonianos não se pode inferir que existam forças deste tipo. Poder-se-ia juntar aos postulados da Mecânica mais outro que afirmasse a existência de forças gravitacionais, a exemplo do que faz G. Hamel. (*) Esse modo de proceder, também não é satisfatório. De resto é desnecessário introduzir um postulado suplementar desta natureza, pois há uma solução para o problema em consideração dentro do quadro newtoniano como foi demonstrado por E. Mach.(**) Anteriormente, Saint Venant já expuzera idéias análogas.

11- A terceira lei permite medir a razão das massas de dois pontos materiais. Com efeito, se dois pontos materiais P_1 e P_2 constituirem um sistema isolado, teremos:

$$m_1\ddot{P}_1 = m_2\ddot{P}_2$$

logo

$$\frac{m_1}{m_2} = \left|\frac{\ddot{P}_2}{\ddot{P}_1}\right|$$

Tomando a massa de P_1 como unidade tem-se a massa de um ponto qualquer P_2, medindo as acelerações $\ddot{P}_1$ e $\ddot{P}_2$. Os postulados newtonianos são portanto suficientes para o estabelecimento de métodos

(*) G. Hamel, Handbuch der Physik, vol. V, Berlim, 1926.
(**) E. Mach, Die Mechanik, 1883.

de medida das massas.

A segunda lei de Newton reduz a medida das forças a das massas e acelerações. A axiomática newtoniana permite estabelecer métodos de medida das forças e massas e é portanto satisfatória sob esse ponto de vista.

Da análise precedente resulta que há uma superabundância de conceitos na axiomática de Newton, pois torna-se possível definir a força em função da massa. Este fato já fora entrevisto pelos geômetras do século XVIII. Uns como Euler(*) procuraram reduzir tudo ao conceito de força, outros como d'Alembert(**) partiam da massa. A corrente dalembertiana através de Lazare Carnet(***) e Saint Venant(****) culminou em Mach. Kirchhoff (+) pôs em evidência a superabundância dos conceitos newtonianos de maneira bem clara, por uma análise essencialmente diversa da que adotamos.

12- Quando começaram a ser tratados os problemas em que intervêem ligações, pareceu que os princípios newtonianos fossem insuficientes. Esta dificuldade levou d'Alembert(++) a enunciar o famoso princípio que tem o seu nome. Posteriormente Fourier (+++) o estendeu aos casos de ligações unilaterais.

Boltzmann(++++) mostrou que não há de fato necessidade de

(*) Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 1736.

(**) D'Alembert, Traité de Dynamique, Paris, 1753.

(***) Lazare Carnot, Essai sur les machines en général, Paris, 1803.

(****) Barré de Saint Venant, Mémoire sur les sommes et les différences géometriques et sur leur usage pour simplifier la Mécanique, Comptes Rendus, tomo XXI, 1845.
Principes de Mécanique fondés sur la Cinématique, Paris, 1815.

(+) Kirchhoff, Mechanik, Leipzig, 1876.

(++) D'Alembert, Loc.Cit.

(+++) Fourier, Journal de l'École Polytécnique, cahier V, am. VI.

(++++) Boltzmann, Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik, Popular Schrifften, 1905.

se introduzir nenhum princípio novo para tratar dos movimentos sujeitos a ligações. Sua análise é insatisfatória sob muitos pontos de vista mas tem o mérito de reduzir o princípio de d'Alembert aos postulados newtonianos. Tornaremos a esta questão mais adiante.

A FORMULAÇÃO DE MACH

13- Levado pela sua crítica penetrante dos princípios newtonianos, cujos resultados principais expuzemos nos parágrafos 10 e 11, Mach propôs uma nova maneira de formular os axiomas da imagem newtoniana. Mach procura por claramente em evidência a associação existente entre o conceito de massa e o fato experimental da inércia e da matéria assim como as relações entre os conceitos de massa e de força. Passamos a enunciar os princípios segundo Mach:

a) Proposição experimental: dois corpos em presença induzem um sobre o outro, em certas circunstâncias a serem especificadas pela física experimental, acelerações opostas dirigidas segundo sua linha de junção. (Neste, está incluido o princípio de inércia).

b) Definição: a razão das massas de dois corpos é o inverso negativo da razão das acelerações mutuamente induzidas destes dois corpos.

c) Proposição experimental: as acelerações que um número qualquer de corpos A,B,C... induzem num corpo K, são independentes entre si. (Deste resulta imediatamente o princípio de paralelogramo das forças).

d) Proposição experimental: as razões das massas dos corpos são independentes do caráter dos estados físicos (dos dois corpos) que condicionam as acelerações mútuas produzidas; sejam estes estados elétricos, magnéticos ou quais forem; e além disto são as mesmas, quer sejam obtidas mediato ou imediatamente.

e) Definição: Força motriz é o produto do valor da massa dum corpo pela aceleração sobre esse induzida.

CRÍTICA DA FORMULAÇÃO DE MACH

14- Na axiomática de Mach os conceitos primitivos são os de corpo - na realidade ponto material - e de presença de dois corpos. Os conceitos de massa e de força são derivados, isto é, definidos em termos dos conceitos primitivos, de ponto material e de presença entre pontos materiais.

O princípio de inércia é considerado por Mach como um caso particular da proposição (a). Este particular é digno de muita atenção, pois significa que *toda* a aceleração dum ponto material é devida a ação de outros corpos materiais, como resulta de (a) e da observação entre parênteses que a acompanha. De per si a proposição (a) afirma apenas que dois corpos em presença se aceleram mutuamente, mas não implica nada sobre o que pode ocorrer quando um ponto se encontra isolado. Esta deficiência da formulação de Mach já foi reconhecida por Blondlet que juntou o princípio de inércia aos de Mach.

A confusão reinante sobre a questão da necessidade de enunciar separadamente o princípio de inércia deriva da circunstância da equação de movimento.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{(A)}$$

já conter o princípio de inércia como caso particular correspondente a F nula. Isto não significa que se possa dispensar o prin cípio de inércia, pois a equação de movimento seria

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + m \vec{J}_o \qquad (B)$$

J_o sendo a aceleração que teria o corpúsculo isolado.

Se bem que seja sempre possível conceber as forças como oriundas da presença de corpos em interação, não deixa de haver inconvenientes sérios em fazê-lo de modo absoluto. Tomemos, por exemplo, um corpo carregado eletricamente sob a ação de ondas eletromagnéticas. A rigor podemos considerar estas ondas como parte dos campos retardados de outras cargas e as acelerações dos pontos do corpo seriam induzidas pela interação com as cargas que emitiram as ondas. Não há porém vantagem de proceder sempre assim, sendo o mais das vezes preferível trabalhar diretamente com o campo sem se procurar saber qual sua origem. Não se pode excluir que existam ondas eletromagnéticas que não foram emitidas por corpúsculos. Cumpre também observar que a consideração das ações retardadas escapa aos quadros da mecânica newtoniana, pois a velocidade finita de propagação das forças, implica uma modificação da lei de ação e de reação.

Outra falha da formulação de Mach - como das demais - é a admissão de que as forças entre dois pontos materiais são sempre dirigidas segundo a linha de junção. É bem sabido que as fôrças entre dipolos elétricos ou magnéticos não são dirigidas segundo a linha de junção. Antes da descoberta do momento magnético do eletro, ainda se poderia admitir que pontos materiais não possuem de fato momentos magnéticos ou elétricos, que seriam atributos de sistemas de pontos, de modo que sempre se poderia excluir a possibilidade de forças destas origens entre corpúsculos puntiformes. Outro tipo de forças entre corpúsculos que não são centrais é o das ações magnéticas entre cargas em movimento; a direção da força, depende das velocidades dos dois corpúsculos. Este caso ainda é mais delicado que o dos dipolos porque as duas forças mútuas nem sequer são iguais.

É importante observar que a hipótese de serem centrais as forças entre dois corpúsculos puntiformes não intervem no método de medida das massas e das forças discutido anteriormente.

Antes de procurar uma formulação mais satisfatória dos postulados fundamentais da Mecânica, é necessário discutir os princípios de conservação. Veremos que a chave das dificuldades encontradas nos parágrafos precedentes é dada pela análise dos princípios de conservação.

A rigor este problema escapa a qualquer teoria não relativista porque as forças magnéticas entre dois corpúsculos são da ordem de quociente do produto de suas velocidades pelo quadrado da velocidade da luz. Nesta aproximação os efeitos decorrentes da velocidade finita de propagação das ações, já devem ser levados em consideração. Voltaremos a esta questão mais tarde.

SEGUNDA PARTE

OS PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

Conservação da quantidade de movimento.

15- A equação fundamental

$$\frac{d}{dt}(m\dot{P}) = \vec{F} \qquad (1)$$

mostra que a variação da quantidade de movimento de um ponto é i gual a força motriz:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} \quad . \tag{2}$$

Q representando a quantidade de movimento:

$$\vec{Q} = m\dot{P} \tag{3}$$

Em particular, quando o ponto material está livre:

$$m\dot{P} = \text{constante} \tag{4}$$

A equação (4) exprime ao mesmo tempo a lei de inércia e o princí pio da conservação da quantidade de movimento e um ponto material isolado.

O princípio da ação e da reação permite estender (4) ao caso de um sistema isolado qualquer. Com efeito, as equações de movimento dum sistema são:

$$\frac{d}{dt}\,(m_k\,\dot{P}_k) = \vec{F}_k + \vec{f}_{k\ell} \qquad (k = 1,2....n) \tag{5}$$

$\vec{F}_k$ sendo a força externa aplicada ao k-gésimo ponto, $\vec{f}_{k\ell}$ a força exercida por P sobre P_k e n o número de pontos do sistema. Em virtude do princípio de ação e reação:

$$\vec{f}_{k\ell} = -\,\vec{f}_{\ell k} \tag{6}$$

de modo que:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \dot{P}_k\right) = \vec{F}_k$$

Introduzindo a quantidade de movimento do sistema:

$$\vec{Q} = \sum_k m_k \dot{P}_k \tag{7}$$

podemos escrever:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_k \tag{8}$$

No caso dum sistema em que a resultante das forças aplicadas é nula:

$$\sum m_k \dot{P}_k = \vec{Q} = \text{constante} \tag{9}$$

Os sistemas isolados constituem um dos casos em que a resultante $\vec{F}_k$ é nula, porque os $\vec{F}_k$ são nulos. A quantidade de movimentos dum sistema isolado é portanto constante.

16- A equação (9) que traduz o princípio de conservação da quantidade de movimento é uma generalização da equação (4) que exprime a lei de inércia.

Este princípio é portanto uma forma generalizada da lei de inércia. Isto se vê de um modo mais intuitivo considerando o movimento do centro de gravidade do sistema dos n pontos G:

$$(\sum_k m_k)\ (G-O) = \sum_k m_k\ (P_k-O) \tag{10}$$

O sendo um ponto fixo qualquer.

Derivando ambos os membros de (10) em relação ao tempo se vê que

$$(\sum_k m_k)\ \dot{G} = \frac{d}{dt}\ (\sum_k m_k\ P_k) - (G-O)\ \frac{d}{dt}\ (\sum_k m_k)$$

de modo que se as massas forem constantes:

$$m_k = \text{constante} \tag{11}$$

ter-se- á:

$$\dot{G} = \text{constante} \tag{12}$$

e o movimento do baricentro será retilíneo e uniforme.

A conservação do momento linear de um sistema isolado é uma consequência direta da lei de ação e reação. Isto explica por que Newton considerava esta lei como uma generalização da lei de inércia.

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

17- Seja O um ponto fixo qualquer, temos a identidade:

$$\frac{d}{dt}\ (m\ \dot{P} \wedge (P-O)) = \frac{d}{dt}\ (m\ \dot{P}) \wedge (P-O)$$

logo:

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O)\wedge m\dot{P}\right] = (P-O)\wedge\vec{F} \tag{13}$$

em particular se o corpúsculo estiver isolado:

$$(P-O)\wedge m\dot{P} = \text{constante}$$

ou

$$\vec{K}_O = (P-O)\wedge\vec{Q} = \text{constante} \tag{14}$$

É interessante observar que a relação (14) - expressão analítica do princípio da conservação do momento angular dum corpúsculo livre - não passa de um corolário da lei de inércia. Com efeito, se P tem um movimento retilíneo e uniforme a área varrida por $P-O$ é proporcional ao tempo, sendo um triângulo de altura constante e base proporcional ao tempo. O plano deste triângulo é o plano fixo definido por O e a trajetória retilínea. Concluimos daí que o momento angular é constante, por ser um vetor perpendicular a esse plano e de módulo igual ao dobro do produto da velocidade areolar pela massa, também constante em virtude da uniformidade do movimento.

18- Vejamos o que ocorre no caso de um sistema isolado. Aplicando a equação geral (13) aos pontos do sistema e levando em conta que não há forças externas, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[(P_i - O) \wedge m_i \dot{P}_i\right] = (P_i - O) \wedge \sum_j \vec{f}_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Somando as equações correspondentes aos diversos valores de i:

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \sum_{ij} (P_i - O) \wedge \vec{f}_{ij} \tag{15}$$

$\vec{K}_o$ sendo o momento angular do sistema:

$$\vec{K}_o = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \dot{P}_i \tag{16}$$

O princípio da ação e reação permite escrever a relação (15) sob a forma:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_o = \frac{1}{2}\sum_{ij} (P_i - P_j) \wedge \vec{f}_{ij} \tag{17}$$

Se as forças entre os pontos do sistema forem centrais, isto é, se $\vec{f}_{ij}$ for dirigida segundo P_iP_j, os produtos vetoriais do segundo membro de (17) serão nulos e portanto:

$$\vec{K}_o = \text{constante} \tag{18}$$

Ora, em geral as forças entre corpúsculos não são centrais, como admite Mach, e o momento angular $\vec{K}_o$ não é constante. *Nós admitiremos o princípio da conservação do momento angular de um sistema isolado.* $\vec{K}_o$ não sendo constante temos que introduzir um momento angular S de outra natureza de modo a ter:

$$\vec{K}_o + \vec{S} = \text{constante} \tag{19}$$

Comparando (19) e (15) vemos que se deve ter:

$$\vec{S} = \sum_{ij} (P_i - O) \wedge \vec{f}_{ij} \tag{20}$$

Admitiremos que $\vec{S}$ é a soma de n vetores $\vec{S}_i$, ligados aos corpúsculos de sistema:

$$\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i \tag{21}$$

Os $\vec{S}_i$ são os spins dos corpúsculos e $\vec{S}$ é o spin total do sistema, ou momento angular de spin do sistema. Chamaremos de momento angular total do sistema a soma $\vec{M}_O$ de $\vec{K}_O$ com $\vec{S}$:

$$\vec{M}_O = \vec{K}_O + \vec{S} \tag{22}$$

Os spins não dependem da escolha do ponto O - são variáveis características do estado cinemático do corpúsculo como a posição e a velocidade.

19- Com a introdução do spin, aumenta o número de variáveis que descrevem o estado do corpúsculo e a equação fundamental da dinâmica deixa de ser suficiente. É preciso dar uma equação de movimento do spin, devido a analogia existente entre o spin e um momento de rotação de um corpo giroscópico. Tomaremos para o spin uma equação de movimento de primeira ordem:

$$\dot{\vec{S}}_i = \vec{M}_i \tag{23}$$

Chamaremos $\overline{M}_i$ de momento aplicado ao corpúsculo, por analogia com a força aplicada. A equação (19) é satisfeita tomando:

$$\vec{M}_i = - \sum_j (P_i - P_j) \wedge \vec{f}_{ij} \qquad (24)$$

Veremos porém que esta escolha de $\vec{M}_i$ não é satisfatória. Aliás a equação (23) não é suficiente para calcular o trabalho como se verá adiante.

20- O teorema do momento da quantidade de movimento foi deduzido da equação de movimento, isto é, da equação que traduz o teorema da quantidade de movimento. Inversamente é possível deduzir este teorema do relativo ao momento angular. Com efeito, tomemos dois pontos fixos quaisquer O e O'. Sendo válida a equação (15) para ambos temos também:

$$\frac{d}{dt} [(O'-O) \wedge m\dot{P}] = (O'-O) \wedge \frac{d}{dt}(m\dot{P}) = (O'-O) \wedge \vec{F}$$

ou

$$(O'-O) \wedge [\frac{d}{dt} (m\dot{P}) - \vec{F}] = 0$$

mas O e O' sendo dois pontos quaisquer devemos ter:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{P}) = \vec{F}$$

De um modo análogo a conservação de momento linear dum sistema isolado é uma consequência da conservação do momento angular. Com efeito, a equação (20) devendo ser satisfeita para dois pontos O e O' quaisquer, temos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{K}_{O'}-\vec{K}_{O}) = 0$$

mas

$$\vec{K}_{O'}-\vec{K}_{O} = \sum_i [(P_i-O')-(P_i-O)] \wedge m_i\dot{P}_i = (O'-O)\wedge\sum_i m_i\dot{P}_i = (O'-O)\wedge\vec{Q}$$

logo

$$(O'-O)\wedge\dot{\vec{Q}} = 0$$

e devido a escolha arbitrária de O e O':

$$\dot{\vec{Q}} = 0$$

É digno de nota que a conservação do momento angular dum sistema isolado não decorre da conservação do momento linear. Aplicando a proposição precedente aos sistemas isolados de dois corpúsculos concluimos que:

"A lei de ação e reação é uma consequência do princípio da conservação do momento angular dos sistemas isolados".

21- O princípio da conservação do momento linear junto com os de conservação da massa e do momento angular dão a generalização completa da lei de inércia. Consideremos um triedro triretângulo de vértice em G, tendo o eixo dos z na direção e sentido do momento angular total $\vec{M}_G$, o eixo dos x segundo a componente de $\dot{G}$ perpendicular a $\vec{M}_G$ e o plano dos xy normal a $\vec{M}_G$. Este triedro tem um movimento retilíneo e uniforme.

Para demonstrar o teorema precedente basta mostrar que $\vec{M}_G$ é constante, pois já sabemos que $\dot{G}$ o é. Ora:

$$\vec{M}_G = \vec{K}_G + \vec{S}$$

e

$$\vec{K}_G = \sum_i (P_i - G) \wedge m_i \dot{P}_i = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \dot{P}_i + (O-G) \wedge \sum_i m_i \dot{P}_i$$

isto é:

$$\vec{K}_G = \vec{K}_O + (O-G) \wedge \vec{Q} = \vec{K}_O + (O-G) \wedge (\sum_i m_i) \dot{G}$$

e portanto:

$$\vec{M}_G = \vec{M}_O + (O-G) \wedge \sum_i m_i \frac{d}{dt} (G-O)$$

O raciocínio usado para deduzir a constância do momento angular dum corpúsculo isolado da lei de inércia aplicado ao caso de G mostra que o produto vetorial da equação precedente é constante e portanto que

$$\vec{M}_G = \text{constante} \tag{25}$$

Esta generalização do princípio de inércia mostra que podemos associar a qualquer sistema isolado um triedro de referência animado duma translação retilínea e uniforme. Há outro modo de generalizar a lei de inércia. Consideremos os vetores dos momentos lineares dos pontos dum sistema isolado como um sistema de vetores des lizantes. A quantidade de movimento $\vec{Q}$ e o momento orbital $\vec{K}_o$ são a resultante geral e o momento resultante em relação a O desse sistema de vetores deslizantes. Logo, se o spin total $\vec{S}$ for constante, os vários sistemas de vetores correspondentes aos vários valores do tempo serão todos equivalentes.

O eixo central desses vários sistemas será portanto o mesmo e o complexo das retas de momento nulo também será fixo:

"Quando o spin total dum sistema isolado é constante há uma reta e um complexo linear associados ao sistema e que são fixos no espaço".

O PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

21- Consideremos um sistema de n pontos materiais P_i e representemos por $\vec{f}_i$ a resultante das forças interiores que atuam sobre P_i e por $\vec{F}_i$ a resultante das exteriores. As equações de movimento são:

$$\frac{d}{dt}\,(m_i\,\dot{P}_i) = \vec{f}_i + \vec{F}_i$$

Multiplicando escalarmente as equações (26) pelos deslocamentos elementares dos pontos correspondentes e somando obtemos:

$$\sum_i m_i\,\dot{P}_i \times dP_i + \sum_i \dot{m}_i\,\dot{P}_i^2\,dt = \sum_i (\vec{f}_i+\vec{F}_i) \times dP_i$$

ou

$$d\sum_i \left(\frac{1}{2}\,m_i\,\dot{P}_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i \dot{m}_i\,\dot{P}_i^2\,dt = d\tau_{int} + d\tau_{ext} \qquad (26)$$

d_{int} e d_{ext} sendo respectivamente os trabalhos realizados no tempo dt pelas forças interiores e exteriores:

$$d\tau_{int} = \sum \vec{f}_i \times dP_i \qquad d\tau_{ext} = \sum \vec{F}_i \times dP_i \tag{26a}$$

Definimos a energia cinética pela equação:

$$dE_{cin} = d\left(\sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \dot{P}_i^2\right) + \sum_i \left(\frac{1}{2}\, \dot{m}_i\, \dot{P}_i^2\right) \tag{27}$$

Em particular se a massa for constante pode-se tomar:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_i m_i\, \dot{P}_i^2 \tag{27a}$$

A equação (26) pode ser posta sob a forma:

$$dE_{cin} = d\tau_{int} + d\tau_{ext} \tag{28}$$

Integrando entre os tempos t_1 e t_2:

$$E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) = \tau_{int} + \tau_{ext} \tag{29}$$

A equação (29) exprime o teorema das forças vivas.

22- Suponhamos que exista uma função V das coordenadas e das velocidades dos pontos P_i tal que (*)

(*) Ver nota I.

$$\vec{f}_{\ell} = -\vec{\nabla}_i V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i V) \qquad (30)$$

$$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \qquad \vec{\nabla}' = (\frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}})$$

Neste caso d τ_{int} é uma diferença l exata:

$$d\tau_{int} = d[-V + \sum_i (\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i)] \qquad (31)$$

e (29) toma a forma:

$$\Delta[E_{cin} + V \sum_i (\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i)] = \tau_{ext} \qquad (32)$$

A função V é o potencial generalizado. Quando as formas interiores só dependerem das posições V se reduz ao potencial ordinário. Chama-se energia de sistema a função E:

$$E = E_{cin} + V - \sum_i (\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i) \qquad (33)$$

A equação (32) exprime o princípio da energia:

$$\Delta E = \tau_{ext} \qquad (34)$$

Em particular, há conservação da energia quando o sistema é isolado:

$$E = \text{constante}$$

23- Há uma relação estreita entre o teorema do momento linear e o princípio da energia. Com efeito, integrando em relação ao tempo ambos os membros de (8) obtemos:

$$\Delta \vec{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \ dt \qquad (36a)$$

Explicitando a expressão do trabalho no segundo membro de (34) vemos que:

$$\Delta E = \int_{t}^{t_2} \vec{F}_i \times dP_i \qquad (36b)$$

O paralelismo das duas equações (36) sugere que deve haver um teorema que tenha a mesma relação com o princípio da energia que o princípio de momento angular com o do momento linear. Consideremos o caso das forças internas em que o princípio do momento angular é expresso pela equação:

$$\vec{K} = \text{const} = \vec{K}^{(o)} \qquad (37)$$

Tomando o ponto O como origem dum sistema de coordenadas cartesianas ortogonais teremos:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = K_x^{(o)} \\ K_y &= \sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = K_y^{(o)} \\ K_z &= \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = K_z^{(o)} \end{aligned} \qquad (37a)$$

Analogamente deveríamos ter:

$$\sum_i m_i (x_i \dot{t} - t\,\dot{x}_i) = \text{const.}$$

$$\sum_i m_i (y_i \dot{t} - t\,\dot{y}_i) = \text{const.} \qquad (38)$$

$$\sum_i m_i (z_i \dot{t} - t\,\dot{z}_i) = \text{const.}$$

Representando por x_G, y_G e z_G as coordenadas de G se tem:

$$\sum_i m_i\, x_i = (\sum_i m_i)\; x_G$$

$$\sum_i m_i\, \dot{x}_i = (\sum_i m_i)\; \dot{x}_G$$

de modo que as equações (38) equivalem à equação vetorial:

$$(G-O) - t\,\dot{G} = \text{constante} = (G_o - O) - t_o\,\dot{G}_o \qquad (39)$$

isto é

$$G - G_o = t\,\dot{G} - t_o\,\dot{G}_o \qquad (40)$$

Recordando que o movimento de G é retilíneo e uniforme e que portanto

$$G - G_o = (t - t_o)\,\dot{G}$$

concluimos que a equação (40) é de fato verdadeira. As equações horárias do movimento de G estão portanto relacionadas com as que exprimem a conservação do momento angular.

24. Para que as forças não dependam das acelerações é neces

sário e suficiente que o potencial generalizado só dependa linearmente das componentes das velocidades:

$$V = W + \sum_i (A_i \dot{x}_i + B_i \dot{y}_i + C_i \dot{z}_i) = W + \sum_i \vec{U}_i \times \dot{P}_i \tag{41}$$

os A, B, C e W sendo funções coordenadas x,y,z dos pontos do sistema e eventualmente dos spins e do tempo. Supuzemos tacitamente que V não depende dos spins nem do tempo; veremos logo mais o que ocorre quando isto não se verifica. Levando em conta (41) achamos:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = A_i \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_i} = B_i \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_i} = C_i \tag{42}$$

$$V - \sum_\ell \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_o} \dot{x}_o + \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_o} \dot{y}_o + \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_o} \dot{z}_o\right) = W \tag{43}$$

$$E = E_{cin} + W \tag{44}$$

A equação (44) mostra que a energia total não depende das velocidades, porque W só depende das coordenadas dos pontos.

25. As equações (29) não bastam para determinar completamente o potencial generalizado V. Se houver outra função V' satisfazendo as equações (29) deveremos ter:

$$-\vec{\nabla}_i (V-V') + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}'_i (V-V') = 0 \tag{45}$$

Esta equação devendo ser válida para valores quaisquer das acelerações temos:

$$\frac{\partial^2 (V-V')}{\partial \dot{U}_k \ \partial \dot{U}_\ell} = 0 \tag{46}$$

U sendo uma coordenada qualquer de um dos pontos. De (46) resulta que V-V' é linear nas componentes das velocidades:

$$V-V' = \omega + \sum_j (\alpha_j \dot{x}_j + \beta_j \dot{y}_j + \gamma_j \dot{z}_j) = \omega + \sum_j \vec{\Pi}_j \times \dot{P}_j \tag{47}$$

Introduzindo esta expressão em (45) achamos:

$$-\vec{\nabla}_i [\omega + \sum_j \vec{\Pi}_j \times \dot{P}_j] + \vec{\Pi}_i = 0$$

Isto é:

$$-\vec{\nabla}_i [\omega + \sum_j (\alpha_j \dot{x}_j + \beta_j \dot{y}_j + \gamma_j \dot{z}_j)] + \sum_j (\frac{\partial \vec{\Pi}_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial \vec{\Pi}_i}{\partial y_j} \dot{y}_j + \frac{\partial \vec{\Pi}_i}{\partial z_j} \dot{z}_j) = 0 \tag{48}$$

Devendo estas equações serem satisfeitas para valores quaisquer das velocidades, concluimos que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial y_i} = \frac{\partial \omega}{\partial z_i} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} \quad \text{etc.} \tag{49}$$

De (49) concluimos ser ω constante e existir uma função cujas $\vec{\nabla}_i$ deem os $\vec{\Pi}_i$:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \text{constante} \\ \vec{\Pi}_i &= \vec{\nabla}_i \Omega \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

logo:

$$V-V' = \frac{d\Omega}{dt} + \text{const.} \tag{51}$$

Vemos que a indeterminação de V só afeta o valor de E pela arbitrariedade duma constante aditiva, pois E não depende da parte de V que contém as velocidades.

26 – Resta ver em que condições existe um potencial generalizado. Levando em conta a equação (41) as fórmulas (29) tornam-se:

$$\left.\begin{aligned} f_{i,x} &= -\frac{\partial w}{\partial x_i} - \sum_{\ell} \left(\frac{\partial A_\ell}{\partial x_i}\dot{x}_\ell + \frac{\partial B_\ell}{\partial x_i}\dot{y}_\ell + \frac{\partial C_\ell}{\partial x_i}\dot{z}_\ell\right) + \frac{dA_i}{dt} \\ f_{i,y} &= -\frac{\partial w}{\partial y_i} - \sum_{\ell} \left(\frac{\partial A_\ell}{\partial y_i}\dot{x}_\ell + \frac{\partial B_\ell}{\partial y_i}\dot{y}_\ell + \frac{\partial C_\ell}{\partial y_i}\dot{z}_\ell\right) + \frac{dB_i}{dt} \\ f_{i,z} &= -\frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{\ell} \left(\frac{\partial A_\ell}{\partial z_i}\dot{x}_\ell + \frac{\partial B_\ell}{\partial y_i}\dot{y}_\ell + \frac{\partial C_\ell}{\partial z_i}\dot{z}_\ell\right) + \frac{dC_i}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

As componentes dos $\vec{f}_i$ devem ser funções lineares das componentes das velocidades. Para isto, é necessário e suficiente que:

$$\frac{\partial^2 f_{i,v}}{\partial \dot{u}_k\, \partial \dot{u}_\ell} = 0 \tag{53}$$

u indicando uma coordenada qualquer de um ponto P também qualquer. Os coeficientes da parte do primeiro grau nos u destas funções lineares satisfazem à condição:

$$\frac{\partial f_i u_i}{\partial \dot{u}_k} = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial u_i} \tag{54}$$

Estas equações mostram que os $f_i\, u_i$ são as componentes do rotacional de um vetor dum espaço a 3n dimensões. Em vez de (54) poder-se-ia escrever um sistema de equações às derivadas parciais para os f_{iu}, análogo ao que dá a condição para que um vetor seja um rotacional.

A parte de $f_{i,u}$ que não depende das velocidades deve ser a derivada parcial correspondente duma função W, se V não depender do tempo:

$$f_{i,u} - \sum_k \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{u}_k} \dot{u}_k = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

logo é necessário e suficiente que

$$\frac{\partial f_{i,u_i}}{\partial u_r} - \frac{\partial f_{j,u_r}}{\partial u_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 f_{i,u_r}}{\partial \dot{u}_k\, \partial u_r} - \frac{\partial^2 f_{j,u_r}}{\partial \dot{u}_k\, \partial u_i}\right) \dot{u}_k \tag{55}$$

As condições (53), (54) e (55) são necessárias e suficientes para que exista o potencial generalizado quando as forças não dependem do tempo nem dos spins. Se não dependerem também das velocidades (53) e (54) são satisfeitas identicamente e (55) se reduz a:

$$\frac{\partial f_{i,u_r}}{\partial u_r} - \frac{\partial f_{j,u_r}}{\partial u_i} = 0 \tag{56}$$

Outro tipo de condições necessárias e suficientes, válidas mesmo quando o potencial generalizado não é linear nas velocidades, será dado na Nota II.

27- Quando o potencial generalizado contém o tempo, a equação (30) é substituída pela seguinte:

$$d\tau_{int} = d[-V + \sum_i (\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_i}\dot{z}_i)] + \frac{\partial V}{\partial t}dt \quad (57)$$

de modo que em vez de (31) passamos a ter:

$$E_{cin} + V - \sum_i (\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_i}\dot{z}_i)\Big|_{t_1}^{t_2} = \tau_{ext} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial t}dt \quad (58)$$

Em vez de (33) e (34):

$$\Delta E = \tau_{ext} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial t}dt \quad (59)$$

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial t}dt \quad (60)$$

A equação (60) mostra que não há mais conservação da energia de um sistema isolado, quando V depende diretamente do tempo.

A equação (46) ainda é válida mas (47) se transforma:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \sum_j (\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\dot{x}_j + \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}\dot{y}_j + \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}\dot{z}_j) + \sum_j (\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\dot{y}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_j}\dot{z}_j) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

de modo que em vez de (48) as condições a que devem satisfazer ω, α, β e γ se tornam:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial t} & \dfrac{\partial \omega}{\partial y_i} = \dfrac{\partial \beta_i}{\partial t} & \dfrac{\partial \omega}{\partial z_i} = \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial y_i} & \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial z_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} \end{array}\right\} \quad (62)$$

As condições (62) mostram que ω e os α,β,γ, são derivadas parciais de uma função:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \\ \beta_i &= \frac{\partial\Phi}{y_i} \\ \gamma_i &= \frac{\partial\Phi}{z_i} \\ \omega &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

de modo que:

$$V - V' = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{64}$$

Agora a arbitrariedade na escolha de V aumenta muito e isto se reflete na definição de E. Em vez da incerteza de uma constante aditiva, teremos agora a derivada parcial em relação ao tempo de uma função qualquer das coordenadas e do tempo. A rigor poder-se-ia dizer que o conceito de energia perde o sentido. Contudo há casos em que se pode conservar este conceito, tirando-lhe porém o caráter puramente mecânico. É o que acontece quando consideramos cargas elétricas num campo eletromagnético variável. Só tem sentido falar na energia total sem que se possa separar a mecânica da eletromagnética.

28- Quando as forças que atuam sobre os pontos materiais dependem do spin e há momentos aplicados, é preciso estender a definição de trabalho. Temos que considerar tanto o deslocamento do ponto como a variação do spin. Esta variação poder ser decomposta em duas partes, uma devida a rotação do spin e outra à mudança de sua grandeza:

$$\vec{S}_i = S_i \vec{\sigma}_i$$

$$\delta\vec{S}_i = (\delta S_i)\ \vec{\sigma}_i + S_i \delta\vec{\sigma}_i = \delta S_i \vec{\sigma}_i + \vec{\delta\omega}_i \Lambda \vec{\sigma}_i\ S_i \qquad (65)$$

O momento aplicado $\vec{M}_i$ efetua o trabalho elementar(*):

$$\delta\tau_{M_{ij}} = \vec{\delta\omega}_j \ \ x\vec{M}_{ij} \qquad (66)$$

Logo:

$$\delta\tau_{int} = \sum_{ij} \vec{f}_{ij}\ x\ \delta P_i + \sum_{ij} \vec{M}_{ij}\ x\ \overrightarrow{\delta\omega_i} = \sum_{ij} \vec{f}_{ij}\ x\ \delta P_i + \sum_{i} \vec{M}_i\ x\ \overrightarrow{\delta\omega} \qquad (67)$$

Podemos conservar a expressão (29) para o caso de forças que dependem do spin(**):

$$F_{i,u} = - \frac{\partial V}{\partial u_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial u_i}\right) \qquad (68)$$

(*) Esta expressão é análoga a que vale para um sólido giroscópico girando em torno de seu eixo, no instante em que se lhe aplica um momento exterior. Mas, enquanto no caso do sólido $\vec{\omega}$ é conhecido por ser o vetor da rotação instantânea, o mesmo não se dá no caso do spin de um corpúsculo puntiforme. O conhecimento de $\vec{S}_i$ não basta para determinar completamente $\vec{\omega}_i$. Daí a insuficiência da equação (23) a que já aludimos precedentemente. Em vez da equação (23) seria necessário ter duas:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_i &= \vec{M}_i \\ \dot{\vec{S}}_i &= \lambda_i \end{aligned} \qquad (I)$$

No caso de haver um potencial, obteremos as fórmulas (74) e (75) que são precisamente do tipo I.

(**) Calculando as forças pela fórmula (69), elas dependerão em geral dos $\dot{S}$. Ora os $\dot{S}$ são análogos às acelerações, no sentido de que as equações de movimento dão os seus valores em função das variáveis que definem o estado do corpúsculo. Assim como admitimos que as forças não dependiam das acelerações, admitiremos que não contêm os S. Isto implica que: $\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{u}\, \partial S} = 0$

Supondo que o potencial não depende do tempo, devemos estabelecer relações entre os momentos aplicados e o potencial para tornar int uma diferencial exata. Isto é, devemos impor a condição:

$$\sum_i \overrightarrow{\delta\omega_i} \times \vec{M}_i + \left(\sum_{\beta=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial S_\beta} \delta S_\beta\right) = \delta \mathcal{V} \tag{70}$$

Ora:

$$\delta \mathcal{V} = \sum_{\beta=1}^{3n} \frac{\partial V}{\delta S_\beta} \delta S_\beta + \sum_{\beta=1}^{3n} \left(\frac{\partial V}{\partial u_\beta} u + \frac{\partial V}{\partial \dot{u}_\beta} \delta \dot{u}_\beta\right. \tag{71}$$

Comparando (70) e (71) vemos que $\mathcal{V}$ não deve depender das posições nem das velocidades:

$$\frac{\partial V}{\partial u_\gamma} = \frac{\partial V}{\partial \dot{u}_\gamma} = 0 \tag{72}$$

e que:

$$\sum_i \vec{M}_i \times \overrightarrow{\delta\omega_i} = \sum_i \left[\delta S_{ix} \frac{\partial}{\partial S_{ix}} + \delta S_{iy} \frac{\partial}{\partial S_{iy}} + \delta S_{iz} \frac{\partial}{\partial S_{iz}}\right] (\mathcal{V}-V) \tag{73}$$

Admitindo que os spins podem girar livremente os $\delta\vec{\omega}_i$ podem ser quaisquer. Logo em virtude de (65):

$$\left.\begin{aligned} M_{ix} &= \left(S_{iy} \frac{\partial}{\partial S_{iz}} - S_{iz} \frac{\partial}{\partial S_{iy}}\right) (\mathcal{V}-V) \\ M_{iy} &= \left(S_{iz} \frac{\partial}{\partial S_{ix}} - S_{ix} \frac{\partial}{\partial S_{iz}}\right) (\mathcal{V}-V) \\ M_{iz} &= \left(S_{ix} \frac{\partial}{\partial S_{iy}} - S_{iy} \frac{\partial}{\partial S_{ix}}\right) (\mathcal{V}-V) \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Os $\vec{M}_i$ sendo ortogonais aos $\vec{S}_i$, os $\dot{S}_i$ são nulos

$$\dot{S}_i = 0 \tag{75}$$

V continua indeterminado, como não depende das posições nem das velocidades podemos supor que está englobada na função aditiva arbitrária que podemos juntar a V, pois isto não afeta os valores das forças F_i. Procedendo assim achamos:

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -\left(S_{iy}\frac{\partial V}{\partial S_{iz}} - S_{iz}\frac{\partial V}{\partial S_{iy}}\right) \\ M_{iy} &= -\left(S_{iz}\frac{\partial V}{\partial S_{ix}} - S_{ix}\frac{\partial V}{\partial S_{iz}}\right) \\ M_{iz} &= -\left(S_{ix}\frac{\partial V}{\partial S_{iy}} - S_{iy}\frac{\partial V}{\partial S_{ix}}\right) \end{aligned} \tag{76}$$

De (75) resulta que:

$$S_i = \text{constante}$$

"A conservação da energia dum sistema isolado implica a constância dos módulos dos spins".

29- Resta ver se as equações (76) asseguram a constância do momento angular. Consideremos o caso dum sistema de dois corpúsculos. A condição de conservação do momento angular é:

$$\sum_{\ell=1}^{2} [\dot{\vec{S}}_\ell + (P_\ell - O) \wedge \vec{f}_\ell] = 0 \tag{78}$$

isto é:

$$\sum_{\ell=1}^{2} [-\vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{s_\ell} V + (P_\ell - O) \wedge \{-\vec{\nabla}_\ell V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_\ell V)\}] = 0 \tag{79}$$

(79) é um sistema de equações às derivadas parciais para o potencial V. Concluimos portanto que só haverá conservação do momento angular se V satisfizer a (79).

Cada equação do sistema (79) se decompõe em várias, pois devem ser válidas para quaisquer velocidades dos dois corpúsculos. Os coeficientes das várias componentes, assim como o termo independente das velocidades, devem se anular separadamente. Temos portanto:

$$\sum_{\ell=1}^{2} [-\vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_\ell W - (P_\ell - O) \wedge \vec{\nabla}_\ell W + (P_\ell - O) \wedge \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t}] = 0 \tag{80}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} [(P_\ell - O) \wedge (\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial u_\lambda} - \vec{\nabla}_\ell A_{\lambda u}) - \vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_\ell A_{\lambda u}] = 0 \tag{81}$$

V sendo:

$$V = W + \vec{A}_1 \times \dot{P}_1 + \vec{A}_2 \times \dot{P}_2 \tag{82}$$

Os vetores simbólicos $\vec{\nabla}_\ell$, $\vec{\nabla}'_\ell$ e $\vec{\nabla}_{s_\ell}$ são definidos do modo seguinte:

$$\vec{\nabla}_\ell = (\frac{\partial}{\partial x_\ell}, \frac{\partial}{\partial y_\ell}, \frac{\partial}{\partial z_\ell})$$

$$\vec{\nabla}'_\ell = (\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_\ell}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_\ell})$$

$$\vec{\nabla}_{s_\ell} = (\frac{\partial}{\partial S_{\ell x}}, \frac{\partial}{\partial S_{\ell y}}, \frac{\partial}{\partial S_{\ell z}})$$

W e os vetores $\vec{A}_\ell$ não dependem das velocidades nem dos spins. O sendo um ponto qualquer podemos tornar o vetor $P_1 - O$ arbitrário, de modo que:

$$\left.\begin{aligned}&-\sum_{\ell=1}^{2} (\vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{s_\ell}) W - (P_2-P_1) \wedge \vec{\nabla}_2 W + (P_2-P_1) \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \\ &\sum_{\ell=1}^{2} [\vec{\nabla}_\ell W + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t}] = 0\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{2} [\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial u_\lambda} - \vec{\nabla}_\ell \bar{A}_{\lambda u}] = 0 \\ &(P_2-P_1) \wedge (\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial u_\lambda} - \vec{\nabla}_2 A_{\lambda u}) = 0\end{aligned}\right\} \quad (84)$$

Na passagem do (81) para (84) foi levado em conta que os $\vec{A}_\ell$ não dependem dos spins, como admitimos anteriormente.

Ora:

$$\vec{f}_\ell = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{\mu,\lambda} [\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial \mu_\lambda} - \vec{\nabla}_\ell A_{\lambda u}] \dot{u}_\lambda + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} \quad (85)$$

Pondo a primeira equação (84) sob a forma:

$$\frac{\partial (\vec{A}_1 + \vec{A}_2)}{\partial \mu_\lambda} = (\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2) \; A_{\lambda u} \quad (86)$$

e comparando-a com (85) concluimos que os $\vec{f}_\ell$ só dependem das velocidades por sua diferença:

$$\vec{f}_\ell = \vec{f}_\ell (P_1, P_2; \dot{P}_1 - \dot{P}_2; \vec{S}_1, \vec{S}_2; t) \quad (87)$$

pois:(*)

(*) É bem conhecido que a solução geral da equação

$$(\frac{\partial}{\partial \mu_1} + \frac{\partial}{\partial \mu_2}) \; \Phi = 0$$

é:

$$\Phi = \Phi(\mu_1 - \mu_2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\right) \vec{f}_\ell = 0$$

e portanto deve ser possível escolher um V que só depende das velocidades desse modo(**):

$$V = W + \vec{A} \times (\dot{P}_1 - \dot{P}_2) \tag{88}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 = - \vec{A}_2 \tag{89}$$

Com esta escolha a segunda equação (83) torna-se:

$$(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)\ W = 0 \tag{90}$$

donde concluimos que W só depende de P_1 e P_2 por sua diferença:

$$W = W\,(P_1 - P_2; \vec{S}_1, \vec{S}_2; t) \tag{91}$$

A equação (86) torna-se:

$$(\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)\ A_{\lambda u} = 0 \tag{92}$$

e mostra que $\vec{A}_\lambda$ só depende dos P pela diferença $P_1 - P_2$. Por outro lado, da segunda equação (84) se deduz que:

$$\text{rot}\ \vec{A} = 0 \tag{93}$$

Esta equação é fundamental porque mostra que as forças

(**) Ver nota I.

não dependem das velocidades. Podemos portanto tomar:

$$\vec{A} = 0 \tag{94}$$

Com esta escolha de A a primeira equação (83) fica sendo:

$$[\sum_{\ell} \vec{S}_{\ell} \wedge \vec{\nabla} S_{\ell} + (P_2 - P_1) \wedge \vec{\nabla}_2] \; W = 0 \tag{95}$$

Este sistema de equação às derivadas parciais pode ser facilmente integrado (ver Nota V) e se vê que W é uma função arbitrária da forma seguinte:

$$W = W(r_{12}; S_1, S_2; \vec{S}_1 \times \vec{S}_2; \varepsilon\vec{S}_1 \times \vec{r}_{12}, \varepsilon\vec{S}_2 \times \vec{r}_{12}; t) \tag{96}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= P_1 - P_2 \\ \varepsilon &= \sqrt{g} \end{aligned}\right\} \tag{96a}$$

Os resultados da discussão precedente podem ser sintetizados no teorema:

"É condição necessária e suficiente para a conservação do momento angular dum sistema de dois corpúsculos que o potencial não dependa das velocidades e seja do tipo (96)".

30- Vejamos como se podem estender as considerações do número 28 ao caso de sistemas isolados com um número qualquer n de corpúsculos. A condição de conservação de momento angular é análoga a (79):

$$\sum_{\ell} [-(\vec{S}_{\ell} \wedge \vec{\nabla}_{S_{\ell}}) V - (P_{\ell}-O) \wedge \{-\vec{\nabla}_{\ell} V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_{\ell} V)\}] = 0 \tag{97}$$

As equações (80), (81) e (82) são substituidas pelas seguintes:

$$\sum_{\ell} [-\vec{S}_{\ell} \wedge \vec{\nabla}_{S_{\ell}} W + (P_{\ell}-O) \wedge \vec{\nabla}_{\ell} W - (P_{\ell}-O) \wedge \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t}] = 0 \tag{98}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (P_{\ell}-O) \wedge (\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_{\lambda}} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{\lambda u}) = 0 \tag{99}$$

$$V = W + \sum_{\ell} \vec{A}_{\ell} \times \dot{P}_{\ell} \tag{100}$$

O sendo um ponto qualquer, o vetor P_1-O pode ser considerado arbitrário de modo que:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^{n} [\vec{S}_{\ell} \vec{\nabla}_{S_{\ell}} W + (P_{\ell}-P_1) \wedge \vec{\nabla}_{\ell} W - (P_{\ell}-P_1) \wedge \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t}] = 0 \\ \sum_{\ell=1}^{n} [\vec{\nabla}_{\ell} W - \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t}] = 0 \\ \sum_{\ell=1} [\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_{\lambda}} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{\lambda u}] = 0 \longrightarrow \sum_{\ell} [\frac{\partial \vec{A}_{\lambda}}{\partial u_{\ell}} - \vec{\nabla}_{\lambda} A_{\ell u}] = 0 \\ \sum_{\ell=1} (P_{\ell}-P_1) \wedge (\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_{\lambda}} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{\lambda u}) = 0 \end{array}\right\} \tag{101}$$

Em vez de (85) temos agora:

$$\vec{f}_{\ell} = -\vec{\nabla}_{\ell} W + \sum_{k=1}^{n} [(\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{kx}) \dot{x}_k + (\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial y_k} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{ky}) \dot{y}_k + -] + \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t} \tag{102}$$

A condição para que as forças só dependam das velocidades por meio de suas diferenças é(*):

$$\sum_k \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial u_k} = \sum_k \vec{\nabla}_\ell A_{ku} \tag{103}$$

e coincide portanto com a terceira equação (101). Podemos supor, sem restrição de generalidade, que as forças só dependem dos P_ℓ pelas diferenças $P_\ell - P_1$. O potencial V pode ser escolhido de modo a só depender destas mesmas diferenças, isto é, tal que o (**):

$$-\vec{A}_1 = \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \ldots + \vec{A}_n \tag{104}$$

Com esta escolha de V a segunda equação (101) torna-se:

$$(\sum_\ell \vec{\nabla}_\ell)\, W = 0 \tag{105}$$

e mostra que W só depende dos P por meio de suas diferenças. O mesmo ocorre com os $\vec{A}_\ell$ em virtude da terceira equação (101) que fica sendo:

$$(\sum_\ell \vec{\nabla}_\ell)\, A_{\lambda u} = 0 \tag{106}$$

Até agora ainda não levamos em conta que a força $\vec{f}_\ell$ é uma soma de forças exercidas por cada um dos corpúsculos do sistema:

(*) Utilizamos o teorema clássico sobre a solução da equação:

$$\sum_\ell \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} \Phi\right) = 0$$

que diz ser Φ uma função da forma $\Phi(\alpha_\ell - \alpha_k)$. Ver parágrafo 35.

(**) Ver Nota I.

$$\vec{f}_\ell = \sum_k \vec{f}_{\ell k} \qquad (107)$$

Cada um dos f_{ik} só depende dos pontos P_i e P_k e de suas velocidades e spins. Ora podemos transformar (102) levando em conta (104) e (106)

$$\vec{f}_\ell = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{k\neq\ell} [(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx})\dot{x} + \text{——}] + [(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial x_\ell} - \vec{\nabla}_\ell A_{\ell x})\dot{x}_\ell$$

$$\dot{x} + \ldots] + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{k\neq\ell} [(\frac{\partial \vec{A}_k}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx})\dot{x}_k + \ldots] -$$

$$-\sum_{k\neq\ell} [(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx})\dot{x}_k + \ldots] + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} = \quad = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{k\neq\ell} [(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx})(\dot{x}_k - \dot{x}_\ell)$$

$$+ \ldots] + (\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial z_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kz})(\dot{z}_k - \dot{z}_\ell)] + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} \qquad (108)$$

Em virtude de (107) devemos ter:

$$\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial u_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{ku} = \vec{\phi}_{\ell k u}(P_k - P_\ell; \vec{S}_k, \vec{S}_\ell; t) \qquad (109)$$

Isto permite escrever a quarta equação (104) sob a forma:

$$\sum_\ell (P_\ell - P_1) \wedge \vec{\phi}_{\ell k u} = 0 \qquad (110)$$

Cada termo desta soma dependendo de variáveis diferentes, temos:

$$(P_\ell - P_1) \wedge \vec{\phi}_{\ell k u} = (P_\ell - P_1) \wedge (\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial u_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{ku}) = \vec{C}_{\ell k u} = \text{const}$$

$$\sum_\ell \vec{C}_{\ell k u} = 0 \qquad (111)$$

Ora P_1 sendo arbitrário e os $\vec{\phi}$ não dependendo desse ponto as equações (111) implicam que:

$$\vec{\phi}_{\ell k u} = 0 \tag{112}$$

De (112) e (108) resulta que as forças não dependem das velocidades. Podemos portanto tomar os $\vec{A}_\ell$ nulos. A primeira equação (101) fica então sendo:

$$\sum_{\ell=1}^{n} [\vec{S}_\ell \vec{\nabla}_{S_\ell} W + (P_\ell - P_1) \wedge \vec{\nabla}_\ell W] = 0 \tag{113}$$

Integrando esta equação vemos que W é uma função da forma:

$$W = W\,(r_{ij}, S_i, \vec{S}_i \times \vec{S}_j, \varepsilon \vec{S}_j \times \vec{r}_{ij}, t) \tag{114}$$

$$\vec{r}_{ij} = P_i - P_j$$

"O princípio da conservação do momento angular dum sistema isolado exige que o potencial não dependa das velocidades e seja da forma (114), isto é, invariante por rotações ou deslocamentos quaisquer".

Com efeito a equação (114) é a expressão geral dos invariantes por deslocamentos da figura formada pelos pontos P e seus spins, como veremos mais adiante.

31- Assim como introduzimos um potencial para as forças interiores dum sistema, podemos igualmente fazê-lo para as forças exteriores, se o sistema não for isolado. Com as notações de número 21 temos:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i\psi + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_i'\psi) \tag{115}$$

Por considerações análogas às do número 27 achamos como equações de movimento dos spins:

$$\dot{\vec{S}}_i = -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i}(\psi+V) \tag{116}$$

e

$$d\tau_{int} + d\tau_{ext} = d[-(\psi+V) + \sum \dot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha}(\psi+V)] \tag{117}$$

onde

$$E + V - \sum_\alpha \dot{u}_\alpha \frac{\partial(V+\psi)}{\partial \dot{u}_\alpha} = \text{const} \tag{118}$$

A equação (118) mostra que os sistemas que admitem potenciais para as forças interiores e exteriores têm a integral da energia.

TERCEIRA PARTE

O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE

32- O quinto corolário deduzido por Newton de suas leis do movimento exprime o princípio de relatividade da mecânica newtoniana, o princípio de relatividade de Galileu, segundo a denominação de Einstein.

O princípio de relatividade de Galileu diz que as equações de movimento de um sistema isolado devem ser invariantes por uma transformação da forma:

$$\left.\begin{array}{ll} x'_i = x_i - v_x t & S'_{ix} = S_{ix} \\ y'_i = y_i - v_y t & S'_{iy} = S_{iy} \\ z'_i = z_i - v_z t & S'_{iz} = S_{iz} \end{array}\right\} \quad (1)$$

v_x, v_y e v_z sendo as três componentes de um vetor constante v qualquer.

Há dois pontos de vista admissíveis em relação ao princípio de Galileu:

a) Considerá-lo como um princípio fundamental que restringe os tipos possíveis de forças e a variação da massa com a velocidade.

b) Considerá-lo como um teorema que pode ser demonstrado mediante certas hipóteses.

A nosso ver o ponto de vista (a) é preferível porque permite justificar muitas hipóteses feitas tacitamente, sobretudo tomando o princípio sob uma forma generalizada que examinaremos depois. Começaremos porém com o ponto de vista (b) para por em evidência as hipóteses necessárias ao seu estabelecimento.

Das fórmulas (1) decorrem as seguintes:

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{x}'_i = \dot{x}_i - v_x & \dot{y}'_i = \dot{y}_i - v_y & \dot{z}'_i = \dot{z}_i - v_z \\ x'_i = x_i & y'_i = y_i & z'_i = z_i \end{array}\right\} \quad (2)$$

As equações de movimento dos pontos P_i do sistema isolado são:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i) = f_{i,x} & \frac{d}{dt}(m_i\dot{y}_i) = f_{i,y} & \frac{d}{dt}(m_i\dot{z}_i) = f_{i,z} \\ \dot{S}_{ix} = M_{ix} & \dot{S}_{iy} = M_{iy} & \dot{S}_{iz} = M_{iz} \end{array}\right\} \quad (3)$$

em que os $\vec{f}_i$ e $\vec{M}_i$ dependem das coordenadas e velocidades dos pontos do sistema, dos spins e do tempo:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_i &= \vec{f}_i(x_1,y_1,z_1\ldots.,x_n,y_n,z_n\ ;\ \dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\ldots.\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n\ ;\ t) \\ \vec{M}_i &= \vec{M}_i(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,\dot{z}_n\ ;\ \dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\ldots,\dot{x}_n,\dot{y}_n,z_n\ ;\ t) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Para evitar maiores complicações das fórmulas, em (4) e nas equações seguintes ficará subentendido que as forças e momentos podem depender dos spins.

O grupo definido pelas fórmulas (1) e (2) transforma os $f_{i,u}$ e em outras funções $f'_{i,u}$:

$$\left.\begin{aligned} f'_{i,u}(x',y',z'\ ;\ \dot{x}',\dot{y},\dot{z}\ ;\ t) &= f_{i,u}(x,y,z\ ;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z}\ ;\ t) \\ M'_{i,u}(x',y',z',\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= M_{iu}(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z}\ ;\ t) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

A massa m_i é uma função de módulo de $\dot{P}_i$:

$$m_i = m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (6)$$

que em geral não é invariante pelo grupo de Galileu e se transforma noutra função m'_i:

$$m'_i(\dot{x}'_i,\dot{y}'_i,\dot{z}'_i) = m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (7)$$

As equações de movimento (3) se transformam nas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{m}'_i V_x + \frac{d}{dt}(m'_i\dot{x}'_i) = f'_{i,x};\ \dot{m}_i V_y + \frac{d}{dt}(m'_i\dot{y}_i) = f'_{i,y};\ \dot{m}_i V_z + \frac{d}{dt}(m'_i\dot{z}'_i) = f'_{i,z} \\ &\dot{S}'_{ix} = M'_{ix} \qquad\qquad \dot{S}'_{iy} = M'_{iy} \qquad\qquad \dot{S}_{iz} = M'_{iz} \end{aligned}\right\} (8)$$

O princípio de Galileu se traduz, portanto, pelas condições:

$$\left.\begin{aligned} M'_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= M_{iu}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) \\ f'_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= f_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$m'_i(\dot{x}'_i,\dot{y}'_i,\dot{z}'_i) = m_i(\dot{x}'^2_i + \dot{y}'^2_i + z'^2_i) \qquad (10)$$

$$\dot{m}'_i = 0 \qquad (10a)$$

33- Comparando (6) e (10) vemos que:

$$m_i(\dot{x}'^2_i + \dot{y}'^2_i + \dot{z}'^2_i) = m_i(\dot{x}^2_i + \dot{y}^2_i + \dot{z}^2_i) \qquad (11)$$

Desta equação concluimos que os m_i devem ser constantes, pois, mantendo fixos $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ e $\dot{z}_i$, podemos dar a $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2$ um valor positivo qualquer, pela escolha dum vetor v adequado. Naturalmente isto só acarreta, na constância dos m_i no campo dos valores positivos do seu argumento, mas estes valores são os únicos que nos interessam. Vemos pois que o princípio de Galileu implica a constância da massa:

$$m_i = \text{constante} \qquad (12)$$

"O princípio de constância da massa é uma consequência do princípio de relatividade de Galileu".

Inversamente para estabelecer o princípio de Galileu como um teorema se deve admitir a constância da massa. A equação (10a) decorre automaticamente de (12).

34- Comparando as equações (5) e (9) vemos que:

$$f_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) = f_{i,u}(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \tag{13}$$

O segundo membro de (13) não depende do vetor v, logo o primeiro também não deve depender e portanto:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_x} f_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial v_y} f_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial v_z} f_{i,u}(x',y',z';\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}';t) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_\ell \left(t\frac{\partial f_{i,u}}{\partial x'_\ell} + \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{x}'_\ell}\right) &= 0\\
\sum_\ell \left(t\frac{\partial f_{i,u}}{\partial y'_\ell} + \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{y}'_\ell}\right) &= 0\\
\sum_\ell \left(t\frac{\partial f_{i,u}}{\partial z'_\ell} + \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{z}'_\ell}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

As condições (15) e as análogas para os M_{iu} além de necessárias são também suficientes para que seja verificada a equação (13) porque delas decorrem as equações (14).

O sistema (15) se integra imediatamente. Com efeito escolhamos novas variáveis:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= x'_1 - x'_n & \eta_1 &= y'_1 - y'_n & \zeta_1 &= z'_1 - z'_n\\
\xi_2 &= x'_2 - x'_n & \eta_2 &= y'_2 - y'_n & \zeta_2 &= z'_2 - z'_n\\
\xi_{n-1} &= x'_{n-1} - x'_n & \eta_{n-1} &= y'_{n-1} - y'_n & \zeta_{n-1} &= z'_{n-1} - z'_n\\
\xi_n &= x'_n & \eta_n &= y'_n & \zeta_n &= z'_n
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Suas derivadas são:

$$\dot{\xi}_j = \dot{x}'_j - \dot{x}'_n \qquad \dot{\eta}_j = \dot{y}'_j - \dot{y}'_n \qquad \dot{\zeta}_j = \dot{z}_j - \dot{z}'_n \qquad (j=1\ldots n-1) \qquad (17)$$

$$\dot{\xi}_n = \dot{x}'_n \qquad \dot{\eta}_n = \dot{y}'_n \qquad \dot{\zeta}_n = \dot{z}'_n$$

Logo:

$$\frac{\partial f_{i,u}}{\partial x'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \xi_j} \qquad \frac{\partial f_{i,u}}{\partial y'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \eta_j} \qquad \frac{\partial f_{i,u}}{\partial z'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \zeta_j}$$

$$\frac{\partial f_{i,u}}{\partial x'_n} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \xi_n} - \sum_j \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \xi_j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{x}'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{\zeta}_j} \qquad \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{y}'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \eta_j} \qquad \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{z}'_j} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{\zeta}_j} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{\xi}_n} - \sum_j \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{\xi}_j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Com as novas variáveis o sistema (15) torna-se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \xi_n} + \frac{\partial f_{i,u}}{(t\xi_n)} &= 0 \\ \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \eta_n} + \frac{\partial f_{i,u}}{\partial (t\dot{\eta}_n)} &= 0 \\ \frac{\partial f_{i,u}}{\partial \dot{\zeta}_n} + \frac{\partial f_{i,u}}{\partial (t\dot{\zeta}_n)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

f_{iu} é pois uma função arbitrária dos $(\xi_j, \eta_j, \phi_j; \dot{\xi}_j, \dot{\eta}_j, \dot{\zeta}_j)$. Para determinar sua dependência de $(\xi_n, \eta_n, \zeta_n; \dot{\xi}_n, \dot{\eta}_n, \dot{\zeta}_n)$ é preciso integrar (19). Tomemos as novas variáveis:

$$\begin{aligned} \lambda &= t\dot{\xi}_n - \xi_n & \rho &= t\dot{\xi}_n + \xi_n \\ \mu &= t\dot{\eta}_n - \eta_n & \sigma &= t\dot{\eta}_n + \eta_n \\ \nu &= t\dot{\zeta}_n - \zeta_n & \tau &= t\dot{\zeta}_n + \zeta_n \end{aligned} \tag{20}$$

o sistema (19) torna-se:

$$\frac{\partial f_{iu}}{\partial \rho} = \frac{\partial f_{iu}}{\partial \sigma} = \frac{\partial f_{iu}}{\partial \tau} = 0 \tag{21}$$

Logo:

$$\begin{aligned} f_{i,u} &= \phi_{i,u}(\xi_j,\eta_j,\zeta_j;\dot{\xi}_j,\dot{\eta}_j,\dot{\zeta}_j;\lambda,\mu,\nu;t) \\ M_{i,u} &= \psi_{i,u}(\xi_j,\eta_j,\zeta_j;\dot{\xi}_j,\dot{\eta}_j,\dot{\zeta}_j,\lambda,\mu,\nu;t) \end{aligned} \tag{22}$$

Os ϕ, ψ sendo funções arbitrárias. Voltando as variáveis primitivas obtemos:

$$\begin{aligned} f_{i,u} &= \phi_{i,u}(x_j-x_n\ldots;\ \dot{x}_j-\dot{x}_n\ldots;\ t\dot{x}_n-x_n\ldots;\ t) \\ M_{i,u} &= \psi_{i,u}(x_j\ x_n\ldots;\ \dot{x}_j-\dot{x}_n\ldots;\ t\dot{x}_n-x_n\ldots;\ t) \end{aligned} \tag{23}$$

35- As fórmulas (23) adquirem uma forma mais expressiva introduzindo as coordenadas e velocidades do baricentro G:

$$\begin{aligned} (\sum_i m_i)\, x_G &= \sum_i m_i x_i \\ (\sum_i m_i)\, y_G &= \sum_i m_i y_i \\ (\sum_i m_i)\, z_G &= \sum_i m_i z_i \end{aligned} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_i m_i \dot{x}_G &= \sum_i m_i \dot{x}_i \\ \sum_i m_i \dot{y}_G &= \sum_i m_i \dot{y}_i \\ \sum_i m_i \dot{z}_G &= \sum_i m_i \dot{z}_i\end{aligned}\right\} \tag{24.a}$$

$$\begin{aligned}(\sum_i m_i)(t\dot{x}_n - x_n) &= (\sum_i m_i)(t\dot{x}_G - x_G) - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\,[t(\dot{x}_j - \dot{x}_n) - (x_j - x_n)] \\ (\sum_i m_i)(t\dot{y}_n - y_n) &= (\sum_i m_i)(t\dot{y}_G - y_G) - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\,[t(\dot{y}_j - \dot{y}_n) - (y_j - y_n)] \\ (\sum_i m_i)(t\dot{z}_n - z_n) &= (\sum_i m_i)(t\dot{z}_G - z_G) - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\,[t(\dot{z}_j - \dot{z}_n) - (z_j - z_n)]\end{aligned} \tag{25}$$

As equações (25) mostram que podemos tomar $t\dot{x}_G - x_G$, $t\dot{y}_G - y_G$ e $t\dot{z}_G - z_G$ como variáveis independentes em vez de $t\dot{x}_n - x_n$, $t\dot{y}_n - y_n$, $t\dot{z}_n - z_{\dot{n}}$ e por $f_{i,u}$ sob a forma:

$$\begin{aligned}f_{i,u} &= f_{i,u}(x_j - x_n \ldots\ldots;\ \dot{x}_j - \dot{x}_n \ldots\ldots;\ t\dot{x}_G - x_G \ldots\ldots;\ t) \\ M_{i,u} &= M_{i,u}(x_j - x_n \ldots\ldots;\ \dot{x}_j - \dot{x}_n \ldots\ldots;\ t\dot{x}_G - x_G \ldots\ldots;\ t)\end{aligned} \tag{26}$$

36- Resumindo, vemos que as condições necessárias e suficientes de validez do princípio de relatividade de Galileu se exprimem pelas fórmulas (12) e (26). Em toda a análise precedente não utilizamos o teorema do centro de gravidade nem o princípio de composição das forças. Noutras palavras, nossa análise independe da lei de ação e reação e da lei de independência dos efeitos das forças.

Levando em conta o teorema do centro de gravidade, consequência do princípio de ação e reação vemos que f_{iu} é da forma:

$$\left.\begin{aligned}\vec{f}_i &= \vec{f}_i\,(x_j - x_n\,;\,\dot{x}_j - \dot{x}_n\,;\,t)\\ \vec{M}_i &= \vec{M}_i\,(x_j - x_n\,;\,\dot{x}_j - \dot{x}_n\,;\,t)\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

porque:

$$t\dot{x}_G - x_G = \text{const} \qquad t\dot{y}_G - x_G = \text{const} \qquad t\dot{z}_G - z_G = \text{const}$$

Agora que estabelecemos as condições para a validez do princípio de Galileu devemos ver se elas decorrem dos princípios da Mecânica. A lei de independência dos efeitos das ações, mostra que a força $\vec{f}_i$ é a soma das forças $\vec{f}_{ik}$ exercidas pelos vários corpúsculos e cada uma delas só depende das posições, velocidades e spins dos dois corpúsculos:

$$\vec{f}_i = \sum \vec{f}_{ik}\,(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; \vec{S}_i, \vec{S}_k;\, t) \qquad (28a)$$

$$\vec{M}_i = \sum_k \vec{M}_{ik}\,(x_i, y_i, z_i; x_k\ y_k\ z_k; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; \vec{S}_i, \vec{S}_k;\, t) \qquad (28b)$$

A lei ação e reação impõe a condição:

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki} \qquad (29)$$

O princípio de conservação do momento angular dum sistema isolado aplicado aos pares de corpúsculos dá:

$$\vec{M}_{ik} + (P_i - O) \wedge \vec{f}_{ik} = -\vec{M}_{ki} + (P_k - O) \wedge \vec{f}_{ki} \qquad (30)$$

Evidentemente não é possível deduzir as relações (26) de (28), (29) e (30). Resta ver se é possível fazê-lo admitindo a existência dum potencial, isto é, admitindo o princípio de Hamilton (ver nota III).

37 - Vemos no número 30 que o princípio da conservação do momento angular aplicado aos sistemas com o potencial, impõe que o potencial não dependa das velocidades e seja da forma:

$$V = V(r_{\ell k}, S_\ell, \vec{S}_\ell \times \vec{S}_k, \varepsilon\vec{S}_j \times \vec{r}_{k\ell}, t) \tag{31}$$

Neste caso:

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial r_{ik}} \frac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}} + \sum_{j,k} \frac{\partial V}{\partial(\varepsilon\vec{S}_j \times \vec{r}_{ki})} \vec{S}_j \tag{32a}$$

e

$$\vec{M}_i = -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial(\vec{S}_i \times \vec{S}_k)} \vec{S}_i \wedge \vec{S}_k -$$

$$-\sum_{k\ell} \frac{\varepsilon\partial V}{\partial(\varepsilon\vec{S}_\ell \times \vec{r}_{k\ell})} \varepsilon\vec{S}_i \wedge \vec{r}_{k\ell} \tag{32b}$$

$\vec{f}_i$ e $\vec{M}_i$ são bem da forma (27) e o princípio de Galileu é satisfeito:

"Admitindo a constância das massas a existência dum potencial e o princípio de conservação do momento angular e supondo que as forças não dependem das acelerações ou velocidades do spin $\vec{S}_i$, pode-se demonstrar o princípio de Galileu".

38- O princípio de conservação do momento linear é um corolário do princípio referente ao momento angular. Vejamos se no caso de haver um potencial, já basta para demonstrar o princípio de Galileu. Consideremos para mais simplicidade o caso de um sistema de dois pontos materiais P_1 e P_2. Então:

$$\vec{f}_\ell = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx}\right) \dot{x}_k + \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial y_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{ky}\right)\dot{y}_k + $$
$$+ \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kz}\right)\dot{z}_k + \frac{\partial\vec{A}_\ell}{\partial t} \qquad (33)$$

A conservação da quantidade do movimento é expressa pela equação:

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \qquad (34)$$

Levando em conta (33) concluimos que:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad (\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2)\, W - \frac{\partial(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)}{\partial t} = 0 \\ &\text{b)}\quad \frac{\partial(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)}{\partial u_k} - (\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2) A_{ku} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

As equações (35) e (33) mostram que as forças só dependem das velocidades por sua diferença, de modo que podemos escolher os A de modo que:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 = -\vec{A}_2 \qquad (36)$$

para que V só dependa das velocidades pela diferença $\dot{P}_1 - \dot{P}_2$. Com a escolha (36) dos $\vec{A}_\ell$ as equações (35) dão:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2) W &= 0 \\ (\vec{\nabla}_1 + \vec{\nabla}_2) A_{ku} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

As equações (37) mostram que V só depende da diferença das coordenadas. O mesmo ocorre portanto com as forças e momentos. Logo:

"O princípio de conservação da quantidade de movimento permite estabelecer o de Galileu para um sistema de dois corpúsculos que admite um potencial, supondo constantes as massas dos corpúsculos".

39- Consideremos agora o caso de um sistema com n corpúsculos. Em verdade (33) temos agora:

$$\vec{f}_\ell = -\vec{\nabla}_\ell W + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial x_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kx}\right)\dot{x}_k + \left(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial y_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{ky}\right)\dot{y}_k + \left(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial z_k} - \vec{\nabla}_\ell A_{kz}\right)\dot{z}_k + \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} \tag{38}$$

E em vez de (34)

$$\sum_{\ell=1}^{n} \vec{f}_\ell = 0 \tag{39}$$

E em vez de (35):

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \sum_\ell \left(\vec{\nabla}_\ell W - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_\ell\right) = 0 \\ &b)\ \frac{\partial}{\partial u_k}\sum_\ell \vec{A}_\ell - \sum_\ell \vec{\nabla}_\ell A_{ku} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

A equação (40) pode ser posta sob a forma:

$$\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u_k}\vec{A}_\ell - \vec{\nabla}_\ell A_{ku}\right) = 0 \tag{41}$$

que mostra que os $\vec{f}_\ell$ só dependem das diferenças de velocidades. Raciocinado como no parágrafo 31, vemos que é possível escolher os $\vec{A}_\ell$ de modo que:

$$\sum_\ell \vec{A}_\ell = 0 \tag{42}$$

As equações (40) tornam-se então:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\ell} \vec{\nabla}_{\ell} W = 0 \\ \\ \sum\limits_{\ell} \vec{\nabla}_{\ell} A_{ku} = 0 \end{array}\right\} \qquad (43)$$

e mostra que W e os $\vec{A}_{\ell}$ só dependem das coordenadas por suas diferenças. O mesmo ocorre com V, que é portanto uma função dos $P_{\ell}-P_n$ e $\dot{P}_{\ell}-\dot{P}_n$, e as forças e momentos são do tipo (27). Logo:

"O princípio de conservação do momento linear basta para assegurar a invariância galileana quando há um potencial e as massas são constantes".

Este teorema é menos restritivo que o do número (37), já que o princípio de conservação da quantidade de movimento resulta do princípio de conservação do momento angular, sem que o acarrete.

É importante observar que os teoremas deste parágrafo e do 38 não dependem do princípio de independência dos efeitos das ações.

40- Vimos no parágrafo 16 que a lei do movimento retilíneo uniforme do baricentro resulta do princípio de conservação do momento linear e da constância das massas. Ora, a invariabilidade da massa é uma consequência do princípio de Galileu, logo:

"Os princípios de conservação da quantidade de movimento e de Galileu bastam para deduzir a lei de movimento retilíneo e uniforme do baricentro dos sistemas isolados".

41- Este teorema admite uma recíproca:

"O princípio de Galileu e a lei do movimento retilíneo uniforme do baricentro acarretam a conservação da quantidade de movimento".

Com efeito da identidade (ver n.16):

$$(\sum_{\ell} m_{\ell})\,\dot{G} = \frac{d}{dt}\sum_{\ell} m_{\ell}P_{\ell} - (G-O)\,\frac{d}{dt}\sum_{\ell} m_{\ell} \tag{44}$$

resulta que:

$$\sum_{\ell} m_{\ell}\dot{P}_{\ell} = \text{const.} \tag{45}$$

se:

$$\left.\begin{aligned} \dot{G} &= \text{const} \\ \dot{m}_{\ell} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

equações que são satisfeitas admitindo a lei de movimento retilíneo uniforme do baricentro e o princípio de Galileu.

O PRINCÍPIO GENERALIZADO DE GALILEU

41 - O grupo de transformações definido pelas fórmulas (I) à um subgrupo do seguinte:

$$\left.\begin{aligned} x' &= b_x + a_{11}x_{\ell} + a_{12}y_{\ell} + a_{13}z_{\ell} - V_x t \\ y' &= b_y + a_{21}x_{\ell} + a_{22}y_{\ell} + a_{23}z_{\ell} - V_y t \\ z' &= b_z + a_{31}x_{\ell} + a_{32}y_{\ell} + a_{33}z_{\ell} - V_z t \\ t' &= \tau + t \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} KS'_{\ell x} &= a_{11}S_{\ell x} + a_{12}S_{\ell y} + a_{13}S_{\ell z} \\ KS'_{\ell y} &= a_{21}S_{\ell x} + a_{22}S_{\ell y} + a_{23}S_{\ell z} \\ KS'_{\ell z} &= a_{31}S_{\ell x} + a_{32}S_{\ell y} + a_{33}S_{\ell z} \end{aligned}\right\} \qquad (47a)$$

$\|a_{rs}\|$ sendo uma matriz unitária real qualquer, $\vec{b}$ e $\vec{V}$ vetores quaisquer e τ um número real qualquer. K é igual a ± 1, segundo for positivo ou negativo o determinante $|a_{rs}|$:

$$\|a_{rs}\|^{-1} = \|a_{sr}\| \qquad (48)$$

$$\left.\begin{aligned} K &= \pm 1 \\ K|a_{rs}| &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

O grupo definido pelas fórmulas (47), (48) e (49) é o grupo generalizado de Galileu.

O grupo das transformações ( ) é o grupo restrito de Galileu.

A transformação (47) resulta do produto das três seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x_\ell^{(I)} &= a_{11}x_\ell + a_{12}y_\ell + a_{13}z_\ell \\ y_\ell^{(I)} &= a_{21}x_\ell + a_{22}y_\ell + a_{23}z_\ell \\ z_\ell^{(I)} &= a_{31}x_\ell + a_{32}y_\ell + a_{33}z_\ell \\ t^{(I)} &= t \\ S_{\ell x}^{(I)} &= a_{11}S_{\ell x} + \qquad + a_{13}S_{\ell z} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (50\,I)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_\ell^{(II)} = b_x + x_\ell^{(I)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t^{(II)} = t^{(I)} \\ \\ S_{\ell x}^{(II)} = S_{\ell x}^{(I)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (50\ II)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_\ell^{(III)} = x_\ell^{(II)} - V_x t^{(II)} \\ S_{\ell x}^{(III)} = S_{\ell x}^{(II)} \end{array}\right\} \qquad (50\ III)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_\ell = x_\ell^{(III)} \\ t' = t^{(III)} + t \\ S'_{x\ell} = S_{\ell x}^{(III)} \end{array}\right\} \qquad (50\ IV)$$

O grupo (50 I) é formado pelas rotações e reflexões em toda origem. O grupo (50 II) é o grupo das translações e (50 III) define o grupo restrito de Galileu. (50 IV) é o grupo das translações no tempo.

42- Vamos agora enunciar o princípio de relatividade de Galileu de modo mais amplo:

"As equações de movimento dum sistema isolado são invariantes pelo grupo generalizado de Galileu".

Este princípio pode ser enunciado de um modo mais expressivo.

"Nenhuma experiência mecânica realizada no interior de um sistema isolado permite determinar o tempo absoluto, a posição absoluta no espaço, o sentido de rotação e o movimento retilíneo e uniforme dum diedro inercial ligado ao sistema".

Chamamos de triedro mercial ligado ao sistema um triedro como o que foi introduzido no parágrafo 22. Devido a arbitrariedade do vetor em (47) não se pode determinar a posição da origem desse triedro. A matriz $\|a_{rs}\|$ pode ter determinante positivo ou negativo e torna-se impossível decidir se o sentido do triedro associado é dextrorsum ou sinistrorsum. $\|a_{rs}\|$ sendo unitária qualquer, também não pode, por experiências mecânicas internas, saber quais os ângulos dos eixos associados com os fixos. Finalmente, a arbitrariedade de $\vec{V}$ impede que se possa determinar a velocidade de translação do triedro associado. Fica assim justificado o enunciado.

Há ainda outro modo de formular o princípio generalizado de Galileu, interessante sob o ponto de vista matemático:

"De cada solução das equações de movimento dum sistema isolado podemos obter, imediatamente, 10 outras por meio das transformações (47)".

Em relação ao princípio generalizado de Galileu podemos adotar dois pontos de vista, como no caso do princípio restrito:

a) Considerá-lo como um teorema válido sob certas condições.

b) Considerá-lo com um princípio fundamental que restringe os tipos possíveis de ações entre os corpúsculos e a variação da massa.

Examinaremos ambos os pontos de vista, mas dando preferência a (b), que corresponde ao sentido mais profundo do princípio.

43- Para estabelecer as condições necessárias e suficientes de validez do princípio generalizado de Galileu basta achar as condições correspondentes para os grupos de transformações (50 I), (50 II), (50 III) e (50 IV), (50 III) é o grupo restrito de Galileu, que já estudamos. Basta considerar (50 I), (50 II) e (50 IV). Comecemos com (50II). As transformações:

$$\left.\begin{aligned} x'_\ell &= x_\ell + b_x \\ y'_\ell &= y_\ell + b_y \\ z'_\ell &= z_\ell + b_z \end{aligned}\right\} \tag{50II}$$

não alteram as componentes das velocidades e das acelerações:

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{x}_\ell = \dot{x}_\ell & \dot{y}'_\ell = \dot{y}_\ell & \dot{z}'_\ell = \dot{z}_\ell \\ \ddot{x}'_\ell = \ddot{x}_\ell & \ddot{y}'_\ell = \ddot{y}_\ell & \ddot{z}'_\ell = \ddot{z}_\ell \end{array}\right\} \tag{51}$$

Ora, as massas só podendo depender das velocidades, temos:

$$m'_\ell = m_\ell \tag{52}$$

As forças se transformam segundo a lei:

$$\vec{f}'_\ell(P'_k; \dot{P}'_k\,; \vec{S}'_k\,; t) = \vec{f}_\ell(P_k\,; \dot{P}_k\,; \vec{S}_k\,; t) \tag{53}$$

para que as equações:

$$\frac{d}{dt}\,(m'_\ell P'_\ell) = \vec{f}'_\ell(P'_k, \dot{P}'_k, \vec{S}'_k, t) \tag{54a}$$

sejam da mesma forma que:

$$\frac{d}{dt}\,(m_\ell \dot{P}_\ell) = \vec{f}_\ell(P_k, \dot{P}_k, \vec{S}_k, t) \tag{54b}$$

é necessário e suficiente que:

$$\vec{f}'_\ell(P'_k, \dot{P}'_k, \vec{S}'_k, t) = \vec{f}_\ell(P'_k, \dot{P}'_k, \vec{S}'_k, t) \tag{55}$$

Levando em conta (53) obtemos a condição procurada:

$$\vec{f}_\ell(P'_k\,\dot{P}'_k,\vec{S}'_k,t) = \vec{f}_\ell(P_k\,\dot{P}'_k,\vec{S}_k,t) \tag{56}$$

Para que (56) seja verificada, é preciso e basta que o segundo membro não dependa do vetor $\vec{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}_\ell}{\partial x_k} = 0 \\ \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}_\ell}{\partial y_k} = 0 \\ \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}_\ell}{\partial z_k} = 0 \end{array}\right\} \tag{57}$$

Estas equações mostram que os $\vec{f}_\ell$ são da forma:

$$\vec{f}_\ell = \vec{f}_\ell(P_k - P_j;\dot{P}_k;\vec{S}_k;t) \tag{58a}$$

De um modo análogo obteremos:

$$\vec{M}_\ell = \vec{M}_\ell(P_k - P_j;\dot{P}_k;\vec{S}_k;t) \tag{58b}$$

Estas condições (58) serão evidentemente satisfeitas quando o forem as condições (26) relativas ao princípio restrito de Galileu. Logo:

"A invariância pelo grupo (50 III) acarreta a invariância por (50 II)".

A recíproca desta proposição só vale em casos particulares, como o das forças e momentos que não dependem das velocidades.

44- O grupo (50 I) é constituído por transformações que podemos assimilar a rotações em torno de eixos e à reflexões em relação a planos, passando pela origem. Estas transformações não alteram os módulos das velocidades. Portanto:

$$m'_\ell = m_\ell \tag{59}$$

Consideremos a transformação correspondente a uma rotação de ângulo ω em torno do eixo dos z. Então:

$$\left.\begin{array}{lll} \phi'_\ell = \phi_\ell + \omega & r'_\ell = r_\ell & z'_\ell = z_\ell \\ \psi'_\ell = \psi_\ell + \omega & S'_{\ell eq} = S_{\ell eq} & S'_{\ell z} = S_{\ell z} \end{array}\right\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{array}{ll} tg\phi_\ell = \dfrac{y_\ell}{x_\ell} & tg\psi_\ell = \dfrac{S_{\ell y}}{S_{\ell x}} \\ r_\ell = \sqrt{x_\ell^2 + y_\ell^2} & S_{\ell eq} = \sqrt{S_{\ell x}^2 + S_{\ell y}^2} \end{array}\right\} \tag{61}$$

As velocidades e acelerações se transformam de modo correspondente:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha'_\ell = \alpha_\ell + \omega & v'_{\ell eq} = v_{\ell eq} & \dot{z}'_\ell = \dot{z}_\ell \\ \chi'_\ell = \chi_\ell + \omega & J'_{\ell eq} = J_{\ell eq} & \ddot{z}'_\ell = \ddot{z}_\ell \\ \pi'_\ell = \pi_\ell + \omega & \dot{S}'_{\ell eq} = \dot{S}'_{\ell eq} & \dot{S}'_{\ell z} = \dot{S}_{\ell z} \end{array}\right\} \tag{62}$$

$$\left.\begin{array}{lll} tg\alpha_\ell = \dfrac{\dot{y}_\ell}{\dot{x}_\ell} & tg\chi_\ell = \dfrac{\ddot{y}_\ell}{\ddot{x}_\ell} & tg\pi_\ell = \dfrac{\dot{S}_{\ell y}}{\dot{S}_{\ell x}} \\ v_{\ell eq} = \sqrt{\dot{x}_\ell^2 + \dot{y}_\ell^2} & J_{\ell eq} = \sqrt{\ddot{x}_\ell^2 + \ddot{y}_\ell^2} & \dot{S}_{\ell eq} = \sqrt{\dot{S}_{\ell x}^2 + S_{\ell y}^2} \end{array}\right\} \tag{63}$$

Para as forças temos a transformação:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}'_k\,(\phi'_\ell, r'_\ell, z'_\ell; \alpha'_\ell, v'_{\ell eq}, \dot{z}'_\ell; \psi'_\ell, S'_{\ell eq}, S'_{\ell z}) = \\ \vec{f}_k\,(\phi_\ell, r_\ell, z_\ell; \alpha'_\ell, v_{\ell eq}, \dot{z}_\ell; \psi_\ell, S_{\ell eq}, S_{\ell z}) \end{array}\right\} \tag{64}$$

Para se ter invariância das equações do movimento é necessário e suficiente que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_k'\dot{P}_k') &= \dot{f}_k(\phi_\ell', r_\ell', z_\ell'; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell' \ldots; t) \\ \dot{\vec{S}}_k' &= \vec{M}_k(\phi_\ell' \ldots; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell' \ldots; t) \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Logo:

$$\left.\begin{aligned} e^{\pm i\omega}[f_{kx} \pm if_{ky}](\phi_\ell' \ldots; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell'; t) &= [f_{kx} \pm if_{ky}](\phi_\ell \ldots; \alpha_\ell \ldots; \psi_\ell \ldots; t) \\ e^{\pm i\omega}[M_{kx} \pm iM_{ky}](\phi_\ell' \ldots; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell'; t) &= [M_{kx} \pm iM_{ky}](\phi_\ell \ldots; \alpha_\ell \ldots; \psi_\ell \ldots; t) \\ M_{kz}(\phi_\ell' \ldots; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell' \ldots; t) &= M_{kz}(\phi_\ell \ldots; \alpha_\ell \ldots; \psi_\ell \ldots; t) \\ f_{kz}(\phi_\ell' \ldots; \alpha_\ell' \ldots; \psi_\ell' \ldots; t) &= f_{kz}(\phi_\ell \ldots; \alpha_\ell \ldots; \psi_\ell \ldots; t) \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Basta considerar notações infinitesimais. As condições (66) tornam-se:

$$\left.\begin{aligned} [f_{kx} \pm if_{ky}] &= \sum_\ell \mp i \left(\frac{\partial}{\partial\phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\ell} + \frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right)[f_{kx} \pm if_{ky}] \\ &\sum_\ell \left(\frac{\partial}{\partial\phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\ell} + \frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right) f_{kz} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

$$\left.\begin{aligned} [M_{kx} \pm iM_{ky}] &= \sum_\ell \mp i \left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\ell} + \frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right)[M_{kx} \pm iM_{ky}] \\ &\sum_\ell \left(\frac{\partial}{\partial\phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\ell} + \frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right) M_{kz} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Considerando rotações infinitesimais em torno dos outros dois eixos achariamos outros dois grupos de equações análogas a (67). O conjunto destas equações dá as condições de invariância das equações de mo vimento pelas transformações (50 I) de determinante positivo. Introduzamos as variáveis:

$$\left.\begin{aligned} \phi_n &= \chi \\ \phi_\ell - \phi_n &= \delta_\ell \\ \psi_\ell - \phi_n &= \lambda_\ell \\ \alpha_\ell - \phi_n &= \beta_\ell \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

obtemos então:

$$\left.\begin{aligned} f_{kx} \pm if_{ky} &= \mp i \frac{\partial}{\partial\chi} (f_{kx} \pm if_{ky}) \\ \frac{\partial}{\partial\chi} f_{kz} &= 0 \\ M_{kx} \pm iM_{ky} &= \mp i \frac{\partial}{\partial\chi} (M_{kx} \pm iM_{ky}) \\ \frac{\partial}{\partial\chi} M_{kz} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} f_{kx} \pm if_{ky} &= e^{\pm i(\chi+\eta_k)}\, H_k(\delta_\ell,\lambda_\ell,\beta_\ell,r_\ell,v_{\ell eq},S_{\ell eq},t) \\ f_{kz} &= L_k(\delta_\ell,\lambda_\ell,\beta_\ell,r_\ell,v_{\ell eq},S_{\ell eq},t) \\ M_{kx} \pm iM_{ky} &= e^{\pm i(\chi+\xi_k)}\, M_k(\delta_\ell,\lambda_\ell,\beta_\ell,r_\ell,v_{\ell eq},S_{\ell eq},t) \\ M_{kz} &= N_k(\delta_\ell,\lambda_\ell,\beta_\ell,r_\ell,v_{\ell eq},S_{\ell eq},t) \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$H_k, L_k, M_k, N_k, \eta_k, \xi_k$ sendo funções reais quaisquer dos $\delta_\ell, \lambda_\ell, \beta_\ell, r_\ell, v_{\ell eq}, S_{\ell eq}, t$.

Levando em conta as equações que correspondem às rotações em torno dos eixos dos x e dos y acha-se finalmente que os f_k são da forma:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_k &= \sum_j \left(a_{kj}\vec{r}_{kj} + b_{kj}\dot{P}_j + C_{kj}\vec{S}_j\right) \\ \vec{M}_k &= \sum_j \left(a'_{kj}\vec{r}_{kj} + b'_{kj}\dot{P}_j + C'_{kj}\vec{S}_j\right) \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Os a,b,c,a',b' e c' são funções dos elementos geométricos dessa figura, invariantes por rotações em torno da origem:

$$\left.\begin{array}{lll} (P_\ell - O)^2 \quad , & (P_\ell - O) \times (P_k - O) \quad , & \dot{P}_k \times (P_k - O) \\ \dot{P}_\ell^2 & \dot{P}_\ell \times \dot{P}_k & \dot{P}_k \times \vec{S}_\ell \\ S_\ell^2 & \vec{S}_\ell \times (P_k - 0) & \vec{S}_{\ell'} \times \vec{S}_k \end{array}\right\} \qquad (72)$$

As fórmulas (71) exprimem que os $\vec{f}_k$ e $\vec{M}_k$ ficam rigidamente ligados a figura formada pelos corpúsculos, suas velocidades e spins nas rotações em torno da origem.

Pode-se chegar diretamente às fórmulas (71) sem integrar equações às derivadas paraciais. Basta observar que as equações (66) e as demais correspondentes aos outros dois eixos são as condições necessárias e suficientes para que os $\vec{f}_k$ e $\vec{M}_k$ acompanhem rigidamente a figura formada pelos pontos do sistema, suas velocidades e spins em qualquer rotação em torno da origem. Os f_k e $\vec{M}_k$ são portanto da forma (71).

45 - As equações (70) dão condições de invariância pelas rotações em torno da origem, isto é, pelas transformações (50 I) de determinante positivo. Qualquer transformação deste grupo, de determinante negativo, é o produto duma rotação por uma simetria em relação a ori-

gem. Basta pois achar as condições de invariância pela transformação:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_\ell = - x_\ell & y'_\ell = - y_\ell & z'_\ell = - z_\ell & t' = t \\ S'_{\ell x} = S_{\ell x} & S'_{\ell y} = S_{\ell y} & S'_{\ell z} = S_{\ell z} & \end{array}\right\} \tag{73}$$

Para as velocidades e acelerações temos:

$$\dot{P}'_\ell = - \dot{P}_\ell \qquad\qquad \ddot{P}'_\ell = \ddot{P}_\ell \tag{74}$$

$$\dot{\vec{S}}'_\ell = \dot{\vec{S}}_\ell \tag{75}$$

Para que as equações de movimento

$$\frac{d}{dt}(m_\ell \dot{P}_\ell) = \vec{f}_\ell$$

$$\dot{\vec{S}}_\ell = \vec{M}_\ell$$

sejam invariantes é preciso e basta que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}_k(-x_\ell,-y_\ell,-z_\ell;-\dot{x}_\ell,-\dot{y}_\ell,-\dot{z}_\ell;\vec{S}_\ell;t) = -\vec{f}_k(x_\ell,y_\ell,z_\ell;\dot{x}_\ell\ldots;\vec{S}_\ell,t) \\ \vec{M}_k(-x_\ell,-y_\ell,-z_\ell;-\dot{x}_\ell,-\dot{y}_\ell,-\dot{z}_\ell;\vec{S}_\ell;t) = \vec{M}_k(x_\ell,y_\ell,z;\dot{x}_\ell\ldots;\vec{S}_\ell,t) \end{array}\right\} \tag{76}$$

46- Resta estabelecer as condições de invariância por (50 IV):

$$\left.\begin{array}{llll} x'_\ell = x_\ell & y'_\ell = y_\ell & z'_\ell = z_\ell & t' = t + \tau \\ S'_{\ell x} = S_{\ell x} & S'_{\ell y} = S_{\ell y} & S'_{\ell z} = S_{\ell z} & \end{array}\right\} \tag{77a}$$

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dP'_\ell}{dt} = \dfrac{dP_\ell}{dt} \qquad \dfrac{d^2P'_\ell}{dt'^2} = \dfrac{d^2P_\ell}{dt^2} \\ \\ \dfrac{d\vec{S}'_\ell}{dt} = \dfrac{d\vec{S}_\ell}{dt} \\ \\ m' = m \end{array}\right\} \qquad (77b)$$

Para se ter a invariância das equações do movimento é necessário e basta que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}_k(P_\ell,\dot{P}_\ell,\vec{S}_\ell,t+\tau) = \vec{f}_k(P_\ell,\dot{P}_\ell,\vec{S}_\ell,t) \\ \vec{M}_k(P_\ell,\dot{P}_\ell,\vec{S}_\ell,t+\tau) = \vec{M}_k(P_\ell,\dot{P}_\ell,\vec{S}_\ell,t) \end{array}\right\} \qquad (78)$$

Isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\vec{f}_k}{\partial t} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial\vec{M}_k}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \qquad (79)$$

<u>O princípio de Galileu generalizado e as leis de conservação.</u>

47- Vimos que não se pode deduzir o princípio restrito de Galileu dos axiomas fundamentais da Mecânica. Com maior razão o mesmo ocorre em relação ao princípio generalizado.

Admitindo a existência dum potencial - hipótese equivalente à do princípio de Hamilton (ver Nota III) - e as leis de conservação do momento angular e da energia, se pode estabelecer o princípio generalizado de Galileu, se V for invariante pela simetria em relação a um ponto fixo e as massas foram constantes.

Com efeito, o princípio de conservação da energia impõe ao potencial a restrição de não conter explicitamente o tempo. Do princípio da conservação do momento angular, resulta que V é da forma (31). Como vimos este assegura a validez do princípio restrito. As fórmulas (32) mostram que as condições (58), (71) e (72) são preenchidas. Para satisfazer as condições (76) basta tomar como origem o ponto em relação ao qual V é invariante por simetria. Logo:

"Quando existe um potencial invariante por simetria em relação a um ponto do espaço, o princípio generalizado de Galileu resulta das leis de conservação da energia, do momento angular e da massa".

Esta proposição admite uma recíproca:

"Quando existe um potencial, o princípio generalizado de Galileu acarreta a conservação do momento linear e do angular, a conservação da energia e das massas e a lei de movimento retilíneo e uniforme do baricentro".

48- O princípio generalizado de Galileu exige que as forças e momentos aplicados não dependam explicitamente do tempo. É portanto possível escolher um potencial gozando da mesma propriedade:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} = 0 \tag{80}$$

e há conservação da energia.

A invariância pelo grupo restrito de Galileu impõe as condições (18):

$$\left.\begin{aligned} (t\,\vec{\nabla}_\ell\, f_{ku} + \vec{\nabla}'_\ell f_{ku}) &= 0 \\ (t\,\vec{\nabla}_\ell\, M_{ku} + \vec{\nabla}'_\ell M_{ku}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\sum\limits_{\ell} t\vec{\nabla}_{\ell}[\frac{\partial W}{\partial u_k} + \sum\limits_{v,j}(\frac{\partial A_{ku}}{\partial v_j} - \frac{\partial A_{jv}}{\partial u_k})\dot{v}_j] + \sum\limits_{\ell}(\vec{\nabla}_{\ell}A_{ku} - \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_k}) = 0 \\ \sum\limits_{\ell} \frac{\partial}{\partial u_{\ell}}(\vec{S}_k \Lambda \vec{\nabla}_{S_k} W) = 0 \qquad\qquad (v \neq x,y,z) \end{array}\right\} \quad (82)$$

Donde:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u_k}\sum\limits_{\ell}\vec{\nabla}_{\ell}W = 0 \\ \sum\limits_{\ell}\vec{\nabla}_{\ell}(\frac{\partial A_{ku}}{\partial v_j} - \frac{\partial A_{jv}}{\partial u_k}) = 0 \\ \sum\limits_{\ell}(\vec{\nabla}_{\ell}A_{ku} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial u_k}) = 0 \end{array}\right\} \quad (83)$$

A terceira equação (83) pode ser posta sob a forma:

$$\sum_k (\frac{\partial \vec{A}}{\partial u_k} - \vec{\nabla}_{\ell}A_{ku}) = 0 \quad (84)$$

e mostra que as forças só dependem das velocidades por suas diferenças. As duas primeiras equações (83) são as condições para que as forças só dependam dos pontos por suas diferenças. Em virtude dum teorema que demonstraremos na Nota I pode-se escolher o potencial V de modo que:

$$\sum_{\ell}\vec{\nabla}_{\ell}W = 0 \quad (85)$$

Ora, as condições (40) são satisfeitas pois no caso atual de forças que não dependem do tempo, elas se reduzem a

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\ell}\nabla_{\ell}W = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_k}\sum\limits_{\ell}\vec{A}_{\ell} - \sum\limits_{\ell}\vec{\nabla}_{\ell}A_{ku} = 0 \end{array}\right\} \quad (86)$$

Há portanto conservação da quantidade de movimento. A invariância pelo grupo restrito de Galileu acarreta a constância das massas, vale portanto a lei do movimento retilíneo e uniforme do baricentro.

Resta demonstrar a parte do teorema relativa à conservação do momento angular. Para isto é conveniente dar outra forma às condições de invariância pelo subgrupo (50 I).

48 - Com as mesmas notações do parágrafo 44 temos:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \pm i \frac{\partial}{\partial y_k} &= e^{\pm i\phi_k} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{i}{r_k} \frac{\partial}{\partial \phi_k}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \pm i \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k} &= e^{\pm i\alpha_k} \left(\frac{\partial}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}} \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_k} \pm i \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_k}\right) &= e^{\pm i\alpha_k}\left[\pm i\dot{\alpha}_k + \frac{d}{dt}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
f_{kx} \pm i f_{ky} = - e^{\pm i\psi_k}\left(\frac{\partial V}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k} \frac{\partial V}{\partial \phi_k}\right) &+ \\
+ e^{\pm i\alpha_k}\left(\pm i\dot{\alpha}_k + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right)&
\end{aligned} \tag{88}$$

Introduzindo estas expressões na primeira equação (67) obtemos:

$$\begin{aligned}
&- e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k} \frac{\partial V}{\partial \phi_k}\right) \pm e^{\pm i\alpha_k}\left(\pm i\dot{\alpha}_k + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right) = \\
&= \mp i \sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} + \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}\right]\left[-e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial V}{\partial r_k} \pm i \frac{\partial V}{\partial \phi_k}\right) + \right. \\
&\left. + e^{\pm i\alpha_k}\left(\pm i\dot{\alpha}_k + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right)\right]
\end{aligned}$$

Isto é:

$$e^{\pm i\phi_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial r_k}\pm i\,\frac{\partial V}{\partial\phi_k}\right)=$$

$$=e^{\pm i\alpha_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]\left[\left(\pm i\dot{\alpha}_k+\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial v_{keq}}\pm\frac{i}{v_{keq}}\,\frac{\partial V}{\partial\alpha_k}\right)\right] \tag{88a}$$

Levando em conta a estrutura de V, (88a) e a segunda equação (67), que agora se torna:

$$\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial z_k}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial V}{\partial\dot{z}_k}\right)=0 \tag{88b}$$

obteremos:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]W&=0\\
\frac{\partial}{\partial\phi_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]W&=0\\
\frac{\partial}{\partial z_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\psi_\ell}\right]W&=0
\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$e^{\pm i\phi_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\pm\frac{i}{r_k}\,\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right)\sum_{j=1}^{n}\vec{A}_j\times\dot{\vec{P}}_j\;-$$

$$-\;e^{\pm i\alpha_k}\sum_{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}\right]\left(\pm i\dot{\alpha}_k+\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{keq}}\pm\frac{i}{v_{keq}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\right)\sum_{j}\vec{A}_j\times\dot{\vec{P}}_j=0$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial A_{kz}}{\partial z_j}-\frac{\partial A_{jz}}{\partial z_k}\right)=0\\
&\sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}+\frac{\partial}{\partial\alpha_\ell}\right]\left(\frac{\partial A_{kz}}{\partial z_j}-\frac{\partial A_{jx}}{\partial z_k}\right)\dot{x}_j+\left(\frac{\partial A_{kz}}{\partial y_j}-\frac{\partial A_{jy}}{\partial z_k}\right)\dot{y}_j=0
\end{aligned} \tag{90a}$$

Vê-se facilmente que as duas últimas equações (67) podem ser postas sob a forma:

$$(\sum_{j=1}^{n} \vec{S}_j \wedge \vec{\nabla}_{S_j}) \sum_{\ell=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}] W = 0 \tag{91}$$

49- As equações (89) mostram que $\sum_{\ell=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}] W$ não dependem das posições dos pontos do sistema. Da equação (91) se conclui que essa expressão só pode depender dos spins por seus módulos. Sendo estes constantes vemos que:

$$\sum_{\ell} [\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}] W = a = \text{Const.} \tag{92}$$

Fazendo a mudança de variáveis definida por (68) a equação (92) torna-se:

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = a \tag{93}$$

$$W = a\phi + b \tag{94}$$

Ora, o potencial sendo monodromo - como supuzemos implicitamente - não pode depender linearmente do ângulo ϕ, que não é ϕ_n. Logo:

$$a = 0$$

e

$$\sum_{\ell=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \psi_\ell}] W = 0 \tag{95}$$

Esta equação mostra que W é invariante para rotações em torno do eixo dos z. Obtivemos assim o teorema:

"Se as equações de movimento forem invariantes para rotações em torno do eixo dos z o mesmo acontecerá com W".

Naturalmente há teoremas análogos para rotações em torno de eixos quaisquer e portanto:

"Da invariância das equações de movimento pelo grupo das rotações em torno de um ponto resulta a invariância de W".

50- Consideremos as equações (90). Da identidade:

$$A_k x \dot{P}_k = \frac{1}{2}\,[(A_{kx} + i\,A_{ky})(\dot{x}_k - i\,\dot{y}_k) + (A_{kx} - i\,A_{ky})(\dot{x}_k + i\,\dot{y}_k)]$$

$$+ A_{kz}\,\dot{z}_k = \frac{1}{2}\,v_{keq}[(A_{kx} + i\,A_{ky})\,e^{-i\alpha_k} + (A_{kx} - i\,A_{ky})\,e^{i\alpha_k}]$$

$$+ A_k\,\dot{z}_k$$

resulta que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_{keq}} \sum_j A_j x \dot{P}_j &= A_{kx}\cos\alpha_k + A_{ky}\operatorname{sen}\alpha_k \\ \frac{1}{v_{keq}}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \sum_j A_j x \dot{P}_j &= A_{ky}\cos\alpha_k - A_{kx}\operatorname{sen}\alpha_k \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right) \sum_j A_j x \dot{P}_j = \cos\alpha_k\,(A_{kx} \pm i\,A_{ky})$$

$$\mp\, i\,\operatorname{sen}\alpha_k\,(A_{kx} \pm i\,A_{ky}) = (A_{kx} \pm i\,A_{ky})\,e^{\mp i\alpha_k}$$

e

$$\left(\pm i\dot{\alpha}_k + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{keq}} \pm \frac{i}{v_{keq}}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right) = e^{\mp i\alpha_k}\,\frac{d}{dt}\,(A_{kx} \pm i\,A_{ky}) \qquad (97)$$

Introduzindo estas expressões na primeira equação (90) obtemos:

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k}\frac{\partial}{\partial \phi_k}\right)\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \phi_\ell}\sum_{j=1}^{n} A_j x \dot{P}_j - \frac{i}{2} v_k$$

$$\{e^{-i\alpha_\ell}(A_{\ell x} + A_{\ell y}) - e^{i\alpha_\ell}(A_{\ell x} - i A_{\ell y})\}\} -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell}\right]\frac{d}{dt}(A_{kx} \pm i A_{ky}) \pm i \frac{d}{dt}(A_{kx} \pm i A_{ky}) = 0 \tag{98}$$

Ora:

$$\frac{d}{dt}(A_{kx} \pm i A_{ky}) = \sum_{j=1}^{n} \dot{P}_j x \vec{\nabla}_j (A_{kx} \pm A_{ky}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2} v_{jeq}\{e^{-i\alpha_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) + e^{i\alpha_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\}\right.$$

$$+ \dot{z}_j \frac{\partial}{\partial z_j}\left[A_{kx} \pm i A_{ky}\right] \tag{99}$$

(98) pode ser transformada por meio de (99):

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_{k_k}}\frac{\partial}{\partial \phi_k}\right)\sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial \phi_\ell}\sum_{j=1}^{n} A_j x \dot{P}_j - v_{\ell eq}\{\mathrm{sen}\alpha\ A_{\ell x} - \cos\phi_\ell\ A_\ell y\}\right]$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \phi_\ell}\sum_{j=1}^{n} v_{jeq}\left[\cos\alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{sen}\alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \dot{z}_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right](A_{kx} \pm i A_{ky})$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n}\left[v_{\ell eq}\left(-\mathrm{sen}\alpha_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \cos\alpha_\ell \frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)\right](A_{kx} \pm i A_{ky}) \pm$$

$$\pm i \sum_{j=1}^{n}\left[v_{jeq}\left(\cos\alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{sen}\alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) + \dot{z}_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right](A_{kx} \pm i A_{ky}) = 0 \tag{100}$$

Levando em conta a arbitrariedade das velocidades podemos de<u>compor (100):</u>

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right)\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}A_{jz} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}\frac{\partial(A_{kx}\pm iA_{ky})}{\partial z_j}$$

$$\pm\, i\,\frac{\partial}{\partial z_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) = 0 \qquad (101a)$$

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right)\left[\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}(\cos\alpha_j A_{jx} + \operatorname{sen}\alpha_j A_{jy}) -\right.$$

$$\left. - (\operatorname{sen}\alpha_j A_{jx} - \cos\alpha_j A_{jy})\right] -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}\left(\cos\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \operatorname{sen}\alpha_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(A_{kx}\pm iA_{ky}) -$$

$$+ \left(\operatorname{sen}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \cos\alpha_j\right)\frac{\partial}{\partial y_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) \pm$$

$$\pm\, i\left(\cos\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \operatorname{sen}\alpha_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(A_{kx}\pm iA_{ky}) = 0 \qquad (101b)$$

Podemos em (101b) anular separadamente os coeficientes de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$:

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right)\sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial A_{jx}}{\partial\phi_\ell} + A_{jy}\right] - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}\frac{\partial(A_{kx}\pm iA_{ky})}{\partial x_j}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) \pm i\,\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) = 0 \qquad (102a)$$

$$e^{\pm i\phi_k}\left(\frac{\partial}{\partial r_k} \pm \frac{i}{r_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\right)\left[\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial A_{jy}}{\partial\phi_\ell} - A_{jx}\right] - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\phi_\ell}\frac{\partial(A_{kx}\pm iA_{ky})}{\partial y_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) \pm i\,\frac{\partial}{\partial y_j}(A_{kx}\pm iA_{ky}) = 0 \qquad (102b)$$

Levando em conta as identidades (87) podemos escrever (101a) e as equações (102) como segue:

$$\left.\begin{array}{l}
(\frac{\partial}{\partial x_k} \pm i \frac{\partial}{\partial y_k})(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell}) A_{jz} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} \frac{\partial (A_{kx} \pm i A_{ky})}{\partial z_j} \pm i \frac{\partial (A_{kx} \pm i A_{ky})}{\partial z_j} = 0 \\[2ex]
(\frac{\partial}{\partial x_k} \pm i \frac{\partial}{\partial y_k})(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} A_{jx} + A_{jy}) - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} \frac{\partial (A_{kx} \pm i A_{ky})}{\partial x_j} \pm \\[2ex]
\pm i(\frac{\partial}{\partial x_j} \pm i \frac{\partial}{\partial y_j}) (A_{kx} \pm i A_{ky}) = 0 \\[2ex]
(\frac{\partial}{\partial x_j} \pm i \frac{\partial}{\partial y_k}) \sum_{\ell=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial \phi_\ell} A_{jy} - A_{jx}) - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} \frac{\partial (A_{kx} \pm i A_{ky})}{\partial y_j} \\[2ex]
+ (\frac{\partial}{\partial x_j} \pm i \frac{\partial}{\partial y_j})(A_{kx} \pm i A_{ky}) = 0
\end{array}\right\} \tag{103}$$

Podemos ainda separar a parte real e a parte imaginária nas equações (103):

$$\left.\begin{array}{l}
a)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jz}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial z_j}) - \frac{\partial A_{ky}}{\partial z_j} = 0 \\[2ex]
b)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jz}}{\partial y_k} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial z_j}) + \frac{\partial A_{kx}}{\partial_{zj}} = 0 \\[2ex]
c)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jx}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial x_j}) + \frac{\partial A_{jy}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{kx}}{\partial y_j} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial_{xj}} = 0 \\[2ex]
d)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial x_j}) + \frac{\partial A_{kx}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial y_j} = 0 \\[2ex]
e)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jy}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial y_j}) + \frac{\partial A_{kx}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{jx}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial y_j} = 0 \\[2ex]
f)\ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} (\frac{\partial A_{jy}}{\partial yk} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial y_j}) + \frac{\partial A_{ky}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kx}}{\partial y_j} - \frac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} = 0
\end{array}\right\} \tag{104}$$

Das equações (d) e (e) resulta que:

$$\frac{\partial A_{kx}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{jy}}{\partial y_k} \tag{105a}$$

Levando em conta esta relação, as equações (c) e (f) dão:

$$\frac{\partial A_{jy}}{\partial x_k} = \frac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} \tag{106a}$$

Há naturalmente equações análogas a (105a) e (106a) para os outros eixos:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial A_{kx}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial y_k} & \dfrac{\partial A_{kx}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial z_k} & \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial y_k} = \dfrac{\partial A_{k}}{\partial z_j} \quad (105) \\[2ex] \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} = & \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial z_k} = \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial j_k} = & \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial z_k} = \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial x_k} \quad (106) \end{array}\right\}$$

Aliás as equações (106) são uma consequência do sistema (105).

Levando em conta (106) a equação (104a) torna-se:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \phi_\ell} \left(\frac{\partial A_{jx}}{\partial z_k} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial z_j}\right) - \frac{\partial A_{ky}}{\partial z_j} = 0$$

donde:

$$\frac{\partial A_{ky}}{\partial z_j} = - \frac{\partial A_{jy}}{\partial z_k} \tag{107a}$$

e, portanto, temos o sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} = - \dfrac{\partial A_{kx}}{\partial y_j} & \dfrac{\partial A_{jx}}{\partial z_k} = - \dfrac{\partial A_{kx}}{\partial z_j} \\[2ex] \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial x_k} = - \dfrac{\partial A_{ky}}{\partial x_j} & \dfrac{\partial A_{jy}}{\partial z_k} = - \dfrac{\partial A_{ky}}{\partial z_j} \\[2ex] \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial x_k} = - \dfrac{\partial A_{kz}}{\partial x_j} & \dfrac{\partial A_{jz}}{\partial y_k} = - \dfrac{\partial A_{kz}}{\partial y_j} \end{array}\right\} \tag{107}$$

De (106) e (107) resulta que:

$$\frac{\partial A_{jx}}{\partial y_k} = - \frac{\partial A_{ky}}{\partial x_j} \quad \text{etc.} \tag{108}$$

51- Das relações (105), (106), (107) e (108) decorre que $\vec{f}_i$ não depende da velocidade $\dot{P}$. Com efeito:

$$\begin{aligned} \vec{f}_i = & - \vec{\nabla}_i W + [(\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial x_i} - \vec{\nabla}_i A_{ix})\dot{x}_i + (\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial y_i} - \vec{\nabla}_i A_{iy})\dot{y}_i + \\ & + (\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial z_i} - \vec{\nabla}_i A_{iz})\dot{z}_i] + \sum_{j=1}^{n} [(\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial x_j} - \vec{\nabla}_i A_{jx})\dot{x}_j + \\ & + (\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial y_j} - \vec{\nabla}_i A_{jy})\dot{y}_j + (\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial z_j} - \vec{\nabla}_i A_{jz})\dot{z}_j] \end{aligned} \tag{109}$$

De (107) resulta que:

$$\frac{\partial A_{ix}}{\partial y_i} = \frac{\partial A_{ix}}{\partial z_i} = \frac{\partial A_{iy}}{\partial x_i} = \frac{\partial A_{iy}}{\partial z_i} = \frac{\partial A_{iz}}{\partial x_i} = \frac{\partial A_{iz}}{\partial y_i} = 0 \tag{110}$$

e são portanto nulos os coeficientes de $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ e $\dot{z}_i$ em (109).

Se os $\vec{f}_i$ não dependem das velocidades dos seus pontos de aplicação também não podem depender das velocidades dos demais pontos do sistema. Isto porque se a força $f_{i\ell}$ exercida por P_ℓ sobre P_i não depender de $\dot{P}_i$ e a força $\vec{f}_{\ell i}$ que P_i exerce sobre P_ℓ não depender de $\dot{P}_\ell$, $\vec{f}_i$ não dependerá de P_ℓ já que

$$\vec{f}_{i\ell} = - \vec{f}_{\ell i}$$

"A invariância por rotações exclui a possibilidade das forças dependerem das velocidades, no caso de haver um potencial".

52- Como as forças não dependem das velocidades, temos:

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i W$$
$$\vec{M}_i = (-\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i})\, W \qquad (109a)$$

Ora a equação (95) pode ser posta sob a forma:

$$\sum_{\ell=1}^{n} [(P_\ell - O) \wedge \vec{\nabla}_\ell + S_\ell \wedge \vec{\nabla}_{S_\ell}]\, W = 0 \qquad (110)$$

Levando em conta (109a) vemos que:

$$\sum_{\ell=1}^{n} [(P_\ell - O) \wedge \vec{f}_\ell + \dot{\vec{S}}_\ell] = 0 \qquad (111)$$

Há portanto conservação do momento angular e o teorema do parágrafo 47 está demonstrado.

O PRINCÍPIO DE GALILEU E O POTENCIAL

53- O princípio de conservação da energia não basta para assegurar a existência dum potencial (ver Nota II). Nem mesmo do conjunto dos princípios de conservação acrescido da lei de independência dos efeitos se pode concluir que existe um potencial. Pode-se fazê-lo, admitindo um princípio variacional semelhante ao de Hamilton, como está feito na Nota III. Admitir a existência dum potencial equivale a supor que as equações de movimento são as equações dum problema variacional de tipo hamiltoniano. Com efeito, se existe um potencial, vale o princípio variacional de Hamilton. Reciprocamente, admitindo que os movimentos dum sistema correspondem os extremos do problema variacional do parágrafo 4 da Nota III, demonstra-se que existe um potencial.

Vimos que o princípio de Galileu decorre dos princípios de conservação quando existe um potencial. Vimos também que os princípios de conservação decorrem do princípio generalizado de Galileu e da hipótese de haver um potencial. Mostramos agora que os princípios de conservação e o de Galileu generalizado bastam para assegurar a existência dum potencial e portanto acarretam o princípio de Hamilton. De um modo mais preciso temos o teorema:

"A invariância galileana generalizada assegura a existência dum potencial para os sistemas isolados, admitindo as leis de conservação do momento angular e da energia, assim como a constância dos módulos dos spins".

54- A função W_{ij} da Nota II é caracterizada pela equação:

$$\vec{f}_{ij} x (dP_i - dP_2) = -dW_{ij} \tag{112}$$

Se as forças forem do tipo exigido para a validez do princípio restrito de Galileu, W_{ij} só dependerá de $P_i - P_j$ $\dot{P}_i - \dot{P}_j$ e dos spins. Temos portanto:

$$(\vec{\nabla}_i + \vec{\nabla}_j)\, W_{ij} = 0 \tag{113}$$

e em virtude da equação (35a) da Nota II:

$$\vec{\phi}_{ij} = -\vec{\phi}_{ji} \tag{114}$$

As equações de movimento sendo invariantes pelo grupo dos des locamentos as forças estão rigidamente ligadas a figura $(P_i, P_j, \dot{P}_i, \dot{P}_j, S_i, S_j)$ e W_{ij} é um invariante desse grupo. Em particular, W_{ij} é um invariante do grupo das rotações em torno de um ponto fixo qualquer O e portanto:

$$[(P_i - O) \wedge \vec{\nabla}_i + (P_j - O) \wedge \vec{\nabla}_j + S_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} + S_j \wedge \vec{\nabla}_{S_j}] W_{ij} = 0 \tag{115}$$

Em virtude de (113) podemos escrever:

$$[(P_i - P_j) \wedge \vec{\nabla}_i + S_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} + \vec{S}_j \wedge \vec{\nabla}_{S_i}] W_{ij} = 0 \tag{116}$$

Comparando (116) com a equação (35b) da Nota II vemos que:

$$(P_i - P_j) \wedge \vec{\phi}_{ij} = 0 \tag{117}$$

Comparando (114) com a equação (37) da Nota II concluimos que:

$$\vec{\phi}_{ij} \times (\dot{P}_i - \dot{P}_j) = 0 \tag{118}$$

Ora de (117) resulta que $\vec{\phi}_{ij}$ tem a direção de $P_i - P_j$ e de (118) que é perpendicular a $\dot{P}_i - \dot{P}_j$. Devido à arbitrariedade dos vetores $P_i - P_j$ e $\dot{P}_i - \dot{P}_j$ vemos que:

$$\vec{\phi}_{ij} = 0 \tag{119}$$

As equações (36) da Nota II tornam-se agora:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_i &= - \vec{\nabla}_i \sum_j W_{ij} \\ \vec{M}_i &= - \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} \left(\sum_j W_{ij}\right) \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Existe portanto um potencial V:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} \tag{121}$$

$$W_{ij} = W_{ji} \tag{121a}$$

QUARTA PARTE

NOVAS FORMULAÇÕES DA AXIOMÁTICA

55- Vamos dar três formulações diferentes dos conceitos e postulados. Em todas figurará o conceito primitivo do ponto material, entendido como corpúsculo rigorosamente puntiforme e não como corpo de pequenas dimensões.

Na primeira formulação adotaremos a imagem newtoniana de pontos sob a ação de forças. Estudaremos primeiro a axiomática dum sistema geral e depois introduziremos os postulados adicionais que caracterizam os sistemas conservativos. Nas duas últimas formulações adotaremos a imagem energética ou helmholtziana, considerando o movimento como troca de energia entre os corpúsculos, regulada pelos princípios de conservação da energia e de Hamilton. Na primeira formulação energética tomaremos a energia como conceito primitivo e na segunda substitui-lá-emos pela lagrangiana. Só nesta última é que o conceito secundário de força desaparecerá dos enunciados dos princípios. Em compensação a primeira formulação energética apresenta a vantagem de só lidar com noções intuitivas e de reduzir o princípio de Hamilton aos de conservação, usando os resultados obtidos no fim da terceira parte. A axiomática baseada sobre o conceito de lagrangiana permite deduzir os princípios de conservação por meio da invariância galileana generalizada.

O princípio de Galileu generalizado desempenhará um papel capital nas axiomáticas dos sistemas conservativos, tanto na imagem newtoniana como na helmholtziana. Nas duas primeiras formulações ele servirá para garantir a existência do potencial, associado aos princípios de conservação e a constância da massa. Na terceira formulação ele permitirá obter os princípios de conservação, além de garantir a constância das massas.

CONCEITOS DA IMAGEM NEWTONIANA

56- Além dos conceitos geométricos e cinemáticos introduziremos os seguintes:

a) Ponto material
b) Interação entre pontos materiais.
c) Quantidade de movimento dum ponto material
d) Spin de um ponto material

Precisamos também de duas definições:

I) Ponto material isolado é o que não está em interação com nenhum outro.

II) Sistema material isolado é um conjunto de pontos materiais, todos em interação e sem interação com nenhum outro ponto exterior ao sistema.

O ponto de vista da escola d'Alembertiana, que pretende reduzir o conceito de força ao de massa, não é inteiramente justificado. Nas suas formulações da axiomática, encontramos expressões tais como pontos em presença, pontos em interação e outros equivalentes. Não é, de fato, necessário introduzir um conceito tão específico como o de força, mas não se pode dispensar o conceito de interação ou presença de dois corpúsculos. Mesmo assim, só se consegue evitar a introdução do conceito de força admitindo que o movimento de um ponto material só é condicionado pela presença de outros pontos, hipótese física que pode ser posta em dúvida, mas que não obstante admitiremos.

POSTULADOS DA IMAGEM NEWTONIANA

57_

1) "Os pontos materiais gozam das propriedades dos pontos geométricos e cinemáticos".

2) "A quantidade de movimento de um ponto material é um vetor polar que só depende da velocidade, considerada como figura geométrica."

Deste postulado decorre que o vetor quantidade de movimento $\vec{Q}$ deve ser paralelo à velocidade $\vec{V}$:

$$\vec{Q} = m\vec{v} \tag{1}$$

m é a massa do ponto vetorial e só depende de v:

$$m = m(v) \tag{2}$$

3) "A massa dum ponto material é sempre positiva".

4) "O spin de um ponto material é um vetor axial que não depende dos seus elementos geométricos e cinemáticos".

Vamos introduzir algumas definições:

III) Quantidade de movimento dum sistema é a soma vetorial das quantidades de movimento de seus pontos.

IV) Spin dum sistema material é a soma dos spins dos seus pontos.

V) Momento angular orbital de um sistema em relação a um ponto O é a soma vetorial dos momentos das quantidades de movimento de seus pontos em relação a O.

VI) Momento angular total dum sistema em relação a um ponto O é a soma vetorial do seu spin com o seu momento angular orbital.

5) "O momento angular total dum sistema isolado em relação a um ponto qualquer não varia com o tempo".

Desta proposição decorre o princípio de conservação da quantidade de movimento dum sistema isolado como vimos anteriormente. Em particular, se considerarmos um sistema isolado com dois pontos P_1 e P_2, teremos:

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{P}_1) = -\frac{d}{dt}(m_2\dot{P}_2) \tag{3}$$

Introduzamos a definição de força:

VII) Chamaremos de força $\vec{f}_{ij}$ exercida por P_i sobre P_j do vetor $\frac{d}{dt}(m_i\dot{P}_i)$:

$$\vec{f}_{ij} = \frac{d}{dt}(m_i\dot{P}_i) \qquad (i,j=1,2) \tag{4}$$

A equação (5) toma a forma:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \tag{5}$$

e exprime num caso particular a lei de ação e reação.

6) "Quando um ponto material P_o está sem interação com vários

outros P_i e só com estes a derivada em relação ao tempo de sua quantidade de movimento é a soma das forças que os P_i exerceriam sobre P_o, se os pares (P_o,P_i) estivessem isolados, nas mesmas posições e com velocidades e spins idênticos".

$$\frac{d}{dt}(m_o\dot{P}_o) = \sum_i \vec{f}_{oi} \tag{6}$$

Precisamos de mais duas definições:

VIII) Chamaremos de força $\vec{f}_o$ a aplicada a P_o à soma $\sum_i \vec{f}_{oi}$:

$$\vec{f}_o = \sum_i \vec{f}_{oi} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(m_o\dot{P}_o) = \vec{f}_o \tag{8}$$

Levando em conta o postulado (6) a relação (5) torna-se:

$$\vec{f}_{k\ell} = -\vec{f}_{\ell k} \qquad (k,\ell=0,1,2,\dots.) \tag{9}$$

e exprime a lei geral de ação e reação.

Consideremos novamente um sistema isolado formado por dois pontos P_1 e P_2. O postulado (5) se traduz pela equação:

$$\vec{S}_1 + (P_1-O)\wedge\frac{d}{dt}(m_1\dot{P}_1) = -\vec{S}_2 - (P_2-O)\wedge\frac{d}{dt}(m_2\dot{P}_2) \tag{10}$$

IX) Chamaremos de momento exercido por P_j sobre P_i a derivada $\dot{\vec{S}}_i$:

$$\dot{\vec{S}}_i = \vec{M}_{ij} \tag{11}$$

Podemos dar a (10) a forma seguinte:

$$\vec{M}_{12} + (P_1-O) \wedge \frac{d}{dt}(m_1\dot{P}_1) = - M_{21} + (P_2-O) \wedge \frac{d}{dt}(m_2\dot{P}_2) \qquad (12)$$

7) "Quando um ponto P_o está em interação com vários pontos P_i e só com estes a derivada $\dot{\vec{S}}_o$ é a soma dos momentos $\vec{M}_{oi}$ que os pontos P_i exerciam sobre P_o, se os pares (P_o,P_j) estivessem isolados, nas mesmas posições, com velocidades e spins idênticos".

$$\dot{\vec{S}}_o = \sum_i \vec{M}_{oi} \qquad (13)$$

Definamos o momento aplicado M_o:

X) Chamaremos de momento M_o aplicado do ponto P_o à soma $\sum_i M_{oi}$. Então:

$$\dot{\vec{S}}_o = \vec{M}_o \qquad (14)$$

Os postulados (16) e (17) constituem o princípio de independência dos efeitos das ações. Deles decorre que as forças e momentos aplicados a um ponto só podem depender da posição, da velocidade e do spin (ver Nota IV). (8) e (14) são as equações de movimento dum ponto material.

8) "As equações de movimento dos pontos dum sistema isolado são invariantes pelo grupo generalizado de Galileu".

Deste postulado resulta que as massas são constantes. Da lei de conservação da quantidade de movimento - corolário do postulado 5 - e da constância das massas descerro a lei de movimento retilíneo e uniforme do baricentro dum sistema isolado.

58- Como já observamos precedentemente, não basta conhecer $\vec{M}_i$ e

$\vec{S}_i$ para poder calcular o trabalho elementar produzido por $_i$. É preciso conhecer um certo vetor $\vec{\omega}_i$, tal que:

$$\dot{\vec{S}}_i = d\vec{\omega}_i \wedge \vec{S}_i + \dot{S}_i \vec{\sigma}_i \tag{15}$$

Não é necessário poder calcular o trabalho para determinar o movimento. As equações (8) e (14) bastam para fazê-lo. É só para as considerações energéticas que se impõe o cálculo do trabalho. Então é preciso juntar aos 8 postulados do número 57 os seguintes:

9) "O momento $\vec{M}_{ij}$ exercido por P_j sobre P_i é normal ao spin $\vec{S}_i$".

Deste postulado resulta que o momento $\vec{M}_{io}$ aplicado a um ponto material é normal ao seu spin, em virtude de (13) e portanto:

$$S_i = \text{const} \tag{16}$$

10) "É nulo o trabalho das forças condutoras (ver Nota II) num movimento qualquer em que o sistema material volta a posição inicial com as mesmas velocidades e as mesmas orientações dos spins".

Como vimos no parágrafo 54, destes postulados decorre a existência duma função W das posições e dos spins tal que:

$$\begin{aligned} \vec{f}_i &= -\vec{\nabla}_i W \\ \vec{M}_i &= -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{Si} W \end{aligned} \tag{17}$$

Então:

$$\dot{\vec{\omega}}_i = \vec{\nabla}_{Si} W \tag{18}$$

Em vez de tomar os postulados 9 e 10 poderíamos ter admitido o seguinte:

10a) "O trabalho das forças e momentos interiores dum sistema isolado é nulo em qualquer movimento em que o sistema volta a posição inicial com as mesmas velocidades e orientações dos spins".

Como vimos na Nota II, da proposição 10a resulta a constância dos módulos dos spins e a conservação da energia.

59- Há uma redundância dos conceitos do parágrafo 56, em virtude dos postulados do número 57. Com efeito, do oitavo postulado decorre que as massas são constantes e, portanto, se pode definir a razão das massas à maneira de Mach, como razão inversa das acelerações que adquirem dois pontos materiais em interação. Definida a massa pode-se fazer o mesmo com a quantidade de movimento. Torna-se pois dispensável introduzi-la como conceito primitivo. Contudo, é interessante conservar o sistema de conceitos do número 56, porque põe em evidência o papel do princípio de Galileu e sugere como se pode passar da mecânica newtoniana para a relativista.

AXIOMÁTICA DA IMAGEM ENERGÉTICA

60- I) Conceitos

a) Ponto material
b) Interação de pontos materiais
c) Spin de um ponto material
d) Energia dum sistema isolado

II) Postulados

1) "Os pontos materiais gozam das propriedades dos pontos ge

ométricos e cinemáticos".

2) "O spin de um ponto material é um vetor axial que não depende de seus elementos geométricos e cinemáticos".

3) "A energia dum sistema material isolado é uma função da figura formada pelos seus pontos, velocidades e spins".

Precisamos de introduzir algumas definições:

I) Energia cinética dum ponto material é a energia que teria o mesmo ponto, se estivesse isolado, na mesma posição, com a mesma velocidade e o mesmo vetor de spin.

II) Energia cinética E_{cin} dum sistema é a soma das energias cinéticas de seus pontos.

III) Energia potencial dum sistema isolado é a diferença entre sua energia E e sua energia cinética

$$E_{pot} = E - E_{cin} \tag{19}$$

IV) Quantidade de movimento de um ponto P_i é o vetor $\vec{Q}_i$:

$$\vec{Q}_i = \vec{\nabla}'_i (E_{cin})_{P_i} \tag{20}$$

Em virtude do terceiro postulado, a energia cinética de P_i é uma função do módulo de sua velocidade v_i. De modo que:

$$\vec{Q}_i = \frac{1}{v_i} \frac{\partial (E_{cin})P_i}{\partial v_i} \dot{P}_i \tag{21}$$

V) Massa de um ponto é quociente de $\vec{Q}_i$ por $\dot{P}_i$:

$$Q_i = m_i \dot{P}_i \tag{22}$$

VI) Chama-se de força aplicada $\vec{F}_i$ a um ponto P_i ao produto de sua massa por sua aceleração:

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{P}_i \tag{23}$$

VII) Chama-se de momento $\vec{M}_i$ aplicado ao ponto P_i a derivada em relação ao tempo de seu spin

$$\vec{M}_i = \dot{\vec{S}}_i \tag{24}$$

VIII) Força interior $\vec{f}_i$, atuando sobre um ponto P_i dum sistema, é a que agiria se o sistema estivesse isolado, com todos os seus pontos tendo as mesmas posições e velocidades e mesmos vetores de spin.

IX) Momento interior $\vec{M}_i$ aplicado a um ponto P_i dum sistema é o momento aplicado que agiria se o sistema estivesse isolado com os seus pontos tendo mesmas posições e velocidades e mesmos vetores de spin".

Agora podemos retomar a enumeração dos postulados.

5) "As massas dos pontos materiais são positivas".

6) "O trabalho elementar das forças e momentos interiores é a diferencial correspondente da energia potencial".

$$\sum_i \vec{f}_i \times dP_i + \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i = dE_{pot} \tag{25}$$

7) "Quando um ponto material P_o está em interação com vários outros P_i, e só com estes, a força $\vec{f}_o$ a que está submetido é a soma das forças $\vec{f}_{oi}$ que atuariam sobre ele se os pares (P_o, P_i) estivessem isolados, nas mesmas posições e com velocidades e spins idênticos".

8) "Quando um ponto material P_o está em interação com vários

pontos P_i, e só com estes, o momento aplicado $\vec{M}_o$ é a soma dos momentos aplicados que atuariam sobre os pares (P_o, P_i) estivessem isolados, nas mesmas posições e com velocidades e spins idênticos".

$$\frac{d}{dt}(m_o \dot{P}_o) = \sum_i \vec{f}_{oi}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{S}_o = \sum_i \vec{M}_{oi} \qquad (26)$$

Estas são as equações de movimento do ponto P_o.

9) As equações de movimento dos pontos dum sistema isolado são invariantes pelo grupo generalizado de Galileu.

10) "A soma dos spins e dos momentos das quantidades de movimento em relação a um ponto fixo qualquer não varia com o tempo".

61- Do postulado (9) decorre que as massas são constantes. Levando em conta (21), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(E_{cin})_{Pi} = m_i v_i$$

e

$$(E_{cin})_{Pi} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \text{const} \qquad (27)$$

Os postulados 6, 7, 8, 9 e 10 bastam para mostrar que:

$$m_i \ddot{P}_i = - \vec{\nabla}_i E_{pot}$$
$$\dot{\vec{S}}_i = - \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} E_{pot} \qquad (28)$$

e que podemos tomar:

$$\dot{\vec{\omega}}_i = \vec{\nabla}_{S_i} E_{pot} \tag{29}$$

62- A axiomática da imagem energética torna-se mais simples e elegante substituindo o conceito primitivo de energia pelo de lagrangiana. Com esta escolha os conceitos ficam sendo:

a) Ponto material
b) Interação de pontos materiais
c) Spin de um ponto material
d) Lagrangiana dum sistema isolado.

O sistema de postulados pode ser o seguinte:

1) "Os pontos materiais gozam das propriedades dos pontos geométricos e cinemáticos".

2) "O spin S de um ponto material P é um vetor axial que não depende dos seus elementos geométricos e cinemáticos".

3) "A lagrangiana L dum sistema material isolado é uma função da figura formada pelos pontos do sistema, suas velocidades e seus spins".

4) "A lagrangiana L dum sistema de pontos P_i é a soma das lagrangianas L_{ij} que teriam os pares (P_i, P_j), se estivessem isolados nas mesmas posições e com velocidades e spins idênticos".

Introduzamos as definições:

I) Momento linear dum ponto P_i dum sistema é o vetor $\vec{p}_i$:

$$\vec{P}_i = \vec{\nabla}'_i L \tag{30}$$

II) Quantidade de movimento $\vec{Q}_i$ dum ponto é o momento que ele teria se estivesse isolado, na mesma posição e com velocidade de spins idênticos.

Em virtude do postuldado (3) a quantidade de movimento é paralela à velocidade $\dot{P}_i$:

$$\vec{Q}_i = m_i \dot{P}_i \tag{31}$$

III) Massa dum ponto material é o quociente da quantidade de movimento pela velocidade.

IV) Energia cinética dum ponto é o valor da lagrangiana que teria se estivesse livre na mesma posição e com velocidade e spins idênticos.

V) Potencial dum sistema é a diferença $E_{cin}-L$

$$V = E_{cin} - L \tag{32}$$

VI) Quantidade de movimento dum sistema é a soma das quantidades de movimento de seus pontos.

VII) Energia cinética dum sistema é a soma das energias cinéticas de seus pontos.

VIII) Energia ou hamiltoniana dum sistema é a função $H(\vec{p}_i, P_i)$:

$$H(\vec{p}_i, P_i) = \sum_i \vec{p}_i \times \dot{P}_i - L \tag{33}$$

Agora podemos voltar à enumeração dos postulados.

5) "As massas dos pontos materiais são positivas".

6) "A derivada em relação ao tempo do momento linear $\vec{p}_i$ é igual a $-\vec{\nabla}_i H(\vec{p}_i, P_i)$".

$$\dot{\vec{p}}_i = -\vec{\nabla}_i H(\vec{p}_i, P_i) \tag{34}$$

7) "A derivada em relação ao tempo do spin $\vec{S}_i$ é igual a

$-\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} \; H\,(\vec{p}_i, P_i)$".

$$\dot{\vec{S}}_i = - \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} H \tag{35}$$

8) "As equações de movimento (34) e (35) são invariantes pelo grupo generalizado de Galileu".

63- Em virtude de (32):

$$L = E_{cin} - V \tag{36}$$

logo:

$$\vec{p}_i = \vec{Q}_i - \vec{\nabla}_i V \tag{37}$$

e

$$\vec{p}_i = \frac{d}{dt}\,(m_i \dot{P}_i) - \frac{d}{dt}\,(\vec{\nabla}_i^{!} V) \tag{38}$$

Por outro lado de (33) resulta que:

$$\sum_i\,(\vec{\nabla}_i H \times \delta P_i + \vec{\nabla}_{pi} H \times \delta \vec{p}_i) = \sum_i\,(\vec{p}_i \times \delta \dot{P}_i - \vec{\nabla}_i L \times \delta P_i) \tag{39}$$

$\vec{\nabla}_{pi}$ sendo o vetor simbólico:

$$\vec{\nabla}_{pi} = \left(\frac{\partial}{\partial p_{ix}}, \frac{\partial}{\partial p_{iy}}, \frac{\partial}{\partial p_{iz}}\right) \tag{40}$$

A equação (39) mostra que:

$$\vec{\nabla}_i H = - \vec{\nabla}_i L$$
$$\vec{\nabla}_{pi} H = \dot{P}_i \qquad (41)$$

Levando em conta (38) e (41) a equação (34) torna-se:

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{P}_i) = - \vec{\nabla}_i V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}_i' V) \qquad (42)$$

O postulado (8) mostra então que m_i é constante. Ora, (30) e as definições IV e VII mostram que:

$$\vec{Q}_i = \vec{\nabla}_i' E_{cin} \qquad (43)$$

ou

$$m_i \dot{P}_i = \vec{\nabla}_i' E_{cin} \qquad (44)$$

Em virtude da constância das massas:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{P}_i^2 + \text{const} \qquad (45)$$

64- A equação (42) estabelece a existência dum potencial. Ora, vimos que neste caso os princípios de conservação decorrem da invariância galileana generalizada. Assim não é necessário postular a conservação da energia e do momento angular.

Este segundo modo de formular a axiomática da imagem energética apresenta portanto duas vantagens fundamentais sobre o precedente:

a) Não é necessário introduzir o conceito secundário de força.
b) Não é necessário postular os princípios de conservação.

NOTA I

TEOREMAS SOBRE O POTENCIAL

1- Vamos demonstrar alguns teoremas de que já fizemos uso anteriormente. Consideremos um potencial linear nas velocidades:

$$V = W + \sum_{\ell} \vec{A}_{\ell} \times \dot{P}_{\ell} \tag{1}$$

$$\vec{A}_{\ell} = \vec{A}_{\ell}(P_r) \tag{2}$$

Teorema I: "Quando as forças $\vec{f}_{\ell}$, derivadas de V, só dependem das velocidades pelas suas diferenças, é possível achar um potencial que também só dependa das diferenças das velocidades".

A expressão de $\vec{f}_{\ell}$ é:

$$\vec{f}_{\ell} = - \vec{\nabla}_{\ell} W + \sum_{j} \Big[\Big(\frac{\partial A_{\ell}}{\partial x_j} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{jx}\Big) \dot{x}_j + \Big(\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial y_j} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{jy}\Big) \dot{y}_j + \\ + \Big(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z_j} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{jz}\Big) \dot{z}_j \Big] + \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t} \tag{3}$$

As condições necessárias e suficientes para que os $\vec{f}_{\ell}$ só dependam das velocidades por suas diferenças é que:

$$\sum_{k} \Big(\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_k} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{ku}\Big) = 0 \tag{4}$$

$$(u = x, y, z)$$

Consideremos o sistema de equações às derivadas parciais:

$$\sum_{k} A_{ku} = \sum_{k} \frac{\partial Ⓗ}{\partial u_k} \tag{5}$$

Este sistema admite soluções porque as condições de compatibilidade:

$$\sum_k \left(\frac{\partial A_{k\mu}}{\partial v_\ell} - \frac{\partial A_v}{\partial u_k}\right) = 0 \tag{6}$$

são satisfeitas em virtude de (4). Em vez de V podemos tomar como potencial V*:

$$V^* = V - \frac{d\Theta}{dt} \tag{7}$$

Então:

$$\left.\begin{aligned} W^* &= W - \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta \\ \vec{A}^*_\ell &= \vec{A}_\ell - \vec{\nabla}_\ell\,\Theta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

e

$$\sum A^*_\ell = 0 \tag{9}$$

A equação (9) mostra que V* só depende das velocidades por suas diferenças.

Os $\vec{A}^*_\ell$ satisfazem também as condições (4), que só dependem dos $\vec{f}_\ell$. Logo:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k}\;\vec{A}^*_\ell = 0 \tag{10}$$

donde concluimos o Teorema II.

Teorema II: "Quando as forças só dependem das velocidades por suas diferenças, é possível achar um potencial que também só dependa das velocidades por suas diferenças e tal que os $\vec{A}_\ell$ só dependam dos pontos P_k por suas diferenças".

2- *Teorema III:* "Quando as forças e momentos só dependem das diferenças $P_j - P_\ell$ e $\dot{P}_j - \dot{P}_\ell$ é possível achar um potencial que também só dependa dos pontos por suas diferenças".

As condições para que os $\vec{f}_\ell$ e $\vec{M}_\ell$ só dependam das diferenças dos pontos P_ℓ são:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\partial \vec{A}_\ell}{\partial t} - \vec{\nabla}_\ell\right) W = 0 \\ &\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial v_j} - \vec{\nabla} A_{jv}\right) = 0 \\ &\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_S) W = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Em virtude do Teorema II podemos achar um V tal que:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \vec{A}_k = 0 \\ &\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \vec{A} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

As equações (11) dão, neste caso:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k}\right) W &= 0 \\ \vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{S\ell} \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k}\right) W &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

A primeira equação (13) mostra que:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} W = G_u(\vec{S}_\ell, t) \tag{14}$$

e a segunda que:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} W = G_u(S_\ell, t) \qquad (15)$$

Os módulos dos spins sendo constantes podemos escrever:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} W = \vec{\mathcal{H}}_u(t) \qquad (16)$$

Introduzamos a função:

$$\Xi = \vec{r} \times \vec{K}(t) \qquad (17)$$

$$\vec{K}(t) = \int \vec{\mathcal{H}}(t)\, dt \qquad (18)$$

e tomemos o novo potencial $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = V - \frac{d}{dt} \Xi \qquad (19)$$

Então:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{W} &= W - \frac{\partial}{\partial t} \Xi \\ \tilde{\vec{A}}_\ell &= \vec{A}_\ell - \vec{\nabla}_\ell \Xi \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Logo:

$$\left.\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \tilde{W} &= 0 \\ \sum_k \frac{\partial}{\partial u_k} \tilde{A}_\ell &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

As fórmulas (21) provam o Teorema III. Com o novo potencial:

$$\sum_{\ell} \vec{\tilde{A}}_{\ell} = - \vec{\kappa}(t) \tag{22}$$

Devido a arbitrariedade duma constante, pode-se anular $\sum_{\ell} \vec{\tilde{A}}_{\ell}$ para um valor t_o qualquer de t.

3- *Teorema IV:* "Quando as forças e momentos não dependem do tempo é possível escolher um potencial que também não o contenha".

As condições necessárias e suficientes para que os $\vec{f}_{\ell}$ e $\vec{M}_{\ell}$ não dependam do tempo são:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}_{\ell} W - \frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial t}\right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{A}_{\ell}}{\partial u_k} - \vec{\nabla}_{\ell} A_{ku}\right) = 0 \\ &\vec{S}_{\ell} \Lambda \vec{\nabla}_{S_{\ell}} \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

A terceira equação (23) mostra que $\frac{\partial W}{\partial t}$ só depende dos spins pelos seus módulos. Sendo estes constantes podemos escrever:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \chi(P_{\ell}, t) \tag{24}$$

As duas primeiras equações (23) tornam-se:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \chi}{\partial u_{\ell}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_{\ell u}\right) \\ &\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\partial A_{\ell v}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial v_{\ell}} \left(\frac{\partial A_{ku}}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

As equações (25) mostram que existe uma função π tal que:

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial \pi}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{\ell u}}{\partial t} &= \frac{\partial \pi}{\partial u_\ell} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Consideremos um primitivo P de π:

$$\pi = \frac{\partial P}{\partial t} \tag{27}$$

e tomemos o novo potencial $\bar{V}$:

$$\bar{V} = V - \frac{dP}{dt} \tag{28}$$

Então:

$$\left.\begin{aligned} \bar{W} &= W - \frac{\partial P}{\partial t} \\ \vec{\bar{A}}_\ell &= \vec{A}_\ell - \vec{\nabla}_\ell P \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} &= \chi - \frac{\partial \pi}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \bar{A}_{\ell u}}{\partial t} &= \frac{\partial A_{\ell u}}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial u_\ell} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

O potencial $\bar{V}$ não depende explicitamente do tempo.

NOTA II

SOBRE O PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

1- Vamos examinar as conclusões a que conduz a aplicação do princípio geral da conservação da energia ao caso particular dum sistema mecânico.

O estado dum sistema Σ formado por n pontos pode ser caracterizado por um ponto num espaço a 9n coordenadas: 3n coordenadas para especificar as posições dos pontos; 3n componentes de velocidades e 3n componentes de spins. À qualquer movimento do sistema corresponde uma trajetória do ponto representativo no espaço a 9n dimensões. Por cada ponto deste espaço passa uma e uma única trajetória do sistema Σ, submetido à forças e momentos determinados.

Podemos admitir que aplicando ao sistema forças e momentos convenientes - as forças e momentos condutores - poderemos fazê-lo descrever qualquer trajetória aberta ou fechada do E_{9n} considerado.

O princípio da conservação da energia aplicado a Σ diz que:

"É nulo o trabalho das forças e momentos condutores quando Σ descreve uma curva fechada em E_{9n}, isto é, quando as posições inicial e final do ponto representativo coincidem".

Este enunciado pressupõe que não há transformação da energia mecânica em outra forma diferente de energia. Dele ocorre que o trabalho realizado pelas forças e momentos condutores só dependem dos extremos da trajetória. Com efeito, consideremos duas trajetórias M_oAM_1 e M_oBM_1 de mesmas extremidades. $M_oAM_1BM_o$ é um caminho fechado e o trabalho das forças e momentos condutores ao longo deles é nulo. Logo:

$$\tau_{M_oAM_1} = - \tau_{M_1BM_o} \tag{1}$$

e portanto:

$$\tau_{M_oAM_1} = - \tau_{M_oBM_1} \tag{2}$$

o que demonstra nossa proposição.

Conservando M_o fixo e fazendo variar a outra extremidade, que representaremos agora por M, o trabalho das forças e momentos condutores só dependerá de M e será uma função $U(u_i;\dot{u}_i;\vec{S}_i)$; os u_i, $\dot{u}_i$ e S_{iu} sendo as 9n coordenadas de M. Aplicando o teorema das forças vivas ao movimento obtemos:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i+\vec{f}_i\right) x\, dP_i = dE_{cin} \tag{3}$$

mas

$$\sum_i \left(\vec{F}_i x\, dP_i + M_i x\, d\vec{\omega}_i\right) = dU \tag{4}$$

$\vec{f}_i$ e $\vec{\mathcal{M}}_i$ sendo as forças e momentos interiores, $\vec{F}_i$ e $\vec{M}_i$ as forças e momentos condutores. Logo:

$$\sum_i (\vec{f}_i x\, dP_i - \vec{M}_i x\, d\vec{\omega}_i) = d(E_{cin}-U) \tag{5}$$

Ora

$$\vec{M}_i + \vec{\mathcal{M}}_i = \dot{\vec{S}}_i = \dot{\vec{\omega}}_i \Lambda \vec{S}_i + \dot{S}_i \vec{\sigma}_i \tag{6}$$

e portanto:

$$\sum_i \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i = -\sum_i \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i + \sum_i \dot{S}_i \vec{\sigma}_i \times d\vec{\omega}_i$$

substituindo em (5):

$$\sum_i \vec{f}_i \times dP_i + \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i = d(E_{cin} - U) - \sum_i \dot{S}_i \vec{\sigma}_i \times d\vec{\omega}_i \qquad (7)$$

Admitindo a constância dos módulos dos spins, obtemos:

$$\sum_i (\vec{f}_i \times dP_i + \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i) = d(E_{cin} - U) \qquad (8)$$

Logo:

"O princípio da conservação da energia e da lei de constância dos módulos dos spins resulta que o trabalho elementar das forças e momentos interiores é uma diferencial exata".

2- Consideremos uma função que satisfaz a equação às derivadas parciais:

$$V - \sum_\alpha \dot{u}_\alpha \frac{\partial V}{\partial \dot{u}_\alpha} = U - E_{cin} \qquad (9)$$

De (8) e (9) resulta que:

$$\sum_i (\vec{f}_i \times dP_i + \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i) = \sum_i [-\vec{\nabla}_i V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i V)] \times dP_i - \sum_i \vec{\nabla}_{S_i} V \times d\vec{S}_i \qquad (10)$$

Logo:

$$\sum_i [\vec{f}_i + \vec{\nabla}_i V - \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i V)] \times \dot{P}_i + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \vec{\omega}_i + \sum_i \vec{\nabla}_{S_i} V \times \dot{S}_i \vec{\sigma}_i = 0 \qquad (11)$$

Admitindo a constância dos spins (11) se reduz a:

$$\sum_i [\vec{f}_i + \vec{\nabla}_i V - \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}'_i V)] \times \dot{P}_i + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \dot{\vec{\omega}}_i = 0 \tag{12}$$

As forças e momentos interiores não dependem das acelerações e dos $\dot{\vec{S}}_i$, logo:

$$\text{a)}\quad \sum_i [\vec{f}_i + \vec{\nabla}_i V - \sum_\alpha \dot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \vec{\nabla}'_i V] \times \dot{P}_i = 0$$

$$\text{b)}\quad \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} (\vec{\nabla}'_i V) \times \dot{P}_i = 0 \tag{13}$$

$$\text{c)}\quad - \sum_{i\alpha} \dot{S}_\alpha \frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\vec{\nabla}'_i V) \times \dot{P}_i + \sum_i (\vec{M}_i + S_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \dot{\vec{\omega}}_i = 0$$

Derivando ambos os membros de (9) em relação a $\dot{u}_\beta$ e levando em conta (13b) vemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}_\beta} (U - E_{cin}) = 0 \tag{14}$$

Isto é:

"A diferença entre a energia total e a energia cinética não depende das velocidades".

Chamaremos de energia potencial à função W:

$$W = U - E_{cin} \tag{15}$$

Em virtude do teorema precedente:

$$W = W(P_i, S_i) \tag{16}$$

A solução geral de (9) é:

$$V = W + \Omega \tag{17}$$

Ω sendo uma função homogênea qualquer de 1º grau dos $\dot{u}_\alpha$, pois de (9) e (17) decorre que:

$$\Omega - \sum_\alpha u_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{u}_\alpha} = 0 \tag{18}$$

Levando em conta (17) a equação (13a) torna-se:

$$\sum_i (\vec{f}_i + \vec{\nabla}_i W] \times \dot{P}_i + \sum_i \vec{\nabla}_i \Omega \times \dot{P}_i - \sum_\alpha \dot{u}_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial u_\alpha} = 0$$

Isto é:

$$\sum_i (\vec{f}_i + \vec{\nabla}_i W) \times \dot{P}_i = 0 \tag{19}$$

De um modo análogo (13c) torna-se:

$$- \sum_i \dot{\vec{S}}_i \times \vec{\nabla}_{S_i} \Omega + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \dot{\vec{\omega}}_i = 0 \tag{20}$$

ou

$$- \sum_i \dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{S}_i \times \vec{\nabla}_{S_i} \Omega + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \dot{\vec{\omega}} = 0 \tag{21}$$

e portanto:

$$\sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} W) \times \vec{\omega}_i = 0 \tag{22}$$

Sendo arbitrários os $\dot{\vec{\omega}}_i$:

$$\vec{M}_i = - \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} W \tag{23}$$

3- Consideremos agora o movimento do sistema livre de ações exteriores. Então:

$$m_i \ddot{P}_i = \vec{f}_i \tag{24}$$

de modo que:

$$\sum_i \vec{f}_i x \, dP_i = dE_{cin} \tag{25}$$

e levando em conta (8) e (23) vemos que:

$$d\,U = 0 \tag{26}$$

e portanto:

$$U = C^{te} \tag{27}$$

U é a energia do sistema. Esta definição é mais geral que a do número (22) porque continua válida mesmo quando não existe o potencial. A equação (17) também pode ser escrita:

$$E_{cin} + V - \sum_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \dot{u}_{\alpha}} = C^{te} \tag{28}$$

4- Vemos que o princípio de conservação da energia não basta para assegurar a existência dum potencial pois a equação (19) mostra apenas que:

$$\vec{f}_i = - \vec{\nabla}_i W + \vec{\phi}_i \tag{29}$$

Os ϕ_i constituindo um sistema de forças que não produzem trabalho:

$$\vec{\phi}_i x\, dP_i = 0 \tag{30}$$

Levando em conta o princípio de independência dos efeitos pode-se estabelecer o teorema seguinte:

"Se num sistema conservativo isolarmos uma parte dos corpúsculos, esta também constituirá um sistema conservativo".

Com efeito, imaginaremos ter isolado uma parte $\sum'$ de $\sum$. Para calcular o trabalho das forças e momentos condutores aplicados a $\sum'$ podemos supor, em virtude da independência dos efeitos das ações, que $\sum'$ continua integrada em $\sum$, que aplicamos a $\sum-\sum'$ forças e momentos condutores que a imobilizam, e a $\sum'$ forças iguais e opostas às que $\sum-\sum'$ exerce sobre $\sum'$. O trabalho de todas as forças e momentos aplicados a é nulo para qualquer caminho fechado do E_{9n}. Ora, as forças aplicadas a $\sum-\sum'$ não produzem trabalho porque $\sum-\sum'$ está em repouso. As forças e momentos aplicados que servem para compensar a ação de $\sum-\sum'$ não produzem trabalho num percurso fechado, porque este trabalho é igual e oposto ao das forças interiores de $\sum'$ durante o mesmo percurso, pois as forças e momentos exercidos por $\sum'$ sobre $\sum-\sum'$ não produzem trabalho. Concluimos portanto que as forças e momentos que fariam $\sum'$ isolado descrever um percurso fechado produziriam trabalho nulo.

Consideremos em particular os sistemas obtidos associando dois a dois os corpúsculos de $\sum$. A análise do número 2 mostra que podemos associar a cada par (P_i,P_j) uma função W_{ij} tal que:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_{ij} &= -\vec{\nabla}_i W_{ij} + \vec{\phi}_{ij} \\ \vec{f}_{ij} &= -\vec{\nabla}_j W_{ij} + \vec{\phi}_{ji} \\ \vec{M}_{ij} &= -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} W_{ij} \\ \vec{M}_{ji} &= -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_j} W_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

5- O princípio de conservação do momento angular aplicado ao sistema isolado (P_i, P_j) dá:

$$(P_i - O) \wedge \vec{f}_{ij} + (P_j - O) \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = 0 \tag{32}$$

Pela arbitrariedade de O concluimos:

$$\begin{aligned} &(P_i - O) \wedge (\vec{f}_{ij} - \vec{f}_{ji}) = 0 \\ &(P_j - P_i) \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

A primeira equação (33) equivale a lei de ação e reação:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \tag{34}$$

Levando em conta (31) vemos que:

$$(\vec{\nabla}_i + \vec{\nabla}_j)\, W_{ij} = \vec{\phi}_{ij} + \vec{\phi}_{ji} \tag{35a}$$

$$[(P_i - P_j) \wedge \vec{\nabla}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} + \vec{S}_j \wedge \vec{\nabla}_{S_j}]\, W_{ij} = (P_i - P_j) \wedge \vec{\phi}_{ij} \tag{35b}$$

Podemos pois concluir que, mesmo juntando ao princípio de conservação da energia o de conservação do momento angular e a lei de independência dos efeitos, não se pode provar que existe um potencial. Podemos apenas dizer que:

$$\vec{f}_i = -\sum_j \vec{\nabla}_i W_{ij} + \sum_j \vec{\phi}_{ij}$$
$$\vec{M}_i = -\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} \sum_j W_{ij} \tag{36}$$

os $\vec{\phi}_{ij}$ satisfazendo as equações (35) é a seguinte:

$$\vec{\phi}_{ij} \times dP_i + \vec{\phi}_{ji} \times dP_j = 0 \tag{37}$$

6- Em vez do princípio da conservação da energia como foi enunciando no número 1, podemos admitir a seguinte proposição:

"O trabalho das forças e momentos interiores dum sistema é nulo para qualquer percurso fechado em E_{9n}".

Esta proposição tem a vantagem de dispensar a hipótese sobre a constância dos módulos dos spins. Com efeito, o trabalho elementar das forças e momentos interiores é agora a diferencial exata duma função que representaremos por $U - E_{cin}$:

$$\sum_i (\vec{f}_i \times dP_i + \vec{M}_i \times d\vec{\omega}_i) = d(U-E_{cin}) \tag{8'}$$

Temos assim uma equação análoga a (8). Repetindo as considerações do parágrafo 2 tornamos a obter uma equação do tipo (11), de onde concluimos que continuam a valer as duas primeiras equações (13), a terceira sendo substituida por:

$$-\sum_{i\alpha} \dot{S}_\alpha \frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\vec{\nabla}'_i V) \times \dot{P}_i + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V) \times \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\nabla}_{S_i} V \times \dot{S}_i \vec{\sigma}_i = 0 \tag{13'c}$$

(14), (16), (17), (18) e (19) continuam a ser válidas. Em vez de (21) temos agora:

$$- \sum_i (\dot{\vec{\omega}}_i \Lambda \vec{S}_i x \vec{\nabla}_{S_i} \Omega) + \sum_i (\vec{M}_i + \vec{S}_i \Lambda \vec{\nabla}_{S_i} V) \, x \, \dot{\vec{\omega}}_i + \sum_i (\vec{\nabla}_{S_i} V \, x \, \dot{S}_i \vec{\sigma}_i) = 0 \qquad (21')$$

Portanto:

$$\sum_i (\vec{M}_i + S_i \Lambda \vec{\nabla}_{S_i} W) \, x \, \dot{\vec{\omega}}_i + \sum_i \vec{\nabla}_{S_i} W \, x \, \dot{S}_i \vec{\sigma}_i = 0 \qquad (22')$$

Sendo arbitrários os $\dot{\vec{\omega}}_i$:

$$\vec{M}_i = - \vec{S}_i \Lambda \vec{\nabla}_{S_i} W \qquad (23')$$

e

$$\dot{S}_i = 0$$

De (8') e (23') se obtem a equação (4) que traduz o princípio da conservação da energia.

NOTA III

O PRINCÍPIO DE HAMILTON

1- A forma usual do princípio de Hamilton:

$$\delta I = \delta \int_{t_o}^{t_1} (T-V)\, dt = 0 \tag{1}$$

em que T é a energia cinética; não pode ser estendida ao caso de forças dependentes do spin. Com efeito:

$$\delta I = \int_{t_o}^{t_1} [\{\sum_i \vec{\nabla}_i (T-V) - \sum_i \frac{d}{dt} \vec{\nabla}'_i (T-V)\} \times \delta P_i - \sum_i \vec{\nabla}_{S_i} V \times \delta\vec{S}_i]dt = 0 \tag{2}$$

Adimitindo que os δP_i e $\delta\vec{S}_i$ são arbitrários, achamos:

$$\vec{\nabla}_i (T-V) - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}'_i (T-V) = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}_{S_i} V = 0 \tag{4}$$

As equações (4) não são satisfeitas. Se em vez de tomarmos os $\delta\vec{S}_i$ arbitrários admitirmos que:

$$\delta\vec{S}_i = \delta\vec{\omega}_i \wedge \vec{S}_i \tag{5}$$

sendo arbitrários os $\delta\vec{\omega}_i$ as equações (4) serão substituidas pelas seguintes:

$$\vec{S}_i \wedge \vec{\nabla}_{S_i} V = 0 \tag{6}$$

igualmente falsas.

As equações (3) são satisfeitas porque:

$$\vec{\nabla}_i T = 0$$

$$\vec{\nabla}'_i \; T = m_i \dot{P}_i \qquad (7)$$

$$- \vec{\nabla}_i V + \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i V) = \vec{F}_i$$

de modo que:

$$\vec{\nabla}_i (T-V) - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}'_i (T-V) = \vec{F}_i - m\ddot{P}_i \qquad (8)$$

2- Na forma (1) do princípio de Hamilton só são variadas as coordenadas. Há outra forma em que se dão variações arbitrárias às coordenadas e aos momentos conjugados:

$$\delta I = \delta \int_{t_o}^{t_1} \sum_\alpha (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H)\, dt \qquad (9)$$

H sendo a hamiltoniana e p_α o momento conjugado de q_α:

$$p_\alpha = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (10)$$

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - (T-V) \qquad (11)$$

sob a forma (9) o princípio de Hamilton pode ser aplicado ao caso de sistemas com spin. Vejamos como se definem os momentos conjugados. Os momentos $\vec{p}_i$ conjugados às coordenadas podem ser definidos pela fórmula (10):

$$\vec{p}_i = \vec{\nabla}'_i (T-V) \tag{12}$$

Em vez de dar as componentes cartesianas dos $\vec{S}_i$ consideremos as coordenadas seguintes do ponto (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz}):

$$\left.\begin{aligned} S_i &= \sqrt{S_{ix}^2 + S_{iy}^2 + S_{iz}^2} \\ S_{iz} &= S_{iz} \\ \phi_i &= \operatorname{arctg} \frac{S_{iy}}{S_{ix}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

As equações de movimento destas coordenadas são:

$$\left.\begin{aligned} \dot{S}_i &= 0 \\ \dot{S}_{iz} &= \frac{\partial V}{\partial S_{ix}} S_{iy} - \frac{\partial V}{\partial S_{iy}} S_{ix} = - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \\ \dot{\phi}_i &= \frac{1}{S_{ix}^2 + S_{iy}^2} (\dot{S}_{iy} S_{ix} - \dot{S}_{ix} S_{iy}) = \frac{\partial V}{\partial S_{iz}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Tomaremos S_{iz} para momento conjugado de ϕ_i:

$$p_{\phi i} = S_{iz} \tag{15}$$

e para hamiltoniana H:

$$H = \sum_i \vec{p}_i \times \dot{P}_i - (T-V) \tag{16}$$

Logo:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{u_i}} = \dot{u}_i \tag{17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\frac{\partial (T-V)}{\partial u_i} \tag{18}$$

Levando em conta (3) a equação (18) torna-se:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\dot{p}_{ui} \tag{19}$$

Ora, T e os $\vec{p}_i$ não dependem dos spins. Podemos portanto por as duas últimas equações (14) sob a forma:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_{\phi i}} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Podemos considerar os módulos S_i como momentos conjugados de variáveis χ_i inobserváveis e que não aparecem na expressão da hamiltoniana:

$$S_i = p_{\chi i} \tag{21}$$

$$\dot{S}_i = \frac{\partial H}{\partial \chi_i} = 0 \tag{22}$$

3- Agora é fácil de verificar que há um princípio variacional do tipo (9):

$$\delta I = \delta \int_{t_o}^{t_1} [\sum_i (\vec{p}_i x \dot{P}_i + S_{iz}\dot{\phi}_i + S_i\chi_i) - H]\, dt = 0 \tag{23}$$

Com efeito:

$$\delta I = \int_{t_o}^{t_1} [(\dot{P}_i - \vec{\nabla}_{pi} H) \times \delta_{pi} - (\vec{\nabla}_i H + \dot{\vec{p}}_i) \times \delta P_i$$

$$+ (\dot{\phi}_i - \frac{\partial H}{\partial S_{iz}}) \delta S_{iz} + (\chi_i - \frac{\partial H}{\partial S_i}) \delta S_i$$

$$- (\dot{S}_{iz} + \frac{\partial H}{\partial \phi_i}) \delta \phi_i + \dot{S}_i d\chi_i] dt \tag{24}$$

Levando em conta as equações (17), (19), (20) e (22) vemos que $\delta I = 0$. Inversamente admitindo que I=0 resultam essas equações.

Aliás, pode-se também obter um princípio variacional do tipo (1) ligeiramente modificado. Basta observar que o integrando de (23) vale:

$$(T-V) + \sum_i (S_{iz}\dot{\phi}_i + S_i\dot{\chi}_i)$$

e que portanto:

$$\delta^* I = \delta^* \int_{t_o}^{t_1} [(T-V) + \sum_i (S_{iz}\dot{\phi}_i + S_i\dot{\chi}_i)] \, dt = 0 \tag{25}$$

δ^* indica que só se dão variações arbitrárias aos P_i, $\vec{S}_i$, e χ_i. Inversamente de (25) decorrem as equações (13) e (14). Com efeito:

$$\delta^* I = \delta^* \int_{t_o}^{t_1} [\sum_i \vec{\nabla}_i (T-V) - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_i' (T-V)] \times \delta P_i -$$

$$- \sum_i (\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial V}{\partial S_{iz}} \delta S_{iz} + \frac{\partial V}{\partial S_i} \delta S_i) + \sum_i (\dot{\phi}_i \delta S_{iz} + \dot{\chi} \delta S_i) -$$

$$- \sum_i (\dot{S}_{iz} \delta\phi_i + \dot{S}_i \delta\chi_i) \tag{26}$$

Logo (25) tem por consequência:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}_i (T-V) - \dfrac{d}{dt}\vec{\nabla}'_i (T-V) = 0 \\[2ex] \dot{S}_i = 0 \\[2ex] \dot{S}_{iz} = -\dfrac{\partial V}{\partial \phi_i} \\[2ex] \dot{\phi}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial S_{iz}} \\[2ex] \chi_i = -\dfrac{\partial V}{\partial S_i}\end{array}\right\}$$

4- A formulação do princípio de Hamilton pressupõe a existência dum potencial. Ora, o princípio da conservação da energia não basta para assegurar a existência do potencial quando as forças dependem das velocidades, como vimos na Nota II. Logo:

"O princípio de Hamilton não é uma consequência dos princípios newtonianos e do princípio da conservação da energia".

A hipótese de haver um potencial basta para estabelecer o princípio de Hamilton. Vamos ver que esta proposição admite uma recíproca:

"Se as trajetórias dum sistema de pontos materiais forem as extremais da integral em relação ao tempo duma função das posições velocidades e spins, do segundo grau nas componentes das velocidades, tendo T por parte quadrática e os $\dot{\phi}_i$ e $\dot{\chi}_i$ agrupados na soma $\sum_i (S_{iz}\dot{\phi}_i + S_i\dot{\chi}_i)$, haverá um potencial".

Chamamos de trajetória do sistema a que o ponto de coordenadas $(u_\alpha, \dot{u}_\alpha, S_\alpha, \dot{S}_\alpha, \chi_i)$ descreve no espaço correspondente a 13n dimensões.

Se as trajetórias forem extremais da integral I:

$$I = \int_{t_o}^{t_1} [K + \sum_i (S_{iz}\dot{\phi}_i + S_i\dot{\chi}_i)]\, dt \tag{27}$$

teremos:

$$\delta I = \sum_i \int_{t_o}^{t_1} [\{\vec{\nabla}_i K - \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i K)\} x \delta P_i + (\frac{\partial K}{\partial S_i} + \dot{\chi}_i) \delta S_i + (\dot{\phi}_i + \frac{\partial K}{\partial S_{iz}}) \delta S_{iz}$$

$$+ (\frac{\partial K}{\partial \phi_i} - \dot{S}_{iz}) \delta\phi_i\} - \dot{S}_i \delta\chi_i] \, dt = 0 \tag{28}$$

Logo:

$$\vec{\nabla}_i K - \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}'_i K) = 0 \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial K}{\partial S_i} + \dot{\chi}_i = 0 \\ &\frac{\partial K}{\partial S_{iz}} + \dot{\phi}_i = 0 \\ &\frac{\partial K}{\partial \phi_i} - \dot{S}_{iz} = 0 \\ &\dot{S}_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

A parte quadrática de K sendo T, temos:

$$\vec{\nabla}'_i K = \vec{\nabla}'_i T + \vec{\nabla}'_i (K-T) = m_i \dot{P}_i + \vec{\nabla}_i (K-T) \tag{31}$$

Introduzindo este valor de $\vec{\nabla}' K$ em (28):

$$m_i \ddot{P}_i = \vec{\nabla}_i K - \frac{d}{dt} [\vec{\nabla}'_i (K-T)]$$

Ora

$$\vec{\nabla}_i K = \vec{\nabla}_i (K-T) \tag{32}$$

porque a energia cinética não depende dos P_i, logo:

$$m_i \ddot{P}_i = - \vec{\nabla}_i (T-K) + \frac{d}{dt} [\vec{\nabla}'_i (T-K)] \tag{33}$$

As três últimas equações (29) podem ser postas sob a forma:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \frac{\partial (T-K)}{\partial S_{iz}} \\ \dot{S}_{iz} &= - \frac{\partial (T-K)}{\partial \phi_i} \\ \dot{S}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

As equações (32) e (33) mostram que existe um potencial V:

$$V = T-K \tag{35}$$

NOTA IV

1- O fato do movimento dum ponto ficar inteiramente determinado pela sua posição, velocidade e spin num instante, constitui um dos fundamentos básicos da Mecânica. Dele resulta que as equações diferenciais do movimento devem ser de segunda ordem, em relação às coordenadas dos pontos e de primeira ordem em relação aos spins. Ora, as equações de movimento dum corpúsculo P são:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{P}) &= \vec{F} \\ \dot{\vec{S}} &= \vec{M} \end{aligned} \tag{1}$$

Do que precede concluimos que $\vec{F}$ e $\vec{M}$ não podem depender de derivadas de P de ordem superior à segunda e de derivadas de S de ordem superior à primeira. No caso de $\vec{F}$ e $\vec{M}$ dependerem de $\ddot{P}$ e de $\dot{\vec{S}}$ é preciso que o sistema (1) possa ser resolvido unívocamente em relação a $\ddot{P}$ e $\dot{\vec{S}}$. Efetuando a resolução se obtem o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\,\dot{P}) &= \vec{F}^* \\ \dot{\vec{S}} &= \vec{M}^* \end{aligned} \qquad (2)$$

F^* e $\vec{M}^*$ não dependendo mais de $\ddot{P}$ e $\dot{\vec{S}}$.

"Os movimentos dum ponto material, sob a ação de forças e momentos $\vec{F}$ e $\vec{M}$ que dependem de $\ddot{P}$ e $\dot{\vec{S}}$, coincidem com os movimentos que o mesmo ponto teria sob a ação de forças e momentos $\vec{F}^*$ e $\vec{M}^*$ que só dependem de P, $\vec{S}$ e $\dot{P}$".

2- Consideremos agora um ponto P sob a ação de vários outros P_i. O princípio de independência dos efeitos diz que:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{M} &= \sum_i \vec{M}_i \end{aligned} \qquad (3)$$

$\vec{F}_i$ e $\vec{M}_i$ sendo a força e o momento que P_i exerce sobre P e que deveriam ser os mesmos se P e P_i constituissem um sistema isolado. Ora, neste caso a aceleração de P e $\dot{\vec{S}}$ não seriam os mesmos, pois

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\,\ddot{P})_{(P,P_i)} &= \vec{F}_i \\ \left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{P,P_i} &= \vec{M}_i \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Vemos portanto que:

"O princípio de independência dos efeitos exclui a possibilidade de forças e momentos dependentes da aceleração e da derivada do spin".

3- As considerações do número 2 põem em evidência um fato importante:

"O princípio de independência dos efeitos das ações não equivale à lei de adição vetorial das forças e dos momentos aplicados".

Com efeito, a lei de composição se traduz pelas fórmulas (3) e não impõe restrição alguma aos $\vec{F}_i$ e $\vec{M}_i$, o que não acontece com o princípio de independência dos efeitos.

Pode-se conceber que desenvolvimentos futuros levem ao abandono do princípio de independência dos efeitos sem afetarem a lei de adição vetorial.

NOTA V

INTEGRAÇÃO DE UM TIPO DE EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS

1- Consideremos o sistema de equações.

$$(P_\ell - O) \wedge \vec{\nabla}_\ell U = 0 \qquad (\ell = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

Para integrá-lo tomemos coordenadas polares de centro em O para o ponto P:

$$\left.\begin{aligned} r_\ell &= \sqrt{x_\ell^2+y_\ell^2+z_\ell^2} \\ tg\phi_\ell &= \frac{y_\ell}{x_\ell} \\ \cos\theta_\ell &= \frac{z_\ell}{\sqrt{x_\ell^2+y_\ell^2+z_\ell^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi_\ell} &= \frac{\partial U}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial \phi_\ell} + \frac{\partial U}{\partial y_\ell}\frac{\partial y_\ell}{\partial \phi_\ell} = x_\ell \frac{\partial U}{\partial y_\ell} - y_\ell \frac{\partial U}{\partial x_\ell} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_\ell} &= \frac{\partial U}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial \theta_\ell} + \frac{\partial U}{\partial y_\ell}\frac{\partial y_\ell}{\partial \theta_\ell} + \frac{\partial U}{\partial z_\ell}\frac{\partial z_\ell}{\partial \theta_\ell} = \\ &= z_\ell\left(\frac{\partial U}{\partial x_\ell}\cos\phi_\ell + \frac{\partial U}{\partial y_\ell}\operatorname{sen}\phi_\ell\right) - \sqrt{x_\ell^2+y_\ell^2}\ \frac{\partial U}{\partial z_\ell} = \\ &= \cos\phi_\ell\left(z_\ell\frac{\partial U}{\partial x_\ell} - x_\ell\frac{\partial U}{\partial z_\ell}\right) + \operatorname{sen}\phi_\ell\left(z_\ell\frac{\partial U}{\partial y_\ell} - y_\ell\frac{\partial U}{\partial z_\ell}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Levando em conta as equações (3) o sistema (1) torna-se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi_\ell} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_\ell} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Logo:

$$U = U(r_1, r_2, \ldots . r_n) \qquad (5)$$

O sistema:

$$\vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{S_\ell} W = 0 \qquad (6)$$

é inteiramente análogo a (1) e se integra do modo:

$$W = W(S_1, S_2', \ldots S_n) \tag{7}$$

2- Consideremos agora o sistema:

$$\sum_{\ell} (P_{\ell} - O) \wedge \vec{\nabla}_{\ell} U = 0 \tag{8}$$

Introduzamos um sistema de eixos $O\xi\eta\zeta$ ligados aos P_{ℓ}, tendo por eixo dos ξ a reta OP_n e por plano $O\zeta\xi$ o plano $OP_n\ P_{n-1}$. Vamos tomar como novas variáveis os n-2 azimuts $\phi_{\lambda}(\lambda=1,2,\ldots n-2)$ referidos a $O\xi\eta\zeta$, as n-1 colatitudes $\Theta_{\mu}(\mu=1,2,\ldots n-1)$ correspondentes, as n distâncias r_{ℓ} dos pontos à origem, e os ângulos de Euler (ϕ,θ,χ) do triedro $O\xi\eta\zeta$ em relação a $Oxyz$. A solução geral de (8) é dada por uma função U arbitrária dos $\phi_{\lambda}, \Theta_{\mu}, r_{\ell}$:

$$U = U(\phi_1, \ldots, \phi_{n-2}; \Theta_1 \ldots, \Theta_{n-1}; r_1 \ldots r_n) \tag{9}$$

Este teorema resulta imediatamente do sentido geométrico de (8). Raciocinando como no parágrafo 1, vemos que a terceira equação (8) equivale a:

$$\sum_{\ell} \frac{\partial U}{\partial \phi_{\ell}} = 0 \tag{10}$$

Os ϕ_{ℓ} sendo os azimutes relativos aos eixos fixos $Oxyz$. Introduzindo as novas variáveis:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1 - \phi_n \\ \psi_2 &= \phi_2 - \phi_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-1} &= \phi_{n-1} - \phi_n \\ \psi_n &= \phi_n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

a equação (10) torna-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi_n} = 0 \tag{12}$$

(12) mostra que U não se altera quando se dá ao sistema dos n pontos, uma rotação rígida qualquer em torno de Oz, pois numa rotação como esta só varia ψ_n. De um modo análogo se veria que U não altera para rotações rígidas do sistema dos n pontos em torno de Ox e de Oy. Logo:

"A solução geral do sistema (8) é dada por uma função arbitrária U dos pontos P, invariante para rotações em torno da origem".

Ora, qualquer rotação em torno da origem é caracterizada por uma variação dos ângulos de Euler (ϕ,θ,χ) do triedro $O\xi\eta\zeta$, permanecendo fixos os ϕ_λ, θ_μ e r_ℓ. Reciprocamente, se ϕ_λ, θ_μ e r_ℓ não variam, se tem uma rotação do sistema em torno da origem. U é portanto da forma (9).

3- O sistema

$$\sum_\ell [(P_\ell - O)\wedge \vec{\nabla}_\ell + \dot{P}_\ell \wedge \vec{\nabla}'_\ell + \vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{S_\ell}]\, U = 0 \tag{13}$$

é análogo a (8), pois basta introduzir os pontos

$$\left.\begin{array}{ll} P_{n+1} = O + \dot{P}_1 & P_{2n+1} = O + \vec{S}_1 \\ P_{n+2} = O + \dot{P}_2 & P_{2n+2} = O + \vec{S}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{2n} = O + P_n & P_{3n} = O + \vec{S}_n \end{array}\right\} \tag{14}$$

para dar a (13) a forma (8):

$$\sum_{\alpha=1}^{3} [(P_\alpha - O) \wedge \vec{\nabla}_\alpha] U = 0 \tag{15}$$

Em particular, se U não depende dos $\vec{S}_\ell$, (13) se reduz a:

$$\sum_\ell [(P_\ell - O) \wedge \vec{\nabla}_\ell + \vec{S}_\ell \wedge \vec{\nabla}_{S_\ell}] U = 0 \tag{16}$$