

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени адмирала Г. И. Невельского

**Ю. А. КОМАРОВСКИЙ**

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ  
РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ В СУДОВОЖДЕНИИ**

Учебное пособие

Издание второе, переработанное и дополненное

Владивосток 2005

УДК 621.396.932.1:629.783

Комаровский Ю.А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении: Учеб. пособие. Изд. второе, перераб. и дополн. – Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2005. – 341 с.

В учебном пособии даны основные сведения по геофизическим полям Земли, геоиду, земному эллипсоиду и геодезическим системам. Более подробно описаны американская геодезическая система WGS 84 и новая отечественная геодезическая система СК-95. Приведены сведения об используемых в нашей стране и за рубежом референц-эллипсоидах и геодезических системах, на основе которых составляются карты. Особое место уделено различным способам преобразования геодезических координат при переходе от одной геодезической системе к другой. Дана классификация этих способов, приведены алгоритмы решений, примеры решений, а также даны рекомендации и справочный материал для решения задач преобразований координат. Даны подробные описания геодезических систем GRS 80, NAD 83, ETRS, СК-42, ПЗ 90 и Балтийской системы высот 1977 года. Рассмотрена система координат ITRS, поскольку она планируется стать геодезической основой новой спутниковой радионавигационной системы Галилео.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с программами дисциплин “Навигация и лоция”, а также “Технические средства судовождения”. Пособие рассчитано на студентов (курсантов) старших курсов морских специальностей вузов Дальневосточного региона. Материал данного пособия полезен аспирантам, научным работникам, штурманам-практикам и тем, кто осваивает технологии применения приёмников системы Навстар GPS.

Ил. 14, табл. 17, прилож. 10, библиогр. 106 назв.

Рецензенты: А.Н. Жирабок, кафедра КИР ДВГТУ, д-р техн. наук, профессор;  
А.Н. Солодянкин, доцент кафедры судовождения Дальрыбвтуза, канд. техн. наук.

© Ю.А. Комаровский

© МГУ им. адм. Г.И. Невельского

## Предисловие ко второму изданию

После выхода в свет первого издания данного учебного пособия произошёл ряд событий, которые внесли существенные изменения в практику применения в судовождении приёмников спутниковых радионавигационных систем.

К первому такому событию относится отмена Правительством США режима искусственного загробления точности дальномерных сигналов спутников СРНС Навстар GPS. В результате погрешность определения обсервованных координат судов с помощью обычных приёмников Навстар GPS стала лучше  $\pm 10$  м. практически сразу было объявлено о коренной модернизации СРНС Навстар GPS. Модернизация среди прочих мероприятий предполагает введение двух новых гражданских сигналов. Это позволит снизить влияние флуктуаций ионосферы и довести точность ОМС в открытом море до  $\pm 5$  м. Повышение точности ОМС вызывает необходимость перехода на трансляцию дифференциальными станциями поправок уже к фазовым измерениям с последующим обновлением парка судовых приёмников.

Вторым событием стало принятие ИМО более высоких требований к точности ОМС в открытом море.

третьим событие явилось учреждение в Российской Федерации новой системы геодезических координат СК-95.

Четвёртым событием надо рассматривать окончательное принятие Европейским Союзом решения о начале развёртывания в 2006 году новой СРНС Галилео. Галилео по своим параметрам будет превосходить СРНС Навстар GPS, что свидетельствует о конкуренции в космосе и в области высокоточного определения абсолютных координат.

Перечисленные факты привели к переменам в геодезическом обеспечении использования приёмников спутниковых навигационных систем. Перемены способствуют уменьшению количества применяемых геодезических систем и к переходу к более точным способам преобразования геодезических координат. Всё это нашло отражение во втором издании данного учебного пособия.

Ю.А. Комаровский

## ВВЕДЕНИЕ

Мировое морское сообщество вступило в XXI век с двумя принципиально новыми технологиями в области судовождения. К ним относятся технология, основанная на глобальных спутниковых радионавигационных системах (СРНС) Глонасс и Навстар GPS, а также технология, создаваемая географическими информационными системами (ГИС).

Первая связана прежде всего с получением в любой точке земной поверхности и околоземного пространства высокоточных координат движущегося транспортного средства, вектора его абсолютной скорости, а также точного времени. Все это открыло новые пути для организации более высокого уровня безопасности мореплавания на основе систем сопровождения, диспетчеризации, систем управления движением судов и транспондерных систем. Возможность непрерывного определения обсервованных координат судна вызвала новые направления в автоматизации судовождения, примерами которых уже стали автоматическое нанесение на электронные планшеты и карты текущего обсервованного места судна и его траектории и автоматическое управление судном по заданному маршруту. Непрерывная трансляция в эфир судовых обсервованных с помощью СРНС координат коренным образом видоизменяет подход к решению задачи предупреждения столкновений судов. Знание штурманом скорости и направления абсолютного перемещения своего судна совсем иначе позволяет подходить к ведению счисления пути, приближая точность счисляемых координат к точности обсервованных. Кроме того, способность судового приемника СРНС измерять мгновенное значение абсолютной скорости открывает перспективу создания абсолютного лага, который эффективнее гидроакустического. Весьма обнадеживают первые попытки эксплуатации спутниковых курсоуказателей, точность которых уже достигает полутора угловых минут. Более того, видны перспективы заметного увеличения точности подобных курсоуказателей, что открывает новые возможности в мореходной астрономии. Появление аппаратуры, пригодной непрерывно отслеживать угловые положения главных плоскостей судна относительно созвездия навигационных спутников, расширяет область применения автоматического оперативного контроля остойчивости. Особо следует упомянуть о возрастающей ценности точного отсчета времени с помощью СРНС. Способность судовых и береговых эталонов времени работать в наносекундном диапазоне, используя шкалы времени СРНС, создает основу для построения сети новых высокоточных многопараметрических

радионавигационных систем, которые повысят надежность мореплавания в прибрежных водах, дублируя СРНС.

Концепция ГИС сформировалась с появлением быстродействующих ЭВМ, обладающих большой памятью. Географические информационные системы представляют собой базу данных, имеющих привязку к географическим координатам. К таким данным поначалу относилась топографическая, гидрографическая и гидрологическая информации, гидрометеорологические особенности, видеоинформация (изображения мысов, приметных объектов и т.д.), информация о радионавигационных средствах, огнях, знаках, подводных коммуникациях и т.д. С помощью разработанных программных средств эта информация дополнялась, корректировалась, передавалась в другие базы данных, обрабатывалась и представлялась в виде, удобном для того или иного применения. Примером таких ГИС являются современные ECDIS (Electronic Chart and Display Systems). В последние годы географические информационные системы получили дальнейшее развитие от включения в базы данных сведений о естественных физических полях Земли. Это привело к возникновению совершенно новых методов судовождения, получивших название навигации по геофизическим полям. Точность таких методов полностью зависит от точности измерений параметров полей и от точности привязки к координатам.

Технологии СРНС и ГИС имеют общую основу, так как базируются на одних и тех же геодезических системах координат, предполагающих различные референц-эллипсоиды. Увеличение точности определения места судна и точности геодезической привязки информации в ГИС, а также переход в навигации к абсолютным координатам уже давно поставило на повестку дня вопрос о необходимости, во-первых, учета того, в какой геодезической системе определяются координаты, во-вторых, корректного перехода от одной геодезической системы к другой. Важность этой проблемы подчеркнута в РИС-89, где сказано о необходимости учета погрешности, обусловленной различием систем координат, в которых работает СРНС и составлена навигационная карта. Расхождение в координатах из-за использования различных геодезических основ может достигать 0,4 мили. К сожалению, в учебной литературе по навигации этой проблеме не уделено достаточного внимания. По этой причине вопросам описания существующих геодезических систем, а также принятым методам преобразования координат при переходе от одной системы к другой в данном учебном пособии отведено особое место.

Из-за широкого распространения СРНС Навстар GPS во многих областях человеческой деятельности и подавляющего количества типов

приемоиндикаторов, работающих по сигналам этой системы, фактически общепринятым в спутниковой навигации, в спутниковой геодезии и в ГИСах стал референц-эллипсоид WGS 84. Восполняя пробелы в отечественной литературе, в предлагаемом учебном пособии дается полное описание этого референц-эллипсоида на том уровне, на котором он описан в официальных открытых публикациях правительственных учреждений США.

Важное место в пособии занимает попытка автора познакомить читателя с геоидом WGS 84, который в настоящее время является одной из самых точных моделей Земли, а также с моделью гравитационного поля Земли, без элементарных знаний о которых уже становится трудно объяснить и понять явления, происходящие в движении Земли, в изменении её формы, в движении искусственных спутников Земли, а также явления, влияющие на точность определения обсервованных координат.

Особое значение автор придал терминологии, систематизировав и обосновав смысл и определения некоторых распространённых в навигации понятий. Приведены их зарубежные аналоги, что поможет читателю более профессионально знакомиться с зарубежными литературными источниками по навигации, а также осознанно и грамотно эксплуатировать приёмники СРНС.

Предлагаемую работу можно рассматривать ещё и как попытку описания той геофизической среды, в которой работают современные спутниковые радионавигационные системы, и которая влияет на работу этих систем, так или иначе, сказываясь на точности определения места судна.

Учебное пособие рассчитано, прежде всего, на курсантов старших курсов судоводительской специальности морских ВУЗов и на штурманов-практиков, самостоятельно пытающихся вникнуть в принципы работы СРНС, приёмников и в основы электронной картографии. Пособие может оказаться полезным для преподавателей, аспирантов и научных работников, чей профессиональный интерес распространяется на навигацию, технические средства судовождения и на радионавигационные приборы и системы.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность С.В. Коркишко за электронное оформление рукописи и помощь в расчётах в пакете Mathematica 4.0 таблиц 1, 3 и 6, а также Приложения 7. Целый ряд его полезных замечаний способствовали улучшению данного пособия.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. СТРУКТУРА, ДИНАМИКА, ФОРМА И РАЗМЕРЫ ЗЕМЛИ

Земля – третья по порядку от Солнца большая планета Солнечной системы. Масса Земли равна  $5,976 \cdot 10^{24}$  кг, что составляет 1/448 долю массы больших планет и 1/330000 массы Солнца. Под действием притяжения Солнца Земля, как и другие тела Солнечной системы, обращается вокруг него по мало отличающейся от круговой эллиптической орбиты. Солнце расположено в одном из фокусов эллиптической орбиты Земли, вследствие чего расстояние между Землей и Солнцем в течение года меняется от 147,117 млн. км (в перигелии) до 152,083 млн. км (в афелии). Большая полуось орбиты Земли, равная 149,6 млн. км, принимается за единицу при измерении расстояний в пределах Солнечной системы. Скорость движения Земли по орбите, равная в среднем 29,765 км/с, колеблется от 30,27 км/с (в перигелии) до 29,27 км/с (в афелии). Вместе с Солнцем Земля участвует также в движении вокруг центра Галактики; период галактического обращения составляет около 200 млн лет, средняя скорость движения 250 км/с. Относительно ближайших звезд Солнце вместе с Землей движется со скоростью около 19,5 км/с в направлении созвездия Геркулеса.

Плоскость земной орбиты (плоскость эклиптики) наклонена в современную эпоху под углом  $1,6^\circ$  к так называемой неизменяемой плоскости Лапласа, перпендикулярной главному вектору момента количества движения всей Солнечной системы. Под действием притяжения других планет положение плоскости эклиптики, а также форма земной орбиты медленно изменяются на протяжении миллионов лет. Наклон эклиптики к плоскости Лапласа при этом меняется от 0 до  $2,9^\circ$ , а эксцентриситет земной орбиты от 0 до 0,067. В современную эпоху эксцентриситет равен 0,0167, убывая на  $4 \times 10^{-7}$  в год. Если смотреть на Землю со стороны северного полюса, то орбитальное движение Земли происходит против часовой стрелки, то есть в том же направлении, что и ее осевое вращение, и обращение Луны вокруг Земли.

Если принять форму Земли за шар, то вследствие суточного вращения Земли точки экватора имеют линейную скорость 465 м/с, а точки, расположенные в широте  $\varphi$  – скорость  $465 \times \cos \varphi$  м/с.

Зависимость линейной скорости вращения, а, следовательно, и центробежной силы от широты приводит к различию значений ускорения свободного падения в разных широтах.

Ось вращения Земли отклонена от перпендикуляра к плоскости эклиптики на  $23^{\circ}26,5'$  (в середине XX века); в современную эпоху этот угол уменьшается на  $0,47''$  за год. При движении Земли по орбите вокруг Солнца ее ось вращения сохраняет почти постоянное направление в пространстве. Гравитационное влияние Луны, Солнца, планет вызывает длительные периодические изменения эксцентриситета, орбиты и наклона оси Земли, что является одной из причин многовековых изменений климата.

Период вращения Земли систематически увеличивается под воздействием лунных и в меньшей степени солнечных приливов. Притяжение Луны создает приливные деформации как атмосферы и водной оболочки, так и коры Земли. Они направлены к притягивающему телу и, следовательно, перемещаются по Земле при ее вращении. Приливы в земной коре имеют амплитуду до 50 см, в открытом океане вода поднимается на высоту не более 2 м, в атмосфере они вызывают изменение давления в несколько сотен Па. Приливное трение, сопровождающее движение приливов, приводит к потере системой Земля – Луна энергии и передаче момента количества движения от Земли к Луне. В результате вращение Земли замедляется, а Луна удаляется от Земли. 500 млн. лет назад длительность земных суток составляла 20,8 часа [2].

Существует много гипотез происхождения Земли. Все они сводятся к тому, что несколько миллиардов лет назад наша планета представляла небесное тело, состоящее из жидкого раскаленного вещества. И если бы наша молодая планета не вращалась вокруг своей оси, то до наших дней она сохранила бы форму идеального шара, поскольку в таком случае отсутствовали бы центробежные силы, уменьшающие силу тяжести. Тем не менее, много миллионов лет назад Земля вращалась с более высокой угловой скоростью, следовательно, ее сплюснутость с полюсов была гораздо больше, чем в наши дни. По мере охлаждения поверхности стала образовываться плита, которая подверглась разлому на несколько частей, ставших впоследствии континентами. Континенты продолжают дрейфовать, создавая океанские глубины и горные массивы при расхождении и наплзании. Так формировался и до сих пор формируется рельеф твердой поверхности Земли. Фактическое замедление скорости вращения Земли несколько меньше того, которое соответствует передаче момента Луне. Это указывает на вековое



уменьшение момента инерции Земли, связанное с ростом плотности ядра планеты и с перемещением тектонических плит, на которых в настоящее время покоятся континенты. Скорость вращения Земли несколько меняется в течение года также вследствие сезонных перемещений воздушных масс и влаги. Наблюдения, сделанные с помощью искусственных спутников Земли (ИСЗ), позволили с высокой точностью установить, что сжатие с полюсов несколько больше того, которое соответствует современной скорости и распределению внутренних масс. Это объясняется увеличивающейся вязкостью земных недр, приводящей к тому, что при замедлении вращения Земли ее фигура не сразу принимает форму, соответствующую увеличенному периоду вращения.

Поскольку Земля имеет сплюснутую форму (избыток массы у экватора), а орбита Луны не лежит в плоскости земного экватора, притяжение Луны вызывает прецессию – медленный поворот земной оси в пространстве (полный оборот происходит за 26 тысяч лет). На это движение накладываются периодические колебания направления оси – нутация (основной период 18,6 года). Положение оси вращения по отношению к телу Земли испытывает как периодические изменения (полосы при этом отклоняются от среднего положения на 10–15 метров), так и вековые (среднее положение Северного полюса смещается в сторону Северной Америки со скоростью приблизительно 11 см в год).

Знание формы и размеров Земли необходимо во многих областях человеческой деятельности, особенно в мореплавании, природопользовании и укреплении обороноспособности страны. Для практического использования этих знаний требуется с высокой точностью изображать земную поверхность на картах, планах, разрезах. Задача эта весьма трудная из-за больших размеров и сложности формы Земли. Общая площадь физической поверхности Земли составляет приблизительно 510 млн. км<sup>2</sup>, 29% которой составляет суша [3]. Суша и дно морей и океанов представляют сложные комбинации возвышенностей и впадин, находящихся между собой в различных случайных сочетаниях. Самая высокая точка над уровнем океана находится на высоте 8848 м (г. Эверест), а максимальная глубина океана – около 11 км. Таким образом, колебания точек поверхности Земли по высоте могут составлять до 20 км.

Как уже говорилось выше, на динамику Земли существенно влияет гидросфера – совокупность вод земного шара в жидком, твердом или газообразном состояниях. Гидросфера включает воды мирового океана (более 96 % объема гидросферы), подземные воды

(около 2 %), льда и снега (около 2 %), воды рек, озер, водохранилищ и болот (около 0,02 %). Если материки в большей или меньшей степени разобщены между собой, то водная оболочка Земли образует непрерывное пространство. Мировой океан занимает площадь  $361 \times 10^6$  км<sup>2</sup> и содержит  $1370 \times 10^6$  км<sup>3</sup> воды [4]. К настоящему времени строгой теории происхождения океанов еще нет. Имеющиеся суждения носят характер гипотез, основанных на изучении косвенных факторов, связанных с геологическим строением Земли и происходящими в ней и на ее поверхности процессами. Наиболее правдоподобной выглядит гипотеза образования океанов в результате раздвига континентальных плит земной коры. Наиболее весомым аргументом этой концепции является конфигурация очертаний материалов. Гидросфера непрерывно находится в движении, о чем свидетельствует изменение уровня мирового океана. Уровень мирового океана формируется многочисленными явлениями, воздействующими на водные массы. К ним относятся космические, или приливообразующие, геодинамические и геотермические, возникающие вследствие процессов, протекающих в недрах земной коры (землетрясениями, моретрясениями, извержениями вулканов на суше и в океане и современными проявлениями тектонизма), а также радиационными (механическими и физико-химическими), являющимися следствием воздействия солнечной радиации на поверхность и атмосферу Земли. Главной силой, формирующей уровень мирового океана, является сила тяжести, стремящаяся привести водные массы в состояние покоя.

Перечисленные явления и сила тяжести формируют сложную систему движения водных масс. Следствием их перемещения являются динамика топографии поверхности океана, сложные, часто случайные изменения положения поверхности, проявляющиеся в колебаниях уровня воды. Колебания уровня подразделяются на периодические, непериодические и вековые. К периодическим относятся колебания приливо-отливные, метеорологические (происходящие в результате годового хода осадков, испарения и стока вод), колебания, связанные с периодическими изменениями направления ветра (например, в области действия муссонов). В открытом океане величина приливов составляет в среднем 0,8 – 1,0 м [1]. Вблизи суши на величину приливов существенное влияние оказывают изрезанность береговой линии, уменьшение глубин и так далее. В вершине залива Фунди, расположенного между полуостровом Новая Шотландия и материком, величина прилива достигает 16,2 м, что является максимумом для мирового океана. Непериодические колебания уровня моря обусловлены

случайными изменениями количества осадков, испарения и стока, воздействием ветра случайного направления, подводными землетрясениями и извержениями, вызывающих цунами, временными течениями, изменениями атмосферного давления, изменением плотности воды и другими причинами. Зависимость уровня от количества осадков и стока очевидна, а изменения уровня во времени определяются климатическими характеристиками района. В океанах непериодические колебания уровня из-за этих причин не превышают 20 см, в морях, изолированных от океана, могут достигать 50 см и более.

Непериодические изменения интенсивности солнечной радиации обуславливают изменение температуры воды, а, следовательно, и ее плотности. Из-за этого в зонах повышенной плотности образуются понижения уровня вследствие сил тяжести, а в зонах пониженной плотности – повышения уровня воды. В отдельных случаях значительное изменение плотности происходит под действием перемещения водных масс течениями. Непериодические изменения атмосферного давления вызывают колебания уровня, проявляющиеся в образовании сейш. С изменением атмосферного давления на 1 мбар уровень моря изменяется на 10 мм [4].

Вековые колебания уровня происходят вследствие изменения общего объема воды в мировом океане, объясняемого изменением климата нашей планеты, интенсивностью образования или таяния ледников, а иногда изменением гидрологического режима в бассейнах питающих рек. К вековым относятся и тектонические колебания в результате медленных вертикальных движений как отдельных участков материков, так и всей земной коры. Яркими примерами вековых колебаний является резкое падение уровня Аральского моря и катастрофическое повышение уровня Каспийского моря. Уровень Черного моря повышается на 14 см за сто лет.

Огромную роль в судовождении играет рельеф морского дна и дна внутренних водоемов. Непрерывная циркуляция воды в гидросфере вызывает изменение рельефа из-за переноса твердых частиц. Только реками планеты ежегодно переносится миллиарды тонн твердых частиц. Это приводит не только к изменению топографии дна, но и к медленному смещению центра массы Земли, что также сказывается на динамике вращения нашей планеты. Рельеф дна подвержен изменению в результате тектонической, вулканической и даже человеческой деятельности. Примером влияния человеческой деятельности является опускание дна Северного моря на несколько десятков метров в районах активной добычи нефти и газа.

Помимо твердой части и жидкой части (гидросферы) Земли существует атмосфера как газообразная часть, играющая существенную роль не только в динамике планеты, но и в ее формообразовании. Атмосферой, или воздушной оболочкой называют газовую среду Земли, вращающуюся вместе с ней. Масса атмосферы составляет приблизительно  $5,15 \times 10^{18}$  кг. Среднее давление атмосферы на уровне моря равно 101325 Па (это соответствует 1 атмосфере, или 760 мм ртутного столба). Плотность и давление атмосферы быстро убывают с высотой: у поверхности плотность воздуха равна  $1,22 \text{ кг/м}^3$  (число молекул в  $1 \text{ м}^3$  равно  $2,55 \times 10^{25}$ ), на высоте 10 км плотность уже равна  $0,41 \text{ кг/м}^3$  (число молекул в  $1 \text{ м}^3$  равно  $8,6 \times 10^{24}$ ), а на высоте 100 км плотность составляет  $8,8 \times 10^{-7} \text{ кг/м}^3$  (число молекул в  $1 \text{ м}^3$  равно  $1,8 \times 10^{18}$ ). Атмосфера имеет сложное строение, ее слои различаются своими физическими и химическими свойствами (температурой, химическим составом, ионизацией молекул и др.). Принятое деление атмосферы на слои основано главным образом на изменении в ней температуры с высотой, поскольку оно отражает баланс основных энергетических процессов.

Химический состав земной атмосферы неоднороден. Сухой атмосферный воздух у поверхности Земли содержит по объему 78,08 % азота, 20,95 % кислорода (около  $10^{-6}$  % озона), 0,93 % аргона и около 0,03 % углекислого газа. Не более 0,1 % составляет вместе водород, неон, гелий, метан, криптон и другие газы. В слое атмосферы до высоты 90 – 100 км, в котором происходит интенсивное перемешивание атмосферы, относительный состав ее основных компонентов не меняется (этот слой называется гомосферой). В атмосфере содержится  $(1,3 - 1,5) \cdot 10^{16}$  кг воды. Главная масса атмосферной воды (в виде пара, взвешенных капель и кристалликов льда) сосредоточена в тропосфере, причем с высотой ее содержание резко убывает. Во влажном воздухе содержание водяного пара у земной поверхности колеблется от 3 – 4 % в тропиках до  $2 \times 10^{-5}$  % в Антарктиде. Очень изменчивы аэрозольные компоненты воздуха, включающие пыль почвенного, органического и космического происхождения, частички сажи, пепла и минеральных солей. Кстати, за счет космической пыли и метеоритов Земля ежегодно увеличивает свою массу на  $10^4 - 10^5$  тонн [2]. Между атмосферой и подстилающей поверхностью происходит непрерывный обмен энергией (теплооборот) и веществом (влагооборот, обмен кислородом и другими газами). Теплооборот включает перенос теплоты излучением (лучистый теплообмен), передачу теплоты за счет теплопроводности,

конвекции и фазовых переходов воды (испарения, конденсации, кристаллизации). Неравномерный нагрев атмосферы на разных широтах, над сушей и океанами, занимающими 71 % поверхности Земли, приводит к неравномерному распределению атмосферного давления. Возникающие в атмосфере устойчивые перепады давления вызывают общую циркуляцию, с которой связан влагооборот, включающий процессы испарения воды с поверхности гидросферы, переноса водяного пара воздушными потоками, выпадение осадков и их сток. Теплооборот, влагооборот и циркуляция атмосферы являются основными климатообразующими и погодообразующими процессами. Атмосфера является активным агентом в различных процессах, происходящих на поверхности суши и в верхних слоях водоемов. В последние годы стало заметно потепление нижних слоев в атмосфере за счет так называемого «парникового эффекта». Это вызвало активное таяние льдов и подъем среднего уровня мирового океана. Дальнейшее потепление неизбежно приведет к уменьшению угловой скорости вращения Земли, которое нельзя будет не учитывать в расчетах, связанных с определением места по спутниковым навигационным системам.

Состояние атмосферы и отдельных ее слоев обязательно учитывается в современных СРНС еще и с точки зрения влияния на условия распространения радиоволн. Каждая СРНС обязательно имеет в своем составе некую математическую модель, описывающую суточные, сезонные и годовые изменения физических характеристик каждого слоя атмосферы. По этим причинам во вновь создаваемые для СРНС референц-эллипсоиды уже включаются характеристики атмосферы. Атмосфере как среде распространения радиоволн отводится ведущая роль при проектировании и эксплуатации новых береговых радионавигационных систем повышенной точности. Рассмотрим структуру атмосферы и остановимся подробнее на каждом ее слое.

*Тропосфера* – нижний слой атмосферы Земли, где возникают основные явления погоды. Тропосфера характеризуется достаточно регулярным падением температуры с высотой (в среднем 6,5 °С на 1 км). На высоте 1–12 км в высоких и средних широтах и на высоте 15–18 км в тропиках это падение прекращается и далее в стратосфере температура остается приблизительно постоянной. Из-за неравномерности разогрева земной поверхности возникают неоднородности атмосферного давления, вызывающие появление ветров. Общая циркуляция в тропосфере, возникающая из-за разности

температур между экватором и полюсами, благодаря действию силы Кориолиса и закона сохранения кинетического момента разбивается на более или менее стационарные системы ветров. В полярных широтах преобладают восточные ветры, в средних – западные, вблизи тропиков – снова восточные (пассаты). Средняя зональная компонента скорости ветров составляет приблизительно 10 м/с. В тропосфере содержится почти все количество водяного пара атмосферы, образуются облака и формируются все виды осадков, которые непрерывно изменяют рельеф твердой поверхности Земли. Неравномерности распределения температур и плотности в тропосфере приводят к задержкам в распространении радиоволн, отклонениям трасс их распространения от кратчайших.

*Стратосфера* – область атмосферы между тропосферой и мезопиком. Ее нижняя граница находится на расстоянии около 10 км от поверхности Земли в полярных районах, поднимаясь до высоты 28 км к экватору. Верхняя граница составляет условно 50 км. В установлении температурного режима стратосферы основную роль играет теплообмен излучением. В нижней части стратосферы до высот 20–25 км температура приблизительно постоянна, а выше, вплоть до мезопика, наблюдается рост температуры вследствие поглощения солнечного излучения озоном. Экваториальная стратосфера обычно холоднее полярной.

*Мезопик* (стратопауза) – область атмосферы с максимальной температурой на высоте 50–60 км. Ниже этого уровня интенсивность ультрафиолетового излучения Солнца заметно уменьшается вследствие поглощения молекулами озона, а выше этого уровня концентрация поглощающих молекул озона и водяного пара быстро падает. Таким образом, максимальный приток энергии располагается на высоте 50–60 км, и это приводит к появлению максимума температуры. Концентрация озона и водяного пара выше мезопика весьма переменна, так что снижение температуры на высотах более 50 км наблюдается не всегда. Обычно мезопик ясно выражен летом, зимой может отсутствовать. Роль состояния мезопика для биосферы Земли огромна, так как в нем содержится озоновый слой, экранирующий от жесткого ультрафиолетового излучения (18–34 мкм). Появление «озоновых дыр» является результатом человеческой деятельности. Мезопик рассматривается как переходная область между стратосферой и мезосферой.

*Мезосфера* – область атмосферы между мезопиком и мезопаузой на высоте от 50 до 80 км. В мезосфере основным энергетическим процессом является лучистый теплообмен, причем важнейшую роль играют поглощение солнечного излучения озоном ( в области длин волн короче 30 мкм), а также водяным паром и углекислым газом и, кроме того, рассеяние ультрафиолетового излучения молекулами кислорода. В области мезосферы происходят сезонные вариации температуры, крупномасштабные вихри, являющиеся продолжением соответствующих образований в нижних слоях атмосферы.

*Мезопауза* – переходная область атмосферы между мезосферой и термосферой с минимальной температурой на высоте около 80 км от поверхности Земли. Мезопауза отчетливо выявляется лишь в летнее время. Зимой отмечается почти постоянная температура в диапазоне высот примерно от 60 до 90 км. Природа мезопаузы окончательно еще не выяснена.

*Термосфера* – область верхней атмосферы на высотах от 90 до 200–400 км над поверхностью Земли, где происходят основные процессы поглощения и преобразования энергии солнечного коротковолнового излучения (ультрафиолетового и рентгеновского), что обуславливает в термосфере рост с высотой температуры нейтральных частиц атмосферы от 200 до 500–2500 градусов по Кельвину в зависимости от времени суток и солнечной активности. Влияние солнечного излучения сказывается и на плотности воздуха в термосфере (например, на высоте около 200 км плотность воздуха днем в 1,5–2 раза выше, чем ночью), что крайне необходимо учитывать в работе спутниковых навигационных систем. При поглощении квантов ультрафиолетового излучения Солнца с длиной волны менее 10 мкм происходит ионизация компонентов атмосферы, то есть образование ионосферы, поэтому основные области ионосферы (слои E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>) лежат внутри термосферы. Кроме процессов ионизации в термосфере происходят процессы молекулярного изменения кислорода и азота, что приводит к изменению состава атмосферы с высотой. На высотах выше 300 км преобладает атомарный кислород.

*Термопауза* – область верхней атмосферы, находящаяся над термосферой и характеризующаяся переходом к постоянству температуры по высоте. В термопаузе поглощение солнечного коротковолнового излучения сравнительно невелико. Поэтому средний приток теплоты на одну частицу атмосферы мало меняется с высотой. Постоянство температуры означает отсутствие здесь каких-

либо других заметных источников тепловой энергии, кроме солнечного излучения. Температура и концентрация атмосферных компонентов зависят от уровня солнечной и геомагнитной активности, а также имеют суточные и сезонные вариации.

*Экзосфера* (от греческих слов экзо – вне, за, вдали и сфера – шар) – область верхней атмосферы, из которой возможно свободное ускользание нейтральных частиц в межпланетное пространство.

*Геокорона* – внешняя область атмосферы Земли. Состоит в основном из заряженных частиц, преимущественно из протонов с сопутствующими электронами, с небольшой примесью нейтральных частиц, главным образом, атомов водорода, вышедших из экзосферы. Геокорона простирается приблизительно до 15 земных радиусов и находится в постоянном взаимодействии с межпланетной средой. Положение внешней границы носит условный характер. Особенно это относится к нейтральной компоненте. Положение границы ионизированной компоненты зависит от электромагнитных взаимодействий с солнечным ветром и может испытывать быстрые изменения во время солнечных и геомагнитных возмущений.

Планета Земля содержит и четвертое состояние вещества – плазму. Она заключается в так называемой ионосфере. *Ионосферой* принято называть ионизированную часть верхней атмосферы выше 50 км. Верхняя граница ионосферы простирается до внешней части магнитосферы Земли. Ионосфера представляет собой природное образование разряженной слабо ионизированной плазмы, находящейся в магнитном поле Земли и обладающей благодаря высокой электрической проводимости специфическими свойствами, определяющими характер распространения в ней радиоволн и различных возмущений. Ионосфера играет решающую роль в радиосвязи и, в частности, в спутниковой навигации и космической геодезии. Ионизированная оболочка Земли способна поглощать и отражать радиоволны. Основной характеристикой ионосферы выступает концентрация ионов и электронов. Сравнительно недавно было установлено, что концентрация заряженных частиц распределена по высоте неравномерно: имеются области или слои, где она достигает максимума. Таких слоев несколько. Они не имеют резко выраженных границ, их положение и интенсивность регулярно изменяются в течение дня, сезона и 11-летнего солнечного цикла. Верхний слой F соответствует главному максимуму ионизации. Ночью он поднимается до высоты 300–400 км, а днем (преимущественно летом) раздваивается на слои F<sub>1</sub> и F<sub>2</sub> с



максимумами ионизации на высотах 160–200 км и 220–320 км. На высоте 90–150 км находится область E, а ниже 90 км область D. Слоистость ионосферы обусловлена резким изменением по высоте условий ее образования. Основным источником ионизации днем является коротковолновое излучение Солнца с длиной волны короче 103,8 нм, однако важны также и корпускулярные потоки, галактические и солнечные космические лучи. Каждый тип ионизирующего излучения оказывает наибольшее воздействие на атмосферу лишь в определенной области высот, соответствующих его проникающей способности. В области D наблюдается наиболее низкая концентрация заряженных частиц (менее  $10^9$  в одном кубическом метре). От всей остальной ионосферы область D отличается тем, что наряду с положительными ионами в ней наблюдаются отрицательные ионы, которые определяют многочисленные свойства области D. При переходе ото дня к ночи в области D концентрация электронов резко уменьшается и, соответственно, уменьшается поглощение радиоволн, поэтому раньше считали, что ночью слой D исчезнет. В момент солнечных вспышек на освещенной стороне земной поверхности сильно возрастает интенсивность поступающего от Солнца рентгеновского излучения, увеличивающего ионизацию области D, что приводит к увеличению поглощения радиоволн, а иногда даже к полному прекращению радиосвязи. Продолжительность перерывов радиосвязи обычно составляет 0,3–1,5 ч. Более длительные и более значительные поглощения бывают в высоких широтах. В районах магнитных полюсов (полярных шапок) длительность перерывов радиосвязи достигает иногда нескольких суток. Это явление надо учитывать штурманам, эксплуатирующим приемники спутниковых навигационных систем.

Область ионосферы на высоте 100–200 км, включающие слои E и F<sub>1</sub>, отличаются наиболее регулярными изменениями. Это обусловлено тем, что именно здесь поглощается основная часть коротковолнового ионизирующего излучения Солнца. Ночью из-за отсутствия источников ионизации на высотах 125–160 км величина концентрации заряженных частиц сильно уменьшается. Однако в области E на высоте 100–120 км обычно сохраняется высокая концентрация электронов ( $3 - 10 \times 10^9$  в км<sup>3</sup>). Концентрация положительных ионов кислорода становится больше выше уровня 170–180 км днем и выше 215–230 км утром, вечером и ночью. Выше и ниже этого уровня условия образования ионосферы совершенно различны. Днем ниже

этого уровня образуется слой  $F_1$ , который регулярно наблюдается летом и в основном при низкой активности Солнца, а в максимуме активности зимой он вообще не фиксируется. Выше данного уровня создаются благоприятные условия для образования области  $F_2$ .

Поведение главного максимума ионизации, или области  $F$ , является очень сложным. Оно коренным образом отличается от поведения областей  $E$  и  $F_1$ . Так, хотя в среднем электронная концентрация в слое  $F_2$  определяется солнечной активностью, но день ото дня она сильно изменяется. Максимум концентрации в суточном ходе бывает сдвинут относительно полудня, при этом сдвиг зависит от широты, сезона и даже от долготы. Здесь обнаруживаются сезонные и экваториальные аномалии. Высота главного максимума ионосферы в средних широтах северного полушария изменяется в течение суток сложным образом, глубоко опускаясь утром и достигая максимума вблизи полуночи. Высота слоя  $F$  зимой ниже, чем летом, а при высокой активности Солнца выше, чем при низкой [2].

Как следует из изложенного, структура ионосферы и ее динамика весьма сложны. Поэтому изучение ионосферы продолжается, чтобы, во-первых, определить влияние ионосферы на динамику процессов, происходящих на нашей планете, во-вторых, построить единую глобальную математическую модель динамики самой ионосферы. Такая модель крайне необходима для создания новых алгоритмов работы в современных спутниковых навигационных системах, чтобы повысить точность определения места.

Описывая нашу планету, нельзя обойти молчанием три основных физических поля, играющих существенную роль в динамике и формообразовании Земли и в современном судовождении. К их числу относят магнитное поле, поле теплового излучения и гравитационное поле.

Магнитное поле Земли (МПЗ) человечеству известно не одну тысячу лет. Тем не менее, механизм возникновения и динамики МПЗ объяснен сравнительно недавно. В современном представлении земного магнетизма за основу принята стандартная сейсмологическая модель Земли, состоящая из твердого внутреннего ядра, жидкой (металлической или металлизированной) внешней оболочки ядра, обладающей высокой электропроводностью, и слабопроводящей силикатной коро-мантийной оболочки. Граница ядро-мантия расположена на глубине 2890 км; граница между жидкой и твердыми частями ядра – на глубине 5150 км. Предполагается, что главное магнитное поле обязано своим происхождением и существованием некоторой системе гидродинамических течений в жидком ядре,

возникающих в процессе гравитационной и тепловой конвекции проводящего вещества. Такую физическую модель принято называть моделью гидромагнитного динамо [6]. Впервые идея гидромагнитного динамо была выдвинута в 1919 г. Дж. Лармором для объяснения магнитного поля Солнца. На ее применимость к МПЗ указал в 1947 г. Я. И. Френкель. Однако развитие теории геомагнетизма на этом принципе берет начало с опубликованной в 1934 году работы Т. Каулинга, в которой были установлены условия существования стационарного гидромагнитного динамо. По современным представлениям жидкое ядро, в отличие от коро-мантийной оболочки Земли, не вращается вокруг ее оси как единое тело, а скорее находится в состоянии такого вращения, при котором различные слои ядра вращаются с разной угловой скоростью.

В первом приближении МПЗ подобно полю гигантского магнитного диполя, расположенного в центральных частях земного шара, с Южным магнитным полюсом, расположенным в северном полушарии, и с Северным магнитным полюсом в южном полушарии Земли. Магнитный момент этого диполя приблизительно равен  $1,5 \times 10^{16}$  Ам<sup>2</sup> [7]. Ось такого диполя отстоит от центра Земли на 451 км (в 1965 году) в направлении Тихого океана и наклонена к оси ее вращения на 12° [8]. Ось диполя пересекает земную поверхность в точках, называемых геомагнитными полюсами. Установлено, что силовые линии МПЗ сходятся не в геомагнитных полосах, а в близких к ним точках, которые называются магнитными полюсами Земли. Это объясняет сложный характер поля, существенно отличающегося от поля однородно намагниченного шара.

Напряженность магнитного поля в вакууме измеряют в системе СИ в амперах на метр (А/м). В средах с магнитной проницаемостью напряженность выражается магнитной индукцией. В системе СИ единица магнитной индукции – тесла (Тл), имеющая размерность кг/(с<sup>2</sup>·А). В магнитометрии принято пользоваться нанотеслой, равной 10<sup>-9</sup> Тл (нТл). На магнитных полюсах напряженность МПЗ достигает  $6 \times 10^4$  нТл, а на экваторе она почти в два раза меньше.

По тому, какие источники создают МПЗ, его принято рассматривать как некую суперпозицию главного и аномального полей. В свою очередь главные поля рассматривают в виде векторной суммы дипольного (поле однородной намагниченности земного шара) и недипольного, или материкового (поле, вызванное неоднородностью глубоких слоев земного шара). Аномальные поля подразделяются на региональные аномалии (вызываются в основном глубокими слоями

земной коры и распространяются на большие площади) и местные, или локальные аномалии (обуславливаются менее глубокими слоями земной коры, месторождениями и распространяются на ограниченные площади) [9]. В МПЗ обязательно присутствуют компоненты, вызванные процессами в космосе, в ионосфере и в непосредственной близости от наблюдателя. МПЗ не отличается постоянством. Многолетний опыт геомагнитных исследований показывает, что МПЗ можно достаточно рельефно разделить на две составляющие, одна из которых относительно быстро меняется во времени, другая, вызываемая внутренними процессами в Земле, является квазистационарной, то есть медленно меняющейся. Последним свойством обладает главное поле. Вариации элементов земного магнетизма принято делить на быстрые (обусловлены электрическими токами в ионосфере), медленные, или вековые (связаны с процессами внутри земного шара), магнитные бури. Магнитные бури сопровождаются изменениями напряженности до сотен, а иногда до тысяч нТл. Продолжительность магнитных бурь – от нескольких часов до 1 суток и более. Отмечаются суточные вариации. На поверхности мирового океана отмечаются специфические вариации, вызываемые перемещениями масс воды. Так, например, волнение моря 2 балла вызывает изменения напряженности на 0,5 нТл, а 7 баллов – до 3 нТл. Течение Куроисио создает дополнительную напряженность магнитного поля 37 нТл/узел [6].

Несмотря на свою изменчивость, МПЗ давно служит целям навигации. В конце шестидесятих годов были разработаны основные принципы корреляционно-экстремальной навигации, использующей аномальные магнитные поля. Новые навигационные системы, работающие на этом принципе в сочетании с анализом рельефа дна еще в 1965 году, достигали точности  $\pm 45$  м [10]. Нельзя не упомянуть о роли высшей части МПЗ, простирающейся на десятки тысяч километров до космического пространства и называемой магнитосферой. Магнитосфера, во-первых, удерживает заряженные частицы ионосферы, предотвращая тем самым испарение атмосферы, во-вторых, отклоняет частицы солнечного ветра, предохраняя жизнь на Земле от губительной радиации.

Поле теплового излучения Земли стало предметом изучения сравнительно недавно. В создании теплового излучения частей поверхности Земли принимает участие очень большое число хаотически движущихся частиц. Из закона Планка, выражающего зависимость спектральной плотности излучения абсолютно черного

тела от частоты и температуры, следует, что максимум спектральной плотности приходится на диапазон видимых и инфракрасных длин волн. Спектральная плотность в диапазоне миллиметровых и сантиметровых длин волн во много ниже максимальной, но эти волны распространяются на большие расстояния, нежели инфракрасное и световое излучения. Многочисленными наблюдениями были установлены области на суше и на дне мирового океана, которые довольно стабильно излучают сигналы в данном спектре. Мощность этих сигналов сильно отличается от общего теплового фона. Поэтому поле теплового излучения Земли иногда называют полем теплового контраста. Поле создается тепловыми потоками, идущими из недр планеты. Таким образом, радиотепловое излучение – это не что иное, как электромагнитное поле тепловых шумовых токов, протекающих в среде вещества. Поначалу поле радиотеплового контраста использовалось для практических задач навигации летательных аппаратов. В последние годы рассматриваются перспективы применения его для судовождения.

Гравитационное поле Земли играет решающую роль в образовании формы планеты и влияет на ее размеры. К сожалению, в традиционном курсе навигации этому полю Земли не уделяется достаточного внимания. Восполняет этот пробел следующий параграф.

Началом изучения фигуры Земли явилось научное обоснование ее сферичности. Считают, что эту мысль впервые высказал древнегреческий ученый Пифагор (571-497 гг. до н. э.). Аристотель (384-322 гг. до н.э.) по этому поводу приводил многие из общеизвестных в настоящее время научных доказательств [11].

Первое исторически известное определение размеров Земли как сферы произвел александрийский ученый Эратосфен, живший в 278-196 гг. до нашей эры. Он установил, что в день летнего солнцестояния в полдень в Асуане Солнце находится точно в зените, а в Александрии оно отклоняется от зенита на  $1/50$  часть окружности, то есть на  $7^{\circ}12'$ . Линейное расстояние между этими городами, лежащими почти на одном меридиане, было определено по времени движения караванов; оно составило 5000 египетских стадий (793 км). Отсюда длина одного градуса дуги меридиана равна 110,14 км, а радиус земной сферы – 6314 км. В основе геометрического метода определения Эратосфена лежало измерение длины одного градуса дуги меридиана. Позднее подобные измерения, выполняемые с более высокой точностью, называли градусными измерениями.

В последующие века по данным градусных измерений уточнялись размеры радиуса земной сферы. Заслуживают внимания измерения, выполненные в 1669–1670 гг. французским ученым Пикаром. Он измерил непосредственно на местности длину дуги меридиана от Парижа до Амьена (153689 м) и получил линейную величину градуса, равную 111212 – (точная длина 1° меридиана на этих широтах измерений равна 111221 м), а радиус земной сферы 6372692 м. Для того времени градусное измерение Пикара дало результат довольно высокой точности.

Во второй половине XVII века Исаак Ньютон обосновал закон всемирного тяготения и выдвинул новое учение о форме фигуры Земли как вращающейся вокруг своей оси планетарной массы, находящейся в поле тяготения небесных тел. Он доказал, что Земля должна иметь форму сфероида, то есть эллипсоида вращения с малым сжатием по оси вращения. С середины XVIII века учение о сфероидичности Земли окончательно укрепилось в науке.

Для определения размеров сфероида в XVIII и XIX веках было выполнено большое количество измерений на поверхности Земли. При этом определялись астрономические координаты точек, измерялись направления и расстояния между ними и сила тяжести в данных точках земной поверхности.

В России впервые работы по определению направления и величины силы тяжести (гравиметрические работы) были выполнены в 60 годах XVIII века М.В. Ломоносовым. С 1816 года начали проводиться астрономо-геодезические работы в западных пограничных районах под руководством К.И. Теннера – в прибалтийских областях под руководством выдающегося астронома В.Я. Струве. Эти работы продолжались около 36 лет. В результате была измерена дуга меридиана от устья Дуная до берегов Северного Ледовитого океана, получившая название «дуги меридиана Струве». Были произведены и другие градусные измерения. Наиболее значительными явились измерения по 48 параллели от Кишинева до Астрахани, по 52 параллели от Варшавы до Орека, по меридиану от Симбирска до Астрахани. Результаты этих измерений использовались русскими и иностранными учеными для определения размеров земного сфероида. Более подробно об этом изложено в последней главе данного пособия.

В последние годы все большую роль в изучении нашей планеты играет спутниковая геодезия, с помощью которой гораздо эффективнее изучается структура, динамика, форма и размеры Земли.

По результатам многочисленных измерений, выполненных спутниковыми радиолокаторами и лазерными дальномерами удалось получить основные размеры [2]:

Экваториальный радиус	6378,160 км
Полярный радиус	6356,777 км
Полярное сжатие	1/298,25
Средний радиус	6372,032 км
Длина окружности экватора	40075,696 км
Площадь поверхности	$510,2 \times 10^6$ км <sup>2</sup>
Объем	$1,083 \times 10^{12}$ км <sup>3</sup>
Масса	$5976 \times 10^{21}$ кг
Средняя плотность	5518 кг/м <sup>3</sup>
Ускорение свободного падения (на уровне моря)	
а) на экваторе	9,78049 м/с <sup>2</sup>
б) на полюсе	9,83235 м/с <sup>2</sup>
в) стандартное	9,80665 м/с <sup>2</sup>

Момент инерции относительно оси вращения  $8,104 \times 10^{37}$  кг м<sup>2</sup>.

Кроме полярного сжатия отмечено незначительное сжатие в плоскости экватора (1/30000). Измерениями из космоса было обнаружено вздутие поверхности Земли, вытянутое в меридиональном направлении от полюса до полюса на 15° восточнее Гринвича. В районе Северного полюса существует незначительный подъем поверхности, а на Южном полюсе поверхность Земли имеет вогнутость.

Методы измерения формы Земли непрерывно совершенствуются, а поэтому размеры планеты постоянно уточняются ввиду важности знаний о структуре и динамике масс и полей.

## 1.2. ГЕОИД

Как видно из предыдущего параграфа, наша планета непрерывно изменяется. Тем не менее, для описания ее поверхности с целью создания точных карт, без которых невозможно представить человеческую деятельность, а также с целью дальнейшего освоения самой Земли и околоземного пространства необходимо иметь некий физический базис, создающий метрологическую основу для описания формы Земли. Таким базисом принято гравитационное поле Земли, которое в отличие от других физических полей обладает сравнительно незначительным изменением во времени. Под теорией фигуры Земли принято понимать раздел науки, занимающийся изучением формы

Земли по её полю силы тяжести. Основополагающими понятиями здесь является понятие гравитационного потенциала и геоида.

**Элементы теории гравитации.** Слово гравитация в переводе с греческого означает тяжесть. В настоящее время под гравитацией понимают распределение силы тяжести на Земле, планетах и других космических телах, а также в самом космическом пространстве. Наука, изучающая явления гравитации называется гравиметрией.

Древнегреческий мыслитель Аристотель (384–322 гг. до н. э.) считал, что чем больше вес тела, тем оно быстрее падает. Это утверждение пытался оспорить древнеримский ученый Тит Лукреций Кар (99–55 до н. э.). Великий итальянский ученый Галилео Галилей (1564–1642) впервые предпринял эксперименты со свободно падающими телами для оценки величины ускорения силы тяжести. В 1590 году он приблизительно определил ускорение свободного падения  $g \approx 980 \text{ см/сек}^2$ . В честь его имени эта единица измерения получила название галилей (Гал).  $1 \text{ Гал} = 1 \text{ см/сек}^2$ . Примерно сто лет спустя голландский ученый Х. Гюйгенс (1629–1695) разработал первый маятниковый гравиметр и точно определил величину ускорения свободного падения. Открытие И. Кеплером (1571–1630) законов движения планет вокруг Солнца позволило в 1687 году И. Ньютону, (1643–1727) сформулировать закон всемирного тяготения в знаменитом труде «Математические начала натуральной философии». Закон тяготения Ньютона гласит: две любые материальные частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  притягиваются по направлению друг к другу с силой  $F$ , прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}. \quad (1.2.1.)$$

Коэффициент пропорциональности  $G$  называется гравитационной постоянной. Величину гравитационной постоянной впервые опытным путем определил английский физик Г. Кавендиш (1731–1810).

Во времена Ньютона считали, что сила взаимодействия между телами передается мгновенно на любые расстояния. Современные опыты показали, что взаимодействие происходит с большой, но конечной скоростью, близкой к скорости света. Кстати, до сих пор эта скорость точно не определена.

Взаимодействие передается через среду, называемую гравитационным полем. Считается, что вокруг каждой массы существует поле, являющееся переносчиком взаимодействия масс. Как и всякое другое гравитационное поле – это вид материи, основное



свойство которого заключается в его непрерывности, то есть заданности в каждой точке пространства. Если скоро гравитационное поле оказывает силовое воздействие на единичную (пробную) массу, то для количественного описания поля воспользуемся ее силовой характеристикой. Будем помещать в поле, создаваемое источником  $M$ , тела разной массы  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  в одну и ту же точку на расстоянии от источника  $r$ . В результате получим силы притяжения различной величины  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , которые пропорциональны помещаемым пробным массам. Очевидно, что

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \frac{F_3}{m_3} = \dots = \frac{F_n}{m_n} = \text{const}.$$

Эта константа служит силовой характеристикой поля в данной точке и зависит только от массы источника поля и расстояния от источника, но не зависит от пробной массы. Такую константу называют напряженностью гравитационного поля. Итак, напряженность – это физическая величина, численно равная силе, с которой поле действует на пробную массу, помещенную в данную точку поля.

Гравитационное поле можно изобразить графически в виде силовых линий, касательных к вектору напряженности или к вектору силы притяжения, так как эти два вектора коллинеарны.

Поле тяготения является потенциальным, поскольку работа по перемещению тела любой массы не зависит от формы траектории перемещения, а только от координат начальной и конечной точек траектории. Иными словами, если начальная и конечная точки траектории совпадают, то работа по перемещению тела в гравитационном поле равна нулю.

Тело, находящееся в гравитационном поле, обладает запасом потенциальной энергии, то есть силы притяжения способны совершить работу по перемещению тела, что вызывает убыль его потенциальной энергии. Для поля тяготения, образованного массой  $M$ , можно ввести понятие потенциала  $V$  произвольной точки пространства, расположенной на расстоянии  $r$ . Потенциал количественно показывает работу, необходимую для перемещения пробного тела из некоей бесконечно удаленной точки пространства в интересующую произвольную. Если произвольная точка пространства имеет координаты  $x, y, z$ , а тело массой  $M$  имеет координаты  $a, b, c$ , то формула потенциала запишется так:

$$V = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \quad (1.2.2)$$

При наложении нескольких силовых полей их потенциалы складываются.

Потенциал является удобной физической величиной для описания свойств гравитационного поля. Если по всем направлениям от центра массы какого-либо тела отложить расстояния, соответствующие величинам потенциала, то вокруг тела образуется система точек, через которые можно провести изоповерхность, называемую эквипотенциальной. Эквипотенциальная поверхность служит зачастую достаточно исчерпывающим представлением гравитационного поля сложной конфигурации.

**Гравитационное поле Земли.** Сила притяжения всей массой Земли единичной массы  $m = 1$

$$\vec{F} = G \iiint_{\tau} \frac{dm}{\rho^2}, \quad (1.2.3)$$

где  $\rho$  – расстояние от притягиваемой единичной массы в точке  $(x, y, z)$  до элемента  $dm$  массы Земли в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ ;  $\tau$  – объем Земли [22].

В этом случае величина  $F$  численно равна ускорению свободного падения. Поэтому в гравиметрии принято силу тяжести представлять в единицах ускорения свободного падения.

Векторную величину ускорения  $F$  можно выразить через скалярные величины ее составляющих  $F_x, F_y, F_z$  по координатным осям  $x, y, z$

$$\begin{cases} F_x = G \iiint_{\tau} \frac{\xi - x}{\rho^3} dm, \\ F_y = G \iiint_{\tau} \frac{\eta - y}{\rho^3} dm, \\ F_z = G \iiint_{\tau} \frac{\zeta - z}{\rho^3} dm, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

где  $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ .

Составляющие  $F_x, F_y, F_z$  есть ни что иное, как частные производные по координатам притягиваемой точки от функции  $V$ , называемой потенциалом, или потенциальной функцией притяжения Земли

$$V = G \iiint_{\tau} \frac{dm}{\rho}, \quad (1.2.5)$$

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Потенциал притяжения Земли обладает следующими свойствами:

1) потенциал  $V$  и его первые производные являются однозначными, непрерывными и конечными функциями координат притягиваемой точки во всем пространстве вне притягивающих масс;

2) потенциал  $V$  является функцией регулярной, то есть в бесконечности он стремится к нулю;

3) при удалении от притягивающих масс Земли произведение  $\rho V$  стремится к пределу  $GM$ ;

4) в каждой точке вне притягивающих масс Земли потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0; \quad (1.2.6)$$

5) в каждой точке внутри притягивающих масс Земли справедливо уравнение Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G \delta, \quad (1.2.7)$$

где  $\delta$  – плотность масс, окружающих точку.

Формула (1.2.6) является частным случаем соотношения (1.2.7) при  $\delta = 0$ .

Нельзя забывать и о действии центробежных сил на массы. Центробежная сила  $P$ , существующая из-за суточного вращения Земли вокруг своей оси, пропорциональна расстоянию от оси вращения и квадрату угловой скорости  $\omega$  суточного вращения Земли

$$P = m \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m \omega^2 r, \quad (1.2.8)$$

где  $\omega = 2\pi/86164$  рад/с; 86164 – число сидерических секунд, в течение которых Земля делает полный оборот вокруг оси.

Действие центробежной силы на единицу массы

$$P = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.2.9)$$

где  $P$  – центробежное ускорение.

Компоненты центробежного ускорения по осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеют вид

$$P_x = \omega^2 x, \quad P_y = \omega^2 y, \quad P_z = 0. \quad (1.2.10)$$

Согласно определению потенциала его частные производные по осям координат равны компонентам ускорения по этим осям. Следовательно,

$$U = \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (1.2.11)$$

является потенциалом центробежного ускорения, так как

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x = P_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y = P_y. \quad (1.2.12)$$

В соответствии с равенствами (1.2.4) и (1.2.10) составляющие ускорения свободного падения по осям координат

$$\begin{cases} g_x = G \iiint_{\tau} \frac{\xi - x}{\rho^3} dm + \omega^2 x, \\ g_y = G \iiint_{\tau} \frac{\eta - y}{\rho^3} dm + \omega^2 y, \\ g_z = G \iiint_{\tau} \frac{\zeta - z}{\rho^3} dm, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Полная величина ускорения свободного падения  $g$  равна

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \quad (1.2.14)$$

и измеряется в СИ в метрах на секунду в минус второй степени (м/сек<sup>2</sup>). Однако в гравиметрии традиционно употребляется внесистемная единица «миллигал» (1 мГал =  $1 \times 10^{-3}$  Гал).

В гравиметрии для краткости  $g$  называют силой тяжести (точное выражение для  $g$  – ускорение свободного падения). Среднее значение силы тяжести на поверхности Земли равно 979,700 Гал. Полное изменение силы тяжести от экватора к полюсу составляет около 5,2 Гал. Значение силы тяжести на экваторе  $g_e = 978,032$  Гал, а на полюсах  $g_p = 983,218$  Гал.

Из двух составляющих силы тяжести сила притяжения значительно превышает действие центробежной силы и определяет в основном величину и направление силы тяжести. Центробежная сила на экваторе имеет максимальное значение и равна приблизительно 3,4 Гал, на полюсе – нулю.

Сила тяжести в данной точке поверхности Земли не остается постоянной с течением времени. Она изменяется в зависимости от положения небесных тел, мгновенной оси вращения в теле Земли, от изменения скорости вращения Земли, а также от перемещения масс Земли и атмосферы и деформации поверхности Земли [15]. Изменения силы тяжести принято делить на приливные и неприливные. Как те,

так и другие можно, в свою очередь, подразделить на вековые, периодические и непериодические. Причиной вековых изменений могут быть изменения гравитационной постоянной и замедление вращения Земли. Они вызывают очень небольшие изменения силы тяжести и экспериментально пока не обнаружены. Среди периодических главными являются приливные изменения, вызванные влиянием Луны и Солнца, достигающие  $2 \times 10^{-6}$  м/сек<sup>2</sup>. Непериодические изменения гравитационного поля вызываются природными явлениями (вулканическая деятельность, землетрясения, перемещения воздушных масс и др.) и даже человеческой деятельностью. По величине эти изменения являются наибольшими и могут достигать  $10^{-5}$  м/сек<sup>2</sup>.

Непериодические изменения всегда носят локальный характер и вызывают в целом для Земли незначительные деформации гравитационного поля. Неприливные изменения силы тяжести могут вызываться перераспределением масс внутри Земли, связанными с происходящими геологическими процессами, изменением физических свойств Земли, облучением радиоактивному разогреву, фазовым превращениям, конвекции, периодическим колебаниям атмосферного давления, сезонным выпадениям осадков. Скачкообразные изменения силы тяжести отмечены при извержении вулканов.

Для изучения формы и размеров Земли, процессов в недрах нашей планеты и поиска полезных ископаемых применяются различные гравиметры. Первый стационарный гравиметр был создан венгерским ученым Этвешем в 1888 году. В настоящее время широко применяются наземные и бортовые гравиметры, причем последние устанавливаются даже на искусственных спутниках Земли. Космическая гравиметрия позволила наиболее быстро и точно накопить огромный объем данных, обработка которых позволила построить наиболее точную модель поверхности Земли, на основании которой созданы такие известные общеземные эллипсоиды как ПЗ 90 и WGS 84.

Точность измерений современных гравиметров достигает 0,1 мГал. Появление судовых гравиметров объясняется не только геофизическими исследованиями. В последние годы довольно успешно развиваются методы навигации по геофизическим полям Земли. Среди них особое место занимают технологии определения места судна по гравитационному полю Земли. Суть их сводится к измерению характеристик поля тяжести в данной точке и сравнению результатов измерения с эталонными измерениями, выполненными заранее и привязанными с высокой точностью к координатам.

Потенциал силы тяжести  $W$  равен сумме потенциалов притяжения  $V$  и центробежного ускорения  $U$

$$W = V + U \quad (1.2.15)$$

Частные производные от функции  $W$  по координатам  $x, y, z$  равны составляющим силы тяжести  $g_x, g_y, g_z$ . Полное приращение потенциала силы тяжести  $dW$  будет равно

$$dW = g \cos(g, s) ds, \quad (1.2.16)$$

где  $s$  – произвольное направление,  $\cos(g, s)$  означает косинус угла между направлением силы тяжести  $g$  и произвольным направлением  $s$  в какой-либо точке пространства.

Формула (1.2.16) показывает, что приращение потенциала силы тяжести есть работа при перемещении массы тела в поле сил тяготения. Из этой формулы следует:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = g \cos(g, s) = g_s. \quad (1.2.17)$$

Таким образом, производная от потенциала силы тяжести по любому направлению  $s$  равна составляющей силы тяжести по этому направлению.

**Геом.** Выражение (1.2.17) позволяет сделать два важных вывода.

1. Если предположить, что  $\cos(g, s) = 0$ , то есть принять направление  $s$  перпендикулярным к направлению силы тяжести, то  $dW = 0$ . Следовательно,

$$W = \text{const}. \quad (1.2.18)$$

Так как  $W$  – функция координат  $x, y, z$ , то уравнение (1.2.18) представляет собой уравнение некоторой поверхности, обладающей тем свойством, что в любой ее точке сила тяжести направлена по нормали к ней. Каждая материальная точка на этой поверхности испытывает лишь действие силы, перпендикулярной к поверхности  $W$ . Такая поверхность соответствует поверхности жидкости, находящейся в состоянии равновесия, и поэтому называется *уровенной* или *экипотенциальной* поверхностью, то есть поверхностью равного потенциала. Из определения экипотенциальной поверхности очевидно, что *уровенные* поверхности не могут касаться друг друга или пересекаться.

2. Расстояние между соседними *уровенными* поверхностями, определенными уравнениями

$$W = C, \quad W + dW = C_1,$$

можно найти, если принять в выражении (1.2.16)  $\cos(g, s) = 1$ .

В этом случае

$$dW = g ds.$$

Отсюда  $ds = (1/g) dW$ .

Следовательно, расстояние по нормали между соседними уровенными поверхностями обратно пропорционально модулю действующей силы тяжести. Поскольку  $g$  не является постоянной во всех точках уровенной поверхности, то расстояние между соседними уровенными поверхностями неодинаково. На уровенной поверхности сила тяжести не остаётся ни по величине, ни по направлению, а потому и расстояние между двумя уровенными поверхностями в различных местах различно. Так, например, сила тяжести на полюсах больше, чем на экваторе, а следовательно, уровенные поверхности на полюсах будут располагаться ближе друг к другу, чем на экваторе.

3. Если единичная масса перемещается вдоль уровенной поверхности перпендикулярно направлению силы тяжести, то в этом случае работа не совершается. Иными словами, если какое-либо физическое тело находится на уровенной поверхности, и на это тело не действуют другие силы, то она не будет перемещаться по уровенной поверхности независимо от ее кривизны.

Итак, уровенных поверхностей вокруг Земли можно провести бесконечное количество, но ту из них, которая совпадает со средней поверхностью Мирового океана, находящуюся в невозмущенном состоянии, продолженную под материками, по предложению в 1873 году немецкого ученого И. Б. Листинга (1808 – 1882) называют основной уровенной поверхностью, а тело, ограниченное этой поверхностью – геоидом (то есть «землеподобный»). Понятие геоида имеет фундаментальное значение в исследовании Земли, освоении космоса, в картографии, и в современной спутниковой навигации. Например, горизонталы на навигационных картах в первом приближении представляют собой линии пересечения уровенных поверхностей с физической поверхностью Земли.

Если бы наша планета имела твердую поверхность в виде идеального шара с равномерной плотностью и покрытую морем, то водная поверхность под действием сил притяжения и сил, возникающих при вращении Земли, приняла бы форму идеального сфероида. Многочисленные радиолокационные исследования поверхности Земли, выполненные с искусственных спутников позволили с высокой точностью измерить и описать ее реальную поверхность. В совокупности с широкомасштабными гравиметрическими наблюдениями радиолокационные исследования из космоса позволили существенно уточнить параметры геоида и разработать более точную математическую модель геоида. Без

подобных дорогостоящих работ невозможно функционирование современных высокоточных спутниковых радионавигационных систем Навстар GPS и Глонасс.

Исследования показали, что в открытых частях Мирового океана отклонение среднего уровня воды от геоида может достигать 1 метра. Кроме того, обнаружена довольно значительная асимметрия между Северным и Южным полушариями. Несимметричность полушарий выражается в том, что в Северном по площади преобладают материки, а в Южном – океаны, на Южном полюсе находится материк, на Северном – океан.

Рельеф поверхности материков, как и сами материки, создает заметное отклонение реальной земной поверхности от геоида. Не в меньшей мере этому способствует неравномерное распределение твердых масс в теле Земли. В итоге форма геоида отличается от сфероида, обычно принимаемого за истинную форму Земли. Поверхность геоида достаточно сложная и обычно всюду выпуклая в соответствии с выпуклостью поверхности Мирового океана. Она резко выступает над поверхностью сфероида. Так, на экваторе отклонения геоида от сфероида обычно составляют не более  $\pm 100$  м и лишь в отдельных случаях +125 и -140 м. Там, где поверхность Мирового океана пересекается с материками, отмечается небольшой подъем поверхности геоида. Отмечены многочисленные локальные вогнутости и выпуклости геоида, играющие большое положительное значение в навигации по гравитационному полю Земли. С другой стороны, сложная неправильная форма геоида вызывает возмущения в орбитах искусственных спутников Земли. По мере уточнения формы геоида вносятся поправки в искажения орбит навигационных спутников, что позволяет с более высокой точностью предвычислять их пространственные координаты и тем самым повышать точность определения места наземных потребителей.

Французский учёный А. Клеро (1713 – 1765) установил связь между сжатием земного эллипсоида и изменением ускорения силы тяжести на его поверхности в зависимости от широты. В 1743 году вышла в свет его работа “Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики”, в которой он, развивая теорию Ньютона, показал, что Земля имеет форму сфероида, и что ускорение силы тяжести на поверхности изменяется как функция широты по закону

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

где  $\varphi$  – широта данной точки на поверхности Земли,  $g_e$  – ускорение силы тяжести на экваторе,



$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha,$$

$\alpha$  – сжатие,  $q = \frac{\omega^2 a}{g_e}$  – отношение для экватора центробежной силы к силе тяжести,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $a$  – большая полуось эллипсоида.

Следующим существенным этапом в развитии теории после работ Клеро были исследования Г. Стокса (1819 – 1903). Стокс поставил и решил задачу определения формы внешней уровенной поверхности потенциала силы тяжести по данным измерений ускорения силы тяжести. Дальнейшие исследования и опыт применения теории геоида содержится в трудах Ф.А. Слудского (1841 – 1897). Ф. Гельмерт (1843 – 1917) выполнил важные работы по использованию накопившихся к тому времени гравиметрических данных для определения сжатия земного эллипсоида и распределения силы тяжести на его поверхности. Работами Ф.Н. Красовского было доказано, что полное решение геодезических задач возможно только с использованием данных гравиметрии. По его инициативе в СССР был осуществлён переход от метода развёртывания геодезических данных к методу проектирования их на поверхность эллипсоида. В связи с постановкой этой задачи М.С. Молоденским был разработан метод астрономо-геодезического нивелирования. В течение длительного времени изучение фигуры Земли неразрывно связывалось с изучением геоида. Однако геоид нельзя считать всюду внешней уровенной поверхностью, следовательно, непосредственно к нему теория Стокса неприменима. В связи с этим в теории фигуры Земли возникла проблема регуляции, то есть проведения вспомогательных операций, которые делали бы геоид внешней уровенной поверхностью. В 1945 году М.С. Молоденским была поставлена и решена основная задача изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли, исходя из совершенно новой постановки проблемы. Показав принципиальную невозможность строгого изучения геоида только по результатам геодезических и гравиметрических измерений на поверхности Земли, М.С. Молоденский создал теорию, определяющую непосредственно фигуру физической поверхности Земли и внешнее гравитационное поле. Тем самым была исключена сложная проблема регуляции и получена строгая теория, решающая основную задачу высшей геодезии [83].

Форма поверхности геоида под материками имеет гораздо более сложный вид и не поддается точному математическому описанию. В

связи с этим видным советским ученым М.С. Молоденским предложена вспомогательная поверхность – квазигеоид, которую можно определить без учета гипотез о строении Земли. Квазигеоид не является уровенной поверхностью потенциала силы тяжести. Отклонения  $\Delta$  по высоте поверхности квазигеоида от поверхности геоида могут быть вычислены по следующей формуле [15]:

$$\Delta = \frac{\gamma_m - g_m}{g_m} H^\gamma,$$

где  $g_m$  и  $\gamma_m$  – средние значения действительной и идеализированной (нормальной) силы тяжести для данной точки поверхности Земли  $m$ ,  $H^\gamma$  – высота точки  $m$  физической поверхности Земли над поверхностью квазигеоида. Как показывает подсчеты по приведенной выше формуле, отклонения  $\Delta$  на равнинах составляют несколько сантиметров, а в горах могут достигать 2–3 м. Поскольку на поверхности океана разности потенциалов на поверхностях геоида и квазигеоида равны нулю, то есть  $\gamma_m - g_m = 0$ , то в океане геоид совпадает с квазигеоидом. Таким образом, квазигеоид только на материках, да и то незначительно, отстает от уровенной поверхности потенциала силы тяжести, совпадающей с уровнем моря. Но поскольку положение геоида под материками не может быть точно определено, то за уровень моря приходится принимать поверхность квазигеоида, относительно которого отсчитываются высоты, используемые для изображения рельефа на картах.

На навигационных картах высоты даются от нуля высот, который в общем случае не совпадает с поверхностью геоида. В отечественных таблицах приливов приводятся средние уровни моря ( $z_0$ ) для основных пунктов. Эти величины полезны для прибавления к возвышению антенны приемника спутниковой РНС над уровнем моря, так как повышает точность определения координат судна, особенно при плавании вблизи берегов, когда рельеф местности может затенить сигналы части спутников. При больших расстояниях от берега средний уровень моря почти совпадает с поверхностью геоида.

Авиационные приемники спутниковых РНС, особенно предназначенные для слепой посадки, обязательно учитывают разность высот между поверхностью геоида и поверхностью квазигеоида.

Существует ещё одна характеристика, называемая геопотенциалом или геопотенциальным числом. Им является приращение потенциала силы тяжести между произвольной точкой на поверхности Земли  $A$  и

некой отсчётной точкой (например, нулевым значением футштока)  $O$ , взятое с обратным знаком

$$\varpi_A = \int_{(OA)} g dh.$$

Поверхности, имеющие равные геопотенциалы, то есть просто уровенные поверхности потенциала силы тяжести, называют иногда геопами. Пользуясь этим термином, можно сказать, что геоид есть геоп с нулевым геопотенциалом.

Понятия геоида и квазигеоида играют важную роль в определении так называемых астрономических координат. Астрономической широтой ( $\varphi_a$ ) точки на поверхности Земли называется угол, заключенный плоскостью экватора и направлением отвесной линии, то есть направлением вектора силы тяжести. Поскольку отвесная линия всегда перпендикулярна поверхности геоида, то точки на поверхности Земли, одинаково удаленные от экватора не всегда будут иметь одну и ту же астрономическую широту. Астрономической долготой ( $\lambda_a$ ) точки на поверхности Земли называется двугранный угол, заключенный между плоскостями Гринвичского меридиана и астрономического меридиана данной точки [23].

**Нормальный потенциал Земли.** Сложная структура гравитационного поля Земли, порождаемая неправильностью ее формы и неравномерным распределением масс в ее недрах, обуславливает значительные трудности при определении потенциала силы тяжести  $W$ . Проблема определения потенциала  $W$  может быть значительно облегчена, если построить модель гравитационного поля Земли, близкую к ее действительному гравитационному полю. За такую модель можно принять гравитационное поле уровенного эллипсоида вращения, то есть эллипсоида, внешняя поверхность которого является уровенной поверхностью силы тяжести и в каждой точке которого сила тяжести направлена по нормали. Модель гравитационного поля принято называть нормальным гравитационным полем, а потенциал этого поля – нормальным потенциалом  $Q$ .

Нормальное поле значительно проще действительного поля Земли. Его уровенные поверхности могут быть использованы как координатные при определении положения точек физической поверхности Земли. Нормальное поле представляется как поле

идеального физического тела, заменяющего реальную Землю и называемого нормальной Землей [15].

Построение нормального поля позволяет выделить из действительного гравитационного поля Земли его основную часть и рассматривать не полные элементы поля, а малые разности соответствующих элементов действительного и нормального полей. В этом случае задача определения фигуры Земли заключается в изучении отклонений ее физической поверхности от поверхности «модели» (называемой иначе фигурой сравнения), а задача определения потенциала  $W$  сводится к определению небольших величин  $T = W - Q$ . Величина  $T$  получила название возмущающего потенциала Земли. Очевидно, что между величинами  $T$  и отклонениями физической поверхности Земли от фигуры сравнения должна существовать определенная связь, используя которую можно определить эти отклонения.

Определение нормального потенциала возможно на основе теории, разработанной английским ученым Стоксом. В ее основе лежит теорема, которая формулируется следующим образом: если известна общая масса планеты, ее угловая скорость вращения и форма внешней уровенной поверхности потенциала силы тяжести, то потенциал силы тяжести и сама сила тяжести определяются однозначно как во всем внешнем пространстве, так и на самой уровенной поверхности. Теорема Стокса замечательна тем, что она освобождает от необходимости знать закон распределения плотностей внутри притягивающих масс при определении внешнего потенциала. Определение потенциала силы тяжести по данным теоремы Стокса составляет так называемую проблему Стокса.

Проблема Стокса для уровенного эллипсоида вращения может быть сформулирована следующим образом: известны его общая масса  $M$ , угловая скорость вращения  $\omega$  и большая  $a$  и малая  $b$  полуоси (обычно вместо малой полуоси задается параметр  $\alpha$  – полярное сжатие эллипсоида), необходимо определить  $Q$  – потенциал этого эллипсоида и силу тяжести  $\gamma_0$ , которую называют нормальной силой тяжести, как во всем внешнем пространстве, так и на поверхности эллипсоида.

Значение нормального потенциала  $Q$  (с точностью до малых величин второго порядка) на поверхности уровенного эллипсоида определяется формулой:

$$Q = \frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^2 \right) + \frac{1}{3}\omega^2 a^2. \quad (1.2.19)$$

Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида (нормальная сила тяжести  $\gamma_0$ ) определяется формулой Сомильяна

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (1.2.20)$$

где  $B$  – геодезическая широта;  $\gamma_e$  – нормальная сила тяжести на экваторе;  $\gamma_p$  – нормальная сила тяжести на полюсе;  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипсоида соответственно.

Формулу Сомильяна можно упростить. Путем некоторых преобразований, удерживая малые величины второго порядка, можно получить приближенную формулу

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (1.2.21)$$

где

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma}, \quad \beta_1 = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta. \quad (1.2.22)$$

Формула (1,2.21) называется формулой Клеро с малыми величинами второго порядка, величина  $\beta$  получила название гравиметрического сжатия.

В России для вычисления нормальной силы тяжести применяется формула Гельмерта:

$$\gamma_0 = 9,7803 (1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B) \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}. \quad (1.2.23)$$

Её применение объясняется тем, что сжатие, соответствующее коэффициенту  $\beta = 0,005302$ , определенному Гельмертом ( $\alpha = 1/298,2$ ), практически совпадает со сжатием эллипсоида Красовского. Постоянные  $\gamma_e$  и  $\beta$  определены Гельмертом по результатам гравиметрической съемки того времени, коэффициент  $\beta_1$  получен теоретически по данным о внутреннем строении Земли.

Нормальное гравитационное поле вполне определяется четырьмя параметрами. Так, для определения нормального потенциала (1.2.19) в соответствии с теорией Стокса требуется знать:  $GM$ ,  $\alpha$ , и  $\omega$ . Величина  $GM$  (произведение массы Земли на универсальную гравитационную постоянную) носит название геоцентрической гравитационной постоянной. Кроме того, необходимо еще знать  $Q$ ,  $\gamma_e$ ,  $\beta$  и  $\beta_1$ .

При помощи нормального потенциала (то есть потенциала уровенного эллипсоида) и возмущающего потенциала можно достаточно точно описать геоид. Если по аналогии с формулой

(1.2.15) для действительного потенциала Земли представить нормальный потенциал

$$Q = V_0 + Q_c, \quad (1.2.24)$$

где  $V_0$  – потенциал притяжения уровенного эллипсоида, а  $Q_0$  – потенциал его центробежной силы, и взяв разность между  $W$  и  $Q$ , то получим следующее выражение для возмущающего потенциала  $T$ :

$$T = (V - V_0) + (U - Q_0). \quad (1.2.25)$$

Как видно из полученного выражения, величина возмущающего потенциала существенно зависит от выбора нормального потенциала, то есть от того, какой эллипсоид взят в качестве уровенного. Забегая вперед, следует заметить, что в качестве уровенного эллипсоида иногда берут специально рассчитанный, общеземной или даже референц-эллипсоид. Иногда один эллипсоид выступает в качестве этих трех. Примером тому служит эллипсоид WGS 84, лежащий в основе спутниковой СРНС Навстар GPS.

При выборе уровенного эллипсоида в качестве нормальной Земли руководствуются следующими соображениями:

1) центр уровенного эллипсоида вращения должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось инерции, являющаяся осью его вращения, – с осью вращения Земли;

2) угловые скорости вращения  $\omega$  уровенного эллипсоида и реальной Земли должны быть одинаковыми;

3) масса уровенного эллипсоида должна быть равна массе реальной Земли;

4) зональные гармонические коэффициенты геопотенциала второй степени (см. ниже) для уровенного эллипсоида и реальной Земли должны совпадать;

5) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести на геоиде.

Достаточно часто вместо нормального потенциала включают большую полуось уровенного эллипсоида. В этом случае пятое условие формулируется иначе: большая полуось уровенного эллипсоида должна быть подобрана таким образом, чтобы его объем равнялся объему геоида.

**Модель гравитационного поля Земли.** Для решения ряда задач геодезии, геофизики, спутниковой навигации крайне необходимо иметь математическую модель потенциала притяжения нормальной Земли (включая ее атмосферу). Для описания гравитационных полей

планет широко применяется представление потенциала притяжения в виде разложения в ряд шаровых (сферических) функций геоцентрических координат  $\rho, \varphi_r, \lambda_r$

$$V_0 = \frac{GM}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{\rho} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi_r) \times (C_{nm} \cos m\lambda_r + S_{nm} \sin m\lambda_r) \right], \quad (1.2.26)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор;  $a$  – экваториальный радиус Земли;  $m$  – порядок гармоники (от 0 до  $n$ ),  $n$  – степень гармоники (от 2 до  $\infty$ ),  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  – безразмерные коэффициенты, определяемые формой планеты и распределением масс внутри ее,  $P_{nm}(\sin \varphi_r)$  – так называемые присоединенные функции Лежандра (полиномы Лежандра), функции  $P_{nm}(\sin \varphi_r) \cos m\lambda_r$  и  $P_{nm}(\sin \varphi_r) \sin m\lambda_r$  называется сферическими гармониками. Гармоники с номером  $m = 0$  называются зональными, с  $0 < m < n$  – тессеральными, а с  $m = n$  – секториальными. В связи с тем, что начало координат совмещено с центром масс Земли, в формуле (1.2.26) отсутствуют гармоники первой степени. Зональные гармоники характеризуют, например, полярное сжатие Земли (то есть  $C_{20} = \alpha$ ), несимметрию полушарий, тессеральные – эллиптичность экватора и т.д. Если бы наша планета обладала геометрической и динамической симметрией относительно оси вращения, то в разложении потенциала притяжения присутствовали бы одни зональные гармоники ( $m = 0$ ). Если бы Земля обладала геометрической и динамической симметрией, то в разложении присутствовали бы только зональные гармоники с четными  $n$ .

**Модель поверхности геоида.** Формула (1.2.26) является основополагающей для расчета координат точек поверхности геоида в пространственных полярных координатах. Для этого достаточно умножить радиус-вектор  $\rho$  в знаменателе коэффициента перед квадратной скобкой видоизмененной формулы (1.2.26) на теоретическую (нормальную) силу тяжести  $\gamma_0$ . Таким образом можно получать отстояния точек поверхности геоида  $N$  от поверхности принятого Земного эллипсоида:

$$N = \frac{GM}{\rho \gamma_0} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{\rho} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi_r) \times (C_{nm} \cos m\lambda_r + S_{nm} \sin m\lambda_r) \right]. \quad (1.2.27)$$

В приемоиндикаторах спутниковой РНС Навстар GPS координаты точек поверхности геоида обычно задаются в виде таблицы отстояний поверхности геоида от поверхности референс-

эллипсоида WGS 84. Для нахождения отстояний в промежуточных точках применяется интерполяция. Такой способ задания поверхности геоида сильно упрощает вычислительные процедуры.

### 1.3. ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД

Геоид имеет довольно сложную форму. Поэтому его используют в качестве первого и достаточно строгого приближения к реальной форме Земли, но не применяют в качестве поверхности, на которую можно переносить координаты точек земной поверхности. Самым первым приближением к форме геоида является земной шар или земная сфера. Земная сфера характеризуется радиусом, который зачастую принимается равным 6370 км, длиной дуги одной минуты большого круга, которую приближённо считают равной одной морской миле (1852 м). Есть ещё один показатель земной сферы, имеющий историческое значение. Им является длина четверти меридиана  $\pi R/2$ , которая приблизительно равна 10000 км. Именно эта величина послужила основой для определения длины 1 метра. В 1799 году французской Генеральной комиссией мер и весов была определена длина 1 метра как одна десятимиллионная часть длины четверти Парижского меридиана, вычисленная Деламбером [74, 78]. В картографии для составления генеральных карт целесообразно принимать такой радиус земной сферы, поверхность которой равна поверхности референц-эллипсоиду. Например, для международного референц-эллипсоида Хейфорда  $R = 6371,228$  км.

Во втором приближении тело Земли принимают за эллипсоид, образованный вращением вокруг его малой оси. Размеры и ориентация поверхности эллипсоида устанавливаются так, чтобы она была как можно ближе к основной уровенной поверхности – геоиду. Такой эллипсоид называется земным эллипсоидом. Иногда его называют земным сфероидом из-за того, что сфероидом является эллипсоид с малым сжатием по оси вращения. Иными словами, сфероид мало отличается от сферы. Многочисленные измерения и расчёты показали, что длина малой полуоси земного сфероида приблизительно на 21 км короче радиуса земной сферы, что составляет  $\approx 1/300$  часть.

Поверхность земного эллипсоида, образованная вращением эллипса вокруг его малой оси, в современной геодезии, картографии и в навигации принимают за математическую поверхность, на которую проектируют объекты, принадлежащие физической поверхности Земли. Традиционно это выполняется вот уже более 200 лет по двум причинам. Первая причина заключается в том, что для отдельной территории,



государства, континента или всей Земли всегда можно подобрать такие элементы эллипсоида, при которых его математическая поверхность будет проходить с наперёд заданной точностью вблизи точек физической поверхности Земли или вблизи поверхности принятого геоида. Это намного увеличивает точность карт по сравнению с тем, если бы за математическую поверхность была взята поверхность земной сферы. Вторая причина кроется в сравнительно простых математических расчётах направлений и расстояний на поверхности эллипсоида, что заметно облегчает построение карт в любых картографических проекциях.

**Элементы земного эллипсоида.** Поверхность эллипсоида вращения вполне определяется его меридианным эллипсом. Форма эллипса однозначно задаётся его главными полуосями. Большая (экваториальная) полуось  $a$  (см. рис. 1) является радиусом экватора земного сфероида. Основное свойство эллипса заключается в том, что сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная  $2a$ . Малая (полярная) полуось  $b$  находится в определённом отношении с большой полуосью, характеризующим форму данного меридианного эллипса. Разность  $a - b$  принято называть линейным сжатием. Отношение  $b/a$ , которое близко к единице, также характеризует форму образующего эллипса, но оно редко используется в сфероидической геодезии из-за слабой чувствительности. Чаще применяются иные формы относительных сжатий.

В официальных документах земные эллипсоиды имеют собственные названия и задаются двумя параметрами: величиной большой (экваториальной) полуоси и первым сжатием. Первое (полярное) сжатие в официальных документах представляется либо в виде дроби. Например, первое сжатие эллипсоида Красовского представляют как  $1/298,3$ . В отечественной литературе первое сжатие принято обозначать буквой  $\alpha$ . В зарубежных источниках первое сжатие обозначают буквой  $f$ . Чтобы отобразить знаменатель сжатия, его обозначают как  $f^1$ . Величины  $a$  и  $\alpha$  называют главными (исходными) параметрами земного эллипсоида. Дело в том, что все методы обработки градусных или гравиметрических наблюдений, предпринимаемых с целью определения геометрических характеристик земного эллипсоида, направлены на вычисление размера его большой полуоси и знаменателя первого сжатия. Главные параметры применяются в расчётах всегда с той точностью, с которой они объявлены в официальных документах. Все остальные параметры

земных эллипсоидов являются вычисленными и считаются вторичными. Поэтому они в различных литературных источниках могут отличаться по точности. Ко вторичным параметрам относятся размер малой полуоси, эксцентриситеты, а также величины  $n$  и  $m$ , не имеющие названия.

Величину малой полуоси рассчитывают с помощью главных параметров эллипсоида по следующей формуле:

$$b = a(1 - \alpha), \quad (1.3.1)$$

а первый эксцентриситет по формуле

$$e = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}. \quad (1.3.2)$$

Если величина малой полуоси ( $b$ ) получена с высокой точностью, то можно иначе рассчитать первое сжатие

$$\alpha = \frac{a - b}{a},$$

а также второе сжатие

$$\alpha' = \frac{a - b}{b}$$

и третье сжатие

$$\alpha'' = \frac{a - b}{\frac{1}{2}(a + b)} = 2n.$$

Первый эксцентриситет ( $e$ ), второй эксцентриситет ( $e'$ ) и третий эксцентриситет ( $e''$ ) с использованием размера малой полуоси рассчитываются по следующим формулам :

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}, \quad e'' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\frac{1}{2}(a^2 - b^2)}}, \quad e''^2 = 2m. \quad (1.3.3)$$

$$\text{Отсюда следует, что} \quad n = \frac{a - b}{a + b}, \quad m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.3.4)$$

Приведённые выше эксцентриситеты называют ещё численными эксцентриситетами.

Геометрию образующего эллипса характеризует ещё и так называемый линейный эксцентриситет, который является расстоянием от центра образующего эллипсоида до каждого его фокуса (рис. 1).

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

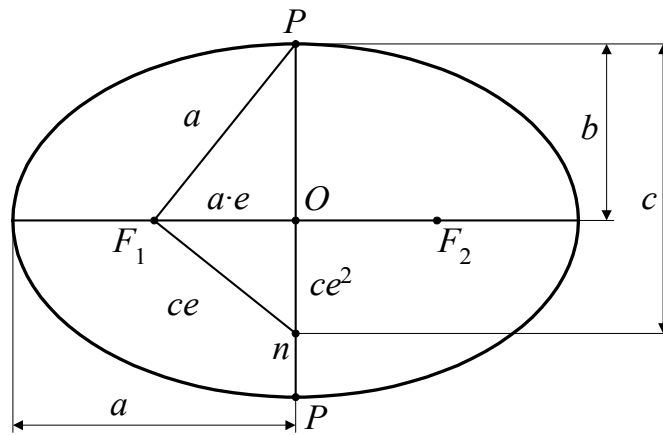


Рис. 1. Элементы меридианного эллипса

Первый эксцентриситет есть отношение линейного эксцентриситета к большой полуоси. Второй эксцентриситет выражает линейный в частях малой полуоси. Квадрат третьего эксцентриситета можно определить как отношение квадрата линейного эксцентриситета к полусумме квадратов полуосей. В навигационных и геодезических расчётах иногда используют другой линейный показатель  $c = a^2/b$ , также характеризующий геометрию меридианного эллипса и являющийся гипотенузой треугольника  $PF_1n$ .

Для контроля расчётов полезно будет руководствоваться следующими приближёнными значениями параметров [12, 75]:

$$\alpha \approx 2n \approx \frac{e^2}{2} \approx \frac{1}{300}, \quad e^2 \approx e'^2 \approx 2\alpha \approx 4n \approx \frac{1}{150}, \quad n \approx \frac{\alpha}{2} \approx \frac{e^2}{4} \approx \frac{1}{600}.$$

Ниже приводятся расчётные формулы для вычисления параметров земных эллипсоидов [12, 75].

$$b = a \frac{1-n}{1+n} = a \sqrt{1-e^2} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{c} = c(1-e^2); \quad (1.3.5)$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-e^2} = \frac{2n}{1+n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} = 1 - \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = 1 - \frac{b}{a}; \quad (1.3.6)$$

$$e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} = \frac{2m}{1+m} = 1 - \frac{1}{1+e'^2}; \quad (1.3.7)$$

$$(1-e^2)(1+e'^2) = 1; \quad 1-e^2 = (1-\alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

$$e'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = \frac{1}{1-e^2} - 1 = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1-\alpha)^2} = \frac{4n}{(1-n)^2} = \frac{2m}{1-m}; \quad (1.3.8)$$

$$1 + e'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

$$n = \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{\alpha^2}{e^2} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1+e^2}} = \frac{\sqrt{1+e'^2}-1}{\sqrt{1+e'^2}+1} = \frac{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}}; \quad (1.3.9)$$

$$m = \frac{2\alpha - \alpha^2}{2-2\alpha + \alpha^2} = \frac{2n}{1+n^2} = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{e'^2}{2+e'^2}; \quad (1.3.10)$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{1+n} = \frac{b}{1-n} = \frac{c(1-n)}{(1+n)^2} = a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{b}{1-e^2} = \frac{a}{1-\alpha} = \frac{a(1+n)}{1-n}. \quad (1.3.10a)$$

С целью упрощения вычислительных процедур, а также для того, чтобы выполнять их без особой потери точности даже на малой вычислительной технике, ниже представлены формулы расчёта параметров эллипса в виде степенных рядов [75].

$$\alpha = 2n - 2n^2 + 2n^3 - 2n^4 + \dots; \quad \alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \frac{e^8}{128} + \dots;$$

$$\alpha = \frac{e'^2}{2} - \frac{3e'^4}{8} + \frac{5e'^6}{16} - \frac{35e'^8}{128} + \dots;$$

$$e^2 = 4n - 8n^2 + 12n^3 - 16n^4 + \dots; \quad e^2 = e'^2 - e'^4 + e'^6 - e'^8 + \dots;$$

$$e'^2 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 + \dots; \quad e'^2 = 4n + 8n^2 + 12n^3 + 16n^4 + \dots;$$

$$n = \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \dots; \quad n = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{64} + \frac{e^8}{128} + \dots;$$

$$n = \frac{e'^2}{4} - \frac{e'^4}{8} + \frac{5e'^6}{64} - \frac{7e'^8}{128} + \dots;$$

$$m = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^5}{4} + \dots; \quad m = 2n - 2n^3 + 2n^5 - \dots;$$

$$m = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8} + \frac{e^8}{16} + \dots; \quad m = \frac{e'^2}{2} - \frac{e'^4}{4} + \frac{e'^6}{8} - \frac{e'^8}{16} + \dots$$

**Координаты.** Установим систему координат для земного эллипсоида, для чего воспользуемся системой декартовых прямоугольных координат [12].

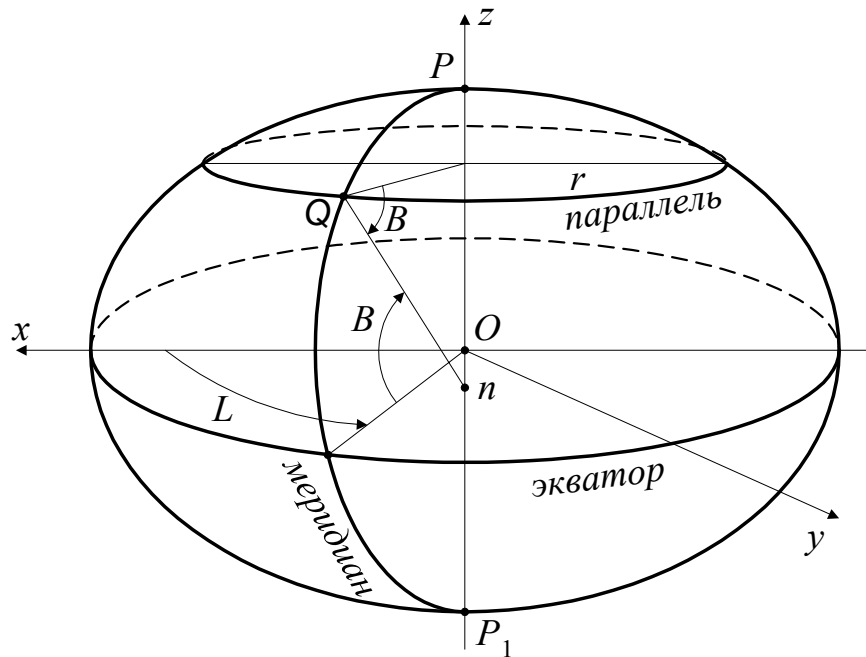


Рис. 2. Система координат земного эллипсоида

Начало координат поместим в центре эллипсоида, ось  $z$  направим вдоль оси вращения, ось  $x$  – в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, ось  $y$  перпендикулярна осям  $x$  и  $z$  и дополняет систему координат до правой (рис. 2).

Из аналитической геометрии следует, что в этой системе координат уравнение поверхности эллипсоида вращения в канонической форме имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.3.11)$$

Умножим его на  $a^2$ , чтобы получить другой вид уравнения поверхности эллипсоида вращения:

$$x^2 + y^2 + z^2(1 + e'^2) = a^2. \quad (1.3.12)$$

Возьмем плоскость  $z = const$ . Найдём след пересечения поверхности эллипсоида этой плоскостью. Совместное решение

уравнений этой плоскости и поверхности эллипсоида даст нам уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = r^2 = const, \quad (1.3.13)$$

где  $r$  – радиус окружности. Следовательно, при пересечении поверхности эллипсоида любой плоскостью, перпендикулярной оси вращения, всегда получается окружность. Эти окружности называются параллелями. Параллель с наибольшим радиусом, равным большей полуоси эллипсоида ( $r = a, z = 0$ ), называется экватором. Экватор делит эллипсоид на две симметричные половины. Верхний полусфероид с полюсом  $P$  (см. рис. 2) принято называть северным, нижний с полюсом  $P_1$  – южным полусфероидом. Любой параллели с радиусом  $r$  в северном полусфероиде соответствует с точно таким же радиусом параллель в южном полусфероиде.

Если поверхность эллипсоида пересекать плоскостями, проходящими через ось вращения, то следы пересечения дадут семейство совершенно одинаковых эллипсов. Половина каждого эллипса, расположенная между полюсами, называется меридианом. Выразим через  $r$  координаты  $x$  и  $y$  в уравнении (1.3.11), используя уравнение (1.3.13). Тогда получим уравнение меридиана

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (1.3.14)$$

Параллели и меридианы можно принять в качестве системы ортогональных линий на эллипсоиде. Это вполне возможно, так как каждая параллель пересекается с каждым меридианом под прямым углом, а точка их пересечения определяет единственное положение любой точки на поверхности данного полусфероида. Исключение составляют полюса  $P$  и  $P_1$ , в которых сходятся все меридианы. Полюсы представляют собой так называемые особые точки поверхности для данной системы координатных линий – меридианов и параллелей. Семейство параллелей и семейство меридианов представляют собой наиболее простую сеть координатных линий на поверхности эллипсоида.

В качестве координат на поверхности эллипсоида можно использовать и линейные величины – длины дуг меридианов и параллелей. Такая система координат обладает более высокой чувствительностью и поэтому в последнее время находит все более широкое распространение в навигации из-за повсеместного использования приемопередатчиков спутниковых навигационных систем и устройств отображения электронных карт, обладающих высокоскоростными микропроцессорами, благодаря чему осуществляется быстрый переход от угловой системы координат к линейной и наоборот. В современной навигации продолжает

сохраняться угловая система координат главным образом из-за влияния мореходной астрономии.

Примем один из меридианов в качестве начального. На рис. 2 начальный меридиан проходит через ось  $x$ . Тогда положение любого другого меридиана будет определяться двугранным углом, образованным плоскостью начального меридиана и плоскостью данного меридиана. Этот угол имеет одну и ту же величину для всех точек данного меридиана и, следовательно, может быть принят в качестве координаты для меридиана. Такой угол для земного эллипсоида называется геодезической долготой. Её в отечественной литературе принято обозначать через  $L$ . Долготы, отсчитываемые от плоскости начального меридиана к востоку (со стороны северного полюса – против движения часовой стрелки) в пределах от  $0$  до  $+180^\circ$ , называются восточными долготами, а к западу в пределах от  $0$  до  $-180^\circ$  – западными долготами. В последние годы в зарубежной литературе по навигации и геодезии встречается способ отсчета геодезической долготы от  $0$  до  $360^\circ$  к востоку.

Таким образом, меридиан есть координатная линия, во всех точках которой геодезическая долгота имеет одну и ту же величину ( $L = const$ ).

Установим координату для параллели, для чего в некоторой точке  $Q$  проведем нормаль меридиана. Нормаль пересечет строго вертикально касательную плоскость, приложенную к поверхности земного эллипсоида в точке  $Q$ , и затем пересечет ось вращения в точке  $n$ . Из-за симметричности поверхности эллипсоида относительно меридиана прямая  $Qn$  будет перпендикулярна одновременно к касательной к меридиану и касательной к параллели.

Острый угол, составленный нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора (или плоскостью любой параллели), называется геодезической широтой и обозначается буквой  $B$ . Геодезическая широта отсчитывается от плоскости экватора в пределах от  $0$  до  $90^\circ$ . Для точек, расположенных в северном полушароиде, её принято считать положительной, а в южном полушароиде – отрицательной. Следовательно, параллель есть координатная линия, во всех точках которой геодезическая широта имеет одну и ту же величину ( $B = const$ ).

Система геодезических координат  $B$  и  $L$  представляет собой главную систему координат, позволяющую однозначно определять положение любой точки на поверхности эллипсоида. Название «геодезические координаты» не подразумевает применение их только в геодезии. Так называются координаты, принадлежащие земному

эллипсоиду. Навигационные карты представляют собой проекцию Меркатора участков земного эллипсоида на плоский лист бумаги или на плоский экран электронного устройства отображения. Следовательно, судоводители, работая с навигационной картой, имеют дело с геодезическими координатами.

В навигации широко используется термин географические координаты. Строго говоря, такой системы координат нет. Этим термином объединяют два рода координат: геодезические и астрономические. Для приближенного решения задач, когда не нужно учитывать разности геодезических и астрономических точек, применяются географические координаты, обозначаемые буквами  $\varphi$  и  $\lambda$  [11, 12, 75].

С появлением спутниковых приемников возникла необходимость учета и третьей координаты в геодезической системе координат. Ею является высота над эллипсоидом. Правильный учет высоты антенны приемника существенно влияет на точность определения обсервованных координат. Автор счел необходимым указать английские эквиваленты отечественным терминам, чтобы облегчить читателю освоение приемников иностранного производства.

В системе геодезических координат применяется геодезическая высота (geodetic height)  $H$ . Ею является высота точки над поверхностью земного эллипсоида. Она измеряется по нормали из точки к поверхности эллипсоида [3, 13, 14]. Геодезическая высота состоит из гипсометрической и геоидальной высот. Гипсометрическая высота  $H_0$  – это высота точки  $A$  (см. рис. 3) над геоидом (квазигеоидом). В зависимости от способа определения гипсометрическая высота имеет следующие названия: ортометрическая, нормальная и динамическая высота. Геоидальная высота (geoid height, или geoidal height)  $\xi$  – это возвышение геоида (квазигеоида) над земным эллипсоидом. Она отсчитывается по нормали к поверхности эллипсоида. Ее еще называют аномалией высоты. Если поверхность геоида возвышается над поверхностью земного эллипсоида, то геоидальная высота считается положительной, в противном случае – отрицательной.



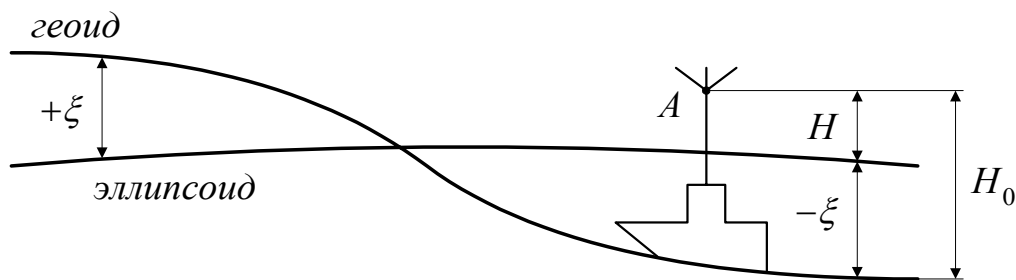


Рис. 3. Понятие геодезической высоты

Гипсометрическая высота определяет рельеф физической поверхности Земли над поверхностью геоида (квазигеоида), а геоидальная часть характеризует рельеф самого геоида и его отклонения от поверхности земного эллипсоида. Формула для определения геодезической высоты имеет следующий вид:

$$H = H_0 + \xi. \quad (1.3.15)$$

Ортометрическая высота (orthometric elevation) – это высота точки  $A$  над поверхностью геоида, вычисляемая как отношение разности потенциала на поверхности геоида и потенциала в точке  $A$  к среднему значению силы тяжести Земли в окрестности места судна. Ортометрическая высота может быть определена с высокой точностью, но для этого требуется достоверное знание строения земной коры, что ограничивает ее применение в морской навигации.

Нормальная высота (normal elevation, или normal height) – расстояние по нормали от точки  $A$  до ее проекции на поверхности квазигеоида. Предложена С.М. Молоденским в 1945 году. Поэтому в зарубежной литературе ее называют «высотой Молоденского» (Molodensky elevation). Ее достоинство состоит в том, что вычисляется она без знания строения земной коры. Нормальные высоты в морях и океанах совпадают с ортометрическими, в равнинной местности расхождения между ними могут достигать нескольких сантиметров, а в горных районах – до 2–3 метров.

Динамические высоты (dynamic height) – высоты, рассчитанные для некоторой акватории из расчета нормальной силы тяжести для широты  $45^\circ$ . Применяются в морской геодезии, чтобы освободиться от учета текущего положения уровня моря.

Если на судне эксплуатируется универсальный спутниковый приемоиндикатор, способный решать штурманские и геодезические задачи, то в инструкции по его эксплуатации достаточно корректно указываются названия перечисленных выше высот. В сугубо морских приемоиндикаторах чаще используется ортометрическая высота как

синоним гипсометрической. Не совсем правильно применяется термин «высота над уровнем моря» (height above sea level) вместо гипсометрической, так как уровень моря не всегда совпадает с поверхностью геоида, хотя и близок к нему.

Установим теперь связь между геодезическими и пространственными декартовыми координатами точки, принадлежащей поверхности эллипсоида. Введём для этого вспомогательную величину  $W$ , называемую сфероидической функцией и широко применяющуюся в геодезических расчётах и в навигации.

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \quad (1.3.15a)$$

Тогда прямоугольные координаты точки поверхности эллипсоида через геодезические координаты  $B$  и  $L$  выразятся следующим образом:

$$x = r \cos L, \quad y = r \sin L, \quad z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W}, \quad (1.3.15b)$$

где  $r$  – радиус параллели, соответствующий геодезической широте  $B$ ,

$$r = \frac{a \cos B}{W}.$$

Понятно, что прямоугольные пространственные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выражаются в тех же линейных единицах, что и большая полуось земного эллипсоида  $a$ .

#### ***Связь геодезических и астрономических координат.***

Приемоиндикаторы радионавигационных систем (в том числе и спутниковых) предоставляют штурману геодезические координаты. Судовые навигационные комплексы, работающие по гравитационному полю Земли, а также инерциальные навигационные системы (ИНС), по сути дела, определяют астрономические координаты, а затем пересчитывают их в геодезические. В последние годы получили распространение навигационные комплексы, состоящие из компактных высокоточных инерциальных систем и приемоиндикаторов СНС Навстар GPS. Уже изготавливаются такие комплексы, предназначенные для автомобилей.

С повышением точности определения места по спутниковым навигационным системам возникает, во-первых, проблема оперативного контроля надёжности работы спутникового приемоиндикатора, во-вторых, проблема оперативной замены адекватной по точности системой в случае ухудшения функциональных характеристик спутникового приемоиндикатора. То же самое можно сказать и о ИНС. Поэтому возникает необходимость анализа того, как соотносятся между собой геодезические и

астрономические координаты, чтобы не только понимать смысл этой связи, но и уметь в судовых условиях проконтролировать работу упомянутых комплексов.

Представим, что на карте меркаторской проекции крупного масштаба нанесена точка  $O$  (см. рис. 4).

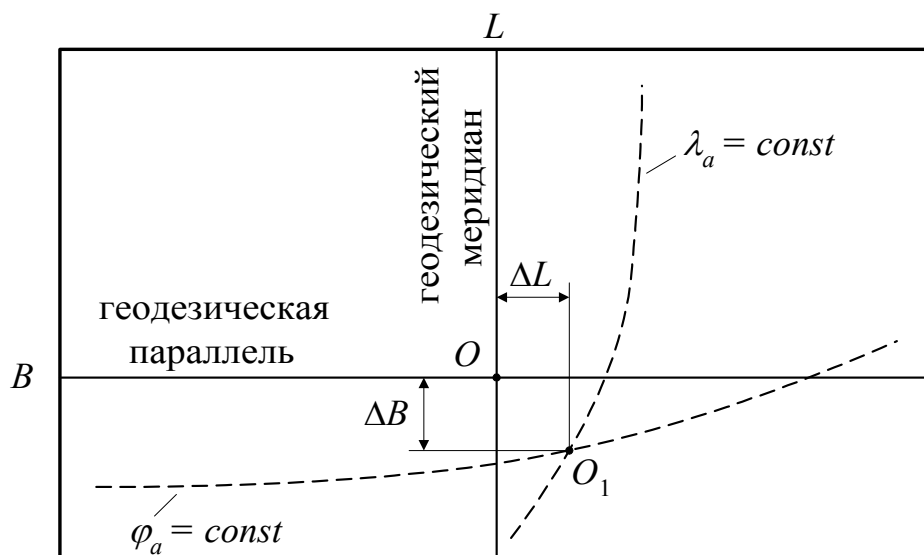


Рис. 4. Геодезические и астрономические координаты

Она находится на пересечении геодезической параллели (широта равна  $B$ ) и геодезического меридиана (долгота равна  $L$ ). Затем на местности вблизи точки  $O$  будем измерять астрономические координаты множества точек. Нанесем на карту геодезические координаты точек, в которых астрономические координаты будут равны геодезическим соответствующих точек на поверхности эллипсоида, принадлежащих геодезической параллели и геодезическому меридиану. Затем соединим на карте те точки, в которых астрономическая широта будет постоянна ( $\varphi_a = const$ ). В результате таких построений на карте появится астрономическая параллель. Аналогично получим астрономический меридиан, в каждой точке которого астрономическая долгота одинакова ( $\lambda_a = const$ ) и равна геодезической долготе точки  $O$ . Пересечение астрономической параллели и астрономического меридиана дадут на карте точку  $O_1$ , астрономические координаты которой будут равны геодезическим координатам точки  $O$ . Расхождения по широте ( $\Delta B$ ) и по долготе ( $\Delta L$ ), выраженные в угловых или в линейных единицах, будут поправками для перехода от геодезических координат к астрономическим (и наоборот) в окрестности точки  $O$ . Несоответствие координат происходит из-за того, что астрономические координаты определяются на геоиде, т. е. относительно отвесной линии, а геодезические – относительно нормали к поверхности

земного эллипсоида. Иными словами, расхождение в координатах происходит из-за некоторого угла между нормалью к поверхности эллипсоида и отвесной линией в той же точке земной поверхности. Данный угол принято называть уклонением отвесной линии (УОЛ). УОЛ возникает в тех точках земной поверхности, в которых поверхность эллипсоида не будет параллельна поверхности геоида.

Проведем через точку  $O$  и геодезический меридиан плоскость, перпендикулярную поверхности эллипсоида, а также плоскость, перпендикулярную геодезической параллели (такую плоскость принято называть плоскостью первого вертикала). Разумеется, обе эти плоскости пересекутся по нормали к поверхности эллипсоида в точке  $O$  (см. рис. 5).

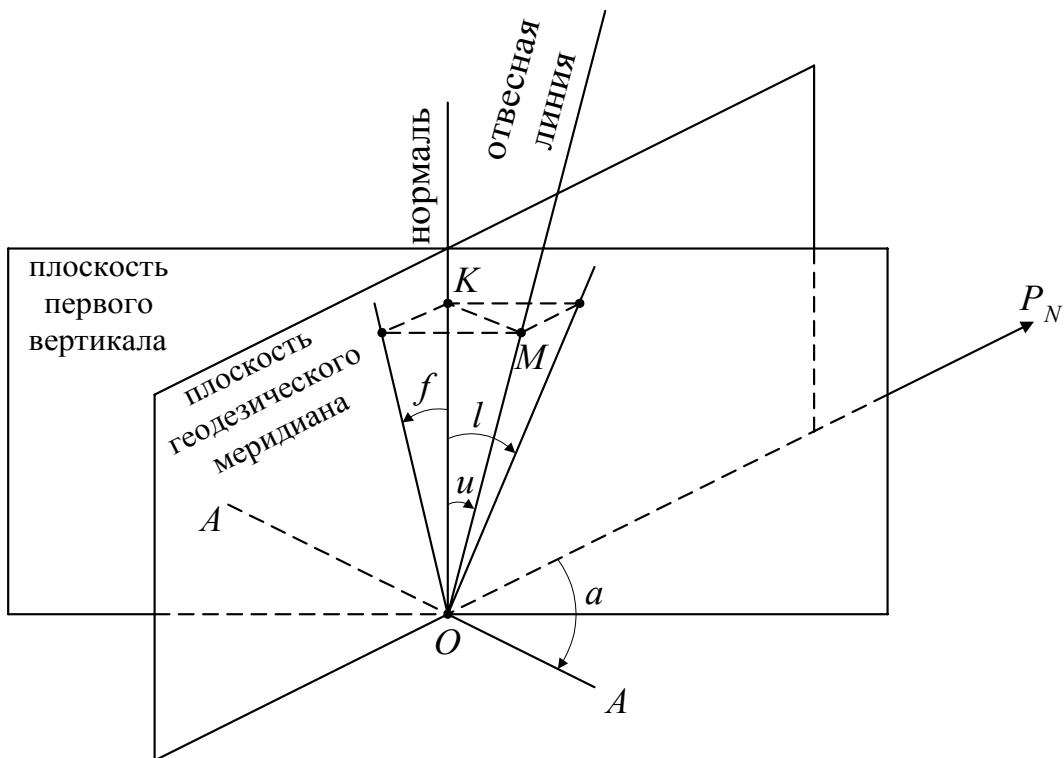


Рис. 5. Уклонение отвесной линии

На рисунке УОЛ обозначено буквой  $u$ . Проекция угла  $u$  на плоскость геодезического меридиана обозначена буквой  $f$ , а проекция на плоскость первого вертикала – буквой  $l$ . Величину  $u$  принято называть полным уклонением отвесной линии, а  $f$  и  $l$  – его составляющими.

Понятие уклонения отвесной линии является важнейшим понятием теории формы Земли. Уклонения отвеса называют относительными, если используемые при их вычислении геодезические широты и долготы соответствуют референц-эллипсоиду (см. следующий параграф), и абсолютными, если эти величины даются относительно общего земного эллипсоида. Принято следующее правило знаков для УОЛ: если

астрономический зенит отклоняется от геодезического на северо-восток, то составляющие УОЛ считаются положительными, если же на юго-восток, то отрицательными.

Возьмем на отвесной линии точку  $M$  и спроектируем ее на линию нормали, чтобы получить точку  $K$ . Если провести через точки  $O$ ,  $K$  и  $M$  плоскость, то она пересечет поверхность земного эллипсоида по линии  $AA$ . Угол между северной частью геодезического меридиана и линией  $AA$  будет геодезическим азимутом ( $a$ ) полного отклонения отвесной линии.

Если известны  $u$  и  $a$ , то составляющие определяются довольно просто

$$l = u \cdot \cos a, \quad f = u \cdot \sin a. \quad (1.3.16)$$

С достаточной точностью для сухопутной геодезии отклонение отвесной линии в плоскости геодезического меридиана вычисляют по формуле

$$f = \varphi_a - B - 0,17H \sin 2B, \quad (1.3.17)$$

где  $\varphi_a$  – астрономическая широта;  $B$  – геодезическая широта;  $H$  – геодезическая высота.

Уклонение в первом вертикале вычисляют по формуле

$$l = (\lambda_a - L) \cos \varphi_a, \quad (1.3.18)$$

где  $\lambda_a$  – астрономическая долгота;  $L$  – геодезическая долгота [15].

Отсюда полное отклонение отвесной линии равно

$$u = \sqrt{f^2 + l^2}. \quad (1.3.19)$$

Приведенные формулы справедливы только для суши, так как астрономические координаты можно точно определить только на неподвижном основании высокоточными угломерными инструментами. Такой подход для судовых условий не годится. Сейчас, когда достаточно точно определена поверхность геоида относительно земных эллипсоидов, можно предложить достаточно точный и простой способ расчета составляющих УОЛ. Для объяснения этого способа обратимся к рисунку 6.

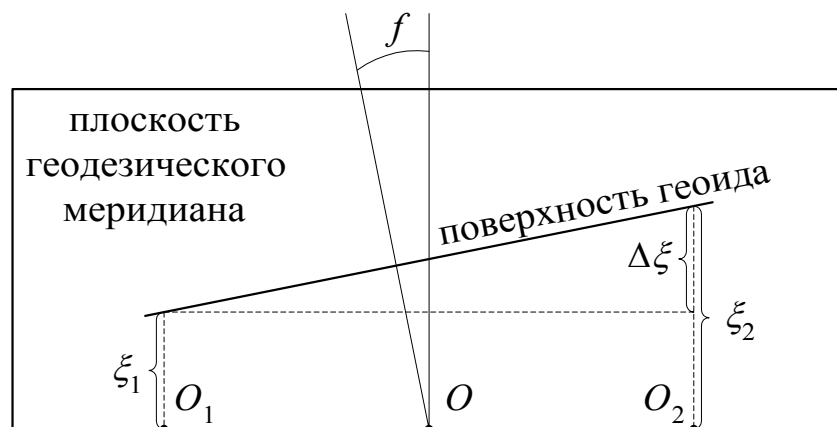


Рис. 6. Определение составляющей УОЛ

Если известны возвышения геоида в точках  $O_1$  и  $O_2$ , лежащих на одном геодезическом меридиане с точкой  $O$ , то составляющая УОЛ в плоскости геодезического меридиана ( $f$ ) будет равна

$$\operatorname{arctg} \frac{\Delta \xi}{s} = \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{s}, \quad (1.3.20)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – возвышения геоида над земным эллипсоидом в точках  $O_1$  и  $O_2$ ;  $s$  – расстояние в метрах между точками  $O_1$  и  $O_2$ . Аналогично рассчитывается УОЛ в плоскости первого вертикала.

В параграфе «Геоид WGS 84» главы «Геодезическая система WGS 84» описаны приемы расчетов возвышения геоида WGS 84 для любой точки поверхности Земли.

Наибольшие уклонения имеют место в горных районах, а также вблизи береговых линий морей и океанов. Так, в районе Кавказа оно достигает  $35''$ . Разность УОЛ на противоположных берегах озера Байкал равна  $40''$  [11]. Среднеквадратическое значение УОЛ в океане составляет  $5,7''$ , а предельное значение –  $60''$  [18]. Следует помнить, что одна угловая секунда соответствует приблизительно 30 метрам.

**Связь геодезических и сферических координат.** Для решения многих сугубо практических задач, возникающих в традиционной астронавигации, при приближенных расчетах, а также в картографии при составлении карт мелких масштабов Землю принимают за сферу (шар). Центр сферы помещают в центр эллипсоида (см. рис. 7). Точку  $C$  на меридиане эллипсоида переносят на меридиан сферы радиусом-вектором, проходящим через точку  $C$  до пересечения с поверхностью сферы. Таким образом получается точка  $C_1$ , соответствующая точке  $C$ . Угол, заключенный между плоскостью экватора и радиусом-вектором, называется геоцентрической широтой и обозначается через  $\varphi_T$ . Геодезическая долгота совпадает с геоцентрической долготой.

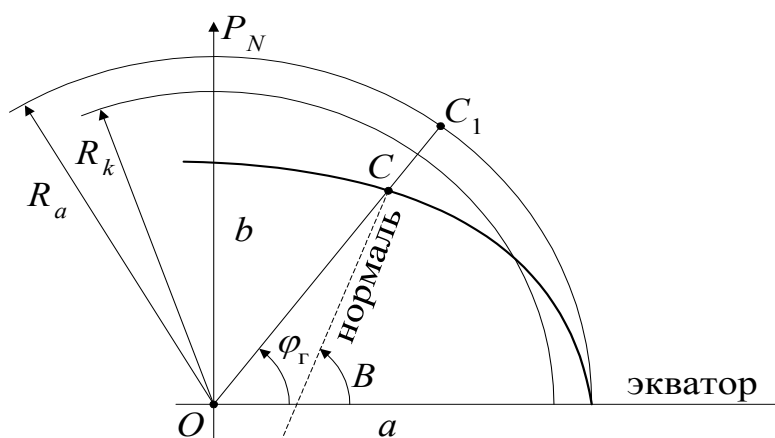


Рис. 7. Связь между геодезической и геоцентрической широтами

Связь между геодезической и геоцентрической широтами определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi_{\Gamma} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} B = (1 - e^2) \operatorname{tg} B. \quad (1.3.21)$$

Отсюда нетрудно получить такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \varphi_{\Gamma}}{\sin B} &= \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 B}} = \sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \cos^2 \varphi_{\Gamma}} \\ \frac{\cos \varphi_{\Gamma}}{\cos B} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 B}} = \frac{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \cos^2 \varphi_{\Gamma}}}{1 - e^2} \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.22)$$

Как видно, формулы (1.3.21) и (1.3.22) не учитывают радиуса сферы. На первый взгляд, для расчетов, связанных с переходом от одних координат к другим, радиус сферы не имеет значения. На самом деле, это не совсем так. Всё заключается в способе переноса точки, принадлежащей поверхности эллипсоида, на поверхность сферы и наоборот. В существующей литературе о способах переноса не упоминается, хотя это важно. Обратимся к рис. 7. Точку  $C$  поверхности эллипсоида можно перенести по нормали на поверхность сферы. А точку  $C_1$  можно перенести по нормали на поверхность эллипсоида. Если широту точек  $C$  и  $C_1$  ассоциировать с длиной дуги меридиана от экватора, то очевидно, что длина дуги радиуса  $R_k$  будет ближе по величине к длине дуги на эллипсоиде. Поэтому здесь радиус сферы и способ перехода от сферы к эллипсоиду играет заметную роль. В тех случаях, когда в расчетах принимают участие расстояния и направления, выбор радиуса земной сферы становится весьма существенным фактором для достижения необходимой точности. Если принять радиус Земли, например, равным большой полуоси эллипсоида Красовского ( $R_a = 6378245$  м), то, как показывают расчеты, погрешности в расчетах расстояний и направлений будут довольно большими. Часто в навигации и в мореходной астрономии земной радиус принимают таким, при котором поверхность земной сферы равна поверхности эллипсоида Красовского (6371116 м). В мореходных таблицах МТ-75 с учетом такого радиуса рассчитана таблица 11-а. Видный российский ученый Владимир Владимирович Каврайский (1884–1954) показал, что при радиусе Земли, равным 6371 км, допускаются погрешности между расстояниями на сфере и на эллипсоиде в пределах 0,5 %, а в направлениях – до 0,4°. В.В. Каврайский рассчитал такой радиус земной сферы, при котором погрешность в расстояниях не превышает 0,08 %, а направлений –

0,1°. Этот радиус равен  $R_k = 6372900$  м. Сферу такого радиуса называют сферой Каврайского [16]. Для нее имеют место следующие соотношения между длинами отрезков в угловой и линейной мере [17]:  $1^\circ = 111171,69$  м;  $1' = 1852,86$  м;  $1'' = 30,88$  м.

Для сферы Каврайского геоцентрические координаты вычисляются как [16]

$$\varphi_r = B - 8'39'' \sin 2B; \quad \lambda_r = L, \quad (1.3.23)$$

а геодезические как

$$B = \varphi_r + 8'39'' \sin 2\varphi_r; \quad L = \lambda_r. \quad (1.3.24)$$

Таблица 2.27 МТ-2000 предоставляет поправки к широте при переходе от референц-эллипсоида Красовского к земному шару радиуса 6366707 м [76]. Данный радиус соответствует такой сфере, у которой длина 1 минуты дуги её большого круга равна морской миле – 1852 м. В объяснении Таблицы 2.27 сказано, что такой радиус выбран для достижения равенства сферических и геодезических расстояний и направлений. Этот факт вступает в противоречие со сферой В.В. Каврайского.

Таблица VIIIа Астрономического Ежегодника [77] “Элементы земного сфероида Ф.Н. Красовского. Вычисление геоцентрических координат точек земной поверхности” содержит формулу для получения геоцентрической широты  $\varphi'$

$$\operatorname{tg} \varphi' = (0,993307 + 10^{-6} \times 0,0011h) \operatorname{tg} \varphi,$$

где  $\varphi$  – астрономическая широта точки, находящейся на высоте  $h$  (в метрах) над уровнем моря. Эта формула напрямую указывает на зависимость геоцентрической широты от расстояния до центра сферы. Сравнение расчётов, выполненных по этой формуле при  $h = 0$ , с Таблицей 2.27 МТ-2000 показало на значительные расхождения. Способы переноса точки на сферу в описании таблиц 2,27 и VIIIа не описаны. Всё это свидетельствует о необходимости дальнейших исследований для решения задач перехода от геоцентрических координат к геодезическим и наоборот.

**Приведенная широта.** Из других величин, широко применяющихся в точной навигации и морской геодезии, следует упомянуть еще об одной угловой величине, которая определяется следующим построением (см. рис. 8).

Возьмем отрезок прямой, равный большой полуоси эллипсоида, и отложим его так, чтобы один конец его лежал на поверхности эллипсоида в некоторой точке  $Q$ , а другой – на оси вращения эллипсоида (рис. 8) в



точке  $h$ . Острый угол, составленный отрезком  $Qh$  с плоскостью экватора, называется приведенной широтой и обозначается буквой  $\varphi_{\pi}$ .

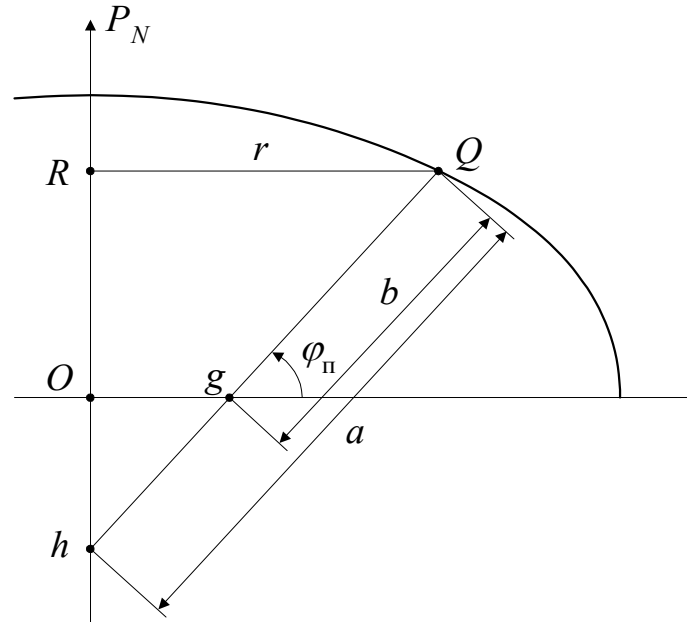


Рис. 8. Приведенная широта

Из рисунка видно, что  $r = a \cos \varphi_{\pi}$ . (1.3.25)

Это очень простая формула для вычисления радиуса параллели. Если это его значение подставить в уравнение меридиана (1.3.14), то получим  $z = b \sin \varphi_{\pi}$ . (1.3.26)

Отсюда следует, что отрезок  $Qg$  (см. рис. 8) равен малой полуоси эллипсоида. Тогда  $hg = a - b = a\alpha$ .

Иными словами, для всех точек меридиана отрезок  $hg$  имеет одну и ту же величину, равную разности полуосей эллипсоида.

Установим зависимость между приведенной широтой и геодезической долготой, с одной стороны, и декартовыми координатами, с другой.

Совместим ось  $x$  с плоскостью начального меридиана. В этом случае, исходя из рис. 2, для точки  $Q$  можно написать

$$x = r \cos L, \quad y = r \sin L.$$

Если теперь радиус параллели заменить его выражением в равенстве (1.3.25) и учесть (1.3.26), то получим

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi_{\pi} \cos L, \\ y &= a \cos \varphi_{\pi} \sin L, \\ z &= b \sin \varphi_{\pi} \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.27)$$

Полученную систему равенств (1.3.27) полезно сравнить с формулами (1.3.15б). Система равенств (1.3.27) представляет собой так называемые параметрические уравнения поверхности эллипсоида. Из них нетрудно найти формулы обратного перехода

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{z\sqrt{1+e^2}}{x \cos L + y \sin L} \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.28)$$

Необходимо помнить, что результаты расчётов по формулам (1.3.28) будут получаться в четвертном счёте.

Во многих расчетных формулах, применяемых для земного эллипсоида, присутствуют две величины, зависящие от эксцентриситета эллипсоида и геодезической широты. Они обозначаются через  $V$  и  $W$  и определяются следующими выражениями:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (1.3.29)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}. \quad (1.3.30)$$

$V$  и  $W$  называются основными сфероидическими функциями. Кроме них очень часто встречается еще одна вспомогательная функция эксцентриситета

$$\eta = e' \cos B. \quad (1.3.31)$$

Она связана с функцией  $V$  такой зависимостью:

$$V^2 = 1 + \eta^2. \quad (1.3.32)$$

Установим связь между функциями  $V$  и  $W$ . Так как

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} (1 - \sin^2 B) = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2},$$

то

$$W = V \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.3.33)$$

Используя соотношения (1.3.9), нетрудно найти еще следующие зависимости:

$$aW = bV = \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}, \quad (1.3.34)$$

$$cW = aV, \quad (1.3.35)$$

$$V - W = n(V + W) = \alpha V, \quad (1.3.36)$$

$$V^2 - W^2 = e^2 V^2 = e'^2 W^2. \quad (1.3.37)$$

Существуют следующие формулы, устанавливающие зависимость между геодезической и приведенной широтами:

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi_n, \quad (1.3.38)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b}{a} \operatorname{tg} B. \quad (1.3.39)$$

Если воспользоваться соотношениями (1.3.39), то можно получить другие формулы связи

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1+e^2} \operatorname{tg} \varphi_n, \quad (1.3.40)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B, \quad (1.3.41)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = (1-\alpha) \operatorname{tg} B, \quad (1.3.42)$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \varphi_n = \alpha \operatorname{tg} B, \quad (1.3.43)$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \varphi_n = n (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} \varphi_n). \quad (1.3.44)$$

Из равенства (1.3.41) получим

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_n = 1 + \operatorname{tg} B - e^2 \operatorname{tg}^2 B,$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_n} = \frac{1}{\cos^2 B} - \frac{e^2 \sin^2 B}{\cos^2 B}$$

или

$$\frac{\cos^2 B}{\cos^2 \varphi_n} = 1 - e^2 \sin^2 B = W^2.$$

Отсюда находим

$$\cos \varphi_n = \frac{\cos B}{W}. \quad (1.3.45)$$

Учитывая зависимость между  $V$  и  $W$  (1.3.33), перемножим равенства (1.3.45) и (1.3.41). В результате этого получим

$$\sin \varphi_n = \frac{\sin B}{V}. \quad (1.3.46)$$

Найдем формулы для вычисления разности геодезической и приведенной широт. Так как

$$\frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \varphi_n}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} \varphi_n} = \frac{\sin(B - \varphi_n)}{\sin(B + \varphi_n)},$$

то с учетом выражения (1.3.20) можно записать

$$\sin(B - \varphi_n) = n \sin(B + \varphi_n). \quad (1.3.47)$$

По этой формуле разность широт можно определить только численными методами, так как она входит в аргумент трансцендентного уравнения. Найдем другие формулы для

вычисления искомой разности широт. Для этого представим правую часть уравнения (1.3.47) одновременно в двух видах

$$\sin(B - \varphi_n) = n \sin [2B - (B - \varphi_n)] = n \sin [2\varphi_n + (B - \varphi_n)]$$

или

$$\begin{aligned} \sin(B - \varphi_n) &= n [\sin 2B \cos(B - \varphi_n)] - \cos 2B \sin(B - \varphi_n) = \\ &= n [\sin 2\varphi_n \cos(B - \varphi_n) + \cos 2\varphi_n \sin(B - \varphi_n)]. \end{aligned}$$

Разделив на  $\cos(B - \varphi_n)$ , получим

$$\operatorname{tg}(B - \varphi_n) = n \sin 2B - n \cos 2B \operatorname{tg}(B - \varphi_n) = n \sin 2\varphi_n + n \cos 2\varphi_n \operatorname{tg}(B - \varphi_n),$$

откуда

$$\operatorname{tg}(B - \varphi_n) = \frac{n \sin 2B}{1 + n \cos 2B} = \frac{n \sin 2\varphi_n}{1 - n \cos 2\varphi_n}. \quad (1.3.48)$$

Из этих равенств нетрудно найти выражения для непосредственного вычисления разности широт  $B - \varphi_n$ , если воспользоваться следующей формулой Лагранжа:

$$\operatorname{tg} z = \frac{n \sin \alpha}{1 \pm n \cos \alpha}, \quad (n < 1), \quad z = n \sin \alpha \mp \frac{n^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{n^3}{3} \sin 3\alpha \mp \dots$$

Применяя эти соотношения к равенствам (1.3.48), получим

$$B - \varphi_n = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \dots, \quad (1.3.49)$$

$$B - \varphi_n = n \sin 2\varphi_n + \frac{n^2}{2} \sin 4\varphi_n + \frac{n^3}{3} \sin 6\varphi_n + \dots. \quad (1.3.50)$$

Разность широт в этих формулах будет в радианах. В практических расчетах принято разность широт выражать в угловых секундах. Поэтому каждый член ряда (1.3.49) и (1.3.50) необходимо умножить на  $648000/\pi$ .

Для эллипсоида Красовского, у которого  $n = 0,0016789792$ , расчетные формулы разности геодезической и приведенной широт в секундах будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (B - \varphi_n)'' &= 346,3143'' \sin 2B - 0,2907'' \sin 4B + 0,0003'' \sin 6B - \dots, \\ (B - \varphi_n)'' &= 346,3143'' \sin 2\varphi_n + 0,2907'' \sin 4\varphi_n + 0,0003'' \sin 6\varphi_n + \dots. \end{aligned}$$

Связь между геодезической ( $B$ ) и геоцентрической ( $\varphi_r$ ) широтами для эллипсоида Красовского, выраженная в угловых секундах, устанавливается следующей формулой [75]:

$$(B - \varphi_r)'' = 692,627'' \sin 2B - 1,163'' \sin 4B + 0,0026'' \sin 6B - \dots \quad (1.3.50a)$$

Для Международного эллипсоида 1924 года предлагаются следующие формулы расчёта разностей между геодезической, приведённой и геоцентрической широтами [75]:

$$(B - \varphi_{II})'' = 347,8327'' \sin 2B - 0,2933'' \sin 4B + 0,0003'' \sin 6B - \dots,$$

$$(B - \varphi_{I})'' = 695,6635'' \sin 2B - 1,1731'' \sin 4B + 0,0026'' \sin 6B - \dots$$

Из этих формул следует, что разности между геодезической, приведённой и геоцентрической широтами достигает максимума на широте  $45^\circ$ , и эти максимумы равны  $(B - \varphi_{II})_{\max} \approx 348'' \approx 5,8'$ ,

$$(B - \varphi_{I})_{\max} \approx 696'' \approx 11,6', \quad \text{что вдвое больше, чем } (B - \varphi_{II})_{\max}.$$

Иногда в отечественной и зарубежной литературе приведенную широту называют параметрической.

**Объем и площадь поверхности эллипсоида.** Зачастую приходится вычислять объем и площадь поверхности эллипсоида при решении отдельных задач. Например, в навигации иногда земной эллипсоид заменяют шаром, объем или площадь поверхности которого равен объему или площади поверхности этого эллипсоида.

Площадь поверхности эллипсоида принято рассчитывать по следующей формуле:

$$P_{\text{э}} = 4\pi b^2 \left( 1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right). \quad (1.3.51)$$

С достаточной для некоторых чисто практических расчетов точностью можно ограничиться первыми двумя членами этого ряда, т. е.

$$P_{\text{э}} = 4\pi b^2 \left( 1 + \frac{2}{3}e^2 \right).$$

Площадь поверхности эллипсоида Красовского равна  $510083035,4 \text{ км}^2$  [17].

Найдем радиус  $R_{\text{э}}$  эквивалентного шара, площадь которого равна площади эллипсоида, т. е.  $4\pi R_{\text{э}}^2 = P_{\text{э}}$ .

Отсюда находим

$$R_{\text{э}} = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots}. \quad (1.3.52)$$

Для эллипсоида Красовского радиус такого эквивалентного шара равен  $6371116 \text{ м}$ . Для эллипсоидов Бесселя и Хейфорда радиусы эквивалентных шаров будут  $6370290 \text{ м}$  и  $6371228 \text{ м}$  соответственно.

Объем земного эллипсоида вычисляется по известной формуле

$$V_{\text{э}} = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Найдем радиус  $R_V$  эквивалентного шара, объем которого равен объему эллипсоида, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi R_V^3 = V_{\text{Э}}.$$

Отсюда находим

$$R_V = \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (1.3.53)$$

Для эллипсоида Красовского радиус эквивалентного шара при условии равенства объемов составляет 6371110 м. Для эллипсоидов Бесселя и Хейфорда радиусы шаров, объёмы которых равновелики, будут 6370283 м и 6371221 м соответственно [79].

Представляет интерес шар, большой круг которого равен меридиану земного эллипсоида. Радиус такого шара  $R_M$  определится формулой  $(\pi/2)R_M = Q$ , где  $Q$  – длина четверти меридиана земного шара.

Сравним теперь радиус шара, равновеликого по поверхности эллипсоиду Красовского (6371116 м), с радиусом шара, у которого четверть меридиана  $Q = 10000000$  м (6366198 м),

$$\frac{6366198}{6371116} = 0,999228.$$

Соответствующие длины на обоих шарах находятся в том же отношении, как и радиусы шаров, т. е. отличаются друг от друга на 0,08%. Из этого следует, что в пределах указанной точности шар, равновеликий по поверхности эллипсоиду Красовского, можно заменять шаром, четверть меридиана которого равна 10000000 м [79].

Наибольшая возможная относительная разница расстояния между точками, вычисленная по их широтам и долготам на шаре, по сравнению с соответствующим расстоянием на эллипсоиде будет минимум, если радиус шара взять равным  $R_{(\min)}$

$$\begin{aligned} R_{(\min)} &= \frac{a}{2} \left( \frac{a}{b} + 1 - e^2 \right) = \frac{a}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + 1 - e^2 \right) \approx \\ &\approx \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} + 1 - e^2 \right) \approx a \left( 1 - \frac{e^2}{4} \right) \approx a \left( 1 - \frac{1}{600} \right). \end{aligned}$$

Тогда при замене эллипсоида шаром наибольшая относительная погрешность расстояния будет  $\pm(3e^2)/4 \approx \pm 0,5\%$  [79].

**Главные радиусы кривизны.** В произвольно выбранной точке на поверхности эллипсоида восстановим нормаль к ней и проведем через нормаль множество плоскостей. Такие плоскости называются

нормальными. Каждая нормальная плоскость пересечется с поверхностью эллипсоида по кривой линии, называемой нормальным сечением. Каждое нормальное сечение имеет свой радиус кривизны в точке пересечения нормали с поверхностью эллипсоида. Из всего полученного таким образом пучка нормальных сечений можно выделить два таких нормальных сечения, из которых одно имеет наибольший радиус кривизны, а другой – наименьший радиус кривизны.

Эти два сечения называются главными нормальными сечениями. Направления, в которых они располагаются, принято называть главными направлениями, а их радиусы кривизны – главными радиусами кривизны. Главные нормальные сечения всегда взаимно перпендикулярны, т. е. угол между главными направлениями всегда равен  $90^\circ$ .

На поверхности эллипсоида могут встретиться такие точки, в которых во всех направлениях нормальные сечения имеют одинаковую кривизну, следовательно, среди них невозможно выделить главные нормальные сечения. Такие точки называются точками округления или омбилическими точками. Например, на поверхности шара все точки являются омбилическими. На эллипсоиде такие точки расположены на полюсах.

Установить положение главных нормальных сечений на поверхности эллипсоида вращения не представляет труда. В самом деле, плоскость меридиана делит поверхность эллипсоида вращения на две симметричные половины. В заданной точке поверхности любые два нормальных сечения, симметрично расположенных относительно меридиана, имеют одну и ту же кривизну, поэтому такие сечения не могут быть главными. Следовательно, меридиан будет одним из двух главных нормальных сечений. Вторым главным нормальным сечением будет сечение, перпендикулярное меридиану. Это сечение носит особое название – первый вертикал.

Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида вращения имеют свои обозначения:  $M$  – радиус кривизны меридиана,  $N$  – радиус кривизны первого вертикала. Поскольку главные радиусы кривизны играют весьма важную роль при решении всех задач на поверхности земного эллипсоида, то получим формулы для их вычисления.

Параллель является наклонным сечением поверхности эллипсоида. Плоскость параллели составляет с плоскостью первого вертикала угол, равный геодезической широте  $B$ . По теореме Менье кривизна  $1/r$  параллели равна кривизне  $1/N$  нормального сечения

сфероида, перпендикулярного к меридиану, умноженной на косинус угла между этими плоскими сечениями, т. е. на  $\cos B$ :

$$\frac{1}{N} = \frac{\cos B}{r}, \quad N = r \sec B = \frac{c}{V}.$$

Поэтому по теореме Менье для радиуса параллели  $r$  можем написать

$$r = N \cos B. \quad (1.3.54)$$

С учетом дифференциалов дуг параллелей и меридианов, а также учитывая формулу (1.3.54), выражения для вычисления главных радиусов кривизны запишутся таким образом [12, 79]:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a(1-e^2)}{\left(\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}\right)^3}, \quad (1.3.55)$$

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}. \quad (1.3.56)$$

Учитывая, что  $a = c\sqrt{1-e^2}$ ,  $W = V\sqrt{1-e^2}$ , получим еще такие выражения

$$M = \frac{c}{V^3} = \frac{c}{\left(\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}\right)^3}, \quad (1.3.57)$$

$$N = \frac{c}{V} = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}}. \quad (1.3.58)$$

Как видно из этих формул, величины главных радиусов кривизны зависят от широты.

Для ответа на вопрос, какой из двух радиусов больше другого, достаточно образовать их отношение  $\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B$ .

Очевидно, что  $N > M$  во всех точках поверхности эллипсоида, кроме полюсов. Для экватора ( $B = 0^\circ$ ) получим  $M = a(1 - e^2)$ ,  $N = a$ , тогда как на полюсе ( $B = 90^\circ$ ) будет  $M = N = c$ . Следовательно, полюсы являются омбилическими точками поверхности эллипсоида вращения. На полюсах все нормальные сечения представляют собой меридианы. В связи с этим линейную величину  $c$  называют полярным радиусом кривизны. На полюсе  $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = 1$ .

Вычисления по формулам (1.3.55) – (1.3.58) даже на современной вычислительной базе представляют определенную трудность для достижения требуемой точности. Поэтому приходится для точных вычислений применять несколько иные приемы. Для этого представим формулы (1.3.55) и (1.3.56) в таком виде:



$$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}, \quad N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}.$$

Правые части этих равенств разложим в степенные ряды. Тогда

$$M = m_0 + m_2 \sin^2 B + m_4 \sin^4 B + m_6 \sin^6 B + m_8 \sin^8 B + \dots, \quad (1.3.59)$$

$$N = n_0 + n_2 \sin^2 B + n_4 \sin^4 B + n_6 \sin^6 B + n_8 \sin^8 B + \dots. \quad (1.3.60)$$

Коэффициенты этих рядов являются постоянными величинами и имеют такой вид:

$$\left. \begin{array}{l} m_0 = a(1 - e^2), \\ m_2 = \frac{3e^2 m_0}{2}, \\ m_4 = \frac{5e^2 m_2}{4}, \\ m_6 = \frac{7e^2 m_4}{6}, \\ m_8 = \frac{9e^2 m_6}{8}, \\ m_{10} = \frac{11e^2 m_8}{10}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_0 = a, \\ n_2 = \frac{e^2 n_0}{2}, \\ n_4 = \frac{3e^2 n_2}{4}, \\ n_6 = \frac{5e^2 n_4}{6}, \\ n_8 = \frac{7e^2 n_6}{8}, \\ n_{10} = \frac{9e^2 n_8}{10}. \end{array} \quad (1.3.61)$$

Ряды (1.3.59) и (1.3.60) можно представить еще и в другом виде, если степени синусов широты заменить тригонометрическими функциями кратного аргумента по следующим формулам:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B,$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B,$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B,$$

$$\sin^8 B = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2B + \frac{7}{32} \cos 4B - \frac{1}{16} \cos 6B + \frac{1}{128} \cos 8B.$$

Сгруппировав коэффициенты при каждом косинусе одинакового аргумента, получим

$$M = a_0 - a_2 \cos 2B + a_4 \cos 4B - a_6 \cos 6B + a_8 \cos 8B - \dots \quad (1.3.62)$$

$$N = b_0 - b_2 \cos 2B + b_4 \cos 4B - b_6 \cos 6B + b_8 \cos 8B - \dots \quad (1.3.63)$$

Коэффициенты ряда (1.3.62) определяются следующими выражениями:

$$a = m_0 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8 + \dots,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4 + \frac{15}{32}m_6 + \frac{7}{16}m_8 + \dots,$$

$$a_4 = \frac{1}{8}m_4 + \frac{3}{16}m_6 + \frac{7}{32}m_8 + \dots,$$

$$a_6 = \frac{1}{32}m_6 + \frac{1}{16}m_8 + \dots, \quad a_8 = \frac{1}{128}m_8 + \dots$$

Коэффициенты ряда для  $N$  определяются этими же равенствами, если в них величины  $a_i$  заменить на  $b_i$ , а величины  $m_i$  на  $n_i$  ( $i = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ ). Очевидно, ряды (1.3.62) и (1.3.63) сходятся гораздо быстрее, чем ряды (1.3.59) и (1.3.60). Поэтому при одном и том же числе членов ряды (1.3.62) и (1.3.63) дают более точные значения для  $M$  и  $N$ . Для того, чтобы повысить точность степенных рядов, не увеличивая числа членов, применяется особая математическая операция, называемая экономизацией степенных рядов. Сущность ее состоит в том, чтобы путем изменения коэффициентов ряда по определенным правилам достигается повышение точности ряда без увеличения числа членов.

Ниже приведены сохраненные степенные ряды, полученные методом экономизации рядов (1.3.59) и (1.3.60). В квадратных скобках показан отброшенный член, величина которого составляет погрешность результата вычисления по формуле сокращенного ряда,

$$\left. \begin{aligned} M &= \left( m_0 - \frac{m_8}{128} \right) + \left( m_2 + \frac{m_8}{4} \right) \sin^2 B + \left( m_4 - \frac{5}{4}m_8 \right) \sin^4 B + \\ &\quad + (m_6 + 2m_8) \sin^6 B + \left[ \frac{m_8}{128} \cos^8 B \right], \\ N &= \left( n_0 - \frac{n_8}{128} \right) + \left( n_2 + \frac{n_8}{4} \right) \sin^2 B + \left( n_4 - \frac{5}{4}n_8 \right) \sin^4 B + \\ &\quad + (n_6 + 2n_8) \sin^6 B + \left[ \frac{n_8}{128} \cos^8 B \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.64)$$

Для приближенных расчетов радиусов кривизны можно предложить такие простые формулы [17]:

$$M \approx a \left[ 1 - \frac{c}{2} (1 + 3 \cos^2 B) \right]; \quad N \approx a \left[ 1 + \frac{c}{2} (1 - 3 \cos^2 B) \right]. \quad (1.3.65)$$

Теперь рассмотрим кривизну  $1/R_A$  любого нормального сечения плоскостью, составляющую с плоскостью меридиана угол  $A$ . С главными

радиусами кривизны в этой точке кривизна  $1/R_A$  связывается теоремой Эйлера, запись которой имеет следующий вид [75]:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (1.3.65a)$$

По этой же теореме Эйлера можно записать

$$\frac{1}{R_{A+90^\circ}} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}.$$

Если сложить эту формулу с (1.3.65a), то можно получить сумму кривизн любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений

$$\frac{1}{R_{A+90^\circ}} + \frac{1}{R_A} = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \text{const},$$

т. е. постоянной величине для данной точки поверхности эллипсоида.

Отсюда следует первая теорема Грунерта, которая формулируется так: среднее арифметическое из кривизн нормальных сечений, равномерно распределённых по азимуту, равно среднему арифметическому из кривизн главных нормальных сечений и, следовательно, кривизне нормального сечения под углом 45 градусов:

$$\left( \frac{1}{R_A} \right)_{CP} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{R_{45^\circ}}.$$

Вторая теорема Грунерта говорит о том, что среднее арифметическое из радиусов кривизны нормальных сечений равно среднему геометрическому из главных радиусов кривизны

$$(R_A)_{CP} = \sqrt{MN} = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 B). \quad (1.3.66)$$

Радиус кривизны сечения эллипсоида по произвольному азимуту  $A$  можно рассчитать по следующей формуле [75]:

$$R_A = \frac{M \sec^2 A}{1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A} = \frac{M \sec^2 A}{1 + (1 - e^2 \cos^2 B) \operatorname{tg}^2 A} = \frac{M}{1 - e^2 \cos^2 B \sin^2 A}.$$

Если для вычислений, не требующих повышенной точности, принять

$$M \approx a \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B \right),$$

то радиус кривизны можно будет вычислить так

$$R_A \approx a \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B \cos^2 A \right).$$

Иногда в расчётах требуется участие геоцентрического радиуса ( $R_G$ ), то есть расстояния от центра эллипсоида до его поверхности. Здесь можно воспользоваться формулами (1.3.15б) для вычисления прямоугольных координат точки на поверхности эллипсоида, а затем получить  $R_G$  как  $R_G = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

К решению этой задачи можно подойти иначе, если воспользоваться уравнением эллипса, в котором  $x = R_G \cos \varphi_G$ ,  $y = R_G \sin \varphi_G$ . Тогда уравнение эллипса примет следующий вид:

$$\frac{R_G^2 \cos^2 \varphi_G}{a^2} + \frac{R_G^2 c \sin^2 \varphi_G}{b^2} = 1,$$

где  $\varphi_G$  – геоцентрическая широта точки на поверхности эллипсоида,  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипсоида соответственно. Поскольку  $b^2 = a^2(1 - \alpha)^2$ , то  $R_G^2[(1 - \alpha)^2 \cos^2 \varphi_G + \sin^2 \varphi_G] = a^2(1 - \alpha)^2$ , где  $\alpha$  – первое сжатие эллипсоида. Если опустить в силу малости квадрат первого сжатия, то можно записать

$$R_G = a \sqrt{\frac{1 - 2\alpha}{(1 - 2\alpha) \cos^2 \varphi_G + \sin^2 \varphi_G}}.$$

Этой формулой можно воспользоваться после того, как с помощью выражений (1.3.21) и (1.3.22) следует перейти от геодезической широты к геоцентрической.

В работе [80] предлагается формула для приближённых вычислений геоцентрического радиуса эллипсоида в следующем виде:

$$R_G = a(1 - \alpha \sin^2 B).$$

**Уравнения поверхности эллипсоида в функции геодезических координат.** Приемоиндикаторы спутниковых навигационных систем предоставляют штурману геодезические координаты, преобразовывая прямоугольные. Обратимся к рис. 2, на котором точку  $Q$ , лежащую на поверхности земного эллипсоида, можно задать либо геодезическими координатами ( $B, L$ ), либо прямоугольными ( $x, y, z$ ). Для понимания алгоритма работы приемоиндикатора получим математические

зависимости между геодезической и прямоугольной системами координат.

Воспользуемся параметрическими уравнениями поверхности эллипсоида

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi_{\Pi} \cos L, \\ y &= a \cos \varphi_{\Pi} \sin L, \\ z &= b \sin \varphi_{\Pi}. \end{aligned} \right\}$$

Значение радиуса параллели  $a \cos \varphi_{\Pi}$  заменим другим его выражением  $N \cos B$  согласно выражению (1.3.53). Преобразуем далее выражение для  $z$ , учитывая полученные ранее соотношения:

$$b = a \sqrt{1 - e^2}, \quad \sin \varphi_{\Pi} = \frac{\sin B}{V}, \quad W = V \sqrt{1 - e^2}, \quad N = \frac{a}{W}.$$

Тогда

$$z = a \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin B}{V} = \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin B = N (1 - e^2) \sin B.$$

Таким образом, получаем следующие уравнения поверхности эллипсоида через геодезические координаты:

$$\left. \begin{aligned} x &= N \cos B \cos L, \\ y &= N \cos B \sin L, \\ z &= N \sin B (1 - e^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.67)$$

Полезно будет сравнить равенства (1.3.67) с равенствами (1.3.15б).

**Длины дуг меридиана и параллели.** Умение рассчитать длину дуги меридиана и параллели необходимо не только для картографических вычислений. Дело в том, что в последнее время на суда поступают средства электронной картографии, и поэтому штурман должен уметь проверить точность работы этих средств. Самый простой способ проверки заключается в измерении длины дуг параллелей и меридианов между точками с известными координатами с помощью стандартного режима **A-B** и сравнении этих длин с расчетными.

Меридиан представляет собой полуэллипс, концы которого совпадают с полюсами эллипсоида. Экватор делит меридиан на две симметричные части. Для определения длины дуги меридиана ( $X$ ) от экватора ( $B = 0$ ) до произвольной параллели с широтой  $B$  воспользуемся определенным интегралом

$$X = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB = \int_0^B M dB.$$

Этот интеграл относится к эллиптическим и не выражается в элементарных функциях. Чтобы привести его к виду, пригодному для вычислений, разложим в ряд подынтегральное выражение, а затем проинтегрируем этот ряд почленно.

Разложение радиуса кривизны меридиана как функции геодезической широты в быстро сходящийся ряд было уже ранее выполнено в двух видах. Для интегрирования более удобен ряд (1.3.62), почленное интегрирование которого выполняется довольно просто. Окончательный результат будет таким:

$$X = a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \frac{a_8}{8} \sin 8B - \dots \quad (1.3.68)$$

Значение последнего написанного члена этого ряда равно 0,00003 метра, и поэтому его можно отбросить даже при самых высокоточных вычислениях. Для удобства вычислений преобразуем оставшиеся члены ряда, заменив тригонометрические функции кратного аргумента степенными функциями,

$$X = a_0 B - \sin B \cos B \left[ (a_2 - a_4 + a_6) + \left( 2a_4 - \frac{16}{3} a_6 \right) \sin^2 B + \frac{16}{3} a_6 \sin^4 B \right]. \quad (1.3.69)$$

В источнике [75] изложен несколько иной способ расчёта дуги меридиана от экватора до параллели  $B$ . В нём предлагается формула, аналогичная (1.3.69),

$$X = AB^\circ - F \sin 2B + C \sin 4B - D \sin 6B + E \sin 8B - \dots, \quad (1.3.69a)$$

в которой  $B^\circ$  – широта в градусной мере, а коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$A = \text{arc}1^\circ a(1 - e^2) \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \dots \right) =$$

$$= \text{arc}1^\circ \left( \frac{a+b}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right);$$

$$F = a(1 - e^2) \left( \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4 + \frac{525}{1024} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \dots \right) =$$

$$= \frac{a+b}{2} \left( \frac{3}{2} n - \frac{3}{16} n^3 + \dots \right);$$

$$C = a(1 - e^2) \left( \frac{15}{256} e^4 + \frac{105}{1024} e^6 + \frac{2205}{16384} e^8 + \dots \right) =$$

$$= \frac{a+b}{2} \left( \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{64} n^4 + \dots \right);$$

$$D = a(1 - e^2) \left( \frac{35}{3072} e^6 + \frac{315}{122333} e^8 + \dots \right) = \frac{a+b}{2} \left( \frac{35}{48} n^3 + \dots \right);$$

$$E = a(1 - e^2) \left( \frac{315}{131072} e^8 + \dots \right) = \frac{a+b}{2} \left( \frac{315}{5112} n^4 + \dots \right).$$

Можно также предложить более простой способ расчёта длины дуги меридиана по следующей формуле [80]:

$$X = a \left[ B - \frac{e^2 B}{4} - \frac{3e^2}{8} \sin 2B - \frac{3e^4}{64} B - \frac{3e^4}{32} \sin 2B + \frac{15e^4}{256} \sin 4B \right].$$

Если приходится определять длину дуги меридиана между двумя достаточно близкими параллелями ( $B_1 = const$ ,  $B_2 = const$ ), то можно сначала вычислить длины дуг меридиана от экватора до заданных широт  $B_1$  и  $B_2$  по формулам (1.3.68), (1.3.69) или по формуле (1.3.69а), а затем получить их разность  $\Delta X = X_2 - X_1$ . Второй путь решения состоит в том, что величину  $\Delta X$  определяют непосредственно по разности широт  $\Delta B = B_2 - B_1$ , исходя из предположения малой величины этой разности [12]. Для этих целей рекомендуется следующая формула:

$$\Delta X = M_1 \Delta B + \frac{3}{2} a e^2 (1 - e^2) \left[ \left( 1 + \frac{5}{2} e^2 \sin^2 B_1 \right) \frac{\Delta B^2}{2} \sin 2B_1 + \frac{\Delta B^3}{3} \cos 2B_1 + \dots \right]. \quad (1.3.70)$$

Индекс 1 означает, что данные величины относятся к начальной широте, т.е. к  $B_1$ . В предложенной формуле  $\Delta B$  выражено в радианной мере, а члены порядка  $a e^6 \Delta B^2$ ,  $a e^4 \Delta B^3$ ,  $a e^2 \Delta B^4$  и более высоких порядков отброшены.

Необходимо понять применимость формулы (1.3.70) с позиции малости разности  $\Delta B$ . Погрешность в длине дуги  $\Delta X$  за счет отброшенных членов составляет величину менее 0,001 м при  $\Delta B = 0,01$  ( $\Delta X \approx 60$  км) и не более 1 м при  $\Delta B = 0,01$  ( $\Delta X \approx 600$  км) [12].

Число членов ряда  $\Delta X$  можно сократить в два раза, если коэффициенты ряда вычислять не по начальному аргументу  $B_1$ , а по среднему значению, т.е.  $(B_1 + B_2)/2$ . Отсюда

$$\Delta X = M_m \Delta B + \frac{a e^2 (1 - e^2)}{8} \Delta B^3 \cos 2B_m + \dots, \quad (1.3.71)$$

где  $M_m$  соответствует  $B_m$ . Второй член в правой части равенства (1.3.71) на широте  $B_m = 45^\circ$  равен нулю, а на широтах  $30^\circ$  и  $60^\circ$  составляет всего лишь 0,002 м при  $\Delta B = 0,01$  рад ( $\approx 30'$ ). Поэтому для

малых разностей широт дугу меридиана можно рассматривать как дугу окружности, радиус которой равен  $M_m$ , т. е.

$$\Delta X = M_m \Delta B. \quad (1.3.72)$$

Теперь найдем обратную зависимость  $\Delta B$  от  $\Delta X$ . Пользуясь формулой обращения степенного ряда, из ряда (1.3.70) с той же точностью получим

$$\Delta B = \Delta\beta - \frac{3}{2}e^2 \left[ \left(1 + e^2 \sin^2 B_1\right) \frac{\Delta\beta^2}{2} \sin 2B_1 + \frac{\Delta\beta^3}{3} \cos 2B_1 \right], \quad (1.3.73)$$

где  $\Delta\beta = \frac{\Delta X}{M_1}$ .

Из формулы (1.3.72) для малых  $\Delta B$  найдем

$$\Delta B = \frac{\Delta X}{M_m}. \quad (1.3.74)$$

Разность широт, вычисленная по формулам (1.3.73) и (1.3.74), выражена в радианах.

Для расчёта длины дуги меридиана между параллелями  $B_1$  и  $B_2$  существует другая формула [75]

$$\Delta X = X_2 - X_1 = A\Delta B^\circ - 2F \sin \Delta B \cos 2B_m + 2C \sin 2\Delta B \cos 4B_m - D \sin 3\Delta B \cos 6B_m,$$

в которой коэффициенты  $A$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $D$  соответствуют коэффициентам формулы (1.3.69а),  $\Delta B = B_2 - B_1$ ,  $B_m = (B_1 + B_2)/2$ .

Длину дуги меридиана, лежащую между параллелями  $B_1$  и  $B_2$ , можно рассчитать по формуле (1.3.74а)

$$\Delta X = a \left[ A_0(B_2 - B_1) - A_2(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + A_4(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - A_6(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \dots \right], \quad (1.3.74a)$$

в которой

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \dots, \quad A_2 = \frac{3}{8} \left( e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 + \dots \right),$$

$$A_4 = \frac{15}{256} \left( e^4 + \frac{3}{4}e^6 + \dots \right), \quad A_6 = \frac{35}{3072}e^6 + \dots$$

Длину дуги меридиана, заключённую между параллелями  $B_1$  и  $B_2$ , иногда рассчитывают иным способом [82].



$$\Delta X = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} (A_1 - A_2 \cos 2B + A_3 \cos 4B + \dots) dB,$$

$$A_1 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \dots, A_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \dots, A_3 = \frac{15}{64}e^4 + \dots, A_4 = \frac{35}{512}e^2.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\Delta X = a(1 - e^2) \left\{ A_1(B_2 - B_1) - \frac{1}{2}A_2(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}A_3(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) + \frac{1}{6}A_4(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \dots \right\}.$$

Подставляя разности синусов через произведения

$$\sin 2B_2 - \sin 2B_1 = 2 \sin(B_2 - B_1) \cos(B_2 + B_1),$$

$$\sin 4B_2 - \sin 4B_1 = 2 \sin 2(B_2 - B_1) \cos 2(B_2 + B_1),$$

получим

$$\Delta X = a(1 - e^2) \left\{ \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \dots\right)(B_2 - B_1) - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \dots\right)2 \sin(B_2 - B_1) \cos(B_2 + B_1) + \right. \\ \left. + \frac{15}{256}e^4 2 \sin 2(B_2 - B_1) \cos 2(B_2 + B_1) + \dots \right\}.$$

Если задача решается не для очень больших дуг, то полученное выражение можно упростить, положив

$$\sin(B_2 - B_1) = (B_2 - B_1) - \frac{(B_2 - B_1)^2}{6}, \quad \cos(B_2 + B_1) = \cos 2B_m, \quad B_m = \frac{B_2 + B_1}{2}.$$

Если широты заданы в секундах, то

$$\sin(B_2 - B_1) = \frac{B_2'' - B_1''}{\rho''} - \frac{(B_2'' - B_1'')^2}{6\rho''^3},$$

где  $\rho''$  – число секунд в одном радиане. Величину  $\rho''$  можно взять из Приложения 7 данного учебного пособия.

Тогда

$$\Delta X = a \frac{(B_2'' - B_1'')}{\rho''} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m\right)e^2 - \left(\frac{3}{64} + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \frac{15}{64} \cos 4B_m\right)e^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8}e^2 \frac{(B_2'' - B_1'')^2}{\rho''^2} \cos 2B_m \right\}. \quad (1.3.746)$$

Особое место среди расчётов длины дуги меридиана земного эллипсоида занимают методы вычисления длины дуги одной минуты. В отечественной литературе по навигации длина одной минуты меридиана  $b'$  рассчитывается, исходя из соображений  $b' = M \operatorname{arc} 1'$ , где  $M$  – радиус кривизны меридианного сечения. Отсюда

$$b' = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \operatorname{arc} 1'.$$

Для расчётов, не требующих повышенной точности, эту формулу упрощают разложением в ряд и отбрасыванием членов ряда, содержащих первый эксцентриситет в четвёртой степени и выше. После преобразований расчётная формула приобретает следующий вид [33]:

$$b' = a \left[ 1 - \frac{1}{4} e^2 (1 + 3 \cos 2B) \right] \operatorname{arc} 1'.$$

Отсюда зависимость длины одной минуты меридиана в метрах для эллипсоида Красовского выражается известной формулой [30]

$$b' = 1852,251 - 9,314 \cos 2B.$$

В зарубежной литературе исходят из соображений  $b' = M \sin 1'$  [80]. Разложение этой формулы в ряд приводит к следующему выражению:

$$b' = a \sin 1' (1 - e^2) \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \sin^2 B + \frac{15e^4}{8} \sin^4 B + \dots \right).$$

После исключения последних членов ряда и преобразований рабочая формула приобретает вид, аналогичный принятому в отечественной навигации, а именно:

$$b' = a \sin 1' \left[ 1 - \frac{1}{4} e^2 (1 + 3 \cos 2B) \right].$$

Разница между ними только в функциях  $\sin 1'$  и  $\operatorname{arc} 1'$ . Если обратиться к Приложению 7, то можно заметить, что между значениями этих функций различие наступает только в двенадцатом знаке после запятой. Поэтому с точки зрения точности вычислений выражения для расчётов длины дуги одной минуты меридиана можно считать равноценными. Конечная формула для оценки зависимости длины одной минуты меридиана от широты для Международного эллипсоида 1924 года выглядит следующим образом [80]:

$$b' = 1852,28 - 9,355 \cos 2B.$$

Чтобы рассчитать длину дуги параллели эллипсоида, воспользуемся теоремой Менье, согласно которой радиус параллели  $r$  равен произведению радиусу кривизны в первом вертикале на косинус геодезической широты, то есть  $r = N \cos B$ . Отсюда следует, что длина участка дуги параллели  $\Delta Y$  в метрах, заключённой между меридианами с геодезическими долготами  $L_1$  и  $L_2$ , выразится следующей формулой:

$$\Delta Y = N \cos B \operatorname{arc}1^\circ (L_2 - L_1)^\circ = \frac{a \cos B \operatorname{arc}1^\circ (L_2 - L_1)^\circ}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (1.3.75)$$

если разность долгот выражена в градусной мере, а большая полуось эллипсоида – в метрах. Если разность долгот представлена в угловых минутах, то следует воспользоваться функцией  $\operatorname{arc}1'$ . Значения функций  $\operatorname{arc}1^\circ$  и  $\operatorname{arc}1'$  можно взять из Приложения 7 данного Пособия.

Если разность долгот выражена в секундах, то дугу параллели в метрах можно рассчитать по следующей формуле [82]:

$$\Delta Y = \frac{l''}{\rho''} N \cos B = \frac{l''}{\rho''} \times \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (1.3.75a)$$

где  $l''$  – разность долгот в секундах,  $\rho''$  – число секунд в одном радиане.

**Геодезическая линия.** Понятие геодезической линии связано с кратчайшим расстоянием между двумя точками на поверхности земного эллипсоида.

В традиционной навигации кратчайшее расстояние ассоциируется с дугой большого круга, т. е. с ортодромическим расстоянием. Здесь Земля принимается в виде шара, а кратчайшим расстоянием между двумя точками будет линия, полученная в результате пересечения поверхности сферы с плоскостью, проходящей через эти две точки и центр сферы. Поэтому дуга большого круга имеет только кривизну одного и того же радиуса.

Кратчайшим расстоянием на поверхности эллипсоида будет линия сложной пространственной формы. В общем случае геодезические линии представляют собой линии, обладающие не только кривизной, но и кручением. Представим, что материальная точка вынуждена двигаться по поверхности эллипсоида. Если на точку не действуют посторонние силы, то она движется по поверхности эллипсоида по геодезической линии. Геодезическую линию можно представить еще так: это такая линия на поверхности сфероида, по которой расположится тонкая упругая нить, натянутая между двумя точками, принадлежащими поверхности сфероида.

Обозначим через  $\kappa$  кривизну геодезической линии, а через  $\sigma$  – ее кручение. Тогда эти величины определяются так:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \\ \sigma &= \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) \sin A \cos A, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.76)$$

где  $A$  – геодезический азимут, т. е. угол между северной частью геодезического меридиана и касательной к геодезической линии в данной точке.

Данную систему можно представить в другом виде, если  $N$  вынести за скобки и учесть, что

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}{N}, \\ \sigma &= -\frac{e'^2 \cos^2 B}{2N} \sin 2A. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.77)$$

При азимутах  $0^\circ$  и  $180^\circ$  кручение  $\sigma$  равно нулю. Это соответствует совпадению геодезической линии с меридианом. На самом деле меридиан имеет только кривизну, а кручение у него отсутствует, т. к. все точки меридиана находятся в одной плоскости. Кручения не будет и в том случае, если широта равна  $0^\circ$ , т. е. когда геодезическая линия совпадает с геодезическим меридианом. Когда же азимут равен  $90^\circ$ , то кручение равно 0, а кривизна геодезической линии совпадает с кривизной первого вертикала, т. е.  $\kappa = 1/N$ .

Уравнение геодезической линии записывается следующим образом:

$$r \sin A = C, \quad (1.3.78)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Равенство (1.3.78) представляет собой уравнение Клеро. Оно было выведено известным французским ученым Клеро в 1733 году для геодезической линии на всех поверхностях вращения. Уравнение Клеро отражает важное свойство геодезической линии на поверхности вращения: произведение радиуса параллели на синус азимута имеет одно и то же значение во всех точках геодезической линии. Очевидно, что каждая геодезическая линия имеет свое значение постоянной величины  $C$ .

Однако отсюда не следует, что уравнение Клеро является отличительным признаком геодезической линии. Например, геодезическая параллель подчиняется уравнению Клеро, но она не является геодезической линией. Таким образом, уравнение Клеро служит необходимым признаком, но не достаточным.

Выясним геометрический смысл постоянной интегрирования  $C$ . На любой геодезической линии неограниченной протяженности (кроме меридиана и экватора) можно найти две точки, в которых  $\sin A$  имеет наибольшую абсолютную величину, равную единице, а радиус параллели в этих же точках – наименьшую величину  $r_0$ . Тогда уравнение (1.3.78) можно переписать в таком виде:

$$r \sin A = r_0. \quad (1.3.79)$$

Каждая геодезическая линия в своем продолжении обязательно пересекает экватор. На экваторе радиус параллели имеет наибольшее значение, равное большой полуоси эллипсоида, тогда как  $\sin A$  будет иметь наименьшее значение, которое обозначим как  $\sin A_0$ . Следовательно,

$$r \sin A = a \sin A_0. \quad (1.3.80)$$

Уравнения (1.3.78), (1.3.79) и (1.3.80) тождественны и различаются только обозначениями постоянной величины интегрирования

$$C = r_0 = a \sin A_0.$$

Поскольку  $r = a \cos \varphi_n$ , то из уравнений (1.3.79) и (1.3.80) после сокращения на большую полуось ( $a$ ) получим одно важное видоизмененное уравнение Клеро

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_n \sin A &= \cos \varphi_{n0}, \\ \cos \varphi_n \sin A &= \sin A_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.81)$$

В этих равенствах  $\varphi_{n0}$  – приведенная широта наиболее удаленной от экватора точки геодезической линии,  $A_0$  – азимут геодезической линии в точке пересечения ее с экватором.

Пользуясь уравнением Клеро, можно исследовать расположение любой геодезической линии на всей поверхности эллипсоида. Пусть в точке пересечения с экватором геодезическая линия имеет азимут  $A_0$  северо-восточного направления. При движении вдоль геодезической линии в северном полушароиде радиус параллели уменьшается, а азимут геодезической линии увеличивается, пока не достигнет  $90^\circ$  в самой северной точке, в которой радиус параллели имеет наименьшее значение  $r_0$ , и геодезическая линия касается параллели  $\varphi_{n0} = \text{const}$ . Дальше геодезическая линия повернет на юго-восток, радиус

параллели будет увеличиваться, азимут также будет увеличиваться, но  $\sin A$  будет уменьшаться. На экваторе азимут достигнет наибольшей величины, равной  $180^\circ - A_0$ . После пересечения экватора геодезическая линия вступит в южный полушароид, радиус параллели будет уменьшаться до своей минимальной величины  $r_0$  в точке, имеющей максимальную южную широту, в которой азимут будет равен  $90^\circ$ . При последующем движении азимут продолжит уменьшаться, а радиус параллели будет увеличиваться. Вновь достигнув экватора, геодезическая линия пересечет его при азимуте  $A_0$ , как и в начале движения.

Однако в общем случае точки пересечения геодезической линии с экватором не совпадут, и в своем продолжении геодезическая линия будет описывать бесконечное число витков, последовательно касаясь двух параллелей:  $+\varphi_{п0} = const$  в северном полушарии и  $-\varphi_{п0} = const$  – в южном полушароиде. Это объясняется тем, что геодезическая линия на эллипсоиде не является плоской кривой, как дуга большого круга на шаре, так как обладает кручением.

Геодезическая линия играет основную роль при решении типовых задач на поверхности земного эллипсоида. Сущность решения почти всех видов задач состоит в определении геодезических координат некоторой точки по заданным координатам других точек и по измеренным или заданным угловым и линейным величинам.

Пусть между двумя точками  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 9) на поверхности эллипсоида проведена геодезическая линия длиной  $s$ . Условимся точку  $Q_1$  рассматривать как начальную точку геодезической линии, тогда  $Q_2$  будет ее конечной точкой. Условимся также, что геодезическая линия от точки  $Q_1$  к точке  $Q_2$  имеет прямое направление, а от точки  $Q_2$  к точке  $Q_1$  – обратное направление.

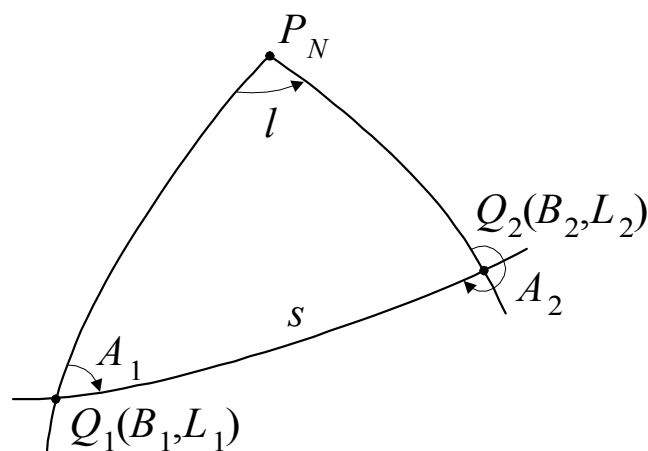


Рис. 9. Геодезическая линия

В любой точке геодезической линии ее азимут называется прямым (или начальным), если он указывает прямое направление геодезической линии ( $A_1$ ), и обратным, если он указывает обратное направление этой линии. Очевидно, что прямой и обратный азимуты в одной и той же точке отличаются друг от друга ровно на  $180^\circ$ . Прямой и обратный азимуты для разных точек геодезической линии уже не будут отличаться друг от друга ровно на  $180^\circ$ .

Среди типовых задач, решаемых на поверхности эллипсоида, выделяются две, которые принято называть прямой и обратной геодезическими задачами [12]. Прямая геодезическая задача формулируется так: даны геодезические координаты  $B_1$  и  $L_1$  некоторой точки  $Q_1$  (см. рис. 9), а также длина геодезической линии  $s$  и ее начальный азимут  $A_1$ . По этим данным требуется найти координаты  $B_2$  и  $L_2$ , а также обратный азимут  $A_2$  в точке  $Q_2$ . Обратная геодезическая задача формулируется иначе: даны геодезические координаты  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$ . Требуется найти кратчайшее расстояние  $s$  (длину геодезической линии) между заданными точками, а также прямой  $A_1$  и обратный  $A_2$  азимуты этой линии в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ . В обратной задаче геодезические координаты не определяются, а задаются, поэтому ее решение используют для контроля решения прямой геодезической задачи. Вместе с тем она имеет и большое самостоятельное значение. Она широко применяется в радионавигации, когда требуется определить расстояние и направление между передающей станцией и судном. Прямую и обратную геодезические задачи называют главными геодезическими задачами.

Главные геодезические задачи нашли широкое применение в современной электронной морской картографии. Умение их решать поможет штурману проверить точность предоставляемой ему картографической информации судовыми средствами отображения электронных карт.

**Решение геодезических задач способом Бесселя.** Способ Бесселя имеет в своей основе так называемое «бесселевое изображение эллипсоида на шаре», т. е. изображение только одной геодезической линии отождествляется с изображением всей поверхности [12]. Бессель предложил свой способ в 1825 году. Предполагается, что сферические широты равны приведенным, геодезические азимуты равны ортодромическим, а длина геодезической находится в однозначном соотношении со сферическим расстоянием, т. е. расстоянием на дуге большого круга.

**Прямая геодезическая задача.** Дано:  $B_1, L_1, A_1$  и  $s$ . Найти:  $B_2, L_2$  и  $A_2$ .

1. Сначала вычисляется приведенная широта начальной точки.

$$W_1 = 1 - e^2 \sin^2 B_1, \quad \sin \varphi_{\text{пл}} = \frac{\sin B_1 (1 - e^2)}{W_1}, \quad \cos \varphi_{\text{пл}} = \frac{\cos B_1}{W_1}.$$

2. Затем вычисляются следующие вспомогательные функции:

$$\sin A_0 = \cos \varphi_{\text{пл}} \sin A_1, \quad \text{ctg } \sigma_1 = \frac{\cos \varphi_{\text{пл}} \cos A_1}{\sin \varphi_{\text{пл}}},$$

$$\sin 2\sigma_1 = \frac{2 \text{ctg } \sigma_1}{\text{ctg}^2 \sigma_1 + 1}, \quad \cos 2\sigma_1 = \frac{\text{ctg}^2 \sigma_1 - 1}{\text{ctg}^2 \sigma_1 + 1},$$

где  $A_0$  – азимут дуги большого круга в точке ее пересечения экватора,  $\sigma$  – сферическое расстояние от точки пересечения дуги большого круга экватора до начальной точки на дуге большого круга, соответствующей начальной точке геодезической линии.

3. Вычисляются коэффициенты  $A, B, C, \alpha$  и  $\beta$  относительно  $\cos^2 A_0$ .

$$A = b \left( 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 - \dots \right),$$

$$B = b \left( \frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024} k^6 - \dots \right),$$

$$C = b \left( \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6 + \dots \right),$$

где  $b$  – малая полуось эллипсоида,  $k^2 = e^2 \cos^2 A_0$ .

$$\alpha = \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) - \left( \frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 A_0 + \left( \frac{3e^6}{128} + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots,$$

$$\beta = \left( \frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{32} + \dots \right) \cos^2 A_0 - \left( \frac{e^6}{64} + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots.$$

Для референц-эллипсоида Красовского для вычисления коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  получены следующие выражения:

$$\alpha = [33523299 - (28189 - 70 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0] \cdot 10^{-10},$$

$$\alpha = 691,46768 - (0,58143 - 0,00144 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0,$$

$$\beta = (0,2907 - 0,001 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0.$$

Первая формула для  $\alpha$  используется, когда величина  $\sigma$  выражается в секундах дуги, вторая формула – если  $\sigma$  выражается в радианах. В



обоих случаях долгота выражается в градусной мере. С этими коэффициентами погрешность в вычисленном значении долготы составит величину не более 0,0002".

4. Вычисляются сферические расстояния.

$$\sigma_0 = [s - (B + C \cos 2\sigma_1) \sin 2\sigma_1] \frac{1}{A},$$

$$\sin 2(\sigma_0 + \sigma_1) = \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 + \cos 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\cos 2(\sigma_0 + \sigma_1) = \cos 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 - \sin 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\sigma = \sigma_0 + [B + 5C \cos 2(\sigma_0 + \sigma_1)] \frac{\sin 2(\sigma_0 + \sigma_1)}{A},$$

где  $\sigma$  – длина дуги большого круга между начальной и конечной точками на сфере.

5. Вычисляются поправки к разности долгот.

$$\delta = \lambda - l = \left\{ \alpha \sigma + \beta [\sin 2(\sigma_0 + \sigma_1) - \sin 2\sigma_1] \right\} \sin A_0,$$

где  $\lambda$  – разность сферических долгот между начальной и конечной точками на сфере,  $l$  – разность геодезических долгот между начальной и конечной точками на эллипсоиде (см. рис. 9).

6. Вычисляются геодезические координаты и азимут в конечной точке.

$$\sin \varphi_{i2} = \sin \varphi_{i1} \cos \sigma + \cos \varphi_{i1} \cos A_1 \sin \sigma,$$

$$B_2 = \arctg \left[ \frac{\sin \varphi_{i2}}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{i2}}} \right],$$

$$\lambda = \arctg \left[ \frac{\sin A_1 \sin \sigma}{\cos \varphi_{i1} \cos \sigma - \sin \varphi_{i1} \cos A_1 \sin \sigma} \right].$$

При вычислении  $\lambda$  необходимо учитывать правила знаков, которые представлены в нижеследующей таблице. Запись  $|\lambda|$  говорит о принадлежности первой четверти.

Знак $\sin A_1$	+	+	+	+
Знак $\operatorname{tg} \lambda$	+	-	-	+
$\lambda =$	$ \lambda $	$180^\circ -  \lambda $	$- \lambda $	$ \lambda  - 180^\circ$

$$L_2 = L_1 + \lambda - \delta, \quad A_2 = \arctg \left[ \frac{\cos \varphi_{n1} \sin A_1}{\cos \varphi_{n1} \cos \sigma \cos A_1 - \sin \varphi_{n1} \sin \sigma} \right].$$

Вычисление  $A_2$  требует учета правила знаков, представленные в таблице ниже. Запись  $|A_2|$  говорит о принадлежности азимута первой четверти.

Знак $\sin A_1$	-	-	+	+
Знак $\operatorname{tg} A_2$	+	-	+	-
$A_2 =$	$ A_2 $	$180^\circ -  A_2 $	$180^\circ +  A_2 $	$360^\circ -  A_2 $

**Обратная геодезическая задача.** Дано:  $B_1 B_2$ ,  $L_1$  и  $L_2$ . Найти:  $A_1$ ,  $A_2$  и  $s$ .

1. Выполняются подготовительные вычисления.

$$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}, \quad W_2 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2},$$

$$\sin \varphi_{i1} = \frac{\sin B_1 \sqrt{1 - e^2}}{W_1}, \quad \sin \varphi_{i2} = \frac{\sin B_2 \sqrt{1 - e^2}}{W_2},$$

$$\cos \varphi_{i1} = \frac{\cos B_1}{W_1}, \quad \cos \varphi_{i2} = \frac{\cos B_2}{W_2}, \quad l = L_2 - L_1,$$

$$a_1 = \sin \varphi_{i1} \sin \varphi_{i2}, \quad a_2 = \cos \varphi_{i1} \cos \varphi_{i2}, \quad b_1 = \cos \varphi_{i1} \sin \varphi_{i2}, \quad b_2 = \sin \varphi_{i1} \cos \varphi_{i2}$$

2. Затем совместно вычисляются начальный азимут  $A_1$ , сферическое расстояние  $\sigma$  и разность долгот, применяя способ последовательных приближений.

$$\lambda = l + \delta$$

В первом приближении принимается  $\delta = 0$ .

$$p = \cos \varphi_{i2} \sin \lambda, \quad q = b_1 - b_2 \cos \lambda, \quad A_1 = \operatorname{arctg} \frac{p}{q}.$$

Знак начального геодезического азимута  $A_1$  можно определить по следующей таблице:

Знак $p$	+	+	-	-
Знак $q$	+	-	-	+
$A_1 =$	$ A_1 $	$180^\circ -  A_1 $	$180^\circ +  A_1 $	$360^\circ -  A_1 $

$$\sin \sigma = p \sin A_1 + q \cos A_1, \quad \cos \sigma = a_1 + a_2 \cos \lambda, \quad \sigma = \operatorname{arctg} \frac{p \sin A_1 + q \cos A_1}{p \sin A_1 + q \cos A_1}.$$

Знак сферического расстояния можно определить из такой таблицы:

Знак $\cos \sigma$	+	-
$\sigma =$	$ \sigma $	$180^\circ -  \sigma $

Следует помнить, что  $|A_1|$  и  $|\sigma|$  – аргументы в первой четверти.

$$\sin A_0 = \cos \varphi_{\text{пл}} \sin A_1, \quad x = 2a_1 - \cos^2 A_0 \cos \sigma, \quad \delta = [\alpha \sigma - \beta' x \sin \sigma] \sin A_0.$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta'$  вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha = [33523299 - (28189 - 70 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0] \cdot 10^{-10},$$

$$\beta' = (28189 - 94 \cos^2 A_0) \cdot 10^{-10}.$$

После вычисления  $\delta$  ее значение подставляется в формулу для получения сферической разности долгот  $\lambda$  и повторяются все вычисления до получения следующего значения  $\delta$ , с которым затем вновь повторяются эти же вычисления. Так повторяется до тех пор, пока новое значение  $\delta$  не будет отличаться от предыдущего на заданную величину. Значения  $\lambda$ ,  $A_1$ ,  $\sigma$ ,  $x$  и  $\sin A_0$ , полученные в последнем приближении, принимаются за окончательные.

3. Вычисляются коэффициенты  $A$ ,  $B'$  и  $C'$ , а затем длина геодезической линии  $s$ .

$$A = 6356863,02 + (10708,949 - 13,474 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0,$$

$$B' = 10708,938 - 17,956 \cos^2 A_0, \quad C' = 4,487,$$

$$y = (\cos^4 A_0 - 2x^2) \cos \sigma, \quad s = A\sigma + (B'x + C'y) \sin \sigma.$$

4. Вычисляется обратный азимут.

$$A_2 = \arctg \frac{\cos \varphi_{\text{пл}} \sin \lambda}{b_1 \cos \lambda - b_2}.$$

Предложенный способ Бесселя пригоден при любых расстояниях между точками на поверхности эллипсоида и с любой точностью.

**Решение геодезических задач приближенными способами.**

Способ Бесселя обладает предельно высокой точностью, но он не так прост. Для решения радионавигационных задач определения места с помощью РНС Logan-C, способ Бесселя применять нет смысла, поскольку точность измерения радионавигационных параметров слишком низкая по сравнению с точностью расчетов геодезических линий. Однако появление высокоточных локальных РНС, призванных обеспечивать прибрежные нефтегазовые разработки, а также псевдоспутников, ставит на повестку дня использование в навигации более простых способов, но незначительно уступающих в точности способу Бесселя.

При решении ряда навигационных задач небольшие участки земной поверхности принимают за плоские и применяют формулы аналитической геометрии на плоскости. Расстояния, при которых

Землю можно считать плоской и применять соответствующие приёмы вычисления координат, условившись называть малыми расстояниями [64]. Предельно малые расстояния  $S$ , допускающие подобные упрощения, не вызывая погрешностей более допустимой величины  $\Delta S$ , можно определить по формуле  $S = \sqrt[3]{3\Delta S R^2}$ , где  $R$  – принимаемый в расчётах радиус земного шара.

Когда искажения за счёт решения задач на плоскости становятся больше допустимых, то обращаются к способам решения задач на сфере. Заменяя земной сфероид шаром, пренебрегают полярным сжатием Земли. При таком подходе также неизбежны погрешности, но если они окажутся меньше погрешностей измерения навигационных и радионавигационных параметров, то замена сфероида шаром вполне допустима. В таком случае можно решать навигационные задачи известными способами сферической тригонометрии. Расстояния, допускающие замену сфероида шаром, принято называть средними расстояниями. Предельную величину среднего расстояния  $S$  можно рассчитать по формуле [64]

$$S = \frac{\Delta S}{g + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi (2 + \cos 2A)},$$

где  $\Delta S$  – допустимая погрешность в расстояниях,  $g = (C-R)/C$ , где  $R$  – принимаемый в расчётах радиус земного шара,  $C$  – полярный радиус кривизны земного эллипсоида,  $e$  – первый эксцентриситет эллипсоида,  $\varphi$  – геодезическая или геоцентрическая средняя широта,  $A$  – азимут, по которому располагается расстояние  $S$ .

Расстояния, на которых обязательно учитывают сфероидичность Земли принято называть большими расстояниями. Приближённые способы решения задач при больших расстояниях делятся на два приёма: проектированием сфероида на шар и изображением сфероида на шаре с соответствием по нормали. В первом приёме проектируют сфероидические (геодезические) координаты на шар и получают соответствующие им сферические (геоцентрические) координаты, которые затем участвуют в расчётах по формулам сферической тригонометрии. Во втором приёме изображают сфероид на шаре с соответствием по нормалям, полагая сфероидические координаты равными сферическими. На этой основе используют уравнения сферической тригонометрии, но в расстояния и в направления вносят поправки за счёт пренебрежения сжатием сфероида.

Приводимые ниже приближенные способы вполне пригодны для решения любых радионавигационных задач. Их можно рекомендовать еще для решения одной специфической задачи, возникающей при работе с электронными картами. Достоинством электронных карт является простота изменения масштаба. При отображении карт мелкого масштаба Земля принимается за шар. В руководствах по эксплуатации программных продуктов электронной картографии редко говорится о том, начиная с каких масштабов происходит переход с эллипсоида на шар. С помощью приближенного способа эту неопределенность можно разрешить довольно просто. Достаточно измерить с помощью электронного курсора расстояние между двумя точками на электронной карте и сравнить его с геодезическим, рассчитанным по приводимым ниже способам, и с ортодромическим, рассчитанным традиционным способом, применяющимся в навигации.

**Способ ГУНУО.** Рассматриваемый способ изложен в работе [19]. Длину геодезической линии по геодезическим координатам точек – начальной (Н)  $B_H, L_H$  и конечной (К)  $B_K, L_K$  для расстояний от 60 до 10260 миль рассчитывают в следующей последовательности.

1. Рассчитывают длину ортодромии в градусах между точками Н и К по формуле

$$\sigma = \arccos(\sin B_H \sin B_K + \cos B_H \cos B_K \cos \Delta L),$$

где  $\Delta L = L_K - L_H$ .

2. Рассчитывают первую поправку длины  $\Delta\sigma_1$  в градусах по формуле  $\Delta\sigma_1 = C_4\sigma$ , где  $C_4 = \frac{a-R}{R}$ ,  $a$  – большая полуось эллипсоида (м),  $R$  – радиус Земли, принимаемый равным 6366707,1 м.

3. Рассчитывают вторую поправку длины  $\Delta\sigma_2$  в градусах по формуле

$$\Delta\sigma_2 = K_1 (K_1 (\sin B_H + \sin B_K)^2), \text{ где } K_1 = C_5 \frac{3 \sin \sigma - \frac{\sigma}{57,29578}}{\cos^2 \frac{\sigma}{2}},$$

$C_5 = \frac{a-b}{8 \cdot 60 \cdot 1852}$ , где  $b$  – малая полуось эллипсоида (м).

4. Рассчитывают третью поправку длины  $\Delta\sigma_3$  в градусах по формуле

$$\Delta\sigma_3 = -K_2 (\sin B_H - \sin B_K)^2, \text{ где } K_2 = C_5 \frac{3 \sin \sigma + \frac{\sigma}{57,29578}}{\cos^2 \frac{\sigma}{2}}.$$

5. Рассчитывают длину геодезической линии в градусах по формуле

$$D_\Gamma = \sigma + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3.$$

6. Рассчитывают длину геодезической линии в милях

$$D_r (\text{мили}) = 60 D_r$$

или в метрах

$$D_r (\text{метры}) = 111120 D_r.$$

Погрешность вычисления длины геодезической линии данным способом не превышает 50 метров.

Азимут геодезической линии по тем же самым данным и для тех же условий вычисляют в следующей последовательности.

1. Рассчитывают азимут ортодромии в градусах в начальной точке по формуле

$$A_H = \arctg \frac{\sin \Delta L}{\cos B_H \operatorname{tg} B_K - \sin B_H \cos \Delta \lambda}.$$

Чтобы определить четверть, в которой находится  $A_H$ , необходимо воспользоваться таблицей

Четверть угла $A_H$	Знак числителя	Знак знаменателя
I	+	+
II	+	-
III	-	-
IV	-	+

2. Рассчитывают первую половину азимута  $\Delta A_1$  в градусах по формуле

$$\Delta A_1 = K_3 \cos^2 B_H \sin 2A_H, \quad K_3 = C_6 \left( 1 + \frac{\sigma}{57,29578 \operatorname{tg} \sigma} \right),$$

$$C_6 = \frac{57,29578(a-b)}{2a}.$$

3. Рассчитывают вторую поправку азимута  $\Delta A_2$  в градусах

$$\Delta A_2 = -K_4 \sin 2B_H \sin A_H, \quad \text{где } K_4 = C_7 \sigma, \quad C_7 = (a+b)/2a.$$

4. Рассчитывают азимут геодезической линии в начальной точке в градусах по формуле  $A_{ГН} = A_H + \Delta A_1 + \Delta A_2$ .

Погрешность вычисления азимута таким способом не превышает двух угловых секунд.

Длину и азимут геодезической линии для расстояний до 800 миль можно рассчитать по формулам сферической тригонометрии методом приведения широт начальной и конечной точек и разности долгот между ними к шару радиусом 6366707,1 м. Расчет производится в следующей последовательности.

1. Рассчитываются приведенные широты  $\varphi_n$  начальной и конечной точек в градусах по формуле  $\varphi_n = X/111120$ , где  $X$  – длина дуги

меридиана от экватора до широты  $B$  в метрах. Для этого можно воспользоваться формулой (1.3.68) или (1.3.69).

2. Рассчитывают долготные коэффициенты  $K_L$  начальной и конечных точек по формуле

$$K_L = \frac{N \pi \cos B}{10800 \cdot 1852 \cdot \cos \varphi_n},$$

где  $N$  – главный радиус кривизны в метрах, который можно вычислить по формулам (1.3.56), (1.3.58) или (1.3.60).

3. Рассчитывают приведенную разность долгот  $\Delta\lambda_n$  в градусах по формуле

$$\Delta\lambda_n = (L_K - L_H) \frac{K_{L_H} + K_{L_K}}{2}.$$

4. Рассчитывают длину геодезической линии в градусах по формуле

$$D_r = 2 \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_{пк} - \varphi_{пн}}{2} + \cos \varphi_{пн} \cdot \cos \varphi_{пк} \cdot \sin^2 \frac{\Delta\lambda_n}{2}}.$$

5. Рассчитывают длину геодезической линии в милях, умножая  $D_r$  на 60, или в метрах, умножая на 111120.

6. Рассчитывают азимут геодезической линии в начальной точке в градусах в полукруговом счете  $A'_{Гн}$

$$A'_{Гн} = \arccos \left( \frac{\sin \varphi_{пк}}{\cos \varphi_{пн} \sin D_r} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_{пн}}{\operatorname{tg} D_r} \right).$$

При вычислении  $A_{Гн}$  в круговом счете следует соблюдать общеизвестные правила:

$$\begin{aligned} \text{если } \Delta\lambda_n > 0, & \quad \text{то } A_{Гн} = A'_{Гн}; \\ \text{если } \Delta\lambda_n < 0, & \quad \text{то } A_{Гн} = 360^\circ - A'_{Гн}. \end{aligned}$$

Погрешность вычисления длины геодезической линии данным способом не превышает 1 м при  $D_r < 80$  миль и 50 м при  $D_r < 800$  миль. Погрешность вычисления азимута не превышает одной угловой минуты.

**Способы В.Е. Ольховского.** Еще в 1952 году известным советским ученым Владимиром Евгеньевичем Ольховским были предложены простые и удобные для вычислений приближенные способы решения прямых и обратных геодезических задач для морской радионавигации [20]. Сейчас, когда большинство судов оснащены персональными компьютерами, настало время вернуться к этим способам. Суть способов сводится к выбору такого среднего радиуса сферы  $R_{ср}$ , при котором какая-либо часть поверхности земного эллипсоида максимально близка к поверхности сферы. При этом сначала вычисляются расстояния и азимуты на сфере по

известным формулам сферической тригонометрии, а для перехода к геодезическим азимутам и расстояниям рассчитываются соответствующие поправки. Средний радиус сферы соответствует такой широте  $B_0$ , в которой средний радиус сферы равен среднему радиусу кривизны земного эллипсоида  $R_0$ , т. е.

$$R_{\text{cp}} = R_0 = \sqrt{M_0 \cdot N_0},$$

где  $M_0$  – радиус кривизны меридиана,  $N_0$  – радиус кривизны первого вертикала в широте  $L_0$ .

Если при решении задач принять длину одной минуты меридиана равной международной морской мили (установленную циркуляром ГУ ВМС РККА № 317 от 8 июля 1931 года равной 1852 метрам), то средний радиус такой сферы будет равен 6366707 метрам, что численно равно радиусу средней кривизны земного эллипсоида на параллели  $28^\circ 43,5'$ . Такая замена удобна для вычислений, но даст большие погрешности при переходе к геодезическим расстояниям и азимутам. Если же замену сделать только для средней широты некой ограниченной интересуемой области, то средний радиус будет иным, а погрешности будут минимальны. Воспользуемся рисунком 10.

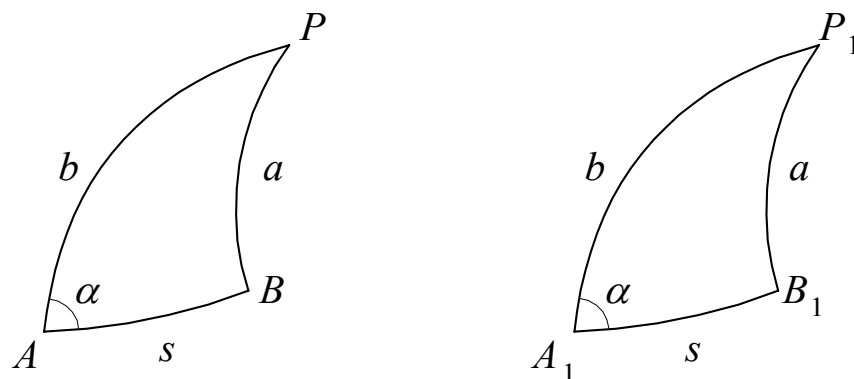


Рис. 10. Полярные сфероидический  $APB$  и сферический  $A_1P_1B_1$  треугольники

Допустим, что существует полярный сфероидический треугольник  $APB$ , образованный дугами меридианов  $PA$  и  $PB$  и геодезической линией  $AB$ . Обозначим стороны этого треугольника в линейных единицах через  $a$ ,  $b$  и  $s$ . Затем построим по сторонам  $a$ ,  $b$  и  $s$  сферический треугольник  $A_1P_1B_1$  на шаре радиуса  $R_{\text{cp}}$ , который определяется из уравнения

$$\frac{1}{R_{\text{cp}}^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_P^2} \right), \quad (1.3.82)$$



где  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_P$  – средние радиусы кривизны эллипсоида в точках  $A$ ,  $B$  и  $P$  соответственно. Разности между сфероидическими углами  $A$ ,  $B$ ,  $P$  и сферическими углами  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $P_1$  при сторонах  $a$  и  $b$  порядка 2400 миль и  $s$  порядка 500 миль не превысят одной угловой секунды [20]. Поэтому соответствующие углы сфероидического и сферического треугольников можно принять равными. При таком допущении решение сфероидического треугольника  $APB$  можно заменить решением сферического треугольника  $A_1P_1B_1$  и, выразив стороны этого треугольника в угловой мере или в частях радиуса, определять соотношения между его элементами по традиционным формулам сферической тригонометрии. Пусть нам известны геодезические координаты точек  $A$  и  $B$ , и требуется определить азимут  $\alpha$  и сторону  $s$ . Длины сторон сфероидического треугольника  $APB$   $a$  и  $b$  в линейной мере можно рассчитать с помощью длин дуг меридианов на земном эллипсоиде:

$$a = X_P - X_A, \quad b = X_P - X_B,$$

где  $X_P$  – длина дуги меридиана на эллипсоиде от экватора до полюса,  $X_A$  и  $X_B$  – длина дуг меридианов от экватора до параллелей с широтами  $B_A$  и  $B_B$ , выраженные в метрах. Для перехода к вычислениям на сфере заменим решение сфероидического треугольника  $APB$  решением сферического треугольника  $A_1P_1B_1$  с соответственно равными сторонами и углами. Для вычисления  $\alpha$  и  $s$  воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg} a \sin b \operatorname{cosec} P - \cos b \operatorname{ctg} P, \\ \sin s &= \sin a \operatorname{cosec} \alpha \sin P, \end{aligned} \quad (1.3.83)$$

где  $P = L_B - L_A = L$ , стороны  $a$  и  $b$  выражены в минутах дуги меридиана шара, на котором построен треугольник  $A_1P_1B_1$ .

Существует другой способ В.Е. Ольховского, который сводится к вычислениям поправок за сжатие Земли. Поправки сторон сферического треугольника или поправки к геодезическим широтам точек  $A$  и  $B$  будут равны искажениям, которые претерпевают дуги меридианов  $PA$  и  $PB$  при изображении эллипсоида на шаре. Эти поправки легко рассчитать с помощью формул определения длины дуги меридиана на земном эллипсоиде. Например, поправка стороны  $PA$  или геодезической широты  $B_A$  может быть определена таким образом:

$$\Delta B = \frac{\Delta X - \Delta X'}{m}, \quad (1.3.84)$$

где  $\Delta X = X_P - X_A$ ,  $\Delta X' = (90^\circ - B_A) R_{\text{ср}} \operatorname{arc} 1^\circ$ ,  $m$  – длина одной минуты дуги меридиана шара, на котором построен сферический треугольник  $A_1P_1B_1$ , выраженная в метрах. Исправляя геодезические широты,

необходимо учитывать поправку с обратным знаком. Введение этих поправок в геодезические широты точек, когда требуется определить геодезические расстояния и азимут, если заданы координаты двух точек, позволяет довольно просто учесть сфероидичность Земли. Так в предыдущем способе достаточно ввести поправки в геодезические широты точек  $A$  и  $B$  и, подставив исправленные широты в формулы (1.3.83) сферической тригонометрии, рассчитать азимут  $\alpha$  и длину геодезической линии  $s$ .

В свое время был опубликован таблично-аналитический способ В.Е. Ольховского [28], который в широтах более  $60^\circ$  позволяет вычислять геодезические расстояния до 650 миль с погрешностью, не превышающей 0,02 – 0,08 мили. В средних широтах эти погрешности несколько больше, но не превышает 0,1 – 0,2 мили.

**Способы Винсента.** В 1975 году Винсентом был предложен способ решения прямой и обратной геодезической задачи, отличающийся высокой точностью, хотя по классификации его относят к итерационным [81, 86]. Для изложения этого способа опишем сначала переменные, входящие в формулы. В формулах Винсента  $a, b$  – большая и малая полуоси эллипсоида соответственно,  $f$  – сжатие  $(a - b)/a$ ,  $B$  – геодезическая широта,  $L$  – разность геодезических долгот,  $s$  – длина геодезической линии,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – азимуты геодезической линии,  $\alpha_2$  – азимут из первой точки во вторую,  $\alpha$  – угол пересечения экватора геодезической линией,  $u^2 = \cos^2 \alpha (a^2 - b^2) / b^2$ ,  $U$  – приведённая широта  $U = (1-f)tgB$ ,  $\lambda$  – разность долгот на вспомогательной сфере,  $\sigma$  – угловое расстояние между точками на сфере,  $\sigma_1$  – угловое расстояние на сфере от экватора до первой точки,  $\sigma_m$  – угловое расстояние на сфере от экватора до середины линии. С учётом принятых обозначений прямая геодезическая задача решается сначала вычислением вспомогательных величин

$$tg \sigma_1 = \frac{tg U_1}{\cos \alpha_1}, \quad \sin \alpha = \cos U_1 \sin \alpha_1,$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384} \left\{ 4096 + u^2 [-768 + u^2 (320 - 175u^2)] \right\}, \quad (1.3.85)$$

$$E = \frac{u^2}{1024} \left\{ 256 + u^2 [-128 + u^2 (74 - 47u^2)] \right\}, \quad (1.3.86)$$

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma, \quad (1.3.87)$$

$$\Delta\sigma = E \sin \sigma \left\{ \cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} E [\cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) - \frac{1}{6} E \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma) (-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m)] \right\}, \quad (1.3.88)$$

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma, \quad \text{где } \frac{s}{bA} \text{ – первое приближение.} \quad (1.3.89)$$

Выражения (1.3.87), (1.3.88) и (1.3.89) участвуют в итерационном процессе до тех пор, пока разность между очередным значением  $\sigma$  и предыдущим не будет меньше наперед заданной величины. Первое приближение подставляется в выражение (1.3.89). После завершения итераций вычисляются искомые координаты второй точки и обратный азимут.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B_2 &= \frac{\sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}{(1-f) \sqrt{\sin^2 \alpha + (\sin U_1 \sin \sigma - \cos U_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2}}. \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}. \\ C &= \frac{f}{16} \cos^2 \alpha [4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha)]. \end{aligned} \quad (1.3.90)$$

$$L = \lambda - (1-C)f \sin \alpha \{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)] \}. \quad (1.3.91)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha}{-\sin U_1 \sin \sigma + \cos U_1 \cos \sigma \cos \alpha_1}.$$

Если даже опустить члены выражений, в которых участвуют  $u^8$  и  $B^3$ , то максимальная погрешность направления способа Винсента не будет превосходить 0,00005". Поэтому выражения (1.3.85), (1.3.86) и (1.3.88) можно упростить следующим образом:

$$A = 1 + \frac{u^2}{256} [64 + u^2 (-12 + 5u^2)], \quad (1.3.92)$$

$$E = \frac{u^2}{512} [128 + u^2 (-64 + 37u^2)], \quad (1.3.93)$$

$$\Delta\sigma = E \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} E \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)]. \quad (1.3.94)$$

Обратная задача решается при первом приближении  $\lambda = L$ .

$$\sin^2 \sigma = (\cos U_2 \sin \lambda)^2 + (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)^2, \quad (1.3.95)$$

$$\begin{aligned}\cos \sigma &= \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \lambda, \\ \operatorname{tg} \sigma &= \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma}, \quad \sin \alpha = \frac{\cos U_1 \cos U_2 \sin \lambda}{\sin \sigma}, \\ \cos 2\sigma_m &= \cos \sigma - 2 \sin U_1 \sin U_2 / \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

Величина  $\lambda$  вычисляется с помощью выражений (1.3.90) и (1.3.91). Эта процедура итерационная, и начинается она с выражения (1.3.95).

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma),$$

где  $\Delta\sigma$  вычисляется с помощью формул (1.3.85), (1.3.86) и (1.3.88). Азимуты вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\cos U_2 \sin \lambda}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\cos U_1 \sin \lambda}{-\sin U_1 \cos U_2 + \cos U_1 \sin U_2 \cos \lambda}.\end{aligned}$$

Как и в прямой задаче, упрощенные выражения (1.3.92), (1.3.93) и (1.3.94) можно использовать, если максимальная точность вычислений ожидается не больше 1,5 мм. Формулы для обратной задачи не дадут результата, если величина  $\lambda$ , рассчитанная по формуле (1.3.91) становится более  $\pi$  по абсолютной величине.

#### ***Упрощенные способы вычислений геодезических расстояний.***

Существуют несколько упрощенных способов решения обратной геодезической задачи, когда по геодезическим координатам  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  начала и конца геодезической линии вычисляется длина ее  $s$ , учитывая большую полуось опорного земного эллипсоида  $a$ , его эксцентриситет  $e$  или сжатие  $\alpha = \sqrt{1 - e^2}$ .

В излагаемых способах вначале вычисляется эквивалентное угловое расстояние  $\sigma$  на сфере (ортодромическое расстояние) по формулам:

$$\sigma_1 = \arccos(\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos \Delta L)$$

или

$$\sigma_2 = \arccos(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda),$$

где  $\Delta L = L_2 - L_1$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – приведенные широты,  $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B$ ,  $L = \Delta L + \delta$  – приведенная разность долгот.

**Метод Бесселя.** Данный алгоритм является методом последовательных приближений.

$$s = a\sigma_2 E_\sigma, \quad E_\sigma = \sum_{k=1}^6 r_k \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_k},$$

$$\beta_k = \arcsin \left[ \sin \beta_1 \cos(\sigma_2 V_k) + \cos \beta_1 \cos A_s \sin(\sigma_2 V_k) \right]$$

$$r_1 = r_6 = 0,0856622462, \quad V_1 = 1 - V_6 = 0,0337652429,$$

$$r_2 = r_5 = 0,1803807865, \quad V_2 = 1 - V_5 = 0,1693953068,$$

$$r_3 = r_4 = 0,2339569673, \quad V_3 = 1 - V_4 = 0,3806904070,$$

$$A_{s_i} = \arctg \frac{\cos \beta_2 \sin \lambda_i}{\cos \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda_i},$$

$$\lambda_i = \Delta L + \delta_i, \quad \delta_i = e^2 \sigma_{2i} E_\lambda \cos \beta_1 \sin A_{s_i},$$

$$E_\lambda = \sum_{k=1}^6 \frac{r_k}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_k}}.$$

В первом приближении ( $i = 0$ ) принимается  $\delta_0 = 0$ . Вычисления повторяются до достижения заданной точности:  $|\delta_{i+1} - \delta_i| \leq \varepsilon$ .

#### Метод Андуйе.

$$s = a(\sigma_1 + \Delta\sigma), \quad \Delta\sigma = -0,25\alpha(MU + NV),$$

$$M = \frac{\sigma_1 - 3 \sin \sigma_1}{1 + \cos \sigma_1}, N = \frac{\sigma_1 + 3 \sin \sigma_1}{1 - \cos \sigma_1}, \quad U = (\sin B_1 + \sin B_2)^2, V = (\sin B_1 - \sin B_2)^2.$$

#### Метод Содано:

$$s = a\sigma_2(1 - \alpha)Q, \quad \delta = 0,$$

$$Q = 1 + \alpha + \alpha^2 - \frac{\alpha + \alpha^2}{2}m + \frac{(\alpha + \alpha^2)\sin \sigma_2}{2\sigma_2}(2p - m \cos \sigma_2) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{16} \left( 1 + \frac{\sin 2\sigma_2}{2\sigma_2} \right) m^2 - \frac{\alpha^2 \sin 2\sigma_2}{16\sigma_2} (2p - m \cos \sigma_2)^2 -$$

$$- \frac{\alpha^2 \sigma_2}{2 \sin \sigma_2} (1 - m)(p + m \cos \sigma_2),$$

$$m = 1 - c^2, \quad c = \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \Delta L \operatorname{cosec} \sigma_2, \quad p = \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

### Метод Ламберта:

$$s = a(\sigma_2 + \Delta\sigma), \quad \Delta\sigma = -0,25\alpha(MU + NV), \quad \delta = 0, \quad M = \frac{\sigma_2 - \sin \sigma_2}{1 + \cos \sigma_2},$$

$$N = \frac{\sigma_2 + \sin \sigma_2}{1 - \cos \sigma_2}, \quad U = (\sin \beta_1 + \sin \beta_2)^2, \quad V = (\sin \beta_1 - \sin \beta_2)^2.$$

**Метод Андуайе-Ламберта.** В современной литературе по навигации и геодезии изложено несколько алгоритмов решения прямой и обратной геодезических задач под общим названием “метод Андуайе-Ламберта”. Рассмотрим версию метода Андуайе-Ламберта, изложенную в [64]. Обратную геодезическую задачу предлагается решать вычислением поправок к расстоянию ( $\Delta S$ ) и к азимуту ( $\Delta A_1$ ).

$$\Delta S = \frac{a\alpha}{8} \left[ \frac{3\sin \sigma - \sigma}{\cos^2 \frac{\sigma}{2}} (\sin B_1 + \sin B_2)^2 - \frac{3\sin \sigma + \sigma}{\cos^2 \frac{\sigma}{2}} (\sin B_1 - \sin B_2)^2 \right],$$

$$\Delta A_1 = \alpha \left( \cos^2 B_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1 - \cos^2 B_2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \right),$$

$$S = \frac{a}{\rho'} \cdot \frac{\sigma}{\text{arcl}'},$$

где  $\Delta S$  – поправка к расстоянию, вычисленному по формулам сферической тригонометрии без учёта сфероидичности Земли (метры);  $\Delta A_1$  – поправка к сферическому азимуту  $\beta_1$ ;  $a$  – большая полуось эллипсоида (метры);  $\alpha$  – первое сжатие эллипсоида;  $B_1, B_2$  – широты конечных точек геодезической линии;  $\beta_1$  – азимут геодезической линии в начальной точке, вычисленный без учёта сфероидичности Земли;  $\beta_2$  – дополнение азимута в конечной точке геодезической линии до  $360^\circ$ ;  $S$  – вычисленное расстояние между точками (метры);  $\sigma$  – вычисленное расстояние (радианы);  $\rho'$  – число угловых минут в 1 радиане (см. Приложение 7).

Обратная геодезическая задача на сфере решается по следующим формулам сферической тригонометрии:

$$\cos \sigma = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1);$$

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{\sin \sigma} [\sin(L_2 - L_1) \cos B_2]; \quad \sin \beta_2 = \frac{1}{\sin \sigma} [\sin(L_2 - L_1) \cos B_1];$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\sin B_2 - \sin B_1 \cos \sigma}{\cos B_1 \sin \sigma}; \quad \cos \beta_2 = \frac{\sin B_1 - \sin B_2 \cos \sigma}{\cos B_2 \sin \sigma}.$$

Для предельных расстояний погрешности вычисления поправок  $\Delta S$ ,  $\Delta A_1$  могут достигать десятка метров и нескольких минут соответственно.

#### Метод Морозова.

$$s = a\sigma_1 \left[ A + \frac{(Bx - Cy) \sin \sigma_1}{\sigma_1} + \frac{Dz \sigma_1}{\sin \sigma_1} \right],$$

$$A = 1 - \frac{e^2}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 \right) E - \frac{15}{64} e^4 E^2, \quad B = \frac{3}{16} e^2 (4 - e^2 + 2e^2 E),$$

$$C = \frac{15}{4} e^2, \quad D = \frac{e^4}{8}, \quad E = \sin^2 B_1 + \frac{(\sin B_2 - \sin B_1 \cos \sigma_1)^2}{\sin^2 \sigma_1},$$

$$x = 2 \sin B_1 \sin B_2 - E \cos \sigma_1,$$

$$y = (E^2 - 2x^2) \cos \sigma_1,$$

$$z = (E \cos \sigma_1 - \sin B_1 \sin B_2)(1 - E).$$

Метод Морозова имеет ещё одну версию [64].

$$S = P\sigma + (QX - 67Y) \sin \sigma + 35,7Z \frac{\sigma^2}{\sin \sigma},$$

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\cos B_2 \sin l \sqrt{1 + (e')^2 \cos^2 B_1}}{\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l},$$

$$P = 6378245 - (10619,4 + 66,9T)T, \quad Q = 31695,7 + 107,1T,$$

$$X = 2 \sin B_1 \sin B_2 - T \cos \sigma, \quad Y = (T^2 - 2X^2) \cos \sigma,$$

$$Z = (\sin B_1 \sin B_2 - X)(1 - T), \quad l = (B_2 - B_1) + \sigma \frac{\cos B_1 \sin \beta_1}{298,3},$$

$$T = 1 - (\cos B_1 \sin \beta_1)^2,$$

где  $e'$  – второй эксцентриситет эллипсоида,  $\sigma$  – сферическое (ортодромическое) расстояние в радианах,  $\beta_1$  – сферический азимут в начальной точке, вычисленный по формуле, относящейся к методу Андуайе-Ламберта.

Метод Бесселя является самым точным. При приведенных выше значениях постоянных  $r_k$  и  $V_k$  он обеспечивает точность вычислений 5 мм, достигаемую после 3 – 4 итераций. Погрешность метода Морозова составляет менее 0,5 м на расстояниях до 18000 км.

#### 1.4. РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоИД

*Понятие общеземного эллипсоида.* Для того, чтобы определить положение любой точки в пространстве, необходимо указать три ее координаты, определяемые в соответствии с принятой системой координат. Система координат характеризуется формой задания координат, началом их отсчета, направлением главных осей, положением основной плоскости и выбором единиц измерения. При определении в пространстве места подвижного объекта (которым может быть искусственный спутник Земли, судно, самолет) кроме координат требуется знать моменты времени, что приводит к необходимости введения строго определенной системы его отсчета. Причем, знание точного времени не сводится только к его фиксации для отражения каких-либо явлений или событий, как, скажем, фиксация судового времени в момент изменения курса. Точное время требуется для расчета эфемерид спутников, а в самых современных радионавигационных системах для расчетов дальности до наземных навигационных передатчиков. Время, таким образом, участвует в определении координат подвижного объекта. Исторически время сыграло решающую роль для формирования понятия долготы, связав явления кульминации светил с предположением о постоянстве угловой скорости вращения Земли [24].

После того, как Ньютон теоретически обосновал сфероидичность Земли, возникло желание вычислить размеры эллипсоида, поверхность которого служила бы геометрической моделью Земли. Для решения такой задачи необходимы были высокоточные астрономо-геодезические наблюдения. Вторая половина XIX века характеризуется, во-первых, возросшей точностью приборов, а во-вторых, формулированием основополагающего понятия геоида. Все это, а также потребность в более точном геофизическом описании нашей планеты, побудило сконцентрировать усилия ученых на вычислении параметров такого эллипсоида, ось вращения которого совпадает с осью вращения Земли, объем и масса равны объему и массе Земли, а точки его поверхности как можно ближе располагались от поверхности геоида. Такое тело получило название общеземного эллипсоида. Поначалу за центр общеземного эллипсоида принимался геометрический центр Земли. После того, как были определены угловые скорости прецессионного и нутационного движения Земли, а также неравномерность суточного вращения, стало ясно, что понятие общеземного эллипсоида должно носить динамический смысл, а не чисто геометрический. С тех пор под общеземным эллипсоидом



понимается сфероид с определенными геометрическими размерами и центром, расположенным в центре масс Земли, а также с динамическими характеристиками Земли (ее массой, моментами инерции, средней скоростью вращения и т.д.). Чтобы сопоставлять астрономические и геофизические наблюдения в своё время были разработаны и приняты на международных конференциях так называемые Международные общеземные эллипсоиды. Примером тому служит эллипсоид, принятый на 17-й Генеральной ассамблее Международного союза геодезии и геофизики в 1979 году в Канберре. Этот международный эллипсоид имеет большую полуось, равную 6378160 м, и полярное сжатие, равное  $1/298,25$ . Для целей астрономии в 1964 году на 12-й Генеральной ассамблее Международного астрономического союза в Гамбурге в качестве международного общеземного эллипсоида был принят сфероид с большей полуосью, равной 6378160 м, и с полярным сжатием, равным  $1/298,247$ . Для международных нужд геодезии в 1980 году был принят общеземной эллипсоид с большей полуосью 6378137 м и полярным сжатием  $1/298,257$ . Иными словами, общеземной эллипсоид – это некий принятый на государственном, межгосударственном или международном уровне эталон модели Земли, имеющий ярко выраженный прикладной характер.

Общеземной эллипсоид характеризуется еще и определенной системой координат. Здесь применяется неподвижная в пространстве геоцентрическая прямоугольная система координат  $x, y, z$ , поскольку она очень удобна для астрономо-геодезических работ и для определения положения искусственных спутников Земли, обращающихся вокруг ее центра масс. Начало отсчета такой системы совмещено с центром масс Земли, ось  $z$  направляется по оси вращения Земли в сторону Северного полюса, а ось  $x$  – на точку весеннего равноденствия (точку Овна), представляющую собой точку пересечения небесного экватора с эклиптической (сечением сфероида небесной плоскостью орбиты Земли). За основную плоскость  $xOy$  этой системы принимается плоскость небесного экватора. Ось  $y$  отстоит на  $90^\circ$  от оси  $x$ . Поскольку положения основных осей и плоскости определяются координатами звезд, имеющих собственное движение, а точка весеннего равноденствия, кроме того, смещается из-за прецессии и нутации оси вращения Земли, то эта система координат требует своего преобразования на момент наблюдений путем введения соответствующих поправок [5].

Момент времени, на который задаются основная плоскость и оси координат, называют эпохой  $T_0$ . Если обозначить координаты какого-либо подвижного объекта в системе координат, отнесенной к данной эпохе, через  $x_0, y_0, z_0$ , то истинные координаты, приведенные к моменту наблюдений  $T$ , можно найти по формулам

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{yx} & n_{zx} \\ n_{xy} & n_{yy} & n_{zy} \\ n_{xz} & n_{yz} & n_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} n_{xx} &= n_{yy} = n_{zz} = 1, \\ n_{yx} &= -n_{xy} = -\delta\psi \cos \varepsilon, \\ n_{zx} &= -n_{xz} = -\delta\psi \sin \varepsilon, \\ n_{zy} &= -n_{yz} = -\delta\varepsilon, \end{aligned}$$

$\delta\psi$  – нутация в долготе,  $\varepsilon$  – истинное наклонение эклиптики к экватору,

$\delta\varepsilon$  – нутация в наклонении,

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \cos \xi_0 \cos \xi \cos \theta - \sin \xi_0 \sin \xi, & p_{zy} &= -\sin \xi \sin \theta, \\ p_{yx} &= -\sin \xi_0 \cos \xi \cos \theta - \cos \xi_0 \sin \xi, & p_{xz} &= \cos \xi_0 \sin \theta, \\ p_{zx} &= -\cos \xi_0 \sin \theta, & p_{yz} &= -\sin \xi_0 \sin \theta, \\ p_{xy} &= \cos \xi_0 \sin \xi \cos \theta + \sin \xi_0 \cos \xi, & p_{zz} &= \cos \theta, \\ p_{yy} &= -\sin \xi_0 \sin \xi \cos \theta + \cos \xi_0 \cos \xi, \end{aligned}$$

$\theta, \xi$  и  $\xi_0$  – прецессионные параметры, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (2304,253'' + 1,3973''T_0 + 0,00006''T_0^2)\Delta T + \\ &\quad + (0,3023'' - 0,0027''T_0)\Delta T^2 + 0,018''\Delta T^3, \\ \xi &= (2304,253'' + 1,3973''T_0 + 0,00006''T_0^2)\Delta T + \\ &\quad + (1,095'' + 0,0039''T_0)\Delta T^2 + 0,01832''\Delta T^3, \\ \theta &= (2004,685'' - 0,8533''T_0 - 0,00037''T_0^2)\Delta T - \\ &\quad - (0,4267'' + 0,00037''T_0)\Delta T^2 - 0,0418''\Delta T^3, \\ \Delta T &= T - T_0. \end{aligned}$$

Эпохи  $T_0$  и  $T$  здесь выражены в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток и отсчитываются для удобства от

фундаментальной эпохи 1900, а в последние годы – от эпохи 2000 года.

Параметры нутации находятся по формулам:

$$\delta\psi = \Delta\psi + d\psi, \quad \delta\varepsilon = \Delta\varepsilon + d\varepsilon,$$

где  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  – длиннопериодические,  $d\psi$  и  $d\varepsilon$  – короткопериодические части этих параметров, выбираемые для низкоточных вычислений из Астрономических Ежегодников. Для высокоточных астрономо-геодезических работ и для сопровождения работы современных спутниковых навигационных систем используются текущие параметры нутаций, прецессии и мгновенные значения угловой скорости вращения Земли, измеряемые национальными и международными лабораториями и институтами, которые непрерывно ведут наблюдения за динамикой Земли.

С появлением современных спутниковых навигационных систем Навстар GPS и Глонасс перед общеземными эллипсоидами поставлены задачи картографии, что было несвойственно для исторически предыдущих эллипсоидов. Это объясняется тем, что эти системы получили настолько широкое применение не только в классической навигации, но и в так называемой наземной навигации, космической навигации, высокоточной геодезии, в географических информационных системах. Поэтому общеземной эллипсоид WGS 84 стал выполнять функции референц-эллипсоида. Эллипсоиду WGS 84 посвящается отдельная глава. Здесь же имеет смысл привести параметры общеземного эллипсоида ПЗ 90 (Параметры Земли 1990 года), который лежит в геофизической основе отечественной спутниковой навигационной системы Глонасс. ПЗ 90 служит основой спутниковой геодезической системы 1990 года (СГС-90), которая является более точной версией системы СГС-85 [25, 60]. Эллипсоид ПЗ 90 референц-эллипсоидом не стал.

По определению ПЗ 90 является геоцентрической прямоугольной пространственной системой с началом в центре масс Земли. Ось  $Oz$  направлена к Условному Земному полюсу (СТР), как определено рекомендациями Международной службы вращения Земли (IERS), на эпоху 1900 года [26, 60]. Общеземной эллипсоид ПЗ 90 включает фундаментальные астрономические и геодезические постоянные, модели гравитационного поля Земли в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям и систем точечных масс, а также каталог возвышений принятого геоида относительно ПЗ 90. Общеземной эллипсоид ПЗ 90 содержит постоянные, представленные в табл. 1.

Таблица 1.

## Фундаментальные постоянные ПЗ 90

Постоянная	Ее обозначение	Ее величина
Большая полуось	$a$	6378136 м
Знаменатель сжатия	$F$	298,257839303
Сжатие ( $1/F$ )	$f$	0,00335280374302
Малая полуось	$b$	6356751,361745712 м
Разность полуосей ( $a - b$ )	$d$	21384,638254287273 м
Полярный радиус кривизны ( $a^2/b$ )	$c$	6399592,577949147 м
Отношение полуосей ( $b/a$ )	$k$	0,996647196256980523
Средний радиус полуосей $(2a + b)/3$	$R_1$	6371007,787248570908 м
Радиус сферы равной площади	$R_2$	6371006,1967587945 м
Радиус сферы равного объема	$R_3$	6370999,8058769068417846 м
Линейный эксцентриситет $(a^2 + b^2)^{1/2}$	$E$	521853,3888363923399089 м
Средний радиус $(a + b)/2$	$R_4$	6367443,680872856363 м
Первый эксцентриситет	$e$	0,0818191065283638
Квадрат первого эксцентриситета	$e^2$	0,00669436619309974805
Второй эксцентриситет	$e'$	0,08209435278165091
Квадрат второго эксцентриситета	$e'^2$	0,00673948275863815
Площадь поверхности	$S$	510065464,1395919932608 км <sup>2</sup>
Объем	$V$	1083206817830,463720283 км <sup>3</sup>
Географическая миля		1855,324555666350878 м
Нормальный потенциал на поверхности эллипсоида	$U_0$	62636861,074 м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
Второй нормализованный гармонический коэффициент	$\bar{C}_{20}$	$-484164,953 \cdot 10^{-9}$
Коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям	$C_{20}$	$-1082,63 \cdot 10^{-6}$
Скорость света	$c$	299792458 м/с
Геоцентрическая гравитационная постоянная (с учетом атмосферы)	$GM$	$398600,44 \cdot 10^9$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Угловая скорость вращения Земли	$\omega$	$7292115 \cdot 10^{-11}$ рад/с
Геоцентрическая гравитационная постоянная земной атмосферы	$GM_A$	$0,35 \cdot 10^9$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Гравитационное ускорение на экваторе	$\gamma_e$	978032,8 мГал
Поправка к гравитационному ускорению на уровне моря за влияние земной атмосферы		$-0,9$ мГал
Универсальная гравитационная постоянная	$G$	$6,672 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /кгс <sup>2</sup>
Масса Земли	$M$	$5,974242 \cdot 10^{24}$ кг
Вторая зональная гармоника геопотенциала	$J_2$	$1082625,7 \cdot 10^{-9}$

тенциала Четвёртая зональная гармоника геопотенциала	$J_4$	$-2370,9 \cdot 10^{-9}$
--	-------	-------------------------

Сравнение фундаментальных постоянных ПЗ 90 и WGS 84 (см. следующую главу) говорит об их отличии. С другой стороны, СРНС Навстар GPS и Глонасс формально объединены на базе системы Инмарсат в Глобальную Навигационную Спутниковую Систему (GNSS). Различие в геофизических основах ПЗ 90 и WGS 84 вызывает неудобство в совместном использовании Навстар GPS и Глонасс. Следовательно, в ближайшее время надо надеяться на создание нового международного общеземного эллипсоида или на принятие одного из них в качестве международного. Скорее всего, таким эллипсоидом будет общеземной эллипсоид GRS-80.

**Референц-эллипсоид.** Понятие референц-эллипсоида (РЭ) уходит своими корнями в конец XVIII – начало XIX века, когда, во-первых, стала очевидной сфероидичность Земли, во-вторых, из-за необходимости создания точных карт, охватывающих площадь целых государств. Тогда появилась необходимость иметь некую опорную поверхность, наилучшим образом отражающую реальную поверхность обширной территории. Такая опорная поверхность должна была служить для вычисления географических координат ориентиров в ходе геодезических съемок, а также для измерения возвышений ориентиров и объектов над ней. Зная математическое описание опорной поверхности и координаты точек на ней, соответствующих каким-либо объектам на поверхности данной территории, можно было создавать карты этих территорий в любой удобной картографической проекции. Весьма удобным для таких целей оказался эллипсоид, поскольку форма поверхности его близка к поверхности Земли, а математический аппарат, служащий для решения задач вычисления координат точек на его поверхности и проектирования их на плоскую поверхность карты, был простым и легко реализуемым табличными методами. Отсюда произошло понятие земного эллипсоида.

Сугубо практические задачи геодезии и картографии потребовали создания и развития соответствующих математических методов. Практически все видные математики того времени обращали свое внимание к решению этих задач. В те годы совершенствовалось дифференциальное исчисление, развивалась сферическая тригонометрия, появилась дифференциальная геометрия. Именно благодаря прикладным задачам геодезии и картографии наметился

прогресс в области численных методов анализа. Огромный вклад внес известный французский математик Клеро (1713–1765), разработавший методы дифференциальной геометрии, способные исследовать пространственные кривые и поверхности.

Очевидно, чтобы вычислить пространственные координаты поверхности эллипсоида, необходимо знать его главные параметры. К ним относится величина полуосей и полярное сжатие. При создании первых земных эллипсоидов вычисления главных параметров производились по результатам астрономо-геодезических измерений длин меридианов и пространственных координат точек на поверхности Земли, принадлежащих данному меридиану. Из предыдущего параграфа следует, что по длине части меридиана и по его кривизне можно вычислить значения полуосей эллипсоида. Такие работы традиционно назывались градусными измерениями, и проводились в России, во Франции, в Германии и в Англии.

Если в качестве фигуры Земли принимается эллипсоид вращения, то он полностью определится двумя элементами: сжатием и большой полуосью. Поэтому для определения формы и размеров эллипсоидальной Земли необходимо произвести измерение по крайней мере двух дуг, расположенных на разных широтах, в областях различной кривизны земной поверхности.

Длина дуги по меридиану определяется формулой

$$S = a(B_2 - B_1) \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 + \dots \right\},$$

где  $a$  – большая полуось эллипсоида;  $B_1$  и  $B_2$  – геодезические широты,  $B_m$  – средняя широта,  $e$  – эксцентриситет эллипсоида.

Если произведено измерение длины дуги  $S$  между широтами  $B_1$  и  $B_2$ , то формула представит собой уравнение с двумя неизвестными  $a$  и  $e^2$  или  $a$  и  $\alpha$ , так как  $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ .

Очевидно, что для того, чтобы определить неизвестные  $a$  и  $e^2$  или  $a$  и  $\alpha$ , необходимо и достаточно иметь два уравнения такого же вида, в которых дуги  $S$  известны на разных широтах. Большая полуось и сжатие могут быть определены по измеренным широтным дугам. Однако при этом необходимо, чтобы измеряемые дуги лежали на разных широтах. Исходным уравнением для решения этой задачи будет следующее:

$$S = N \cos B \frac{l''}{\rho''},$$

дающее связь длины дуги с разностью долгот в секундах ( $l''$ ) и широтой места ( $B$ ),  $\rho''$  – число секунд в одном радиане. Вводя сюда значение  $N$ , и развёртывая знаменатель в ряд, получим формулу, связывающую длину измеренной дуги параллели с большой полуосью эллипсоида и эксцентриситетом

$$S = a \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \dots \right) \cos B \frac{l''}{\rho''} .$$

Дальнейший ход рассуждений остаётся таким же, что и при определении сжатия и большой полуоси по меридианным дугам. Классическим градусным измерением следует считать работу Пикара (Франция, 1620–1682). Была определена длина дуги от Парижа до Амьена, которая оказалась равной 153689 м, а в градусной мере –  $1^\circ 23' 55''$ . Следовательно, длина одного градуса составила 111212 м. Современное значение длины дуги одного градуса на широте Парижа равно 111221 м, то есть измерения Пикара отличаются всего на 9 м.

Сравнение параметров земных эллипсоидов, полученных таким способом в разных государствах, показало их различие. Объясняется это явление различной кривизной реальной земной поверхности в разных странах. Поэтому в каждой стране на государственном уровне были утверждены параметры земных эллипсоидов, которые наилучшим образом описывали кривизну поверхности Земли на территории данного государства. Такие земные эллипсоиды получили название референц-эллипсоидов, то есть опорных эллипсоидов.

В начале XIX века в Европе начались обширные работы по прокладке дорог и созданию многочисленных и протяженных каналов. Это вызвало необходимость точного и физически реализуемого измерения высот большого числа точек на поверхности Земли относительно поверхности принятого в том или ином государстве референц-эллипсоида. Были выполнены геодезические работы по нивелированию протяженных территорий. Результаты нивелирных ходов легли в основу представления поверхности РЭ как некой идеализированной поверхности, максимально приближенной к уровенной поверхности данной территории. Причем, приближение уже оценивалось величиной средних квадратических отклонений поверхностей. Отсюда происходит понятие уровенного эллипсоида, которое физически понятно и может быть инструментально оценено. Широкомасштабные работы по нивелированию территорий европейских государств создали количественную базу для расчетов более точных параметров РЭ.

Расчеты главных параметров РЭ сопровождались длительными вычислениями с помощью таблиц. Затем на основе полученных параметров РЭ составлялись геодезические таблицы для камеральных обработок результатов геодезических съёмок и составления карт. Такими работами, как правило, руководил опытный геодезист-математик, именем которого впоследствии назывался тот или иной РЭ. Так, например, именем Эвереста назван РЭ, разработанный для территории, на которой располагается Индия, Пакистан и Непал. В знак признательности перед его заслугами его именем названа и высочайшая гора мира, находящаяся на этой территории.

Конец XIX и начало XX веков характеризуется повсеместным внедрением в астрономо-геодезические работы методов гравиметрии, что привело к уточнению параметров применявшихся ранее РЭ, и к созданию новых, а также к попыткам создания общеземных эллипсоидов. Многие РЭ применяются до сих пор. В таблице приложения 2 приводятся точные параметры наиболее распространенных РЭ.

В настоящее время под референц-эллипсоидом понимается земной эллипсоид, поверхность которого наилучшим образом аппроксимирует геоид (квазигеоид) на территории одного или нескольких государств, который применяется для составления карт, а также для геодезических, геофизических и других целей. Часто в понятие референц-эллипсоида вкладывается его юридическое учреждение правительством данной страны. Разнообразие целей использования референц-эллипсоидов привело к тому, что в одной и той же стране одновременно применяются сразу несколько РЭ. Примером тому можно взять США. В США морские карты своего побережья составляются на основе NAD 83 (North American Datum 1983 года), а Министерством обороны используется WGS 84. Очевидно, что если для одной и той же территории применить различные РЭ, то при проектировании одной и той же точки физической поверхности на карту геодезические координаты этой точки будут отличаться из-за различных длин меридианов и параллелей у РЭ.

Для нужд морской картографии применяются двухосные РЭ. В середине XX века были разработаны трехосные РЭ, учитывающие экваториальное сжатие, которые нашли ограниченное применение в геодезии и геофизике.

С созданием глобальных спутниковых радионавигационных систем возникла необходимость в разработке совершенно новых высокоточных общеземных РЭ. Примером тому являются ПЗ 90 и WGS 84. Это



вызвало тенденцию отказа многих морских держав от своих национальных РЭ и к изготовлению навигационных карт на основе WGS 84. Эту тенденцию стимулирует еще и повсеместное внедрение станций дифференциальных GPS, поскольку для мореплавателей гораздо удобнее получать дифференциальные поправки в системе WGS 84 повсеместно. В противном случае возникает путаница в управлении приемоиндикатором системы Навстар GPS, когда вблизи берегов какого-либо государства транслируются дифференциальные поправки в системе РЭ соседнего государства, а для ведения графического счисления используется карта, составленная на основе совершенно другого РЭ. Таким образом, из-за широкого применения системы Навстар GPS РЭ WGS 84 становится фактически международным, хотя официального международного статуса он не имеет.

В табл. 2 приведены элементы РЭ, которые в настоящее время представляют исторический интерес [14, 27, 29, 30, 31, 32, 82].

Таблица 2

Параметры некоторых референц-эллипсоидов

Название эллипсоида	$a$ (м)	$\alpha$
Деламбера 1800	6375553	1/334,0
Деламбера 1810	6376428	1/311,5
Вальбека 1819	6376896	1/302,78
Эвереста 1830	6377276	1/300,81
Теннера 1844	6377096	1/302,5
Эйри 1848	6377563	1/299,3
Шуберта 1861	6378547	1/283,0
Датский	6377104	1/300,0
Плессиса	6376523	1/308,6
Струве 1860	6378298	1/294,7
Кларка 1858	6378361	1/294,3
Жданов 1893	6377717	1/299,7
Шотта 1900	6378157	1/304,5
Гельмерта 1906	6378200	1/298,3
Красовский 1936	6378210	1/298,6
Международный (МАС) 1967	6378160	1/298,25
WGS 1960	6378165	1/298,3
WGS 1966	6378145	1/298,25

Из геометрии земного эллипсоида следует, что эллипсоид однозначно и полно задается всего лишь двумя элементами: большой полуосью ( $a$ ) и полярным сжатием ( $\alpha$ ).

В последние годы на отечественных судах все чаще используются навигационные карты, изданные в других странах, и поэтому основанные на различных РЭ. Кроме того, активно внедряются ECDIS, отображающие многочисленные электронные карты, изготавливаемые зарубежными предприятиями и гидрографическими службами. С другой стороны, увеличивающийся охват акваторий трансляцией дифференциальных поправок к сигналам спутников системы Навстар GPS доводит точность определения места судна до нескольких метров. Это создает условия для решения, например, задач оценки поправки курсоуказателя по удаленному ориентиру, координаты которого известны с высокой точностью, используя традиционную формулу

$$\operatorname{tg} K = \frac{\text{РД}}{\text{РМЧ}}.$$

Однако воспользоваться этой формулой несколько затруднительно, поскольку встает проблема вычисления разности меридиональных частей (РМЧ) для различных РЭ и прежде всего для WGS 84. В США опубликованы таблицы меридиональных частей для WGS 72 [34]. Сравнительный анализ данных Таблицы 26 «Меридиональные части» Мореходных таблиц 1975 года (МТ-75) и Таблицы 2.28а МТ-2000 с данными таблицы меридиональных частей для WGS 72 не выявил расхождений. Этот факт свидетельствует о низкой точности величин меридиональных частей в этих таблицах, так как меридиональные части рассчитаны приближёнными способами, которые не учитывают параметры референц-эллипсоидов. В зонах действия дифференциальных GPS вряд ли уместно использовать табличные значения меридиональных частей, поскольку они приводятся с точностью до десятых экваториальной минуты, а реальная точность определения места судна достигает тысячных долей минуты. В силу этого уже необходимо вычислять меридиональные части с более высокой точностью.

Для вычисления меридиональных частей (МЧ) в описании Таблиц МТ-75 приводится следующая формула:

$$\text{МЧ} = 7915,704468' \operatorname{lg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right], \quad (1.4.1)$$

где  $\varphi$  – геодезическая широта,  $e$  – эксцентриситет РЭ. Формула (1.4.1) довольно неудобна с точки зрения вычислительных процедур, а поэтому здесь рекомендуется более приемлемая для вычислений формула (1.4.2) [34]

$$MЧ = a \cdot \ln 10 \cdot \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{B}{2} \right) - a \cdot \left[ e^2 \sin B + \frac{e^4}{3} \cdot \sin^3 B + \frac{e^6}{5} \cdot \sin^5 B + \dots \right], \quad (1.4.2)$$

где  $a$  – экваториальный радиус (т.е. большая полуось РЭ), выраженный в минутах долготы на экваторе, то есть

$$a = \frac{360^\circ \cdot 60'}{2\pi} = \frac{21600'}{2\pi} = 3437,7467707849392526',$$

$e^2$  – квадрат первого эксцентриситета данного референц-эллипсоида,  $B$  – геодезическая широта. Величина  $a \cdot \ln 10$  будет постоянной для любого референц-эллипсоида и равна  $7915,704467898196014'$ . Если геодезическая широта задаётся в радианах, то будет нелишним напомнить, что  $45^\circ = \pi/4 = 0,785398163397448309$ .

При вычислении меридиональных частей для референц-эллипсоида, лежащего в основе данной карты (в том числе и электронной), рациональнее предварительно вычислить коэффициенты, стоящие перед синусами в формуле (1.4.2).

Применение формулы (1.4.2) выдвигает вопрос о необходимом числе членов ряда во вторых скобках для достижения требуемой точности определения меридиональных частей. Вычислительный эксперимент в работе [85] показал, что трёх первых членов ряда достаточно, чтобы иметь верный пятый знак после запятой. Это соответствует вычислению меридиональных частей с точностью до нескольких миллиметров. Поскольку применение фазовых измерений сигналов спутников системы Навстар GPS доводит точность определения координат до нескольких миллиметров, то уже давно назрела необходимость рассчитывать меридиональные части с точностью до 5-го знака после запятой. В качестве примера для широты  $43^\circ$  были рассчитаны меридиональные части референц-эллипсоидов Красовского, WGS 84 и ПЗ 90. Были получены следующие результаты:  $M_{кр} = 2847,386004'$ ,  $M_{WGS} = 2847,383752'$ ,  $M_{ПЗ} = 2847,383785'$ . Видно, что результаты начинают отличаться в третьем знаке после запятой. В Мореходных таблицах 1975 и 2000 годов меридиональная часть для той же широты равна  $2847,4'$ .

Здесь нельзя не упомянуть о существовании отечественных Картографических таблиц [68]. В них есть таблица меридиональных частей, которые в диапазоне широт от  $0^\circ$  по  $83^\circ$  приводятся с точностью трёх знаков после запятой, а с  $84^\circ$  – с точностью двух знаков. К сожалению, упомянутые Картографические таблицы на судах отсутствуют. Нет смысла рекомендовать издать отдельную

таблицу меридиональных частей, взятую из Картографических таблиц, чтобы распространить их на суда, так как меридиональные части в ней рассчитаны для эллипсоида Красовского. Современный же штурману приходится работать с морскими картами, основанными на различных референц-эллипсоидах. В Картографических таблицах [68] величина меридиональной части для широты  $43^\circ$  равна  $M_{кр} = 2847,386$ .

Для удобства расчётов меридиональных частей по формуле (1.4.2) автором были рассчитаны коэффициенты  $ae^2$ ,  $(ae^4)/3$  и  $(ae^6)/5$  для различных современных референц-эллипсоидов. Значения этих коэффициентов помещены в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты для расчёта меридиональных частей

Эллипсоид	$ae^2$	$(ae^4)/3$	$(ae^6)/5$
Airy 1830	22,931627344	0,050988779155	0,000204073614
Australian National	23,014139642	0,051356373694	0,000206284435
Bessel 1841	22,944801586	0,051047382191	0,000204425538
Clarke 1866	23,268932173	0,052499814618	0,000213211974
Clarke 1880	23,388748942	0,053041872440	0,000216522586
Everest	22,819235817	0,050490195859	0,000201087705
GRS 1980	23,013583306	0,051353890779	0,000206269476
Helmert 1906	23,010288569	0,051339187688	0,000206180897
Hough 1960	23,110837160	0,051788844056	0,000208895585
Indonesian 1974	23,014370747	0,051357405129	0,000206290650
International 1924	23,110837160	0,051788844056	0,000208895585
Krassovsky 1940	23,010288569	0,051339187688	0,000206180897
Modified Airy	22,931627344	0,050988779155	0,000204073614
Modified Fischer 1960	23,010288569	0,051339187688	0,000206180897
South American 1969	23,014139642	0,051356373694	0,000206284435
WGS 1972	23,013369324	0,051352935803	0,000206263722
WGS 1984	23,013583193	0,051353890277	0,000206269473
PZ 90	23,013535762	0,051353678598	0,000206268197

Названия референц-эллипсоидов даны по-английски для удобства работы с иностранными штурманскими пособиями. Следует обратить внимание на тот факт, что эллипсоиды Australian National и South American 1969 имеют одни и те же параметры. Модификации эллипсоида Everest имеют одни и те же сжатия, но отличаются размерами больших полуосей. Поэтому их первые эксцентриситеты одинаковы. То же самое можно сказать и об эллипсоиде Bessel 1841. Так как в расчётах величины больших полуосей, выраженных в метрах, не участвовали, то коэффициенты табл. 3 являются общими

для модификаций эллипсоида Bessel и для модификаций эллипсоида Everest.

В источнике [80] даётся несколько иная формула для расчётов меридиональных частей.

$$MЧ = \frac{10800}{\pi} \left[ \text{Intg} \left( 45^\circ + \frac{B^\circ}{2} \right) - e^2 \sin B^\circ - \frac{1}{3} e^4 \sin^3 B^\circ - \frac{1}{5} e^6 \sin^5 B^\circ - \dots \right]$$

Для Международного референц-эллипсоида 1924 года эта формула приобретёт следующий вид:

$$MЧ_{1924} = 7915,7045 \text{Intg} \left( 45^\circ + \frac{B^\circ}{2} \right) - 23,1108 \sin B^\circ - 0,052 \sin^3 B^\circ$$

**Референц-эллипсоид Красовского.** До 1946 года в СССР на прилегающие воды издавались навигационные карты на основе различных РЭ. Освоение северо-восточных берегов требовало подробной геодезической съёмки и гидрографических работ на этих обширных пространствах. Все это побудило предпринять в конце тридцатых годов начать широкомасштабные астрономо-геодезические и гравиметрические работы по определению параметров национального РЭ. Работа проводилась большой группой ученых, геодезистов и топографов. Кроме отечественных привлекались и зарубежные материалы, полученные в США, Западной Европе и в Индии. Затем в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии под общим руководством члена-корреспондента Академии Наук СССР Ф.Н. Красовского (1878-1948) в 1940 году были вычислены элементы эллипсоида, названного эллипсоидом Красовского. Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 года эллипсоид Красовского был положен в основу всех геодезических и картографических работ на территории СССР, т.е. он стал референц-эллипсоидом. До этого момента в СССР в качестве референц-эллипсоида применялся эллипсоид Бесселя 1841 года [28].

Эллипсоид Красовского 1940 года оказался достаточно близким к поверхности геоида на территории Советского Союза и соседних с ним стран. Среднее квадратическое отклонение поверхности РЭ Красовского от поверхности геоида не превышает 40 м, а максимальные отклонения – не более 150 м [11]. В 1959 году по результатам наблюдений за искусственными спутниками Земли было вычислено сжатие, которое практически оказалось равным сжатию

эллипсоида Красовского. На основе РЭ Красовского в СССР были составлены навигационные карты на воды, омывающие берега Советского Союза, а также на воды Западной Европы.

Эллипсоид Красовского имеет следующие параметры:

большая полуось	$(a) = 6378245 \text{ м} = 3443,977 \text{ миль};$
малая полуось	$(b) = 6356863,0188 \text{ м} = 3432,43 \text{ миль};$
первое сжатие	$(\alpha) = 1/298,3 = 0,0033523299;$
второе сжатие	$(\alpha') = 0,0033634749;$
третье сжатие	$(\alpha'') = 0,0033579584;$
средний радиус	$((2a + b)/3) = 6371117,673 \text{ м} = 3440,128 \text{ миль};$
средняя полуось	$((a + b)/2) = 6367554,0094 \text{ м} = 3438,2041 \text{ мили};$

$$c = 6399698,9018 \text{ м};$$

$$n = 0,0016789792;$$

первый эксцентриситет	$(e) = 0,08181333;$
	$(e^2) = 0,006693421623;$

второй эксцентриситет	$(e') = 0,082088545;$
	$(e'^2) = 0,006738525415;$
	$(e''^2) = 0,0067158978;$

$$n = \frac{a - b}{a + b} = 0,001678979181; m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0,0033579489;$$

$$1 - e^2 = 0,9933065784; 1 + e'^2 = 1,0067385254; \sqrt{1 + e'^2} = 1,0033636058;$$

$$\sqrt{1 - e^2} = 0,9966476701; \sqrt{1 - e'^2} = 1,0033636058;$$

$$a - b = a\alpha = 21381,9812 \text{ м}; \quad c - a = c\alpha = 21453,9018 \text{ м};$$

$$c - b = ce^2 = 42835,8830 \text{ м}. \quad c = (a^2/b) = 6399698,902 \text{ м};$$

$$\text{Площадь поверхности} = 510083035,4 \text{ км}^2.$$

$$\text{Объем эллипсоида} = 1,0796314 \cdot 10^{12} \text{ км}^3.$$

$$\text{Экваториальная миля} = 1855,3562 \text{ м}.$$

В различных навигационных расчетах эллипсоид Красовского принимают за соответствующий шар. При этом в зависимости от целей расчетов вкладывает различный смысл соответствия, из-за чего меняется величина радиуса эквивалентного шара. Чаще всего применяются следующие величины радиусов эквивалентных земных сфер:

$$\text{радиус равных площадей} = 6371116,08 \text{ м} = 3440,1274 \text{ мили};$$

$$\text{радиус равных объемов} = 63711109,7 \text{ м} = 3440,1241 \text{ мили};$$

$$\text{радиус равных длин меридианов} = 6367559 \text{ м} = 3438,2068 \text{ мили}.$$

Радиус экватора (большая полуось) эллипсоида Красовского, выраженный в экваториальных (географических) милях, принимается в некоторых расчетах равным 3437,7468 экв. миль.

Уместно будет упомянуть, что очень часто в навигационных расчетах радиус земного шара принимается таким, при котором длина дуги одной минуты равна одной морской миле (1852 м). Радиус такой сферы равен 6366707 метрам, или 3437,7467 мили.

В первом приближении можно принимать Землю за шар с радиусом 6371,1 км, имеющим почти одинаковые с эллипсоидом Красовского поверхность и объём.

Существуют простые и точные формулы для расчетов главных радиусов кривизны эллипсоида Красовского [12]

$$M = 6335552,717 + [(4,219 \sin^2 B + 532,169) \sin^2 B + 63609,796] \sin^2 B,$$

$$N = 6378245 + [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21346,142] \sin^2 B.$$

Значения главных радиусов кривизны, рассчитанные по этим формулам, будут отличаться от их точных значений менее чем на 0,0005 метра при максимальном значении  $\sin B = 1$ . С погрешностью менее 0,2 м главные радиусы кривизны вычисляются по формулам

$$M = 6335552,8 + (538,4 \sin^2 B + 63607,5) \sin^2 B,$$

$$N = 6378245 + (108,1 \sin^2 B + 21\,345,8) \sin^2 B.$$

Коэффициенты для вычисления главных радиусов кривизны эллипсоида Красовского по формулам (1.3.61) таковы

$m_0 = 6335552,71700,$	$n_0 = 6378245,$
$m_2 = 63609,78833,$	$n_2 = 21346,14149,$
$m_4 = 532,20892,$	$n_4 = 107,15904,$
$m_6 = 4,15602,$	$n_6 = 0,59772,$
$m_8 = 0,03130,$	$n_8 = 0,00350$
$m_{10} = 0,00023,$	$n_{10} = 0,00002.$

Специально для эллипсоида Красовского существует простая и точная формула для расчета дуги меридиана произвольной длины

$$X = 6367558,4969B - \sin B \cos B [32005,7801 + (133,9213 + 0,7032 \sin^2 B) \sin^2 B]. \quad (1.4.3)$$

По этой формуле длина дуги вычисляется с погрешностью менее 0,0001 м. С погрешностью не более 0,2 м длину дуги меридиана можно вычислять по более простой формуле

$$X = 6367558,5B - \sin B \cos B (32005,6 + 134,6 \sin^2 B).$$

Довольно успешно для вычисления длины дуги меридиана в метрах от экватора до параллели с геодезической широтой  $B$  референц-эллипсоида Красовского используется следующая формула [15]:

$$X = 6367558,49587 \frac{B}{\rho} - 16036,48027 \sin 2B + 16,828067 \sin 4B - 0,021975 \sin 6B,$$

в которую  $B$  входит в градусной мере, а  $\rho$  – количество градусов в одном радиане.

Если дуга меридиана не превышает 60 км, то с достаточно высокой точностью её длину, заключённой между параллелями с геодезическими широтами  $B_1$  и  $B_2$ , можно вычислить, используя формулу

$$\Delta X = M_m (B_2 - B_1) / \rho,$$

где  $M_m$  – средняя величина радиуса кривизны меридианного эллипса, равная полусумме величин радиусов кривизны для широт  $B_1$  и  $B_2$ . Здесь можно воспользоваться значениями радиусов кривизны  $M$  Приложения 9.

Для эллипсоида Красовского можно найти широту по заданной длине дуги меридиана. Решение этой задачи выполняется с помощью точной формулы

$$B = \beta + \sin \beta \cos \beta [50517738 - (298373 - 2382 \sin^2 \beta) \sin^2 \beta] \cdot 10^{-10},$$

где  $\beta = X/6367558,4969$ . Погрешность вычислений по этой формуле не хуже  $0,2 \cdot 10^{-10}$  и соответствует точности вычислений по формуле (1.4.3). Для быстрых и менее точных вычислений можно применять более простую формулу

$$B = \beta + \sin \beta \cos \beta (50517 - 296 \sin^2 \beta) 10^{-7},$$

которая обеспечивает погрешность, выраженную в градусной мере, не хуже  $0,005''$ .

В Приложении 9 в таблицу сведены значения радиусов кривизны в меридиане, в первом вертикале и радиусов параллелей референц-эллипсоида Красовского.

Одновременно под руководством Ф.Н. Красовского были рассчитаны элементы трехосного референц-эллипсоида 1940 года со следующими значениями [14]:

большая полуось	6378245 м;
полярное сжатие	1/298,3;
экваториальное сжатие	1/30086;



первая малая полуось                    6378033 м;  
вторая малая полуось                    6356863,019 м.

Трехосный РЭ Красовского 1940 года нашел ограниченное применение.

**Геодезическая система.** Основополагающую роль в геодезии, картографии и навигации играет понятие геодезической системы (ГС). Любая ГС предполагает, во-первых, существование конкретного референц-эллипсоида, во-вторых, способ ориентации данного референц-эллипсоида в теле геоида. Каждая ГС имеет свое собственное название.

Исторически сложилось так, что ГС создавалась для геодезических, геофизических, геологических и картографических работ в рамках отдельного государства. С возрастанием точности инструментов и с повышением требований к точности определения координат ориентиров и объектов на поверхности Земли ГС постоянно совершенствовались и заменялись. Поэтому к настоящему времени существует большое количество ГС, референц-эллипсоидов и способов ориентации. Один и тот же РЭ может использоваться в разных ГС, меняется только способ ориентации РЭ в теле геоида. Вот почему число применяющихся в наше время ГС намного больше используемых РЭ. Накопленное разнообразие РЭ позволяло выбрать такой из них, который после соответствующей ориентации имел минимальные отклонения от поверхности геоида в границах данного государства, а геодезические службы сводили к минимуму затраты на вычисления. В одном и том же государстве может одновременно применяться несколько ГС.

До создания глобальных спутниковых навигационных систем построение ГС производилось следующим образом. Вблизи астрономической обсерватории, где регулярно проводятся астрономические, геодезические и гравиметрические работы, выбирался пункт с известными с высокой точностью астрономическими координатами (астрономической широтой и астрономической долготой). Иными словами, для этого пункта, который назывался исходным пунктом, определялись ориентация отвесной линии в пространстве и истинное направление на географический северный полюс. Далее считалось, что к данному пункту прикладывается тело избранного референц-эллипсоида той точкой, которая имеет равно такие же по величине геодезические координаты. Затем эллипсоид разворачивался вокруг этой точки так, чтобы отвесная линия совпадала с нормалью к поверхности

эллипсоида, а меньшая полуось эллипсоида (ось вращения эллипсоида) была строго параллельна оси вращения Земли. Физически такая ориентация закреплялась измерением азимута с исходного пункта на дополнительный пункт, астрономические и геодезические координаты которого также известны с высокой точностью. Одновременно устанавливается разность высот между геоидом и поверхностью РЭ в исходном пункте. Затем геодезическими способами (триангуляцией, трилатерацией) определяются геодезические координаты ориентиров (например, морских маяков, антенн передающих станций РНС и т.д.) и их возвышений относительно нуля глубин, относительно геоида или относительно поверхности РЭ. Полученные таким образом координаты ориентиров проектируются на карты. Следовательно, с навигационных карт снимаются геодезические координаты, так как на плоскую поверхность карты проектируются координаты ориентиров и объектов с поверхности референц-эллипсоида.

Такие ГС принято называть астрономо-геодезическими или относительными. Астрономо-геодезическими они являются по способу ориентации РЭ. Относительными они считаются потому, что координаты точек на поверхности Земли определяются относительно координат исходного пункта и базисного азимута. Астрономо-геодезические ГС отличаются еще и тем, что центры их референц-эллипсоидов практически никогда не совпадают с центром масс Земли, так как отвесная линия в исходном пункте не всегда совпадает с направлением в центр масс из этой точки. Смещение центра РЭ относительно центра масс Земли или относительно динамического центра Земли принято обозначать через  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ . Из-за смещения центров РЭ возникают проблемы перехода от одной ГС к другой, что является весьма актуальной проблемой в морской навигации.

Астрономо-геодезическая ГС полностью задается следующими величинами: большой полуосью референц-эллипсоида, его сжатием, координатами исходного пункта, базисным азимутом и возвышением геоида над поверхностью референц-эллипсоида. Этот набор величин называют исходными геодезическими датами (datum, geodetic datum). С середины минувшего столетия к исходным геодезическим датам стали добавлять еще и отклонения линии отвеса в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала.

До 1942 года в СССР использовалась Пулковская геодезическая координат 1932 года, основанная на сфероиде Бесселя со следующими

исходными датами:  $B_0 = 59^{\circ}46'18,55''N$ ,  $L_0 = 30^{\circ}19'42,09''E$ , базисный азимут =  $317^{\circ}02'50,62''$ .

С 1942 года в СССР применяется Пулковская геодезическая система координат 1942 года. В отечественной литературе ее называют Системой координат 1942 года, а также СК-42. В зарубежной литературе, в частности, в инструкциях по эксплуатации приемоиндикаторов Навстар GPS эту систему называют Pulkovo 1942 или S-42. На отечественных картах, изданных до 1992 года, эта система указывается как “Система координат советских морских карт”. В 2002 году в Российской Федерации учреждена новая система геодезических координат СК-95.

Проблема несогласованности различных ГС побуждала соседние государства к принятию общих ГС. Примерами тому может ГС NAD 83, используемая США и Канадой, или European Datum 1950 (ED50), принятой странами Западной Европы для геодезических работ, а также для составления морских карт на воды, омывающие Западную Европу. В основе ED50 лежит международный эллипсоид International 1924 (см. Приложение 1). За исходный пункт этой системы принята Башня Гельмерта (Helmert Tower) в Потсдаме с геодезическими координатами:  $B_0 = 52^{\circ}22'51,4456''N$ ,  $L_0 = 13^{\circ}03'58,9283''E$ . Уклонение отвесной линии в исходном пункте: в меридиане  $+3,36''$ , в первом вертикале  $+1,78''$ .

Создание глобальных спутниковых навигационных систем показало, что ГС, поддерживающие работу этих систем, должны обладать уже иными свойствами, нежели астрономо-геодезические. ГС глобальных СНС должны иметь в своей основе общеземные эллипсоиды, ориентированные в теле геоида на ином принципе, а также иную систему отсчета координат. Созданию любой ГС глобальной СНС предшествуют длительные наземные, воздушные и космические гравиметрические работы по уточнению формы геоида, после чего одновременно вычисляются элементы общеземного эллипсоида и ориентировка его в теле геоида так, чтобы ось вращения эллипсоида и ось вращения Земли совпадали, а геометрический центр эллипсоида совпадал с центром масс Земли. Критерием окончания работ по уточнению формы общеземного эллипсоида и его ориентации является минимум среднего квадрати-ческого отклонения поверхности эллипсоида от поверхности геоида по всей поверхности Земли. Как правило, отправным для создания такого общеземного эллипсоида служил уже ранее разработанный международный общеземной эллипсоид.

Система отсчета координат ГС глобальных СНС является абсолютной, поэтому такие ГС называют абсолютными [14]. Дело в том, что в абсолютных ГС не существует понятия исходного пункта. Началом отсчета геодезических долгот в абсолютных ГС служит гринвичский меридиан, а началом отсчета геодезических широт является плоскость экватора эллипсоида. Поскольку такие ГС создаются не только для морской и воздушной навигации, но и для космической навигации, космического позиционирования, высокоточной наземной геодезии, астрономии и геофизики, то смысл понятия абсолютной ГС заключается еще и в том, что начала отсчетов координат должны быть строго определены в любой момент времени в пространстве.

В предыдущем разделе «Понятие общеземного эллипсоида» приведены формулы, с помощью которых определяется положение главных осей общеземного эллипсоида в пространстве. Для получения геодезических координат производится переход сначала к истинной звездной системе на данную эпоху, а от истинных звездных координат к гринвичским координатам  $X, Y, Z$ . От гринвичских координат переход к квазигеоцентрическим координатам  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  происходит с помощью следующих формул [5, 15]:

$$\begin{cases} \bar{X} = X - \Delta X_0 - \psi_0 Y + \gamma_0 Z \\ \bar{Y} = Y - \Delta Y_0 + \psi_0 X + \nu_0 Z, \\ \bar{Z} = Z - \Delta Z_0 - \gamma_0 X + \nu_0 Y \end{cases}$$

где  $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$  – координаты центра общеземного эллипсоида в гринвичской системе координат,  $\psi_0, \nu_0, \gamma_0$  – Эйлеравы углы. Для получения геодезических координат  $B, L, H$  применяют простые формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \\ \operatorname{tg} B &= \frac{\bar{Z} + Ne^2 \sin B}{\bar{X} \cos L + \bar{Y} \sin L}, \\ H &= \frac{\bar{X}}{\cos B \cos L} - N = \frac{\bar{Y}}{\cos B \sin L} - N = \frac{\bar{Z}}{\sin B} - N(1 - e^2), \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

где  $a$  – большая ось эллипсоида,  $e$  – первый эксцентриситет эллипсоида.

Вычисления по формуле (1.4.4) ведутся последовательными приближениями. В первом приближении геодезическую широту находят по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{\bar{Z}}{\bar{X} \cos L + \bar{Y} \sin L}.$$

Затем находится величина геодезической широты при синусе в формуле (1.4.4), которая переносится в левую часть и вновь отыскивается величина геодезической широты при синусе и т.д. Как видно из приведенного алгоритма расчетов геодезических координат, они не связаны с координатами ни одного наземного ориентира. В этом и заключается смысл абсолютной ГС. Здесь наблюдаются прямые аналогии с методами мореходной астрономии.

Классическая навигация и радионавигация позволяет определять координаты судна опосредованно, то есть через известные координаты навигационных и радионавигационных ориентиров, которые через государственную геодезическую сеть связаны с исходными пунктами ГС, координаты которых, в свою очередь, с некоторой точностью определены относительно Гринвичского меридиана и экватора. С помощью абсолютных ГС геодезические координаты определяются непосредственно относительно Гринвичского меридиана и экватора. Тем не менее, необходима физическая связь общеземного эллипсоида, на котором основана абсолютная ГС, с точками на поверхности Земли и с поверхностью геоида. Эта связь осуществляется с помощью сети контрольных пунктов на поверхности Земли, объединенных в так называемую ITRF (International Terrestrial Reference Frame – Международная наземная опорная сеть). В каждом пункте ITRF выполняется непрерывно весь комплекс астрономических, геодезических и геофизических наблюдений, а также непрерывно с высокой точностью определяются координаты по навигационным и геодезическим спутникам. Кроме того, круглосуточно производятся спутниковые интерферометрические измерения расстояний между пунктами ITRF. Все это делается для того, чтобы с высокой точностью отслеживать смещение пункта в результате подвижек участков земной коры. В астрономо-геодезических ГС исходный пункт непрерывно смещается вместе с референц-эллипсоидом из-за подвижек коры и дрейфа континентов. В абсолютных ГС такие смещения оцениваются относительно общеземного эллипсоида.

В последние годы разработаны более современные абсолютные геодезические системы, называемые ITRS (International Terrestrial

Reference System)/ Примером тому является система GRS-80, объединяющая несколько ITRF. В отличие от системы WGS 84, эта ITRS регулярно обновляется. Создаваемая Европейским Союзом СРНС Галилео имеет в качестве своей геодезической основы такую ITRS.

Примером первой абсолютной ГС является геодезическая система WGS 72, созданная для спутниковой радионавигационной системы Транзит. Основные элементы общеземного эллипсоида этой ГС приведены в Приложении 1. Геодезическая система WGS 72 была впервые применена для составления навигационных карт, поэтому общеземной эллипсоид WGS 72 можно с полным основанием считать референц-эллипсоидом. Его поверхность отстоит от поверхности геоида в среднем на 25 м.

С внедрением глобальных спутниковых систем Глонасс и Навстар GPS, которые позволяют определять обсервованные координаты судов в абсолютной системе координат, возникают проблемы использования навигационных карт, составленных в традиционных относительных геодезических системах. Обратимся к рисунку 11.

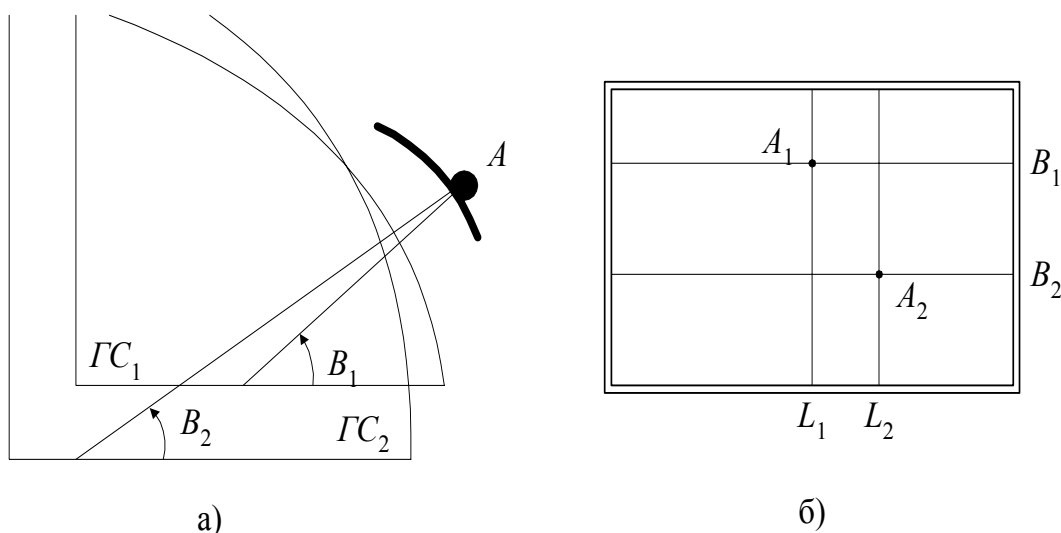


Рис. 11. Смещение координат из-за различия геодезических систем

На рисунке 11а) изображена точка  $A$ , принадлежащая физической поверхности Земли, а также два референц-эллипсоида, принадлежащих геодезическим системам  $ГС_1$  и  $ГС_2$ . Геодезическая широта точки  $A$  как угол, образованный нормалью к поверхности референц-эллипсоида и плоскостью экватора, в геодезической системе  $ГС_1$  будет  $B_1$ , а в геодезической системе  $ГС_2$  –  $B_2$ . Из рисунка видно, что  $B_1 > B_2$ . Поэтому если нанести на карту координаты точки  $A$  в системе координат  $ГС_1$  и в системе  $ГС_2$ , то точка  $A_1$  на карте (рис. 11б) будет располагаться севернее точки  $A_2$ . По долготе точка  $A_1$  на карте может располагаться восточнее или

западнее точки  $A_2$ . Это будет зависеть от длины дуг экватора от Гринвичского меридиана до меридиана точки  $A$  в каждой ГС.

Если для ведения прокладки пути судна используется традиционная бумажная навигационная карта или современная электронная карта, составленная в системе координат ГС<sub>1</sub>, а наблюдаемые координаты судна предоставляются, скажем, приемником спутниковой радионавигационной системы в абсолютной системе координат ГС<sub>2</sub>, то нанесенное на карту место судна по координатам ГС<sub>2</sub> не будет соответствовать координатам судна карты ГС<sub>1</sub>. В то же самое время, навигационные ориентиры, навигационные опасности, линия берега на карте наносятся в системе ГС<sub>1</sub>. Поэтому, если одновременно определить место судна с высокой точностью по береговым ориентирам (например, по двум горизонтальным углам, измеренным секстаном) и с помощью приемника, а затем нанести эти два места на карту, то наблюдаемые точки не совпадут. И не следует думать, что если параметры референц-эллипсоидов, один из которых используется для относительной ГС, а второй для абсолютной, близки, то смещение координат на карте будет незначительным.

По этим причинам необходимо преобразовывать координаты, которые предоставляет приемник, в координаты карты. Проблемам преобразования координат посвящена третья глава данного пособия.

Обсуждаемое смещение координат может происходить еще из-за несогласованности координат исходных пунктов геодезических систем. С таким явлением мореплавателям пришлось столкнуться после внедрения спутниковых радионавигационных систем Транзит и Цикада, когда координаты островов, расположенных в высоких широтах Южного полушария, отличались от наблюдаемых на несколько миль. Объяснялось такое явление тем, что геодезические съемки этих островов выполнялись еще в прошлом веке с низкой точностью привязки к существующим в то время ГС. Разумеется, если несогласованность исходных пунктов таких участков территорий не определена, то преобразование координат из одной ГС в другую нельзя будет выполнить. Несогласованность координат исходных пунктов может происходить из-за подвижек коры Земли вследствие дрейфа континентов и тектонического смещения исходного пункта. По этим причинам деформируются государственные геодезические сети триангуляций, к которым привязаны координаты навигационных и радионавигационных ориентиров. Смещаются и сами ориентиры.

Для европейской части России отмечены средние такие перемещения порядка 15 мм за год, а в южной части Калифорнии – до 50 мм за год и более.

Особо стоит вопрос искусственного геодезического сдвига на картах части побережья или отдельных островов. Это происходит при небрежном составлении карт, как правило, на иностранные воды или при составлении карты по материалам иностранных карт, изданных в разное время на основе различных ГС. Чаще всего такие явления наблюдаются на тех картах, где сходятся архипелаги, принадлежащие разным государствам. Иногда искусственный сдвиг на карте создается умышленно. В случаях геодезических сдвигов спутниковые наблюдения разительно отличаются от наблюдений, полученных по береговым ориентирам, что создает возможность аварии, если полагаться только на определение места судна по спутникам. Там, где границы территориальных вод или рыболовных зон накладываются на участки акваторий, нанесенных на карты с различными геодезическими основами, по этой причине могут происходить даже вооруженные конфликты. Необходимо сознавать, что если в заголовке такой карты указаны поправки к координатам для перехода от одной ГС к другой, то эти поправки не могут устранить локального геодезического сдвига. Эти рассуждения полностью справедливы и в отношении электронных карт, которые чаще всего составляются на основе традиционных бумажных.

Классические методы определения места судна при прибрежном плавании по своей сути сводятся к усилиям штурмана по нанесению на карту обсервованной точки относительно навигационных ориентиров. Иначе говоря, штурмана интересуют в первую очередь не обсервованные координаты как таковые, а геометрия взаимного расположения обсервованного места и навигационных опасностей, нанесенных на карту, а также направление движения судна. Поэтому практика прибрежного плавания выработала ряд принципов, которые оберегают штурмана от аварии даже при существенных геодезических сдвигах. Уместно напомнить эти принципы.

1. При подходе к побережью необходимо стремиться определить место судна самым точным способом по ближайшим береговым ориентирам с одновременным нанесением на карту обсервованных координат по РНС и СРНС. Обсервованное место, полученное по береговым ориентирам, никогда не следует отбрасывать, даже если оно не совпадает с обсервованным местом по РНС и СРНС.



Обсервованное место по береговым ориентирам предпочтительнее, так как не будет содержать локальных сдвигов.

2. При плавании судна вдоль берега следует придерживаться правила «эстафеты ориентиров», когда новый ориентир принимается для обсерваций только после того, как изолиния, полученная с его участием, пройдет через текущее обсервованное место.

3. Для обсерваций выбираются ориентиры, расположенные вблизи тех навигационных опасностей, с которыми сближается судно.

4. Следует с осторожностью относиться к обсервованному месту, полученному одновременно по ориентирам, расположенным на материке и на островах. Острова могут быть нанесены на карту с искусственным сдвигом.

5. Переход с карты на карту необходимо выполнять с помощью обсервации по одним и тем же ориентирам, которые одновременно обозначены на обеих картах.

Обсуждаемое несовершенство существующих бумажных и электронных карт на сегодняшний день является объективной причиной, сдерживающей уверенное применение дифференциальных GPS. В то же самое время, технологии дифференциальных GPS в сочетании с ECDIS позволяют определять обсервованные координаты с точностью до нескольких метров с одновременным нанесением обсервованного места на электронную карту, что освобождает штурмана от выполнения рутинных операций и тем самым дает ему больше времени на анализ развивающейся навигационной ситуации и принятия более обоснованного решения и его заблаговременного выполнения. Ведущие морские державы несколько лет назад начали работы по подготовке к изданию навигационных карт на основе геодезической системы координат WGS 84. Для этого были выполнены расчеты новых геодезических координат пунктов геодезических сетей триангуляции, координат навигационных ориентиров и даже сделаны дополнительные геодезические съемки. С 1998 года за рубежом почти повсеместно уже печатаются карты в системе WGS 84. Вполне понятно, что параллельно новым картам необходимо издание новых навигационных пособий «Огни ...» и РТСНО, в которых координаты навигационных ориентиров и антенн радиотехнических средств следует записывать в системе координат WGS 84 с указанием минут с точностью не менее трех знаков после запятой.

## 2. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА WGS 84

### 2.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Геодезическая система координат WGS 84 имеет свою историю. Впервые интерес к созданию общеземной геодезической системы – WGS (World Geodetic System) министерство обороны США проявило в конце 50-х годов. Оно разработало геоцентрическую систему координат в качестве опорной для различных существовавших в то время геодезических сетей, чтобы устанавливать между ними соответствие. Усилия армии, авиации и флота были объединены для создания общеземной геодезической системы 1960 года, получившей название WGS 60. Для расчетов общеземного эллипсоида 1960 года использовались многочисленные гравиметрические и астрономо-геодезические наблюдения, а также измерения, выполненные геодезическими РНС. Впервые для расчетов использовались результаты наблюдений за орбитами первых искусственных спутников Земли. Большая полуось WGS 60 составила 6378165 м, а полярное сжатие было принято равным  $1/298,3$ .

В январе 1966 года комитет по общеземной геодезической системе был привлечен к разработке улучшенной WGS. На этот раз перед WGS уже ставились задачи картографии и геодезии. Были проведены дополнительные гравиметрические работы, а также заново сделана высокоточная геодезическая съемка, по которой были построены новые триангуляционные и трилатерационные сети. Впервые применялись доплеровские и оптические наблюдения за движением ИСЗ. В конце 1966 года была завершена обработка полученных материалов, а в 1967 году была принята новая общеземная геодезическая система, названная WGS 66. В основе ее лежал общеземной эллипсоид с большей полуосью, равной 6378145 м, и с полярным сжатием  $1/298,25$ . Система WGS 66 впервые использовала мировой геоид, названный мировым геоидом WGS 66, который был представлен в виде гравитационной модели WGS 66. Гравитационная модель WGS 66 выражалась в виде сферических гармоник и набора геопотенциальных коэффициентов до 24 порядка. Впервые были рассчитаны константы геодезических сдвигов для Северо-Американской геодезической системы 1927 года (NAD 27), для Европейской системы (ED 50) и для Токийской геодезической системы (Tokyo Datum).

С 1966 года начались обширные работы комитета по общеземной геодезической системе для создания новой WGS, которая должна

была быть геодезической основой разрабатываемой министерством обороны США первой спутниковой радионавигационной системы Транзит. Работы велись приблизительно 3 года и завершились принятием WGS 72. В ходе этих работ были заново определены координаты станций, с которых велись доплеровские наблюдения за спутниками, геопотенциальные коэффициенты гравитационной модели Земли, а также был получен дополнительный астрономо-геодезический материал. В определении общеземного эллипсоида WGS 72 комитет принял решение применить подход, использованный Международным союзом по геодезии и геофизики (IUGG) для создания Геодезической опорной системы 1967 года (GRS 67). В соответствии с этим эквипотенциальный эллипсоид вращения был взят за форму эллипсоида WGS 72. Форма и размеры эквипотенциального эллипсоида довольно просто определяются эквипотенциальной поверхностью, то есть поверхностью, в каждой точке которой потенциал силы тяжести одинаков. Данный эллипсоид вращения может быть задан данной потенциальной функцией нормального гравитационного потенциала ( $U$ ) [27]. Такой нормальный гравитационный потенциал может быть однозначно определен четырьмя независимыми параметрами, которые выступают в качестве констант данного эллипсоида. Чтобы определить нормальный гравитационный потенциал без подробных знаний о структуре распределения масс в теле Земли,  $U$  разлагается в ряд зональных сферических гармоник линейного эксцентриситета. Коэффициенты ряда определяются из условия того, что эллипсоид имеет эквипотенциальную поверхность, то есть  $U = \text{const}$ . Из этого условия для идеального эллипсоида следует, что все зональные коэффициенты стремятся к нулю за исключением зонального коэффициента второй степени нулевого порядка, который служит константой эллипсоида [27]. Нормальная гравитация ( $\gamma$ ) на поверхности эллипсоида может быть вычислена по формуле Сомильяна (см. формулу 1.2.20), если известна нормальная гравитация на экваторе и на полюсе. Следуя подходу IUGG, комитет выбрал четыре параметра, задающих эллипсоид WGS 72: большую полуось ( $a$ ), гравитационную постоянную Земли ( $GM$ ), угловую скорость вращения Земли ( $\omega$ ) и нормализованный зональный гармонический коэффициент геопотенциала ( $\bar{C}_{2,0}$ ). Эти и некоторые другие параметры эллипсоида WGS 72 помещены в табл. 4.

Система WGS 72 и неразрывно связанная с ним спутниковая радионавигационная система Транзит оказали заметное воздействие на

технологии судовождения, открыв эру спутниковой навигации. Применение WGS 72 показало преимущество и перспективность определения абсолютных координат судна, а также недостатки применения локальных геодезических систем. Впервые на морских картах появились поправки к координатам для перехода от местных геодезических систем координат к координатам системы WGS 72.

Таблица 4

Фундаментальные постоянные WGS 72

Постоянная	Её обозначение	Её величина
Большая полуось	$a$	6378135 м
Малая полуось	$b$	6356750,52 м
Знаменатель сжатия	$F$	298,26
Сжатие	$f$	0,00335278
Первый эксцентриситет	$e$	0,0818188
Квадрат первого эксцентриситета	$e^2$	0,00669432
Средний радиус $(2a+b)/3$	$R$	6371006,84 м
Гравитационная постоянная	$GM$	398600,5 км <sup>3</sup> /сек <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная с учетом атмосферы	$GM'$	398600,8 км <sup>3</sup> /сек <sup>2</sup>
Второй гармонический коэффициент	$\bar{C}_{2,0}$	$-484,1605 \cdot 10^{-6}$
Угловая скорость вращения Земли	$\omega$	$0,7292115147 \cdot 10^{-4}$ рад/сек
Нормальная гравитация на экваторе	$\gamma_e$	978033,26 мГал

В начале семидесятых годов уже сформировалась концепция новой СРНС, которая по всем технико-эксплуатационным характеристикам должна была превосходить СРНС Транзит. Одновременно было обнаружено, что гравитационная модель Земли, принятая в WGS 72, не совсем точна для открытых морей и требует доработки. Кроме того, появились новые математические методы обработки гравиметрической информации и технические средства спутниковой гравиметрии. Стали внедряться методы спутниковой радиолокационной и лазерной альтиметрии, с помощью которых с высокой точностью была измерена форма физической поверхности Земли. В начале семидесятых годов начинают применяться сверхдлинные радиоинтерферометрические спутниковые базы для непрерывного отслеживания смещения контрольных точек на поверхности Земли. Обработка полученных в ходе новых измерений показала, что общеземной эллипсоид WGS 72 недостаточно точно ориентирован в пространстве. Все перечисленные факторы послужили

предпосылкой для принятия решения о производстве новых наблюдений и о создании новой общеземной геодезической системы, которая получила название WGS 84.

## 2.2. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА GRS 80

Существовала еще одна причина, побудившая министерство обороны США начать работы по модификации WGS 72. На XVII Генеральной Ассамблее Международного союза по геодезии и геофизике (IUGG) в 1979 году в Канберре была принята принципиально новая геодезическая система относимости 1980 года (Geodetic Reference System 1980 – GRS 80). Она заменила систему GRS 67, которая была одобрена в 1967 году в Люцерне, но позже признана не в полной мере отвечающей представлению о точности размеров, форме и гравитационного поля Земли. В начале 80-х годов Международная ассоциация по геодезии (IAG) приняла и рекомендовала для повсеместного использования новую геодезическую опорную систему 1980 года. Это послужило отправным моментом для создания в ряде стран своих национальных геодезических систем, аналогичных GRS 80. Иными словами, в начале 80-х годов наметилась устойчивая тенденция создания национальных геодезических систем, основанных на общеземных эллипсоидах, геометрические центры которых помещались в центр масс Земли.

Геодезическая система относимости 1980 года стала поворотным моментом в мировой астрономии, геофизике и геодезии, так как стала единой основой, объединившей в себе наиболее общий подход к изучению Земли и околоземного пространства. Система GRS 80 известна ещё тем, что её геоид был связан с шкалой нового координированного геоцентрического времени (TCG). До принятия этой шкалы измерение времени происходило по шкале земного времени (TT). Согласно Резолюции 1.9 XXIV Генеральной Ассамблеи Международного астрономического союза постоянная преобразования шкалы земного времени в шкалу координатного геоцентрического времени является определяющей для геоида, как потенциал силы тяжести Земли, удовлетворяющей условию постоянства этого потенциала. Поэтому, исходя из величины постоянной преобразования шкал времени, следует, что геоид – это поверхность, соответствующая потенциалу, равному  $62636856,005 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$ .

Система GRS 80 представляет собой сочетание геоида, общеземного эллипсоида и модели гравитационного поля Земли. Система координат системы является геоцентрической. Начало

координат помещено в центре масс Земли. Ось вращения опорного эллипсоида совпадает с направлением на Международное условное начало положения полюсов Земли – СИО (Conventional International Origin for the Polar Motion). Нулевой меридиан принят таким, каким он определён Международным Бюро Времени (ВИН – Bureau International de l’Heure).

**Эквипотенциальный эллипсоид GRS 80.** Нормальная гравитация  $g$  на поверхности эллипсоида задаётся сокращённой формулой Сомильяна, в которой  $g_e$  и  $g_p$  означают нормальный потенциал на экваторе и на полюсе соответственно. Через  $B$  обозначается геодезическая широта. Эквипотенциальный эллипсоид предоставляет простую, неразрывную и однородную опорную поверхность для решения всех задач геодезии. Эллипсоид представляет собой довольно простую поверхность для геометрических построений. Нормальное гравитационное поле на поверхности Земли и в околоземном пространстве вполне определяется формулой Сомильяна, что очень важно для гравиметрии и спутниковой геодезии.

Стандартная теория эквипотенциального эллипсоида рассматривает нормальный гравитационный потенциал как гармоническую функцию и не учитывает атмосферу. Поэтому расчёты GRS 67 выполнялись без учёта атмосферы. При создании GRS 80 влияние атмосферы уже учитывалось в виде поправок к  $g$  в зависимости от высоты над поверхностью эллипсоида. Так, на высоте 0,5 км поправка составляет 0,82 мГал, на высоте 3 км поправка уже равна 0,60 мГал, а на высоте 30 км – 0,01 мГал. Это говорит о том, что с увеличением высоты величина поправки уменьшается.

Эквипотенциальному эллипсоиду GRS 80 соответствует Формула гравитации 1980 года. Она имеет следующий вид:

$$g = g_e (1 + 0,0052790414 \sin^2 B + 0,0000232718 \sin^4 B + 0,0000001262 \sin^6 B + 0,0000000007 \sin^8 B).$$

Эта формула обладает точностью  $\pm 10^{-10}$ , что соответствует  $\pm 10^{-3}$  мм/с<sup>2</sup> или  $\pm 10^{-4}$  мГал. Формула гравитации 1980 года имеет сокращённую форму

$$g = g_e (1 + f^* \sin^2 B - f^4 \sin^2 2B),$$

которая с учётом констант окончательно имеет следующий вид:

$$g = 9,780327(1 + 0,0053024 \sin^2 B - 0,0000058 \sin^2 2B) \text{ м/с}^2.$$

Приведённая выше формула обеспечивает точность порядка  $\pm 1$  мм/с<sup>2</sup>, что соответствует  $\pm 0,1$  мГал.

До принятия Формулы гравитации 1980 года применялась Формулы гравитации 1930 и 1967 годов. Поэтому весьма полезным будет привести формулы для вычисления поправок.

$$g_{1980} - g_{1930} = (-16,3 + 13,7 \sin^2 B),$$

$$g_{1980} - g_{1967} = (0,8316 + 0,0782 \sin^2 B - 0,0007 \sin^4 B).$$

Здесь следует напомнить, что 1 мГал =  $10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>. Среднее значение нормальной гравитации для эллипсоида GRS 80 равна 9,797644656 м/с<sup>2</sup>. Величина нормальной гравитации на широте 45° составляет 9,806199203 м/с<sup>2</sup>. Фундаментальные постоянные эллипсоида GRS 80 приведены в табл. 5.

Таблица 5

Фундаментальные постоянные GRS 80 [36]

Постоянная	Её обозначение	Её величина
Большая полуось	$a$	6378137 м
Знаменатель сжатия	$F$	298,257222101
Сжатие ( $1/F$ )	$f$	0,00335281068118
Гравитационная постоянная (с атмосферой)	$GM$	$3986005 \cdot 10^8$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Угловая скорость вращения Земли	$\omega$	$7292115 \cdot 10^{-11}$ рад/сек
Динамический фактор формы	$J_2$	$108263 \cdot 10^{-8}$
Малая полуось	$b$	6356752,3141 м
Квадрат первого эксцентриситета	$e^2$	0,0066943800229
Квадрат второго эксцентриситета	$e'^2$	0,00673949677548
Полярный радиус кривизны	$C$	6399593,6259 м
Линейный эксцентриситет	$E$	521854,0097 м
Длина четверти меридиана	$Q$	10001965,7293 м
Средний радиус $R_1=(2a+b)/3$	$R_1$	6371008,7714 м
Радиус сферы равной площади	$R_2$	6371007,181 м
Радиус сферы равного объёма	$R_3$	6371000,79 м
Нормальный потенциал эллипсоида	$U_0$	$6263686,085 \cdot 10$ м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
Нормальный потенциал на полюсе	$g_p$	9,8321863685 м/с <sup>2</sup>
Нормальный потенциал на экваторе	$g_e$	9,7803267715 м/с <sup>2</sup>
$m = \omega^2 a^2 b / GM$	$m$	0,00344978600308
Коэффициент формы нормальной гравитации	$k$	0,001931851353

**Геодезическая система NAD 83.** Одним из первых внедрений системы GRS 80 в мировую геодезическую практику явилось создание в США новой геодезической системы NAD 83 (North American Datum 1983).

В Соединённых Штатах Америки первой общегосударственной геодезической системой была так называемая Геодезическая система Новой Англии (New England Datum) 1839 года. На смену ей в 1901 году учреждена Стандартная геодезическая система США (US Standard Datum of 1901). С 1913 года все геодезические работы проводились уже на основе новой системы, которая называлась Северо-Американская геодезическая система 1913 года (North American Datum of 1913 – NAD 13). В 1927 году США переходит на новую геодезическую систему NAD 27. Она использовалась более 50 лет.

Система NAD 27 относилась к классическим астрономо-геодезическим системам координат. Референц-эллипсоидом системы был эллипсоид Кларка 1866 года со следующими параметрами: размер большей полуоси  $a = 6378206,4$  м, сжатие  $f = 1/294,9786982$  [88]. Исходным пунктом системы был геодезический пункт Meades Ranch в штате Канзас с координатами  $B = 39^{\circ}13'26,686''N$ ,  $L = 98^{\circ}32'30,506''W$ . Азимут на пункт Waldo был определён как  $\alpha = 75^{\circ}28'09,64''$ . Уклонения отвесной линии в исходном пункте в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала равнялись нулю. Поверхность геоида была принята проходящей через исходный пункт.

Введение в практику спутниковых геодезических методов, лазерных дальнометров, измерение сверхдлинных баз показали, что к концу 60-х годов минувшего столетия система NAD 27 перестала удовлетворять нуждам высокоточной геодезии. Многочисленные измерения показали, что сеть геодезических пунктов системы NAD 27 постоянно нуждается в работах по переуравниванию из-за деформаций земной поверхности. В среднем по территории США пункты смещались со скоростью до 5 см в год [88]. Всё это привело к началу работ по разработке новой геодезической системы. Работы, в ходе которых заново измерялись координаты 160000 геодезических пунктов, были завершены к началу 80-х годов решением системы 6 миллионов уравнений с 400000 неизвестными для поверхности эллипсоида GRS 80. Работы были завершены в июле 1986 года изданием каталога новых координат геодезических пунктов сети. С этого момента считается начало использования в США новой геодезической системы NAD 83. Работы по созданию NAD 83 велись Национальным геодезическим управлением и Национальным управлением по исследованию океана и атмосферы (NOAA) министерства промышленности США. Система NAD 83 предназначалась для обширной территории США, Канады и



Гренландии. Немного позже NAD 83 была принята Мексикой и странами центральной Америки. Нулевой меридиан NAD 83 был совмещен с нулевым (гринвичским) меридианом общеземной системы BTS-84 (BIH Terrestrial System 1984 года), положение в пространстве которого постоянно отслеживается Международным бюро времени – BIH. Положение плоскости экватора NAD 83 было определено относительно высокоточной системы координат США NSWC 9Z-2. NSWC – Naval Surface Warfare Center – Центр применения оружия надводными кораблями США. Плоскость экватора NAD 83 смещена относительно NSWC 9Z-2 на 4,5 м в отрицательную сторону по оси Z.

В настоящее время все карты, издаваемые NOAA на воды, омывающие берега США, Канады и Гренландии, а также соответствующими службами Канады, создаются на основе NAD 83. Более того, дифференциальные станции GPS США и Канады, работающие в стандарте MAMC, транслируют поправки относительно опорных точек, привязанных к системе координат NAD 83.

В отличие от системы NAD 27 система NAD 83 уже не является астрономо-геодезической. В ней координаты геодезических пунктов отсчитываются не от исходного пункта, а определяются индивидуально относительно нулевого меридиана и плоскости экватора. Таким образом, поверхность референц-эллипсоида в NAD 83 задаётся пространственными координатами геодезических пунктов.

Опыт использования геодезической системы NAD 83 вскоре показал, что для достижения высокой точности определения геодезических координат необходимы регулярные уравнивания сети геодезических пунктов. Такие работы стали проводиться в последние время почти каждый год. Поэтому в литературе можно встретить, например, такую запись: NAD83(1997) или NAD83/97, что говорит о годе работ по очередному уравниванию сети.

### **2.3. СИСТЕМА КООРДИНАТ WGS 84**

Министерство обороны США приняло решение о создании своей собственной геодезической системы WGS 84 по аналогии с NAD 83 на базе GRS 80. В отличие от NOAA Министерство обороны перед WGS 84 ставило цель разработать модель геоида и модель гравитационного поля Земли, которые, во-первых, должны быть максимально приближены к реальности, во-вторых, должны быть удобны для создаваемой спутниковой системы Навстар GPS. Здесь надо остановиться на отличии WGS 84 от NAD 83 несколько подробнее. NAD 83 создавалась как национальная геодезическая

система координат для решения, прежде всего, невоенных задач геодезии, картографии, освоения ресурсов суши и океана. WGS 84 разрабатывалась для достижения военных целей в любой точке Земли средствами Навстар GPS. В системе NAD 83 более точно определены отстояния геоида от поверхности референц-эллипсоида GRS 80, что достигнуто разработкой более сложной модели гравитационного поля Земли в пределах территории США, Канады и Гренландии. В системе WGS 84 используется несколько упрощенная модель гравитационного поля Земли, а вертикальные координаты определяются с менее высокой точностью по сравнению с NAD 83. В системе NAD 83 в качестве формообразующего показателя используется динамический фактор формы  $J_2$ , позаимствованный из GRS 80. В WGS 84 используется нормализованный зональный гармонический коэффициент второй степени  $\bar{C}_{2,0}$ . Между ними существует строгая математическая зависимость [35, 36]

$$\bar{C}_{2,0} = \frac{-J_2}{\sqrt{5}}.$$

Для получения параметров гравитационного поля Земли в ходе работ над WGS 84 впервые применялась лазерная технология измерения дальностей до Луны. Большие полуоси эллипсоидов WGS 84 и NAD 83 одинаковы. Их ориентация в теле Земли одна и та же. Несколько отличаются малые полуоси, а, следовательно, и величины полярных сжатий и полярные радиусы кривизны. Поэтому возникает вопрос о смещении координат при переходе от WGS к NAD 83 и наоборот. Поскольку нулевые меридианы эллипсоидов этих двух систем совпадают, то долготы будут всегда одинаковы. Смещение по широте оценивается следующей приближенной формулой [36]:

$$\Delta\phi'' \approx \frac{f \sin 2\phi}{\sin 1''},$$

где  $\Delta\phi''$  – смещение по широте в секундах при переходе от одной системы к другой,  $\phi$  – геодезическая широта,  $f$  – сжатие. Расчеты показывают, что в широте  $45^\circ$  величина смещения достигает 0,000003 угловой секунды или 0,0001 метра.

Приведённая выше формула справедлива для осей геодезических систем WGS 84 и NAD 83, но не для координат пунктов, принадлежащих физической поверхности Земли. Вследствие деформаций участков земной поверхности и разной частоты работ по уравниванию сетей геодезических пунктов разности в координатах отдельных пунктов могут достигать гораздо больших величин.

WGS 84 благодаря СРНС Навстар GPS имеет всемирное распространение. Она применяется в геодезии, геофизике, навигации, картографии, в географических информационных системах и т.д. С 1998 года ведущие морские державы приступили к изготовлению морских карт на основе WGS 84. Эта система стала основой для развития космической навигации и ориентирования в околоземном пространстве. Сочетание высокой точности определения места судна с высокой точностью представления Земли системой WGS 84 побудило создание высокоточных спутниковых курсоуказателей для самолетов и судов. Коренные изменения WGS 84 произвела в морской геодезии и гидрографии. По этим причинам эту систему следует рассмотреть более подробно. Система WGS 84 является совокупностью, состоящей из системы отсчёта координат, референц-эллипсоида WGS 84 и геоида WGS 84 с соответствующей моделью гравитационного поля Земли.

При создании системы она была привязана к сети опорных доплеровских станций военной высокоточной системы координат США NSWC 9Z-2. Для перехода от системы координат NSWC 9Z-2 к системе координат WGS 84 существуют точные формулы [35]

$$\Delta\phi'' = \frac{4,5 \cos \phi}{a \sin 1''} + \frac{\Delta f \sin 2\phi}{\sin 1''},$$

$$\Delta\lambda'' = 0,814,$$

$$\Delta h = 4,5 \sin \phi + a \Delta f \sin^2 \phi - \Delta a + \Delta r,$$

где  $\Delta\phi''$  и  $\Delta\lambda''$  – поправки в угловых секундах к геодезической широте и долготе системы координат NSWC 9Z-2 для перехода к координатам в системе WGS 84,  $\Delta h$  – соответствующая поправка к геодезической высоте в метрах,  $\phi$  – геодезическая широта в системе координат NSWC 9Z-2,  $\Delta a = -8,0$  м,  $\Delta f = -0,812045 \cdot 10^{-7}$ ,  $a = 6378145$  м,  $\Delta r = -3,8$  м.

Разворот плоскости начального меридиана WGS 84 к западу от плоскости нулевого меридиана на  $0,814''$  был выполнен для того, чтобы начало отсчета долгот системы WGS 84 совпадало с нулевым меридианом BTS 84. Направление оси Z WGS 84 совпадало с направлением на условный северный полюс Земли, как это определено Международным бюро времени (БИВ) на эпоху 1984 года.

Чтобы получить координаты в системе WGS 84, необходимо рассчитанные по геодезическим координатам системы NSWC 9Z-2 поправки  $\Delta\phi''$ ,  $\Delta\lambda''$ ,  $\Delta h$  прибавить со своими знаками к соответствующим геодезическим координатам системы NSWC 9Z-2.

На современном этапе эксплуатации система координат WGS 84 считается условной земной опорной системой координат – CTRS (Conventional Terrestrial Reference System) так, как это определяет IERS (International Earth Rotation Service) – Международная служба вращения Земли, что означает следующее:

- начало координат WGS 84 совпадает с центром масс Земли с учётом масс океанов и атмосферы;

- начало координат и направление осей выбрано с учётом гравитации, исходя из положений общей теории относительности;

- ориентация системы в пространстве была первоначально задана Международным Бюро Времени – ВИН (Bureau International de l'Heure) на эпоху 1984 года;

- ориентация осей не изменяется во времени из-за движения участков земной поверхности.

Система WGS 84 считается прямоугольной правосторонней связанной с Землёй системой координат. Такая система координат называется геоцентрической неподвижной относительно Земли системой – ECEF (Earth-Centered Earth-Fixed). Положение и направление оси  $Z$  соответствует направлению Условного земного полюса – СТР (Conventional Terrestrial Pole), как это определил ВИН на эпоху 1984 года. Таким образом, ось  $Z$  совпадает с направлением на опорный полюс IRP (IERS Reference Pole) с точностью  $0,005''$ . Ось  $X$  определена пересечением опорного меридиана – IRM (IERS Reference Meridian) с плоскостью, проходящей через начало координат и перпендикулярной оси  $Z$ . Меридиан IRM совмещён с Нулевым меридианом ВИН на эпоху 1984 года с точностью  $0,005''$ . Ось  $Y$  дополняет систему до правосторонней декартовой.

Начало системы координат WGS 84 служит геометрическим центром эллипсоида WGS 84.

Чтобы выполнять практические измерения текущих координат подвижных объектов в системе WGS 84, необходимо иметь сеть опорных пунктов, каждый из которых привязан с высокой точностью к осям системы WGS 84. С помощью координат опорных пунктов по сути дела осуществляется задание поверхности референц-эллипсоида относительно физической поверхности Земли. Такую сеть наземных опорных пунктов принято называть TRF (Terrestrial Reference Frame). Точность определения обсервованных координат с помощью СРНС Навстар GPS в обязательном порядке предполагает существование TRF, относительно которой определяются параметры орбит спутников. Кроме того, такая сеть крайне необходима для

распространения точных координат на поверхности Земли для производства геодезических, топографических и картографических работ. Высокоточные координаты TRF системы WGS 84 перед её учреждением в 1986 году были определены в результате многочисленных доплеровских измерений с помощью СРНС Транзит, а также с помощью NSWС 9Z-2 и BTS (ВН Terrestrial System).

Главная цель предварительных работ заключалась в наиболее точном согласовании масштабов, шкал и ориентации сети пунктов WGS 84 с сетью BTS на эпоху 1984 года. Вычисление точных параметров перехода к геодезическим системам NSWС 9Z-2 и BTS была достигнута с небывалой по тому времени точностью. Например, точность преобразования координат при переходе к сети пунктов системы NSWС 9Z-2 достигала 10-сантиметрового уровня. Точность же координат сети пунктов будущей системы WGS 84 относительно системы BTS не превосходила 1 ÷ 2 метров, чего по тем временам было вполне достаточно для практических нужд [87]. В настоящее время точность привязки улучшилась на порядок, благодаря внедрению высокоточных геодезических способов, основанных на фазовых измерениях сигналов спутников СРНС Навстар GPS.

Геодезическая система координат WGS 84 была введена 23 января 1987 года. В то время она использовалась в качестве геодезической основы работы спутниковой радионавигационной системы Транзит прежде всего для расчётов точных эфемерид орбит спутников. Эти эфемериды участвовали затем наряду с доплеровскими измерениями в определении абсолютных координат постоянных станций слежения, которые подготавливались как неотъемлемый элемент наземного комплекса развёртываемой СРНС Навстар GPS. Определённые таким образом высокоточные координаты станций слежения применялись до 28 июня 1994 года. В современной литературе эти значения координат принято обозначать как систему координат WGS 84 (orig.). Сокращение orig. подразумевает первоначальную версию координат опорной сети. Надо отметить, что картографическое предприятие Министерства обороны США – DMA (Defense Mapping Agency) прекратила применение этой версии координат ещё 2 января 1994 года.

Ряд независимых исследований продемонстрировал существование устойчивых постоянных погрешностей в геодезических высотах пунктов, полученных с помощью системы WGS 84 (orig.) и с помощью методов, основанных на обработке сигналов спутников СРНС Навстар GPS. Объясняется это

несовершенством доплеровских измерений, применявшихся в СРНС Транзит. Для устранения этих и других погрешностей, от которых следовало избавиться во вводимой в широкое использование СРНС Навстар GPS, DMA совместно с Далгреновским отделом центра оружия надводных кораблей ВМС США – NSWCDD (Naval Surface Warfare Center Dahlgren Division) выполнили дополнительные измерения и получили новые высокоточные абсолютные координаты станций слежения. Новые координаты намного улучшили привязку сети опорных пунктов системы Навстар GPS. Надо сказать, что подобный процесс уточнения абсолютных координат повторялся дважды в 1994 и в 1996 годах.

Следует напомнить, что СРНС Транзит относилась к Военно-морским силам США, так как создавалась специально для обеспечения применения ракетного комплекса Трайдент, размещённого на ракетных атомных подводных лодках. СРНС Навстар GPS принадлежит Военно-воздушным силам США. Поэтому контрольно-измерительные станции системы Навстар GPS в иностранной литературе часто называют станциями слежения ВВС (Air Force tracking stations). Министерство обороны США поручило DMA оборудовать в ряде стран мира собственные станции исключительно для высокоточного измерения параметров орбит спутников СРНС Навстар GPS с целью обеспечения прецизионных геодезических расчётов с использованием сигналов спутников Навстар GPS. Впоследствии (1 октября 1996 года) DMA было преобразовано в NIMA (National Imagery Mapping Agency – Национальное управление визуальной информации и картографии). Вскоре после начала эксплуатации СРНС Навстар GPS стало понятно, что с её помощью можно отслеживать перемещения тектонических плит земной коры. Поэтому была образована Международная служба геодинамики – IGS (International GPS Service for Geodynamics), которая имела в своём распоряжении сеть станций (пунктов), абсолютные координаты которых и их взаимное расположение непрерывно отслеживалось по результатам обработки сигналов спутников Навстар GPS. Министерство обороны США после обработки данных от сети пунктов (станций) DMA и ВВС, а также от некоторых станций IGS, в 1996 году уточнило координаты своей сети станций. Точность определения абсолютных координат была достигнута порядка 5 см ( $1\sigma$ ). В 1994 году была достигнута точность всего лишь порядка 10 см.

Таким образом, вслед за WGS 84 (orig.) были приняты ещё две версии координат TRF. Они были получены уже с помощью сигналов СРНС Навстар GPS. Вторая версия имела название WGS 84 (G730). Она была принята 29 июня 1994 года и просуществовала до 28 января 1997 года. Третья версия, которая была учреждена 29 января 1997 года, получила название WGS 84 (G873). Буква G с цифрами означает номер недели в системе отсчёта времени в СРНС Навстар GPS. Последняя версия WGS 84 (G1150) принята 20 января 2002 года. Смещение координат пунктов TRF при переходе от WGS 84 (G837) к WGS 84 (G1150) составило несколько сантиметров. В 2004 году NIMA было преобразовано в Национальное агентство по наземной разведке – NGA (National Geospatial-Intelligence Agency). Прямоугольные декартовы координаты (в км) станций BBC и NGA на эпоху 2001 года представлены в табл. 6. Следует сказать о том, что эти координаты даны для фазовых центров приёмных антенн станций.

Дальнейшее уточнение абсолютных координат сети TRF WGS 84 весьма возможно. Планируется в ближайшее время ввод новых станций NGA помимо тех станций NIMA, которые указаны в табл. 6. Возможны перемещения приёмных антенн станций, их замена на более совершенные. Нельзя забывать о проведении научных работ с целью создания более совершенных математических методов вычисления прецизионных абсолютных геодезических координат. Совершенствуется космический сегмент СРНС Навстар GPS. В самое ближайшее время ожидается вывод на орбиты спутников новых поколений, что приведёт к повышению точности измерения радионавигационных параметров различными потребителями этой системы. Кроме того, ожидается увеличение точности и стабильности атомных эталонов времени, размещаемых на спутниках и в центрах управления спутниковыми радионавигационными системами [90]. С 2006 года планируется вывод в космос спутников новой европейской СРНС Галилео. Совместное использование СРНС Навстар GPS и Галилео также позволит точнее определить абсолютные координаты TRF WGS 84, что, несомненно, уточнит положение поверхности референц-эллипсоида WGS 84.

Таблица 6

Прямоугольные координаты TRF WGS 84 (G1150) на эпоху 2001года [89, 92]

Название станции	X, км	Y, км	Z, км
<u>Станции ВВС</u>			
Колорадо Спрингс	- 1248,597295	- 4819,433239	3976,500175
о. Вознесения	6118,524122	- 1572,350853	- 876,463990
о. Диего Гарсия	1916,197142	6029,999007	- 801,737366
о. Кваджелейн	- 6160,884370	1339,851965	960,843071
Гавайские о-ва	- 5511,980484	- 2200,247093	2329,480952
м. Канаверал	918,988120	- 5534,552966	3023,721377
<u>Станции NGA</u>			
Австралия	- 3939,182131	3467,075376	- 3613,220824
Аргентина	2745,499065	- 4483,636591	- 3599,054582
Англия	3981,776642	- 89,239095	4965,284650
Бахрейн	3633,910757	4425,277729	2799,862795
Эквадор	1272,867310	- 6252,772219	- 23,801818
Обсерватория ВМС США	1112,168358	- 4842,861664	3985,487174
Аляска	- 2296,298460	- 1484,805050	5743,080090
Новая Зеландия	- 4780,787068	436,877203	- 4185,258942
Южная Африка	5066,232133	2719,226969	- 2754,392735
Южная Корея	- 3067,861732	4067,639179	3824,294063
Таити	- 5246,403866	- 3077,285554	- 1913,839459

В табл. 6а помещены геодезические координаты сети опорных станций, закрепляющих поверхность референц-эллипсоида WGS 84, на эпоху 2001 года. Геодезическая широта  $B$  и долгота  $L$  приводятся в градусной мере. Причём, долгота дана в круговом счёте. Отрицательная широта говорит о том, что она принадлежит южному полушарию. Высота  $h$  над референц-эллипсоидом WGS 84 дана в метрах. Приводимые координаты принадлежат фазовым центрам приёмных антенн высокоточных геодезических приёмников СРНС Навстар GPS.

Надо отметить, что при определении высокоточных координат станций учитывалась даже незначительная разница между фазовыми центрами антенн, принимающими сигналы  $L_1$  и  $L_2$ .

Пространственные и геодезические координаты станции на Аляске соответствуют измерениям, предпринятым после землетрясения, произошедшего 3 ноября 2002 года.

Таблица 6а



Геодезические координаты TRF WGS 84 (G1150) на эпоху 2001года [92]

Название станции	$B$ , градусы	$L$ , градусы	$h$ , м
<u>Станции ВВС</u>			
Колорадо Спрингс	38,80305458	255,47540844	1911,755
о. Вознесения	- 7,95132970	345,58786950	106,558
о. Диего Гарсия	- 7,26984347	72,37092177	- 64,063
о. Кваджелейн	8,72250074	167,7352625	39,927
Гавайские о-ва	21,56149086	201,76066922	426,077
м. Канаверал	28,48373800	279,42769549	- 24,005
<u>Станции NGA</u>			
Австралия	- 34,72900041	138,64734499	38,155
Аргентина	- 34,57370168	301,48070059	48,747
Англия	51,45374284	358,71610888	163,097
Бахрейн	26,20914020	50,60814451	- 13.872
Эквадор	- 0,21515762	281,50639169	2922,626
Обсерватория ВМС США	38,92045032	282,93377525	59,098
Аляска	64,68794025	212,88703366	176,570
Новая Зеландия	- 41,27264851	174,77870673	46,902
Южная Африка	- 25,74634609	28,22403736	1416,405
Южная Корея	37,07756793	127,02403180	48,876
Таити	- 17,57703053	210,39381438	99,927

Определённые таким образом координаты станций слежения участвуют в вычислении параметров орбит навигационных спутников СРНС Навстар GPS. Таким образом, точность задания поверхности референц-эллипсоида WGS 84 задаёт предельную точность определения координат потребителей СРНС Навстар GPS. Здесь надо уточнить, что сеть станций NGA выполняет измерения траектории проходящих спутников системы Навстар GPS и составляет архив параметров траекторий. С помощью этого архива в режиме постобработки геодезисты получают высокоточные координаты пунктов своих наблюдений.

Поскольку современность выставляет требования к точности реализации системы координат WGS 84 такие, которые бы обеспечивали точность определения геодезических координат лучше 10 см, то уже нельзя игнорировать целый ряд геофизических явлений, которые ранее не принимались во внимание в силу их незначительного влияния. К числу таких явлений относятся прежде всего движение тектонических плит, приливные явления земной коры и неравномерность вращения Земли.

Все эти явления в разной мере сказываются на абсолютных координатах станций TRF WGS 84. Поскольку воздействия этих явлений описываются во времени, то при их учёте делают привязку к конкретной эпохе (версии) системы координат WGS 84.

Для обеспечения сантиметрового уровня стабильности TRF WGS 84 следует обновлять координаты станций, чтобы устранить влияние движения тектонических плит. Координаты каждой станции вследствие её перемещения будут меняться. Это перемещение происходит в среднем со скоростью 7 см/год. Одним из способов учёта такого горизонтального движения является непрерывное измерение скорости и направления смещения той тектонической плиты, которой принадлежит данная станция, и получение математической модели движения, параметры которой зависят от времени. В настоящее время рассматривают 16 основных тектонических плит.

Помимо движения тектонических плит твёрдая поверхность Земли совершает медленные почти периодические колебания, в результате чего приёмные антенны станций TRF вертикально перемещаются с амплитудой до 42 см.

Большой вклад в нестабильность абсолютных координат станций TRF WGS 84 вносит неравномерность вращения Земли. Об этом можно судить по данным табл. 6б.

Таблица 6б

Годовые угловые скорости вращения Земли

Год	Угловые скорости ( $\times 10^{-11}$ рад/с)		
	Максимальная	Минимальная	Средняя
1967	7292115,018	7292114,903	7292114,946
1970	7292114,998	7292114,870	7292114,918
1972	7292114,946	7292114,845	7292114,882
1975	7292114,991	7292114,875	7292114,920
1977	7292114,993	7292114,867	7292114,912
1980	7292115,018	7292114,909	7292114,952
1982	7292115,031	7292114,918	7292114,964
1985	7292115,099	7292114,977	7292115,024

Минимальные и максимальные значения угловых скоростей получены в результате наблюдений по 5-дневным периодам. Среднее значение угловой скорости определялось за весь год. Данные табл. 6б наглядно свидетельствуют о нестабильности скорости вращения Земли. Это неравенство неизбежно сказывается на точности определения абсолютных координат станций TRF. Поэтому эти

неравенства тщательно изучаются для создания точных математических моделей расчётов поправок за неравномерность вращения Земли. В высокоточных геодезических работах неравномерность угловой скорости Земли неизбежно учитываются с помощью соответствующих математических моделей, а также по непрерывным измерениям, выполняемым IERS. Скорость вращения Земли относится к фундаментальным параметрам, определяющим систему геодезических координат WGS 84. В разных версиях системы WGS 84 принимались такие значения угловой скорости вращения Земли, которые были наиболее близкими на эту эпоху. Так, например, для WGS 84 (G873) скорость вращения была принята равной  $7292115,1247 \times 10^{-11}$  рад/с.

В современной литературе встречаются сообщения о том, что расхождения в геодезических координатах между системами WGS 84 и NAD 83 составляют несколько сантиметров. В начале данного параграфа приводится формула и величина этого расхождения. Следует ещё раз напомнить, что это касается расхождения между осями систем. Система NAD 83 остаётся локальной геодезической системой, несмотря на использование в её основе общеземного эллипсоида, близкого по своим геометрическим размерам к референц-эллипсоиду WGS 84. На самом деле, геометрический центр референц-эллипсоида GRS 80 в системе NAD 83(86) не совпадает с центром масс Земли приблизительно на 2 метра. Поэтому геодезические координаты в системе NAD 83(86) отличаются от геодезических координат в системе WGS 84(G873) приблизительно на такую же величину.

Для перехода к пространственной неподвижной системе координат существуют строгие математические зависимости и вычисленные константы [35], к которым относятся средняя угловая скорость вращения Земли, угловые скорости нутации и прецессии. Все расчеты приведены, как и в системе BTS 84, к юлианской эпохе J2000 [35].

Работы по поддержанию системы координат WGS 84 на уровне, обеспечивающим требования министерства обороны США, в том числе работы по привязке геодезических пунктов станций TRF, регламентируются специальным документом, который называется Интерфейсный Контрольный Документ 211 (ICD-GPS-211).

***Переход от прямоугольных координат к геодезическим.*** В предыдущей главе уже рассматривалась задача вычисления геодезических и прямоугольных координат точки, принадлежащей

поверхности референц-эллипсоида. В практике применения системы WGS 84 возникает задача расчётов геодезических и прямоугольных координат точки, которая не совпадает с поверхностью эллипсоида WGS 84. Такая задача решается программным обеспечением геодезических и навигационных приёмников СРНС Навстар GPS. При этом применяются прямые и итерационные методы вычислений [93, 94].

Обозначим через  $X, Y, Z$  геоцентрические прямоугольные координаты с началом в геометрическом центре референц-эллипсоида WGS 84. Они задают положение в пространстве некой точки, геодезические координаты которой необходимо определить. Обозначим через  $B, L, H$  геодезическую широту и долготу этой точки, а также возвышение её над поверхностью референц-эллипсоида соответственно.

Прямоугольные координаты отыскиваются по геодезическим координатам следующим образом:

$$X = (N + H) \cos B \cos L, \quad Y = (N + H) \cos B \sin L, \quad Z = \left( \frac{b^2}{a^2} N + H \right) \sin B,$$

где  $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$ ,  $a$  и  $b$  – полуоси эллипсоида. (2.3.1)

Здесь следует обратить внимание на то, что радиус кривизны в первом вертикале  $N$  рассчитывается через полуоси, в то время как в отечественной практике навигационных расчётов этот радиус вычисляется через большую полуось и первый эксцентриситет.

В приёмниках СРНС Навстар GPS решается обратная задача. Сначала по результатам измерения радионавигационных параметров вычисляются прямоугольные координаты  $X, Y, Z$ , а затем вычисляются геодезические координаты  $B, L, H$ . Для вычисления геодезических координат используются итеративные и прямые вычисления.

Введём для этого величину  $p$  – радиус окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения эллипсоида. На этой окружности находится точка, прямоугольные геоцентрические координаты которой  $X, Y, Z$  известны, а геодезические необходимо определить.

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos B. \quad (2.3.2)$$

Из этой формулы следует, что  $H = \frac{p}{\cos B} - N$ .

Подставим соотношение полуосей эллипсоида и его первого эксцентриситета  $b^2/a^2 = 1 - e^2$  в уравнение для  $Z$  выражений (2.3.1). В результате получим следующее уравнение:

$$Z = (N + H - e^2 N) \sin B = (N + H) \left( 1 - e^2 \frac{N}{N + H} \right) \sin B. \quad (2.3.3)$$

Разделив (2.3.3) на (2.3.2), получим

$$\frac{Z}{p} = \left( 1 - e^2 \frac{N}{N + H} \right) \operatorname{tg} B. \text{ Откуда } \operatorname{tg} B = \frac{Z}{p} \left( 1 - e^2 \frac{N}{N + H} \right)^{-1}. \quad (2.3.4)$$

Долготу  $L$  можно определить из выражения (2.3.5), полученного в результате деления первого уравнения (2.3.1) на второе.

$$\operatorname{tg} L = Y / X. \quad (2.3.5)$$

Как видно из приведённых выше выражений, только долгота  $L$  может быть рассчитана прямыми вычислениями. Высота над эллипсоидом  $H$  и геодезическая широта  $B$  вычисляются в результате итераций. Здесь рекомендуется следующий алгоритм итерационных вычислений:

1. Сначала вычисляется радиус  $p$ ,  $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .
2. Затем вычисляется первое приближение геодезической широты  $B_{(0)}$  по формуле  $\operatorname{tg} B_{(0)} = \frac{Z}{p} (1 - e^2)^{-1}$ .

3. По вычисленному первому приближению геодезической широты рассчитывают первое приближение радиуса кривизны в первом вертикале

$$N_{(0)} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 B_{(0)} + b^2 \sin^2 B_{(0)}}}.$$

4. Используя полученные величины, рассчитывается высота над эллипсоидом  $H = \frac{p}{\cos B_{(0)}} - N_{(0)}$ .

5. Вычисляется следующая величина геодезической широты  $B_{(1)}$  по формуле  $\operatorname{tg} B_{(1)} = \frac{Z}{p} \left( 1 - e^2 \frac{N_{(0)}}{N_{(0)} + H} \right)^{-1}$ .

6. Рассчитывается разность между значением геодезической широты, полученной на этапе 5, и значением, полученным на этапе 2. Эта

разность, взятая по абсолютной величине, сравнивается с заранее заданной величиной, характеризующей точность вычислений. Если разность больше характеристики точности, то значение геодезической широты, полученное на этапе 5, подставляется в формулу этапа 3, и процесс вычислений повторяется. Если разность становится меньше характеристики точности, то вычисления прекращаются.

Кроме итерационных способов вычислений геодезических координат по пространственным прямоугольным разработаны и так называемые прямые вычисления. Рассмотрим один такой способ, который не относится к особо точным.

$$B = \operatorname{arctg} \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad H = \frac{p}{\cos B - N},$$

где  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{Za}{pb}$ ,  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ .

Существует иной достаточно точный способ прямых вычислений геодезических координат [94]. Он сводится к последовательному вычислению следующих вспомогательных величин:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad E^2 = a^2 - b^2, \quad F = 54b^2Z^2, \quad G = r^2 + (1 - e^2)Z^2 - e^2E^2, \\ c = \frac{e^4 Fr^2}{G^3}, \quad s = \sqrt[3]{1 + c + \sqrt{c^2 + 2c}}, \quad P = \frac{F}{3\left(s + \frac{1}{s} + 1\right)^2 G^2}, \quad Q = \sqrt{1 + 2e^4 P},$$

$$r_0 = -\frac{Pe^2 r}{1 + Q} + \sqrt{\frac{1}{2}a^2\left(1 + \frac{1}{Q}\right) - \frac{P(1 - e^2)Z^2}{Q(1 + Q)} - \frac{1}{2}Pr^2}, \quad U = \sqrt{(r - e^2 r_0)^2 + Z^2},$$

$$V = \sqrt{(r - e^2 r_0)^2 + (1 - e^2)Z^2}, \quad Z_0 = \frac{b^2 Z}{aV},$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипсоида,  $e$  и  $e'$  – первый и второй его эксцентриситеты.

$$\text{Отсюда } H = U\left(1 - \frac{b^2}{aV}\right), \quad B = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z + e'^2 Z}{r}\right), \quad L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}.$$

В приведённых способах расчётов геодезическая долгота вычисляется в четвертном счёте. Чтобы перевести долготу в

полукруговой счёт, который используется в навигации, следует помнить, что

$$L = \arctg \frac{Y}{X}, \text{ если } X \geq 0; L = 180^0 + \arctg \frac{Y}{X}, \text{ если } X < 0, Y \geq 0; L = -180^0 + \arctg \frac{Y}{X}, \text{ если } X < 0, Y < 0.$$

В работе [94] изложен способ вычисления прямоугольных координат эллипсоида по геодезическим, в котором не участвуют малая полуось и второй эксцентриситет.

$$X = \frac{a \cos L}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} + H \cos L \cos B,$$

$$Y = \frac{a \sin L}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} + H \sin L \cos B, \quad Z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} + H \sin B.$$

## 2.4. ЭЛЛИпсоИД WGS 84

В судовождении используются три поверхности: физическая поверхность Земли (поверхность суши используется в качестве ориентиров для определения места судна), поверхность референц-эллипсоида (для изготовления навигационных карт и отсчёта геодезических координат) и поверхность геоида. В приёмниках спутниковых радионавигационных систем поверхности референц-эллипсоида и геоида используются также для отсчёта высот.

При создании эллипсоида WGS 84 Комитет, разрабатывавший геодезическую систему WGS 84, руководствовался рекомендациями IUGG и DMA. Как уже говорилось выше, за основу был принят общеземной эллипсоид системы Geodetic Reference System 1980 года (GRS 80). В соответствии с этим в качестве формы эллипсоида WGS 84 взят геоцентрический эквипотенциальный эллипсоид вращения. Определяющими параметрами эллипсоида выбраны большая полуось ( $a$ ), гравитационная постоянная Земли ( $GM$ ), нормированный второй гармонический гравитационный коэффициент ( $\bar{C}_{2,0}$ ) и угловая скорость вращения Земли ( $\omega$ ). За самым малым исключением эти параметры идентичны соответствующим параметрам GRS 80. Коэффициент формы для зональной гармоники второго порядка взят из модели гравитации Земли, принятой в системе WGS 84.

Эквипотенциальный эллипсоид, или, как ещё его называют, уровенный эллипсоид определяется эквипотенциальной поверхностью.

Если задан эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$ , то его эквипотенциальная поверхность обладает следующим свойством:  $U = U_0 = \text{const}$ , где  $U$  называется нормальным (теоретическим) гравитационным потенциалом. Эта функция согласно теореме Стокса-Пуанкаре является присущей только единственному эллипсоиду, имеющему размеры полуосей  $a$  и  $b$ , массу  $M$ , и угловую скорость вращения  $\omega$ . Она не зависит от плотности распределения масс в теле эллипсоида. Помимо перечисленных выше параметров эллипсоид может быть задан большой полуосью  $a$ , гравитационной постоянной Земли  $GM$ , угловой скоростью вращения Земли  $\omega$  и нормированным гравитационным вторым гармоническим коэффициентом  $\bar{C}_{2,0}$  гравитационного потенциала. Задание эллипсоида этими параметрами предоставляет более простой и универсальный подход к описанию опорной системы для создания карт и создания модели нормального (теоретического) гравитационного поля на поверхности Земли и в околоземном пространстве, что крайне необходимо для расчётов траекторий навигационных спутников.

Традиционная теория эквипотенциального эллипсоида рассматривает нормальный (теоретический) гравитационный потенциал в виде гармонической функции вблизи поверхности эллипсоида без учёта атмосферы. Референц-эллипсоид определяется всей массой Земли, включая атмосферу. Причём, атмосфера рассматривается как некий дополнительный слой поверхности эллипсоида. Нормальное (теоретическое) гравитационное поле на поверхности Земли в околоземном пространстве может поэтому рассчитываться без необходимости учёта изменения плотности атмосферы. Если же возникает необходимость учёта влияния атмосферы, то в этом случае можно применять поправки. Такой путь уже стал традиционным в геофизике при учёте влияния атмосферы на рефракцию или в измерениях электронной плотности. Схожий подход применяется и для гравитационных параметров, где применяются поправки за атмосферу для измерения поля гравитации Земли. Впервые поправки за атмосферу были применены при создании эллипсоида GRS 80. Эквипотенциальный эллипсоид WGS 84 также снабжён аналогичными поправками, которые несколько отличаются от поправок GRS 80. Следует заметить, что предыдущие системы WGS поправок за атмосферу не имели. Внесённое изменение в определении эллипсоида вызывало создание иных способов расчёта гравитационных аномалий.



**Определение фундаментальных констант.** Большая полуось выбрана в качестве главной формообразующей величины эллипсоида WGS 84. Её одобренная величина и средняя квадратическая погрешность равны

$$a = 6378137 \pm 2 \text{ метра.}$$

Она равна большей полуоси эллипсоида GRS 80 и на два метра больше, чем у эллипсоида WGS 72. Большая полуось GRS 80 измерялась за период времени с 1976 по 1979 год с применением лазерных и доплеровских измерений, радиолокационной и лазерной альтиметрии. Эти измерения и их обработка показали, что лучшая оценка лежит между 6378134,5 м и 6378140 м. Более поздние измерения показали, что значение большей полуоси эллипсоида WGS 84 находится в пределах от 6378134,9 м до 6378137,0 м. Поэтому было принято решение оставить без изменения утверждённое значение большой полуоси, равной 6378137,0 м.

Величина гравитационной постоянной Земли также является одной из четырёх фундаментальных констант эллипсоида WGS 84. Она принята равной

$$GM = (3986005 \pm 0,6) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

Эта величина учитывает массу атмосферы и основана на ряде измерений. Виды измерений и полученные с их помощью результаты оценок GM таковы:

радиоизмерения сигналов спутников .....  $(3986005,0 \pm 0,5) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  
лазерные измерения расстояний до Луны ...  $(3986004,6 \pm 0,3) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  
лазерные измерения расстояний до спутников ...  $(3986004,4 \pm 0,2) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ .

Принятая гравитационная постоянная Земли для эллипсоида WGS 84 получена в результате тщательного статистического анализа этих данных. Наиболее представительной величиной из приведённых выше является  $GM = (3986004,6 \pm 0,3) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ , которую после округления приняли в качестве фундаментальной. Более поздние и более точные измерения дали величину  $GM = 3986004,4 \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ . Она незначительно отличается от принятой для GRS 80 величины, принятой на международном уровне (см. табл. 5).

Для целого ряда приложений WGS 84 необходима величина гравитационной постоянной Земли, которая не учитывает массу земной атмосферы, или величина гравитационной постоянной земной атмосферы ( $GM_A$ ), а также величина универсальной гравитационной постоянной ( $G$ ). До 1984 года величина универсальной гравитационной постоянной принималась равной  $6,672 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кгс}^2$ ,

как это рекомендовалось Международным астрономическим союзом (IAU) [14]. Для расчетов, связанных с эллипсоидом WGS 84, была принята величина, рекомендованная Международной ассоциацией по геодезии (IAG), равная  $6,673 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кгс}^2$  [37]. Используя последнюю, а также рассчитанную IUGG массу земной атмосферы ( $M_A$ ), была получена гравитационная постоянная земной атмосферы для эллипсоида WGS 84

$$GM_A = (3,5 \pm 0,1) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

Гравитационная постоянная Земли без учета земной атмосферы ( $GM$ ) для WGS 84 была рассчитана вычитанием из  $GM$  величины  $GM_A$

$$GM = (3986001,5 \pm 0,6) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

Метод определения величины  $GM_A$ , подразумевающий конкретный набор атмосферных поправок к гравитации, состоит в сравнении величин теоретической гравитации, полученной по  $GM$ , которая учитывает массу атмосферы Земли, с величинами теоретической гравитации, которые не учитывают атмосферу. Обозначим через  $\bar{\gamma}, \gamma_e, \gamma_p$  среднюю величину теоретической гравитации, теоретическую гравитацию на экваторе и теоретическую гравитацию на полюсе соответственно. Тогда

$$\bar{\gamma} = \gamma_e \left( 1 + \frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{3}k + \frac{59}{360}e^4 + \frac{5}{18}e^2k + \frac{2371}{15120}e^6 + \frac{259}{1080}e^4k + \frac{270229}{1814400}e^8 + \frac{9623}{45360}e^6k \right), \quad \gamma_e = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0} \right), \quad \gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0} \right).$$

Величины  $e, e', k, m, q_0, q'_0$  являются вторичными. Они выводятся из фундаментальных параметров эллипсоида. Они будут описаны немного ниже. Сравнение происходит между величинами  $\bar{\gamma}, \gamma_e, \gamma_p$  и  $\bar{\gamma}', \gamma_e', \gamma_p'$ , где последние являются величинами, вычисленными по значению  $GM_A$  с шагом 0,01 в пределах от  $3,5 \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$  до  $3,6 \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ . Таблица с вычисленными значениями разностей помещена в официальных описаниях системы геодезических координат WGS 84. Здесь следует заметить, что величина  $GM_A = 3,54 \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$  вызывает разность в 0,87 миллигал в теоретической гравитации.

Гравитационная постоянная Земли без учёта атмосферы ( $GM'$ ) вычисляется путём вычитания  $GM_A$  из  $GM$ . В результате для WGS 84 гравитационная постоянная Земли без учёта атмосферы принята равной  $(3986001,5 \pm 0,6) \times 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ .

Другим фундаментальным параметром эллипсоида WGS 84 является второй нормализованный зональный гравитационный коэффициент, величина и средняя квадратическая погрешность которого равны

$$\bar{C}_{2,0} = (-484,16685 \pm 0,0013) \times 10^{-6}.$$

Его величина получена из зонального гармонического коэффициента нормального геопотенциала притяжения второй степени  $J_2$ , принятого в системе GRS 80 равным  $J_2 = 108263 \times 10^{-8}$ , используя соотношение, приведенное в предыдущем параграфе. Как принятый  $J_2$  в GRS 80, так и  $\bar{C}_{2,0}$  в WGS 84 не учитывают постоянную приливных деформаций. Эти деформации обозначаются через  $\delta J_2$  и  $\delta \bar{C}_{2,0}$  и составляют:  $\delta J_2 = 9,3 \times 10^{-9}$ , что эквивалентно

$$\delta \bar{C}_{2,0} = -4,16 \times 10^{-9}.$$

Последнюю величину следует прибавить к  $\bar{C}_{2,0}$ , чтобы учесть постоянную приливных деформаций.

Угловая скорость вращения Земли ( $\omega$ ) используется в качестве фундаментальной константы эллипсоида WGS 84, и ее точное значение играет важную роль в навигации и геодезии. Для эллипсоида WGS 84 величина угловой скорости и ее средняя квадратическая погрешность приняты следующими:

$$\omega = (7292115 \pm 0,15) \times 10^{-11} \text{ рад/с}.$$

Понятно, что скорость вращения Земли меняется во времени. Приведенное выше значение используется IAG в качестве среднего, от которого исчисляются флуктуации. Для большинства приложений в геодезии и в навигации этого значения угловой скорости достаточно. Необходимо помнить, что для определения времени IAU применяют несколько иное значение угловой скорости вращения Земли

$$\omega' = 7292115,1467 \times 10^{-11} \text{ рад/с},$$

которое применялось в GRS 67 в связи с новым определением времени. Эта величина рассчитана по следующей формуле:

$$\omega' = \frac{2\pi}{86400} \frac{s + 86400 - \mu/1500}{s},$$

где  $s = 31556925,9747$ ,  $\mu = \rho \cos \varepsilon - 12,473'' \sin^2 \varepsilon$ ,  $\rho = 5025,64''$ ,  
 $\varepsilon = 23^\circ 27' 08,26'' = 84428,26''$ .

Для расчета высокоточных спутниковых эфемерид, в высокоточной навигации, в позиционировании, в высокоточной геодезии применяется

более сложное представление угловой скорости Земли:  $\omega^* = \omega' + m$ , где  $m$  – новая угловая скорость прецессии прямого восхождения,

$$m = (7,086 \times 10^{-12} + 4,3 \times 10^{-15} T_U) \text{ рад/с} ,$$

где  $T_U$  – юлианские столетия от эпохи J2000,  $T_U = d_U/36525$ , где  $d_U$  = числу дней в масштабе универсального времени ( $UT$ ) от юлианской даты ( $JD$ ) 2451545,0  $UT1$ , принимаемой величины  $\pm 0,5, \pm 1,5, \pm 2,5, \dots$  ,

$$d_U = JD - 2451545.$$

Поэтому для высокоточных применений системы Навстар GPS при описании эллипсоида WGS 84 используется следующее значение:

$$\omega^* = (7292115,8553 \times 10^{-11} + 4,3 \times 10^{-15} T_U) \text{ рад/с} .$$

На юлианском исчислении времени надо остановиться несколько подробнее, так как такой способ представления времени широко распространен в современных СРНС.

Дело в том, что полное обозначение заданных моментов времени с помощью традиционных систем отсчета не всегда удобно и требует использования как минимум четырех чисел: год, месяц, число и часы с десятичными долями, поэтому на практике применяют систему отсчета, называемую юлианским периодом, удобство которого состоит, в частности, в том, что счет текущего времени ведется в днях (средних солнечных сутках с десятичными долями). Все дни в этом периоде пронумерованы по порядку независимо от принятой календарной системы, номера года, месяца и т.д.

Счет дней, называемых юлианскими днями ( $JD$ ), ведется от полудня 1 января 4713 г. до н.э. (начало юлианского периода) до заданного момента времени. Общая длительность юлианского периода составляет 7980 лет. Юлианское столетие содержит 36525 средних солнечных суток. Любой момент времени в этой системе отсчета выражается числом, в котором целая часть – это число юлианских дней, прошедших до последнего среднего гринвичского полудня, а дробная часть – это интервал времени в долях средних солнечных суток ( $T_C$ ), прошедший от этого полудня до рассматриваемого момента времени.

Пересчет даты общепринятого календаря в юлианскую дату производят по справочным таблицам или по расчетным формулам. Так для периода 1990–1994 гг. пересчет заданного момента всемирного времени  $UT$  к юлианской дате  $JD$  можно выполнить по формуле

$$t_{JD} = 2440000 + g_{kl} + n + t_{UT} - 0,5 ,$$

где  $t_{UT}$  – часы, минуты и секунды всемирного времени, соответствующие заданному моменту времени и пересчитанные в доли  $T_C$ ;  $k, l, n$  – год, месяц и число по общепринятому календарю;

$g_{kl}$  – это число, определяемое на начало каждого месяца этого периода по соответствующим таблицам. Ниже в качестве примера приведены значения  $g_{kl}$  на начало каждого месяца 1994 года [39]:

январь 9353	апрель 9443	июль 9534	октябрь 9626
февраль 9384	май 9473	август 9565	ноябрь 9657
март 9412	июнь 9504	сентябрь 9596	декабрь 9687

Например, в юлианском периоде момент московского времени 9 часов 48 минут 1 января 1985 года обозначается числом: 2446066,783333  $JD$ .

Для удобства начало отсчета юлианских дней иногда смещают на момент времени (эпоху), например, ноль часов всемирного времени 1 января 1900 г. ( $JD = 2425020,0$ ); на полночь 17 ноября 1858 г., смещая при этом начало отсчета вперед на 2400000,5  $JD$  (это начало так называемого модифицированного юлианского периода, дни которого обозначают  $MJD$ ); на полдень 1 января 2000 г. ( $JD = 2451545$ ), обозначаемый J2000 или J20-00.

В предыдущем параграфе уже упоминалась весьма значительная нестабильность угловой скорости вращения Земли (см. табл. 6б). С 1967 года была зарегистрирована наименьшая угловая скорость, равная  $7292144,832 \times 10^{-11}$  рад/с, а наибольшая –  $7292155,099 \times 10^{-11}$  рад/с.

**Вторичные геометрические параметры.** Помимо перечисленных выше констант для описания эллипсоида WGS 84 применяется еще целый ряд других, одни из которых выводятся из фундаментальных констант, другие же являются общеземными, полученными различными авторитетными международными организациями. При создании геодезической системы WGS 84 Комитету пришлось тщательно проанализировать опубликованные параметры. Некоторые из них пришлось уточнить и дополнить значащими цифрами для достижения требуемой точности, а другие пришлось определять заново. Полный список параметров и их значений, принятых для системы WGS 84, представлен в Приложении 2.

К числу наиболее используемых вторичных параметров эллипсоида WGS 84 относится величина первого эксцентриситета  $e$ .

Этот параметр участвует практически во всех вычислениях, связанных с геометрией эллипсоида. Для определения первого эксцентриситета WGS 84 применялся следующий способ. Расчёты велись по формуле

$$e^2 = -\frac{3}{\sqrt{5}} \bar{C}_{2,0} + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \frac{e^3}{2q_0}, \quad (2.4.1)$$

где  $2q_0 = [1 + \frac{3}{e'^2}] \arctg(e') - \frac{3}{e'}$ ,  $e' = e\sqrt{1-e^2}$ .

Из формулы (2.4.1) величина первого эксцентриситета в явном виде не выражается. Поэтому значение  $e$  отыскивается численным решением этого уравнения методом последовательных приближений.

Только после этого рассчитываются другие геометрические параметры эллипсоида, а именно: величина малой полуоси ( $b$ ) и первое сжатие ( $f$ ).

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad b = a(1-f), \quad f = 1 - \sqrt{1-e^2}, \quad f = \frac{a-b}{a}.$$

Отсюда отыскиваются линейный эксцентриситет ( $E$ ) и полярный радиус кривизны ( $C$ ).

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad E = ae, \quad C = \frac{a^2}{b}, \quad C = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Для построения навигационных карт широко используется длина четверти дуги меридиана эллипсоида ( $Q$ ), то есть расстояние по меридиану от экватора до полюса. Это расстояние выражается интегралом следующего вида:

$$Q = C \int_0^{\pi/2} \frac{dB}{\sqrt{(1 + e'^2 \cos^2 B)^3}},$$

где  $B$  – геодезическая широта.

Для вычисления  $Q$  приведённый выше интеграл разлагается в ряд

$$Q = C \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 - \frac{43659}{65536} e'^{10} + \dots \right].$$

Понятно, что расстояние по меридиану от полюса до полюса составит  $2Q$ , а общая длина меридиана будет равной  $4Q$ . Длина экватора определится как  $2\pi a$ .

Другими важными геометрическими характеристиками эллипсоида WGS 84 являются величины его средних радиусов. В настоящее время существует несколько видов средних радиусов и способов их расчётов. Среди них обычно первым средним радиусом ( $R_1$ ) считается средний радиус трёхосного эллипсоида. Для случая двухосного земного эллипсоида, которым является эллипсоид WGS 84, величина этого радиуса рассчитывается как среднее арифметическое всех трёх полуосей, из которых две одинаковы и равны большой полуоси  $a$ .

$$R_1 = \frac{a + a + b}{3} = a\left(1 - \frac{f}{3}\right) = \frac{1}{3}a[2 + \sqrt{1 - e^2}].$$

Второй средний радиус ( $R_2$ ) относится к сфере, имеющей одинаковую с эллипсоидом WGS 84 площадь поверхности. Этот радиус определяется интегралом

$$R_2 = C \sqrt{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos B}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^2} dB},$$

который для получения расчётной формулы разлагается в ряд

$$R_2 = C \left[ 1 - \frac{2}{3}e'^2 + \frac{26}{45}e'^4 - \frac{100}{189}e'^6 + \frac{7034}{14175}e'^8 - \frac{220652}{467775}e'^{10} + \dots \right].$$

В практике применения эллипсоида WGS 84 для расчёта  $R_2$  применяется иногда другая формула

$$R_2 = \frac{1}{2}a \sqrt{2 + \frac{1 - e^2}{e} \ln \frac{1 + e}{1 - e}}.$$

Средний радиус кривизны эллипсоида WGS 84, соответствующий радиусу сферы равного объёма ( $R_3$ ) вычисляется по следующим формулам:

$$R_3 = \sqrt[3]{a^2 b} = a \sqrt[3]{1 - e^2}.$$

Площадь поверхности эллипсоида WGS 84 ( $S$ ) отыскивается по формулам

$$S = \pi a^2 \left( 2 + \frac{1 - e^2}{e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) = 4\pi R_2^2.$$

Объём эллипсоида можно рассчитать по формулам

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{1 - e^2} = \frac{4}{3}\pi R_3^3.$$

Помимо перечисленных выше радиусов в практике расчётов используются средний квадратический радиус, средний

гармонический радиус, который рассчитывается по следующей формуле:

$$R_g = \frac{3ab}{a + 2b}.$$

В расчётах, связанных с геометрией эллипсоида WGS 84 довольно часто используются константы, не имеющие собственных названий. Они вычисляются заранее и приводятся в списке параметров эллипсоида. В данном пособии эти константы обозначены так, как их принято обозначать в англоязычной литературе по геодезии и СРНС Навстар GPS.

$$m' = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{e^2}{2 - e^2}, \quad n' = \frac{a - b}{a + b} = \frac{f}{2 - f},$$

$$q'_o = 3\left(1 + \frac{1}{e'^2}\right)\left(1 - \frac{1}{e'} \operatorname{arctg} e'\right) - 1.$$

**Физические константы.** После того, как были получены величины четырёх фундаментальных констант и величина первого эксцентриситета, стало возможным определение физических параметров эллипсоида WGS 84. К их числу относится теоретический (нормальный) потенциал гравитационного поля ( $U_0$ ). Он рассчитывается следующим образом:

$$U_0 = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg}(e') + \frac{1}{3} \omega^2 a^2,$$

или

$$U_0 = \frac{GM}{b} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e'^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{3} m \right],$$

где  $GM$  – гравитационная постоянная Земли,  $E$  – линейный эксцентриситет,  $e'$  – второй эксцентриситет,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $a$  – большая полуось эллипсоида WGS 84,  $b$  – малая полуось эллипсоида,  $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ .

Зональные гравитационные коэффициенты  $J_2, J_4, J_6, \dots$  являются константами сферических гармонических функций, которые описывают теоретический (нормальный) гравитационный потенциал  $V'$

$$V' = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin \phi_g) \right],$$

где  $r$  – радиус-вектор,  $\phi_g$  – геоцентрическая широта.



Теоретический гравитационный потенциал  $V$  представляет собой теоретический потенциал гравитации ( $U$ ), из которого вычитается потенциал центробежной силы, образующийся вследствие вращения Земли. Коэффициент  $J_2$  для эллипсоида WGS 84 рассчитывается по величине  $\bar{C}_{2,0}$  с помощью выражения  $J_2 = -\sqrt{5} \times \bar{C}_{2,0}$ . Общее выражение для вычисления других коэффициентов записывается следующим образом:

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2}\right).$$

Используя это выражение, получим формулы для расчёта зональных гармонических коэффициентов при  $n$  от 2 до 5.

$$\begin{aligned} n=2, \quad J_4 &= -\frac{3e^4}{35} \left(-1 + 10 \frac{J_2}{e^2}\right); & n=3, \quad J_6 &= -\frac{e^6}{21} \left(-2 + 15 \frac{J_2}{e^2}\right); \\ n=4, \quad J_8 &= -\frac{e^8}{33} \left(-3 + 20 \frac{J_2}{e^2}\right); & n=5, \quad J_{10} &= -\frac{3e^{10}}{143} \left(-4 + 25 \frac{J_2}{e^2}\right). \end{aligned}$$

Если возникает необходимость вычисления нормализованных коэффициентов  $\bar{C}_{n,0}$ , то их можно получить, используя выражение

$$\bar{C}_{n,0} = -\frac{J_n}{\sqrt{2n-1}},$$

или 
$$\bar{C}_{2n,0} = (-1)^n \frac{3e^{2n}}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)(4n+1)}} \left(1 - n - \sqrt[3]{5^3 n} \frac{\bar{C}_{2,0}}{e^2}\right).$$

Теоретическая гравитация на экваторе и на полюсе определяются следующими выражениями:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0}\right), \quad \gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0}\right),$$

где

$$q'_0 = 3\left(1 + \frac{1}{e'^2}\right)\left(1 - \frac{1}{e'} \arctg e'\right) - 1, \quad q_0 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{e'^2}\right) \arctg e' - \frac{3}{e'}\right].$$

Для некоторых расчётов используется так называемое гравитационное сжатие  $f^*$ , которое определяется формулой

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}.$$

Общее выражение для средней величины теоретической гравитации на поверхности эллипсоида записывается следующим образом:

$$\bar{\gamma} = \gamma_e \left( 1 + \frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{3}k + \frac{59}{360}e^4 + \frac{5}{18}e^2k + \frac{2371}{15120}e^6 + \frac{259}{1080}e^4k + \frac{270229}{1814400}e^8 + \frac{9623}{45360}e^6k \right), \text{ где } k = \frac{b\gamma_p - a\gamma_e}{a\gamma_e}.$$

Массу эллипсоида WGS 84 ( $M$ ) можно определить из гравитационной постоянной Земли ( $GM$ ), если известна универсальная постоянная гравитации ( $G$ ),  $M = GM / G$ . Величина  $G$ , одобренная для использования в расчётах, связанных с эллипсоидом WGS 84, равна  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$ .

Скорость света в вакууме и средняя квадратическая погрешность ее определения равны

$$c = (299792458 \pm 1,2) \text{ м/с}.$$

Это значение получено IAG и IAU и было одобрено комитетом для использования в расчетах в системе Навстар GPS.

Динамическая эллиптичность  $H$ , которая отражает постоянную составляющую прецессии вследствие движения Земли относительно Солнца и Луны, необходима для определения главных моментов инерции Земли  $A$ ,  $B$  и  $C$ .  $H$  – это коэффициент, присутствующий в формулах расчета прецессии точки весеннего равноденствия, который хорошо известен из астрономических наблюдений. IAG в 1983 году официально опубликовал список геодезических констант, среди которых динамическая эллиптичность представлена через момент инерции таким образом:  $1/H = 305,4413 \pm 0,0005$  [35].

Моменты инерции Земли  $A$ ,  $B$  и  $C$  относительно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно связаны с коэффициентами гравитации  $J_{2,0}$  и  $J_{2,2}$  формулами

$$J_{2,0} = \frac{1}{Ma^2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right), \quad J_{2,2} = \frac{1}{4Ma^2} (A - B),$$

где  $a$  – большая полуось эллипсоида,  $M$  – масса Земли.

Моменты инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно определить либо исходя из геометрических соображений, используя только фундаментальные константы  $a$ ,  $GM$ ,  $\bar{C}_{2,0}$ ,  $\omega$  эллипсоида, либо исходя из соображений динамики, используя коэффициенты гравитационного поля Земли.

Геометрический подход позволит получить более простые аналитические выражения, если использовать не нормализованные коэффициенты  $J_{n,m}$  и  $C_{n,m}$ . Вследствие симметрии эллипсоида вращения  $A = B$ . Отсюда следует

$$J_{2,0} = \frac{1}{Ma^2}(C - A), \quad J_{2,2} = 0,$$

где  $C$  – момент инерции относительно оси  $Z$ ,  $A$  – момент инерции относительно любой оси, лежащей в плоскости экватора.

Исходя из геометрических соображений, можно определить только два момента инерции  $A$  и  $C$ .

$$C = \frac{2}{3}Ma^2 \left[ 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5m}{2f}} - 1 \right], \quad A = C - Ma^2 J_{2,0},$$

где  $M$  – масса Земли,  $f$  – сжатие эллипсоида,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $b$  – меньшая полуось эллипсоида,  $GM$  – гравитационная постоянная Земли,  $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ .

Следует заметить, что в расчётах довольно часто вместо моментов инерции применяются их разности. Таким образом, геометрический подход определяет разность  $C - A = Ma^2 J_{2,0}$ .

Исходя из геометрического подхода, можно иначе определить динамическую эллиптичность  $H$

$$H = \frac{C - A}{C}.$$

Динамический подход к определению моментов инерции позволяет получить следующие формулы:

$$C_{2,0} = \frac{1}{Ma^2} \left( \frac{A + B}{2} - C \right), \quad C_{2,2} = \frac{1}{4Ma^2} (B - A), \quad C_{n,m} = -J_{n,m}.$$

Отсюда

$$\frac{C - A}{Ma^2} = -(C_{2,0} - 2C_{2,2}), \quad \frac{C - B}{Ma^2} = -(C_{2,0} + 2C_{2,2}), \quad \frac{B - A}{Ma^2} = 4C_{2,2}.$$

$$C - A = -Ma^2(C_{2,0} - 2C_{2,2}), \quad C - B = -Ma^2(C_{2,0} + 2C_{2,2}), \quad B - A = 4Ma^2 C_{2,2}.$$

Величину момента инерции  $C$  можно вычислить, используя формулу для динамического сжатия  $H$ . Величины  $C$  и  $H$  находятся между собой в следующем соотношении:

$$\frac{C}{Ma^2} = -\frac{C_{2,0}}{H}, \quad C = -Ma^2 \frac{C_{2,0}}{H}.$$

После подстановок получим выражения для вычисления моментов инерции Земли при динамическом подходе к их определению.

$$A = C + Ma^2(C_{2,0} - 2C_{2,2}), \quad A = Ma^2\left[C_{2,0}\left(1 - \frac{1}{H}\right) - 2C_{2,2}\right],$$

$$B = C + Ma^2(C_{2,0} + 2C_{2,2}), \quad B = Ma^2\left[C_{2,0}\left(1 - \frac{1}{H}\right) + 2C_{2,2}\right],$$

$$\frac{A}{Ma^2} = C_{2,0}\left(1 - \frac{1}{H}\right) - 2C_{2,2}, \quad \frac{B}{Ma^2} = C_{2,0}\left(1 - \frac{1}{H}\right) + 2C_{2,2}.$$

Чаще всего коэффициенты гравитационного поля Земли в вычислениях присутствуют в нормализованном виде. Поэтому полезно будет записать формулы, отражающие соотношения коэффициентов обычного вида и нормализованных коэффициентов.

$$\bar{C}_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{5}}C_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{5}}J_{2,0}, \quad \bar{C}_{2,2} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}C_{2,2} = -2\sqrt{\frac{3}{5}}J_{2,2}.$$

Численные значения основных параметров эллипсоида WGS 84 сведены в таблицу Приложения 2.

## 2.5. ФОРМУЛА ГРАВИТАЦИИ WGS 84

Эллипсоид WGS 84 рассматривается как геоцентрический эквипотенциальный эллипсоид вращения. Эквипотенциальным эллипсоидом считается такое геометрическое тело, в каждой точке поверхности которого гравитационный потенциал имеет одну и ту же величину. Таким образом, тот или иной эллипсоид вращения можно задать эквипотенциальной поверхностью данной функции потенциала или теоретическим (нормальным) гравитационным потенциалом. Такой теоретический гравитационный потенциал может быть однозначно определен независимо от распределения плотности масс в теле Земли, используя четыре независимые фундаментальные константы, относящиеся к главным параметрам эллипсоида. Как было сказано выше, для WGS 84 такими являются: большая полуось, второй нормализованный гармонический зональный гравитационный коэффициент, угловая скорость вращения Земли и гравитационная постоянная Земли.

Теоретическая гравитация ( $\gamma$ ) и градиент потенциала ( $U$ ) задаются на поверхности эллипсоида формулой Сомильяны [35]

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \phi + b\gamma_p \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}, \quad (2.5.1)$$

где  $a$ ,  $b$  – большая и меньшая полуоси эллипсоида соответственно,  $\gamma_e$ ,  $\gamma_p$  – теоретическая гравитация на экваторе и на полюсах соответственно,  $\phi$  – геодезическая широта. Как уже отмечалось ранее, эквипотенциальная поверхность служит не только в качестве опорной поверхности геометрической формы Земли, но и приводит к простому математическому выражению теоретической (нормальной) гравитации на поверхности эллипсоида. Формула (2.5.1) с ее обозначениями фигурирует в официальных документах министерства обороны США и в американской литературе по геодезии, а также в технических описаниях многих профессиональных приемоиндикаторов системы Навстар GPS. Она полностью идентична формуле (1.2.20).

В качестве официальной формулы расчета гравитации для эллипсоида WGS 84 принята следующая упрощенная формула Сомильяны [35]:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}, \quad (2.5.2)$$

где  $e^2$  – квадрат первого эксцентриситета эллипсоида WGS 84,

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1.$$

Формулу (2.5.2) принято называть формулой гравитации системы WGS 84. Таким образом, эквипотенциальный эллипсоид служит не только в качестве опорной поверхности для определения широты, долготы и возвышения или в качестве геометрической модели Земли, но и в качестве опорной поверхности, относительно которой отсчитывается нормальная гравитация Земли.

Формула (2.5.2) была выбрана Комитетом по разработке WGS 84 из-за большего удобства вычислений по сравнению с формулой (2.5.1). Интересно сравнить формулу (2.5.2) с аналогичной формулой (1.2.21). Здесь следует напомнить физический смысл  $\gamma$  и  $\gamma_e$ .  $\gamma$  – это ускорение пробной единичной массы вследствие теоретической гравитации.  $\gamma_e$  – это ускорение, которое приобретает единичная

пробная масса на экваторе эллипсоида WGS 84 вследствие теоретической гравитации.

Для практических расчетов применяется нижеследующая формула, которая получена из формулы (2.5.2) после подстановки в нее констант эллипсоида WGS 84 (см. Приложение 2):

$$\gamma = \frac{9,7803267714(1 + 0,00193185138639 \sin^2 \phi)}{\sqrt{1 - 0,00669437999013 \sin^2 \phi}} \text{ (м/с}^2\text{)} \quad (2.5.3)$$

Чтобы перейти к внесистемной единицы измерения гравитации миллигал, следует помнить, что  $1 \text{ мГал} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$ .

В тех случаях, когда геодезическая высота ( $h$ ) мала, то нормальную гравитацию над поверхностью эллипсоида ( $\gamma_h$ ) можно найти из следующего усеченного ряда Тейлора:

$$\gamma_h = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2. \quad (2.5.4)$$

Чаще всего для конкретных вычислений нормальной гравитации над поверхностью эллипсоида (с положительным направлением вниз по нормали к поверхности эллипсоида) используется ряд Тейлора в другой записи.

$$\gamma_h = \gamma \left[ 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right], \quad (2.5.5)$$

где  $a$  – большая полуось эллипсоида,  $f$  – сжатие эллипсоида,  $\phi$  – геодезическая широта,  $\gamma$  – нормальная гравитация эллипсоида на широте  $\phi$ ,

$$m = \omega^2 a^2 b / (GM).$$

## 2.6. МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ WGS 84

В состав каждой современной геодезической системы обязательно входит модель гравитационного поля Земли. В рассматриваемой системе WGS 84 принята и используется так называемая Модель гравитационного поля Земли (Earth Gravitational Model – EGM) 1996 года – EGM96. В официальных изданиях, посвященных описанию геодезической системы координат WGS 84 (например [35, 89, 92]), описание модели гравитационного поля Земли, используемой в WGS 84, носит сугубо прикладной характер и имеет свою систему обозначений. Эти обозначения стали уже установившимися в

англоязычной литературе по GPS. Поэтому в данном параграфе применяются обозначения и терминология, принятые в официальной американской литературе.

Модель EGM96 представляет собой математическое выражение гравитационного потенциала ( $V$ ) в виде ряда по сферическим функциям (гармоникам). Полная модель WGS 84 EGM96 содержит все гармоники до 360 степени и до 360 порядка и включает в себя 130317 коэффициентов. Полное описание модели EGM96 можно найти в источнике [95]. В зависимости от сложности задачи, решаемой с участием модели гравитации Земли, применяются более простые модели, вытекающие из EGM96 и содержащие меньшее количество сферических функций. Так, например, для решения задач, связанных влиянием гравитационного поля Земли на возмущения орбит спутников СРНС Навстар GPS и предвычислением параметров их орбит, используется упрощенная модель EGM96, содержащая гармоники до 70 степеней и порядков. Эту версию модели обозначают EGM96S. Для нужд наземной геодезии чаще всего применяется более простая модель. Её нормированные коэффициенты для гармоник до 18 степеней и порядков можно найти в официальном издании NIMA [89, 92].

Другая версия модели EGM96 нашла применение в профессиональных приёмниках СРНС Навстар GPS, которые одновременно могут применяться в геодезии и в навигации. Она вбирает систему гармоник до 41 степени и порядка. Её коэффициенты получены методом наименьших квадратов из матрицы нормальных уравнений, каждое из которых является результатом доплеровских измерений сигналов спутников, лазерных измерений дальностей до спутников, гравиметрических измерений на поверхности Земли, измерений спутниковой радиолокационной альтиметрии и из наблюдений за сигналами спутников системы Навстар GPS. Вклад коэффициентов  $n = m = 41$  ( $n$  – степень гармоники,  $m$  – порядок гармоники) в EGM заключается в том, что они позволяют сформировать избыточное поле средней гравитационной аномалии по всей поверхности Земли в квадратах  $1^\circ \times 1^\circ$ . Коэффициенты от  $n = 42$  при  $m = 0$  до  $n = m = 180$  определяются независимо с использованием гармонического анализа по данным избыточного поля средней гравитационной аномалии. Данная модель до 41 гармоники закладывается в постоянную память приемоиндикаторов системы Навстар GPS. Более простые судовые приемоиндикаторы СРНС Навстар GPS использует упрощенную EGM96, вбирающую гармоники до 18-го порядка. Коэффициенты такой модели можно получить из [89].

Приёмоиндикаторы, предназначенные для любительского использования, содержат самую простую модель EGM96 в виде матрицы, из которой значения гравитационного потенциала выбирается с помощью линейного интерполирования.

Модель гравитационного поля Земли, учитывающая гармоники более высокого порядка и степени, как правило, не используется в гражданских приёмоиндикаторах, однако государственные геодезические службы могут предоставлять такую информацию заинтересованным организациям, например, для решения геодезических задач высокой точности. Ранее такую информацию предоставляли на магнитных носителях. В настоящее время ее можно получить по сетям Интернет. WGS 84 EGM96 до  $n = m = 180$  используется при вычислении возвышений геоида над референц-эллипсоидом WGS 84, для определения компонент возмущений гравитационного поля Земли и поля средней гравитационной аномалии. Модель EGM96  $n = m = 180$  предоставляется потребителям в нормализованном виде. Модель EGM96  $n = m = 180$  доступна как в нормализованном, так и в обычном виде.

В гравитационной модели Земли, применяемой в WGS 84, гравитационный потенциал ( $W$ ) представляется в виде суммы функции гравитационного потенциала ( $V$ ) и потенциала центробежного ускорения ( $\Phi$ ), вызванного вращением Земли,

$$W = V + \Phi. \quad (2.6.1)$$

Потенциал центробежного ускорения определяется нижеследующим выражением:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2), \quad (2.6.2)$$

где  $\omega$  – средняя угловая скорость вращения Земли, принятая для эллипсоида WGS 84 (см. Приложение 2),  $X$  и  $Y$  – геоцентрические координаты прямоугольной системы координат WGS 84 данной точки пространства.

Так как в модели EGM96 сферические функции представлены в виде полиномов Лежандра, то необходимо кратко остановиться на их свойствах. Полином Лежандра  $P_m(z)$  порядка  $m$  можно определить общей формулой Родрига

$$P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m (z^2 - 1)^m}{dz^m}.$$

В качестве примера запишем несколько первых полиномов



$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), P_3(z) = \frac{1}{2}(-3z + 5z^3).$$

Общую формулу можно представить в другом виде

$$P_m(z) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{(2m-2r)!}{2^m r!(m-r)!(m-2r)!} z^{m-2r}.$$

Полином Лежандра любого порядка вычисляется следующего рекуррентного соотношения:

$$(m+1)P_{m+1}(z) - (2m+1)zP_m(z) + mP_{m-1}(z) = 0.$$

Полиномы Лежандра обладают рядом свойств, благодаря которым они успешно применяются для описания гравитационного поля Земли. Полином Лежандра может быть чётной или нечётной функцией в зависимости от того чётна или нечётна его степень. Поэтому  $P_m(-z) = (-1)^m P_m(z)$ . На границах интервала  $[-1, 1]$  полином Лежандра принимает следующие значения:  $P_m(1) = 1, P_m(-1) = (-1)^m$ . Для любого  $z$  из промежутка  $(-1, 1)$  при  $m > 0$   $|P_m(z)| < 1$ . При больших  $m$  справедлива следующая оценка:

$$|P_m(z)| < \sqrt{\frac{\pi}{2m(1-z^2)}}.$$

Для математического представления гравитационного поля Земли используются также так называемые присоединённые функции Лежандра. Присоединённую функцию Лежандра  $P_{m,n}(z)$  порядка  $m$  и степени  $n$  определяют следующей функцией [96]:

$$P_{m,n}(z) = (1-z^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_m(z)}{dz^n},$$

где  $P_{m,n}(z)$  – полином Лежандра.

Присоединённые функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Функции двух аргументов  $P_{m,n}(\cos\theta)\cos n\psi, P_{m,n}(\cos\theta)\sin n\psi$  называются элементарными сферическими функциями. Тогда сферическая функция порядка  $m$  определяется общей формулой

$$Y_m(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^m P_{m,n}(\cos\theta)[A_{m,n}\cos n\psi + B_{m,n}\sin n\psi],$$

где  $A_{m,n}, B_{m,n}$  – произвольные постоянные.

В описании гравитационного поля Земли используются также нормированные функции Лежандра и нормированные присоединённые функции Лежандра. Нормированная присоединённая функция Лежандра  $P'_{m,n}$  задаётся формулой

$$P'_{m,n}(z) = \sqrt{\frac{2(m-n)!}{(m+n)!}} P_{m,n}(z),$$

а полностью нормированная функция – следующей формулой:

$$\bar{P}_{m,n}(z) = \sqrt{2m+1} P'_{m,n}(z) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{2(m-n)!}{(m+n)!}}.$$

Функция гравитационного потенциала в EGM96 определяется из следующего выражения [35, 89, 92]:

$$V = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \phi') (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (2.6.3)$$

в котором  $V$  имеет размерность  $m^2/c^2$ ,  $GM$  – гравитационная постоянная Земли (см. Приложение 2),  $r$  – радиус–вектор до поверхности эллипсоида WGS 84 от центра масс Земли,  $a$  – большая полуось эллипсоида WGS 84,  $n$  – степень гармоника,  $m$  – порядок гармоника,  $\phi'$  – геоцентрическая широта,  $\lambda$  – геоцентрическая долгота, равная геодезической долготе,  $\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные гравитационные коэффициенты:

$$\bar{C}_{nm} = C_{nm} \cdot \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)k}}, \quad (2.6.4)$$

где  $C_{nm}$  – коэффициент гравитации степени  $n$  порядка  $m$ ,  $k$  принимается равным 1, если  $m = 0$ , или равным 2, если  $m \geq 1$ .

$$\bar{S}_{nm} = S_{nm} \cdot \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)k}}, \quad (2.6.5)$$

где обозначения аналогичны  $\bar{C}_{nm}$ .

$\bar{P}_{nm}(\sin \phi')$  – нормированная присоединённая функция Лежандра

$$\bar{P}_{nm}(\sin \phi') = P_{nm}(\sin \phi') \cdot \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)k}{(n+m)!}}. \quad (2.6.6)$$

$P_{nm}(\sin \phi')$  – присоединённая функция Лежандра

$$P_{nm}(\sin \phi') = (\cos \phi')^m \frac{d^m}{d(\sin \phi')^m} [P_n(\sin \phi')], \quad (2.6.7)$$

где  $P_n(\sin \phi')$  – полином Лежандра

$$P_n(\sin \phi') = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d(\sin \phi')^n} (\sin^2 \phi' - 1)^n. \quad (2.6.8)$$

Для практических вычислений удобнее воспользоваться таблицей нормированных гравитационных коэффициентов [35, 92].

Необходимо помнить о следующем условии

$$\left| \begin{array}{c} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right| = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)k}} \left| \begin{array}{c} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right|,$$

где  $C_{nm}, S_{nm}$  – обычные коэффициенты гравитации, а для  $m=0, k=1; m \neq 0, k=2$ .

Эти ряды теоретически справедливы для  $r \geq a$ . В противном случае результаты будут отрицательными. Иными словами, модель EGM96 создана не для расчётов гравитации внутри тела Земли.

Более точные расчеты, связанные с гравитационным полем Земли, требуют учета аномалий гравитации. В WGS 84 EGM96 аномалии гравитации представлены коэффициентами  $C_n$ , которые вычисляются по следующей формуле:

$$C_n = \bar{\gamma}^{-2} (n-1)^2 \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \quad (2.6.9)$$

в которой гравитационные аномалии  $C_n$  имеют размерность мГал<sup>2</sup>,  $\bar{\gamma}$  – среднее значение теоретической гравитации, которое для эллипсоида WGS 84 равно 979764,46561 мГал. Коэффициенты  $C_n$  для  $n$  от 2 до 180 приводятся в целом ряде изданий и в Интернете.

Формулы (2.6.1), (2.6.3) и (2.6.9) полезны ещё для расчетов при использовании методов навигации по гравитационному полю Земли.

В заключении следует сказать об отличии модели гравитационного поля Земли, принятой в рамках системы WGS 84, от модели отечественной геодезической системы ПЗ-90. В ПЗ-90 применяются другие способы представления потенциала гравитации Земли. В ней гравитационное поле Земли ПЗ-90 представлено в виде параметров нормального и аномального полей. Нормальное гравитационное поле представлено в двух формах: в виде нормированных гармонических коэффициентов нормального потенциала и в виде системы семи точечных масс [60]. В этом случае потенциал  $U$  задаётся общей формулой

$$U = U_0 + \sum U_n.$$

В этой формуле  $U_0$  – это потенциал задачи двух неподвижных центров, а  $U_n$  представляет собой потенциал точечной массы  $m_n$ ,

$$U_n = \frac{fm_n}{\Delta_n},$$

где  $f$  – постоянная тяготения,  $\Delta_n$  – расстояние до  $n$ -ной точечной массы.

## 2.7. ГЕОИД WGS 84

Как уже говорилось выше, в системе геодезических координат WGS 84 рассматриваются три поверхности: физическая поверхность Земли, опорная поверхность референц-эллипсоида WGS 84 и эквипотенциальная поверхность гравитационного поля Земли, называемая геоидом.

$$\text{Уравнение} \quad W(X, Y, Z) = \text{const} \quad (2.7.1)$$

задает семейство эквипотенциальных поверхностей (геопс) гравитационного поля Земли. В качестве геоида WGS 84 рассматривается такая эквипотенциальная поверхность (геоп), для которой константа (2.7.1) равна  $W_0$ , то есть, равна теоретическому (нормальному) гравитационному потенциалу эллипсоида  $U_0$  (см. Приложение 2).

Для многих практических приложений геоид WGS 84 в первом приближении принимается за среднюю невозмущенную поверхность океана (Mean Sea Level – MSL). Следует уточнить, что MSL не является эквипотенциальной поверхностью, а чтобы определить MSL в какой-либо точке океана, необходимо провести в ней наблюдения в течение 18,67 лет.

В математическом смысле геоид может быть определен и как некая поверхность, которая отстоит над (+ $N$ ) или ниже (– $N$ ) эллипсоида в каждой его точке. В определении геоида содержится важный для практики смысл: геоид может служить опорной поверхностью для отсчета высот в открытом море ( $H$ ). На суше положение каждой точки поверхности геоида относительно референц-эллипсоида задаётся принятой в данном государства системой высот и поддерживается так называемыми высотными марками, закреплёнными на поверхности Земли. Когда требуется в открытом море определить возвышение какой-либо точки (например, фазового центра антенны приемоиндикатора Навстар GPS) над референц-эллипсоидом ( $h$ ), то можно применить следующее простое выражение:

$$h = N + H, \quad (2.7.2)$$

где  $h$  – геодезическая высота,  $N$  – возвышение поверхности геоида над поверхностью референц-эллипсоида,  $H$  – ортометрическая высота, то есть возвышение точки над геоидом (в самом первом приближении

MSL). Во многих приемоиндикаторах системы Навстар GPS вычисляются возвышения антенны над уровнем моря. Делается это по следующей формуле:

$$H = h - N. \quad (2.7.3)$$

При традиционном подходе на первом этапе разработки геоида WGS 84 константу  $W$ , равномерно распределённую по всей поверхности, предполагали равной нормальному потенциалу  $U_0$  “хорошо согласованного эллипсоида”. Исходя из этого соображения, возвышения поверхности геоида над поверхностью эллипсоида WGS 84 для  $n=m=180$  рассчитывали по следующей формуле [35]:

$$N = \frac{GM}{r\gamma} \left[ \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \phi') \right], \quad (2.7.3a)$$

где  $N$  измеряется в метрах,  $GM$  – гравитационная постоянная Земли, представляющая собой произведение универсальной гравитационной постоянной  $G$  на массу Земли  $M$ ,  $r$  – радиус-вектор, являющийся геоцентрическим расстоянием до соответствующей точке на поверхности референц-эллипсоида,  $\gamma$  – величина теоретической (нормальной) гравитации на поверхности эллипсоида,  $n, m$  – степень и порядок сферических гармоник,  $a$  – большая полуось эллипсоида,  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  – нормированные гравитационные коэффициенты,  $\phi'$  – геоцентрическая широта,  $\lambda$  – геоцентрическая долгота,  $\bar{P}_{n,m}(\sin \phi')$  – нормированные присоединённые функции Лежандра.

Участвующие в выражении (2.7.3a) переменные вычисляются по следующим формулам:

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \phi'}}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \phi' = \arctg[(1 - e^2) \operatorname{tg} \phi],$$

где  $e$  – первый эксцентриситет эллипсоида,  $b$  – его малая полуось,  $\phi$  – геодезическая широта,

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}},$$

где  $\gamma_e$  – величина теоретической (нормальной) гравитации поверхности эллипсоида на геодезическом экваторе (см. формулу 2.5.3).

Для  $m=0$  полином Лежандра запишется следующим образом:

$$\bar{P}_{n,0}(\sin \phi') = \sqrt{2n+1} P_{n,0}(\sin \phi') = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\sin^2 \phi' - 1)^n}{d(\sin \phi')^m}.$$

Для  $m \neq 0$  он запишется как

$$\bar{P}_{n,m}(\sin \phi') = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)2}{(n+m)!}} P_{n,m}(\sin \phi') = (\cos \phi')^m \frac{d^m P_{n,m}(\sin \phi')}{d(\sin \phi')^m},$$

где  $P_{n,m}(\sin \phi')$  – присоединённая функция Лежандра.

При вычислении высот геоида в первых версиях системы WGS 84 в формулу (2.7.3а) вместо коэффициентов  $\bar{C}_{2,0} - \bar{C}_{10,0}$  подставлялись следующие соответствующие величины:  $\delta\bar{C}_{2,0} = 0$ ,  $\delta\bar{C}_{4,0} = -0,25330818 \cdot 10^{-6}$ ,  $\delta\bar{C}_{6,0} = -0,14896096 \cdot 10^{-6}$ ,  $\delta\bar{C}_{8,0} = 0,42976374 \cdot 10^{-7}$ ,  $\delta\bar{C}_{10,0} = 0,50931578 \cdot 10^{-7}$ . Эти величины представляют собой разности между величинами соответствующих коэффициентов, полученных из соображения динамики Земли, и геометрических соображений.

Многочисленные дальнейшие уточнения параметров эллипсоида WGS 84 показали, что он не является достаточно хорошо согласованным. Разница между большей полуосью официально признанного эллипсоида WGS 84 и большей полуосью хорошо согласованного составляет 0,54 м. Это несоответствие устраняется введением  $N_0$  – возвышением нулевого порядка. Такой подход согласует геоид с эллипсоидом без корректуры фундаментальных постоянных эллипсоида.

Некоторые государства отошли от практики применения ортометрических высот для описания геоида и применяют так называемые аномалии высот (height anomaly). Использование аномалий высот устраняет необходимость получения информации о плотности масс, расположенных между поверхностью геоида и поверхностью Земли. Поэтому выражение (2.7.2) можно переписать таким образом:

$$h = H + N = H^* + \xi, \quad (2.7.4)$$

где  $H^*$  – нормальная высота,  $\xi$  – аномалия высоты.

В геодезической практике всё чаще используется сравнительно новый термин теллуриод (telluroid). Теллуриодом называется тело, в каждой точке  $Q$  поверхности которого нормальный потенциал гравитационного поля  $U$  равен действительному потенциалу  $W$  в

соответствующей точке  $P$  на поверхности Земли. Отсюда аномалией высоты будет являться расстояние между точкой  $Q$  теллуроида и точкой  $P$  на поверхности Земли. Выражение (2.7.3) иллюстрирует применение отстояния геоида в определении ортометрической высоты ( $H$ ) по высоте над эллипсоидом ( $h$ ) при определении места судна с помощью СРНС Навстар GPS.

Чтобы перейти от возвышений геоида к аномалиям высот, была введена поправка  $-0,53$  м, с учётом которой были пересчитаны все коэффициенты модели гравитационного поля WGS EGM96 для гармоник  $n=m=360$ . Как уже упоминалось выше, эллипсоид WGS 84 оказался не идеальным земным эллипсоидом в смысле модели, которая не учитывает приливы. Идеальный эллипсоид был определён Специальной комиссией по фундаментальным константам Международной ассоциацией по геодезии (IAG) в 1992 году. Таким эллипсоидом в безприливной системе является сфероид с большей полуосью  $a=6378136,46$  м и сжатием  $1/f=298,25765$  [89, 92].

Вычисления возвышений геоида над эллипсоидом WGS 84 начинаются с расчёта аномалии высот  $\xi$  по формуле

$$\xi(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{\gamma(\phi)r} \left[ \sum_{n=2}^m \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \phi) \right], (2.7.5)$$

где  $\phi, \lambda$  – геоцентрические широта и долгота соответственно,  $r$  – геоцентрический радиус-вектор до точки  $P$ , причём, эта точка может быть выше и на поверхности эллипсоида. Остальные обозначения соответствуют обозначениям формулы (2.7.3а) и фундаментальным константам, принятым в модели гравитационного поля Земли EGM96, за одним исключением. Зональные коэффициенты  $\bar{C}_{2,0} - \bar{C}_{10,0}$  в формулу (2.7.5) входят как разности между соответствующими динамическими и геометрическими коэффициентами  $\bar{C}_{n,0} = \bar{C}_{n,0(din)} - \bar{C}_{n,0(geom)}$ .

Для модели вида (2.7.5) геометрические коэффициенты имеют следующие значения:  $\bar{C}_{2,0} = -0,484166774985 \cdot 10^{-3}$ ,  $\bar{C}_{4,0} = 0,790303733 \cdot 10^{-6}$ ,  $\bar{C}_{6,0} = -0,16872495 \cdot 10^{-8}$ ,  $\bar{C}_{8,0} = 0,34605246 \cdot 10^{-11}$ ,  $\bar{C}_{10,0} = -0,2650022 \cdot 10^{-14}$ .

Для окончательного вычисления возвышения ( $N$ ) геоида в метрах над поверхностью эллипсоида WGS 84 применяется следующая формула:

$$N(\phi, \lambda) = N_0 + \xi(\phi, \lambda, r) + \frac{\Delta g_{BA}(\phi, \lambda)}{\bar{\gamma}} H(\phi, \lambda), \quad (2.7.6)$$

где  $N_0$  – поправка, равная  $-0,53$  м,  $\Delta g_{BA}(\phi, \lambda)$  – аномалия гравитации Буге (Bouguer), которая определена в рамках модели EGM96,  $\bar{\gamma}$  – средняя величина нормальной гравитации,  $H(\phi, \lambda)$  – величина, выбираемая из базы данных JGP95E. База JGP95E является набором данных о возвышениях по всему эллипсоиду WGS 84 для координат с шагом  $5'$ . Эта база данных была разработана NIMA совместно с NASA. Аномалия Буге названа в честь французского математика, физика, геодезиста Пьера Буге (Pierre Bouguer, 1698 – 1758). В отечественной литературе эту поправку иногда называют аномалией Бугера. Она рассчитывается по формуле

$$\Delta g_{BA}(\phi, \lambda) = \Delta g_{FA}(\phi, \lambda) - 0,1119 H(\phi, \lambda),$$

где  $\Delta g_{FA}(\phi, \lambda)$  – гравитационная аномалия без учёта атмосферы.

В расчётах возвышений геоида с помощью модели гравитационного поля Земли EGM96 коэффициенты второй зональной гармоники используются в предположении отсутствия приливов Земли. Иными словами, эта модель не учитывает влияние Солнца и Луны. В расчётах геоида WGS 84 используется понятие нулевого геоида. Нулевой геоид не учитывает напрямую влияние Солнца и Луны, а предполагает только колебания поверхности Земли. Для перехода от геоида, свободного от приливов, к нулевому геоиду в рамках геоида WGS 84 разработана следующая формула:

$$N_Z = N_n + 2,97 - 8,88 \sin^2 \phi \text{ (см)},$$

где  $N_Z$  – возвышение в см нулевого геоида,  $N_n$  – возвышение бесприливного геоида. Погрешность задания поверхности геоида WGS 84 с помощью модели EGM96 составляет  $\pm 0,5$  м [89].

Геоид можно представить на карте в виде изолиний, каждая точка которых отвечает постоянству геоидальной высоты. Министерство обороны США издает такие карты разных масштабов с разным шагом изображения изолиний. Подобные карты иногда помещаются в описаниях приемоиндикаторов системы Навстар GPS. Как правило, такие карты составляются через  $1^\circ$  до  $n = m = 18$ . Для высокоточных приложений созданы так называемые каталоги геоидальных высот. Каталоги составляются с шагом координат  $10^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $30'$ ,  $15'$  и  $5'$ . В Приложении 3 помещен каталог возвышений геоида над поверхностью эллипсоида WGS 84 для точек с координатами, взятыми через  $10^\circ$ . Более



современные каталоги рассчитываются по формулам (2.7.5), (2.7.6) до  $n = m = 180$ . До недавнего времени каталоги, рассчитанные для  $n = m > 180$ , носили закрытый характер. Каталоги хранятся, как правило, на магнитных носителях и могут быть представлены заинтересованным организациям. В постоянных запоминающих устройствах приемоиндикаторов Навстар GPS также записаны подобные каталоги, но с более крупным шагом.

Для расчетов возвышений поверхности геоида в промежуточных точках используется билинейный метод интерполяции [35], для пояснения которого воспользуемся рис. 12.

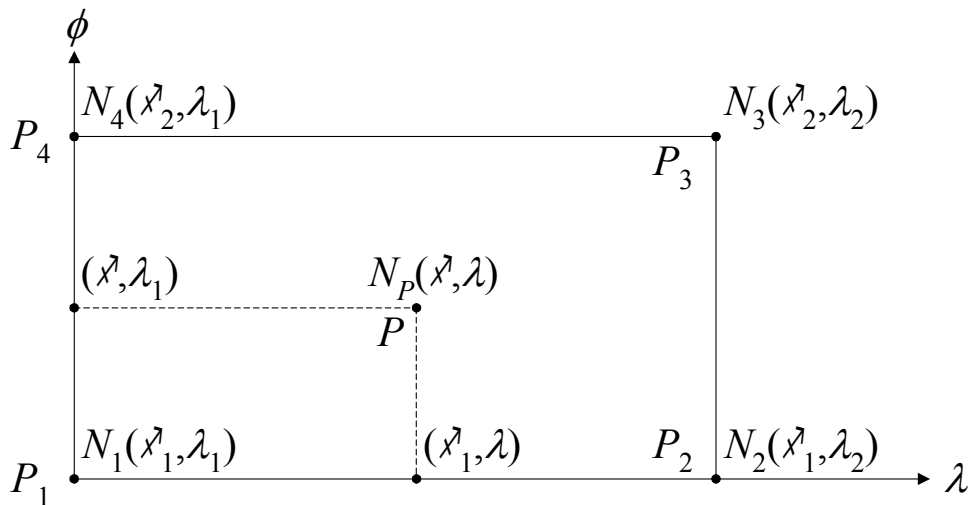


Рис. 12. Пояснение билинейного метода интерполяции

Возвышение геоида в промежуточной точке  $P$  с координатами  $\phi$ ,  $\lambda$  ( $N_p(\phi, \lambda)$ ) в метрах можно рассчитать по следующей формуле:

$$N_p(\phi, \lambda) = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY, \quad (2.7.6)$$

где  $a_0 = N_1$ ,  $a_1 = N_2 - N_1$ ,  $a_2 = N_4 - N_1$ ,  $a_3 = N_1 + N_3 - N_2 - N_4$ ,

$$X = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad Y = \frac{\phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1},$$

$\phi$  – геодезическая широта,  $\lambda$  – геодезическая долгота,  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – возвышения геоида, взятые, например, из каталога Приложения 3.

С помощью каталога возвышений Приложения 3 и приведённых выше формул билинейного метода интерполяции всегда можно оценить точность, с которой данный судовой приемоиндикатор СРНС Навстар GPS рассчитывает отстояние его антенны от поверхности геоида WGS 84, а также возвышение антенны над референц-эллипсоидом, что весьма важно при работе приемоиндикатора в режиме 2D.

Если рассматривать возвышения геоида WGS 84 над поверхностью эллипсоида в качестве случайных величин, то для сетки координат  $15' \times 15'$  их среднее квадратическое отклонение равно  $\pm 30,56$  м. Среднее значение равно  $-0,57$  м. Минимальное отклонение поверхности геоида от поверхности эллипсоида WGS 84 составляет  $-106,99$  м в точке с координатами  $\phi=4,75^\circ\text{N}$ ,  $\lambda=78,75^\circ\text{E}$ . Максимальное отклонение равно  $85,39$  м в точке с координатами  $\phi=8,25^\circ\text{S}$ ,  $\lambda=147,25^\circ\text{E}$ . Интересно сравнить геоид WGS 84 с геоидом WGS 72. Среднее квадратическое отклонение их поверхностей составляет  $\pm 4,6$  метра. Максимальное и минимальное отклонения равны  $24$  м и  $-23,5$  м соответственно. В  $21\%$  от всех сравниваемых точек расхождения более  $5$  м.

## 2.8. СИСТЕМА КООРДИНАТ ITRS

В свете предстоящего развёртывания новой спутниковой радионавигационной системы Галилео возникает необходимость краткого описания её геодезической системы. В основе геодезической системы СРНС Галилео, получившей название GTRF (Galileo Reference Terrestrial Frame – Наземная опорная сеть СРНС Галилео), лежит так называемая система координат ITRS (International Terrestrial Reference System – Международная земная система отсчёта). Поскольку сразу возникает вопрос о совместном использовании СРНС Галилео и Навстар GPS в навигационных целях, то следует рассмотреть различия между GTRF и WGS 84.

Международная система отсчёта координат (ITRS) была создана 1 января 1988 году Международной службой вращения Земли (МСВЗ) – IERS (International Earth Rotation and Reference System Service). Необходимость образования ITRS диктовалась потребностью иметь единую систему отсчёта координат для выполнения астрономических наблюдений, наблюдений за орбитами геофизических спутников Земли, для выполнения геофизических и геодезических работ.

По определению, ITRS является геоцентрической системой с началом координат в центре масс Земли с учётом массы океанов и атмосферы. Единицей длины служит метр. В качестве шкалы измерения времени выбрана шкала координированного геоцентрического времени – TCG (Geocentric Coordinate Time). Ось  $X$  принадлежит плоскости опорного меридиана IRM (IERS Reference Meridian), а ось  $Z$  направлена в опорный полюс IRP (IERS Reference Pole). Надо отметить, что ось  $Z$  является средней осью вращения

Земли, а IRP в пределах погрешностей измерений совпадает с условным международным началом CIO (Conventional International Origin). Условным международным началом считается среднее положение земного полюса по результатам измерений, выполненных с 1900 по 1905 год. Ось  $Y$  дополняет систему прямоугольных координат до правой и вместе с осью  $X$  принадлежит плоскости экватора. Стабильность положения в пространстве осей системы ITRS соблюдается принятием условия отсутствия глобального вращения Земли вследствие горизонтальных перемещений тектонических плит.

Система ITRS привязана к Земле густой сетью геодезических пунктов, в каждом из которых непрерывно и круглосуточно выполняются измерения их абсолютных координат, а также параметры взаимного их расположения. Для выполнения таких работ используются методы измерения геодезических векторов сверхдлинных баз, лазерные измерения расстояний до Луны и расстояний до искусственных спутников Земли, интерферометрические измерения сигналов спутников СРНС Навстар GPS и Глонасс. Эта сеть геодезических пунктов называется Международной наземной опорной сетью – ITRF (International Terrestrial Reference Frame). Результаты измерений, выполняемых в каждом пункте ITRF, в режиме реального времени транслируются в штаб-квартиру IERS, расположенную во Франции под Парижем, где в реальном времени решаются задачи уравнивания сети. В ходе вычислений получают абсолютные координаты пунктов, а также скорости и направления их взаимных перемещений. По результатам наблюдений IERS публикует специальный каталог, в котором по каждому пункту сети ITRF с высокой точностью указываются его абсолютные пространственные декартовы координаты, а также скорости изменения каждой координаты. Год издания такого каталога принято называть эпохой. Например, на момент написания данного учебного пособия действует каталог ITRF2004, который вобрал в себя наблюдения за период с 1999 по 2004 год. Для вычисления текущих координат пунктов разработан высокоточный способ преобразования, названный способом 14 параметров. Он будет рассмотрен в следующей главе. Надо сказать о том, что при вычислении декартовых координат пунктов сети ITRF большую роль играет принятое положение плоскости экватора. В настоящее время положение плоскости экватора принято на юлианскую эпоху J2000,0. Поскольку большинство измерений в пунктах сети ITRF выполняется с помощью сигналов спутников СРНС Навстар GPS, то порой можно встретить привязку координат того или

иногo пункта сети к номеру недели GPS. Таким образом, сеть ITRF закрепляет систему координат ITRS в теле Земли по аналогии TRF в геодезической системе WGS 84, то есть, ITRF является физической реализацией ITRS.

Как следует из предыдущего материала, точность реализации той или иной системы координат зависит от густоты и равномерности распределения её геодезических пунктов по поверхности Земли, а также от того, как часто происходит уравнивание сети пунктов. С этих позиций система координат ITRS намного превосходит по точности систему WGS 84, так как сеть ITRF насчитывает несколько сотен высокоточных геодезических пунктов. На первое января 1997 года их было 508 на территории 49 государств. Их число непрерывно увеличивается, благодаря усилиям службы IERS и доброй воли государств, правительства которых понимают важность международной кооперации в области геодезии, астрономии и геофизики.

Система ITRS уникальна ещё и тем, что она одновременно использует несколько общеземных эллипсоидов. Причём, для каждой цели применяется свой эллипсоид. Например, для целей геодезии используется эллипсоид GRS80, а для международных геофизических исследований принят эллипсоид IERS96, который имеет следующие фундаментальные постоянные:  $a = 6378136,49$  м,  $f = 298,25645$ ,  $J_2 = 1,0826359 \cdot 10^{-3}$ ,  $GM = 3,986004418 \cdot 10^{14}$  м<sup>3</sup>с<sup>-2</sup>,  $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Параллельно системе ITRS служба IERS приняла специальную систему для отсчёта астрономических координат и разработала высокоточные алгоритмы для преобразования координат при переходе от одной системы к другой.

Следует остановиться несколько подробнее об учёте динамики тектонических перемещений в системе ITRS. Точность измерений в настоящее время настолько высока, что позволяет определить скорости перемещения геодезических пунктов сети ITRF в достаточно короткое время. Обычно для определения таких скоростей проводят наблюдения в течение одного года. Например, скорость измерения длины базы между пунктом Ветзеле (Германия) и пунктом Вестфорд (США) составила  $+17,0 \pm 0,3$  мм/год. Геодезическое расстояние между этими пунктами равно 5998 км. Так как положение осей системы координат определяется координатами пунктов, то изменение их координат может привести к повороту системы координат в результате уравнивания. Чтобы этого не происходило, на скорости перемещения пунктов следует наложить дополнительное условие, смысл которого заключается в том,

что кора Земли не должна иметь вращение относительно системы координат [97].

Будем считать  $r$  – радиусом-вектором элемента массы  $dM$  в геоцентрической системе координат,  $\Omega$  – вектором мгновенной угловой скорости вращения Земли. Тогда условие отсутствия вращения коры Земли можно записать следующим образом:

$$\int_V \left| \frac{dr}{dt} - \Omega \times r \right|^2 dM = \min, \quad (2.8.1)$$

где символ  $V$  говорит о том, что интегрирование проводится по всему объёму  $V$  деформируемой в результате тектонического смещения части Земли. Для вращающейся системы можно записать

$$\frac{dr}{dt} = \Omega \times r + v,$$

где  $v$  – вектор скорости деформации.

Тогда уравнение (2.8.1) будет эквивалентно следующему выражению:

$$\int_V |v|^2 dM = \min. \quad (2.8.2)$$

Оси системы координат, удовлетворяющие условиям (2.8.1) и (2.8.2), называются осями Тиссерана [97]. Существование тектонических плит и их перемещение говорит о том, что Земля не является абсолютно твёрдым телом. Если это так, то движение элемента массы  $dM$  вокруг центра масс Земли разделится на вращение со скоростью  $\Omega \times r$  и остаточную деформацию со скоростью  $v$ . Запишем выражение для углового момента тела  $H$ .

$$H = \int_V r \times (\Omega \times r) dM + h,$$

где

$$h = \int_V r \times v dM.$$

Определённая таким образом величина  $h$  называется относительным угловым моментом. Используя понятие момента инерции, запишем

$$H = C\Omega + h.$$

Если предположить  $h \neq 0$ ,  $v = \omega \times r$ , то это означает, что поле скоростей деформации создаётся вращением тела с угловой скоростью  $\omega$  и

$$h = \int_V r \times (\omega \times r) dM = C\omega \text{ или } H = C(\Omega + \omega).$$

Полученные выражения говорят о том, что если  $h = 0$ , то  $\omega = 0$ , то есть поле скоростей деформации не содержит вращения, а измеряемый вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли  $\Omega$  в этом случае не содержит добавок из-за деформации коры Земли. Можно показать, что при выборе осей, в которых  $h = 0$ , удовлетворяется условие (2.8.2). Таким образом, относительный угловой момент, вызываемый деформацией коры Земли, в осях Тиссерана равен нулю. На практике при уравнивании наблюденных скоростей геодезических пунктов системы ITRS используется условие (2.8.2). В разные моменты времени ориентация осей Тиссерана может быть различной, так как поле скоростей деформации меняется. Поэтому при задании системы ITRF обязательно указывается эпоха (год), к которой относятся координаты и скорости пунктов сети. Специально для целей учёта скоростей деформации на международном уровне была разработана кинематическая модель движения тектонических плит NNR-NUVEL-1A. Обозначение NNR (No-Net-Rotation) говорит об отсутствии глобального вращения земной коры. Данная модель предполагает, что вся земная поверхность разбита на 16 тектонических плит, каждая из которых вращается, но суммарное вращение земной коры равно нулю. Названия тектонических плит и угловые скорости их вращения помещены в табл. 6в.

Таблица 6в

Угловые скорости вращения тектонических плит в  $10^{-9}$  рад/год

№	Плита	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
1	Африканская	0,891	-3,099	3,922
2	Антарктическая	-0,821	-1,701	3,706
3	Аравийская	6,685	-0,521	6,760
4	Австралийская	7,839	5,124	6,282
5	Карибская	-0,178	-3,385	1,581
6	Кокос	-10,425	-21,605	10,925
7	Евразийская	-0,981	-2,395	3,153
8	Индийская	6,670	0,040	6,790
9	Хуан де Фука	5,200	8,610	-5,820
10	Наска	-1,532	-8,577	9,609
11	Североамериканская	0,258	-3,599	-0,153

12	Тихоокеаническая	-1,510	4,840	-9,970
13	Филиппинская	10,090	-7,160	-9,670
14	Ривера	-9,390	-30,960	12,050
15	Скотиа	-0,410	-2,660	-1,270
16	Южноамериканская	-1,038	-1,515	-0,870

В декартовых координатах изменение  $i$ -го геодезического пункта сети ITRF, расположенного на  $j$ -ой тектонической плите вычисляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} X_i = X_i^0 + (\omega_y^j Z_i^0 - \omega_z^j Y_i^0)(t - t_0) + \Delta X_i \\ Y_i = Y_i^0 + (\omega_z^j X_i^0 - \omega_x^j Z_i^0)(t - t_0) + \Delta Y_i \\ Z_i = Z_i^0 + (\omega_x^j Y_i^0 - \omega_y^j X_i^0)(t - t_0) + \Delta Z_i \end{cases}, \quad (2.8.3)$$

где  $\omega_x^j, \omega_y^j, \omega_z^j$  – компоненты угловой скорости  $j$ -ой тектонической плиты,  $X_i^0, Y_i^0, Z_i^0$  – декартовы координаты  $i$ -го геодезического пункта на год эпохи ITRF,  $t_0$  – год эпохи ITRF,  $t$  – год, на который вычисляются координаты,  $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$  – поправки к координатам пункта, вычисляемые на основе моделей приливов в твёрдой Земле, моделей океанических приливов, а также моделей атмосферной нагрузки на кору Земли.

Потенциал в точке наблюдения складывается из гравитационного потенциала внешних тел (Солнца, Луны и планет) и собственного потенциала Земли, возмущенного приливными деформациями. Внешний потенциал включает как зависящие от времени гармоники, так и постоянную во времени часть. Аналогично, и приливное смещение точки наблюдения содержит постоянную и переменную во времени компоненты. В зависимости от учета приливов земная система координат может быть определена как система, а) связанная со "средней" корой, б) корой, свободной от приливов. Геопотенциал также может быть представлен в системе координат, связанной со "средним" приливом, свободной от приливов, и еще в системе, соответствующей "нулевому приливу" [97]. Если из мгновенных координат геодезического пункта, жестко связанного с корой Земли, или из потенциала, вычесть зависящие от времени приливные поправки, то результирующие координаты будут отнесены к "средней" коре. Оставшиеся приливные поправки называются "средним приливом" (mean tide). Результирующий потенциал называется потенциалом, соответствующим "среднему приливу". Постоянная часть приливной деформации, которая вызывается потенциалом, присутствует в "средней" коре. Геопотенциал "среднего

прилива" равен сумме постоянной части внешнего и постоянной части возмущенного потенциалов. "Средняя" кора соответствует реальным средним положениям геодезических пунктов на поверхности Земли. Геоидом, соответствующим "среднему приливу", был бы геоид, совпадающий со средней поверхностью океана в отсутствии негравитационных возмущений (течений и ветров). В общем случае, фундаментальные величины, отнесенные к "средней" коре (такие как сжатие, динамический форм-фактор, экваториальный радиус), определяют размеры эллипсоида "средней" коры и форму геоида "среднего прилива". Если теперь из координат пункта вычесть постоянную часть прилива, то координаты будут отнесены к коре, свободной от приливов (tide free). Удаление постоянной части внешнего потенциала из геопотенциала "среднего прилива" приводит к потенциалу "нулевого прилива" (zero tide). Постоянная часть возмущающего потенциала все еще присутствует в геопотенциале; удаление этой компоненты приводит к геопотенциалу, свободному от приливов. Важно заметить, что в отличие от потенциала термин "нулевой прилив", примененный к земной коре и связанным с ней величинам, является синонимом термина "средний прилив".

Земля не является абсолютно твердым телом. Под действием внешних сил расстояние между двумя произвольными точками на земной поверхности непрерывно изменяется. Земля не является и абсолютно упругим телом. Если действие внешних сил прекращается, то точки не возвращаются в первоначальное положение, то есть данный участок поверхности Земли остается в деформированном состоянии. Для описания упругих деформаций Земли английский геофизик Ляв ввел безразмерные параметры, которые сейчас называются числами Лява. Числа Лява связаны с модулями упругости Земли (величинами, характеризующими упругие свойства материалов при малых деформациях). В настоящее время доказано, что упругие свойства Земли, и, следовательно, числа Лява зависят от частоты воздействующей на Землю силы. Для принятой модели строения Земли были рассчитаны числа Лява, на основе которых вычисляются приливные смещения геодезического пункта. К сожалению, вычисленная поправка к координатам пункта не является правильной. Для низких частот (или больших периодов) числа Лява известны с большими погрешностями из-за слишком короткого периода постоянных наблюдений за приливами земной коры. Поэтому часть долгопериодических (или вековых) приливов, в том числе и постоянный прилив, остается в координатах пункта. Деформации



Земли, вызываемые постоянным приливом, характеризуются вековым числом Лява, которое значительно отличается от принятого в модели. Современные исследования показывают, что приливы в твёрдой Земле вызывают смещения геодезических пунктов на величину  $\pm 50$  см. Если погрешность в величине числа Лява составляет лишь 5%, то это вызовет погрешность в вертикальном смещении 6 мм, а в горизонтальном – 3 мм. Это значит, что в чистом виде кора, свободная от приливов, не может быть полностью реализована.

Так как модель учета приливов не точна из-за незнания долгопериодических чисел Лява, то геопотенциал и земная система координат, основанные на использовании этой модели, называются "условно свободными от приливов" (conventional tide free). Координаты геодезических пунктов, задающих земную опорную сеть ITRF2000, "условно свободны от приливов" [97].

В резолюции 16 Генеральной Ассамблеи Международной Ассоциации по геодезии 1983 года записано, что "признавая необходимость единого подхода к учету приливных поправок к различным геодезическим величинам, таким как сила тяжести и координаты станций" рекомендуется "не удалять непрямой эффект, вызываемый постоянной деформацией Земли". Иными словами, постоянная часть возмущающего потенциала должна оставаться в геопотенциале. Из этой резолюции следует, что при обработке гравиметрических наблюдений должны использоваться величины, связанные с потенциалом "нулевого прилива", а если обрабатываются геодезические наблюдения, то величины связываются со "средней" корой. В действительности, к сожалению, это решение не учитывается до сих пор при обработке наблюдений, в частности при анализе данных спутниковых навигационных систем. Координаты геодезических пунктов, используемые при анализе, заданы в системе, "условно свободной от приливов" (ITRF2000). Чтобы перейти от координат в этой системе к координатам в системе, связанной со "средней" корой, необходимо к компонентам радиус-вектора пункта в ITRF добавлять радиальную и тангенциальную поправки.

Смещение координат пунктов геодезической сети ITRS происходит также в результате океанических приливов. Линейные смещения, вызываемые этой причиной, достигают величин  $\pm 5$  см. Существуют математические модели, учитывающие такого рода смещения, которые позволяют практически полностью их устранять.

В IERS учитывается также атмосферные нагрузки на кору Земли. Они вызывают вертикальные перемещения геодезических

пунктов при прохождении циклонов и антициклонов. Вертикальные колебания геодезических пунктов, вызываемые изменениями атмосферного давления, находятся в пределах  $\pm 2$  см. Исследования сибирских учёных показали, что Сибирский антициклон, который устанавливается в зимнее время, вызывает проседание земной коры на обширных территориях на 1,5 см. В IERS разработаны математические модели для вычисления поправок к координатам пунктов сети ITRF за изменение атмосферного давления.

В состав ITRF входит так называемая ETRF (European Terrestrial Reference Frame), на которой следует остановиться подробнее. Впервые идея создания Европейской наземной опорной сети возникла и была реализована в 1989 году [98]. Основная цель создания ETRF поначалу заключалась в построении единой для Европы системы геодезических координат, которая бы полностью заменила морально устаревшие системы ED50 и ED79. По мере выполнения организационных и технических работ стало понятно, что новая система геодезических координат Европы должна быть частью ITRS с референц-эллипсоидом ITRS96. Поэтому новую европейскую геодезическую систему часто называют ETRS или ETRS89. Отличается она от ITRS густотой размещения сети ETRF, её структурой, более высокой скоростью обработки получаемой информации и, как следствие, более высокой точностью получения абсолютных координат на территории Европы и омывающих её морей. На март 2002 года в состав ETRF уже входило 130 высокоточных геодезических пунктов.

Надо отметить очень важное отличие ETRS89 от ITRS. Система ITRS, как и система WGS 84, является глобальной. Для её поддержания на необходимом уровне точности представления абсолютных координат требуются большие затраты, так как необходимы широкомасштабные наблюдения, их обработка, создание всё новых математических моделей учёта влияния различных геофизических параметров. Система ETRS89 распространяется только на западную часть Евразийской тектонической плиты. Следовательно, здесь не требуется глобальных наблюдений за смещениями координат пунктов, а поэтому начала координат этой системы можно привязать к этой плите. Так возникла идея создания Европейской геодезической системы ETRS89. Эта система разработана IAG и Европейским комитетом по картографии (CERCO) для внедрения унифицированных методов и приборов спутниковой геодезии, а также для облегчения создания всевозможных систем ГИС на территории государств Европейского Союза (ЕС).

30 ноября 1999 года ЕС утвердил ETRS89 в качестве межгосударственной стандартной геодезической системы [98]. Государствам, входящим в ЕС, не запрещается использовать свои национальные геодезические системы наряду с ETRS89. Однако требуется, чтобы государства в короткий срок определили величины параметров для преобразования координат методом Гельмерта (способом 7 параметров), обеспечивающих точность преобразования не хуже 30 см.

Геодезической основой разрабатываемой ЕС СРНС Галилео (GTRF) принята ITRS [99]. Разница между координатами в системах WGS 84 и ITRS не превышает 10 см.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

#### 3.1. ПРЕДПОСЫЛКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Необходимость преобразования координат сформировалась в конце XVIII века одновременно с формированием в Европе многообразия геодезических систем. XIX век для Европы был отмечен бурными политическими событиями, которые сопровождалась переделами границ государств, а также строительством железных дорог, туннелей и мостов. Все это побудило создание разнообразных математических методов, с помощью которых можно геодезическим координатам объекта в одной геодезической системе поставить в соответствие координаты того же объекта в другой геодезической системе, зная параметры этих геодезических систем.

Задача преобразования координат формулируется следующим образом:

- существуют координаты ( $B_1$  и  $L_1$ ) в геодезической системе  $ГС_1$  (см. рис. 13) точки  $A$ , принадлежащей физической поверхности Земли;
- необходимо получить координаты ( $B_2$  и  $L_2$ ) в системе  $ГС_2$  той же точки  $A$  по координатам  $B_1$  и  $L_1$  геодезической системы  $ГС_1$ .

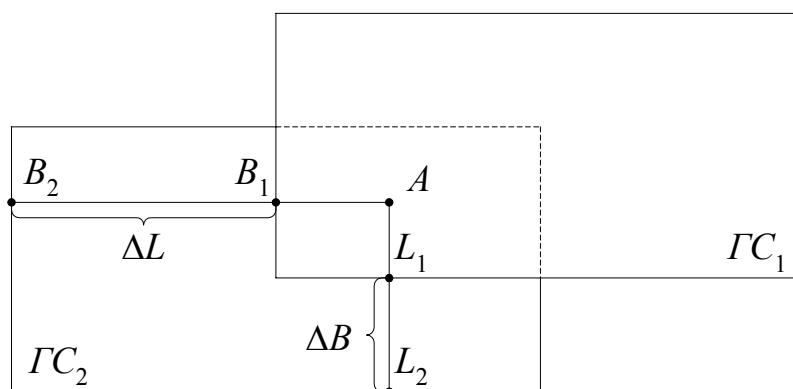


Рис. 13. Преобразование координат

С математической точки зрения задача преобразования координат сводится к получению строгих аналитических выражений ( $F_1$  и  $F_2$ ), ставящих в однозначную зависимость величин  $B_2$  и  $L_2$  от величин  $B_1$  и  $L_1$ , то есть:

$$B_2 = F_1(B_1), \quad L_2 = F_2(L_1). \quad (3.1.1)$$

До появления в обиходе геодезической науки устоявшегося представления об общеземном эллипсоиде, к системе координат которого можно привязать локальные геодезические системы и на

этой основе осуществлять математически строгое преобразование,  $F_1$  и  $F_2$  представляли собой поправки к координатам  $\Delta B$  и  $\Delta L$ :

$$B_2 = B_1 + \Delta B, \quad L_2 = L_1 + \Delta L. \quad (3.1.2)$$

Такие поправки вычислялись на основе визуальной геодезической съёмки с участием ориентиров, располагавшихся на границах государств и привязанных к геодезическим системам, принятым в этих государствах. Понятно, что такой подход был уже не применим для перехода к геодезической системе того государства, которое не имело общей сухопутной границы и, следовательно, одновременно наблюдаемых ориентиров. Примером тому достаточно долго оставались Англия и Франция.

Во второй половине XIX века после окончательного формулирования понятия общеземного эллипсоида стали разрабатываться аналитические методы преобразования координат, где уже рассматривались отстояния центров референц-эллипсоидов от центра общеземного и элементы угловой ориентации их главных осей. Однако точность таких методов была невысокой. Значительные успехи в этом направлении были достигнуты после изобретения и широкого внедрения телеграфа и радио, благодаря чему стали передаваться сигналы точного времени [40].

Огромное влияние на развитие методов преобразования координат оказала Вторая мировая война. Из чисто теоретической задача преобразования перешла в практическую плоскость военного применения одновременно для обеих противоборствующих сторон. Для Англии и других стран антигитлеровской коалиции эта задача возникла при использовании РНС «Декка» во время вторжения войск союзников на северное побережье Франции в июне 1944 года. Для вермахта существовала необходимость расчета точных направлений и расстояний при обстреле юга Англии крылатыми ракетами Фау-1 и баллистическими ракетами Фау-2.

После Второй мировой войны активно разворачиваются РНС дальнего действия Лоран-А. Этот период характерен тем, что проблема преобразования координат уже становится актуальной для мореплавателей. Радионавигационной системой, развернутой на территории данного государства, можно было воспользоваться только с помощью карт с сетками изолиний или с помощью таблиц, составленных только на основе той геодезической системы, которая принята в данном государстве. Следовательно, при плавании вблизи берегов данного государства, выполняя графическое счисление пути судна на картах, составленных на основе геодезической системы

другого государства, и нанося обсервованное место судна, полученное по сигналам РНС, неизбежно вносится систематическая погрешность, обуславливаемая различием геодезических систем. В те годы в практику судовождения еще не были внедрены способы преобразования координат главным образом из-за их сложности и из-за отсутствия на судах соответствующих вычислительных средств, сравнимых с современными микрокалькуляторами. Поэтому для штурманов существовала общая рекомендация: не полагаться на координаты, полученные по РНС, при плавании вблизи берегов и навигационных опасностей. На открытое море эта рекомендация не распространялась, так как считалось, что точность определения места по РНС с учетом геодезических сдвигов соизмерима с точностью определения места судна астрономическими методами.

С появлением спутниковых радионавигационных систем (СРНС) Транзит и Цикада ситуация с преобразованием координат изменилась коренным образом. Во-первых, обсервованные координаты стали абсолютными, во-вторых, их точность на порядок стала выше астрономических, в-третьих, спутниковые приемоиндикаторы полностью освободили штурмана от выполнения каких-либо расчетов. Стало понятно, что без учета разницы между геодезическими основами СРНС и навигационной карты эффективность применения спутниковых радионавигационных систем значительно снижается. Поэтому в начале 70-х годов стали изготавливать навигационные карты с поправками для перехода к координатам, получаемым с помощью СРНС. Параллельно внедрялись аналитические методы для расчета таких поправок.

Самое сильное воздействие на развитие и внедрение в практику судовождения задач преобразования координат оказало появление спутниковых навигационных систем Навстар GPS и Глонасс. Решающим здесь стала точность определения места судна, достигающая в настоящее время дециметрового и субсантиметрового диапазонов, благодаря широкому внедрению дифференциальных методов. Спутниковые навигационные системы второго поколения сформировали технологию географических информационных систем (ГИС), ярким примером которых стали применяемые на судах ECDIS (Electronic Chart Display and Information Systems), часто называемые электронными картами. ECDIS представляют собой структурированную базу данных, имеющих привязку к геодезическим координатам. Составление электронных карт и их корректура неизбежно связаны с решением задачи преобразования координат [40, 41].

По этим причинам к настоящему времени существует целый ряд способов преобразования координат, которые нуждаются в классификации. С точки зрения точности преобразования существующие способы можно разделить на высокоточные, точные, способы средней точности и приближенные. Высокоточные способы обеспечивают преобразование координат с погрешностью, лежащей в пределах от нескольких миллиметров до  $\pm 1$  метра. Точные способы позволяют получать координаты с точностью в диапазоне от  $\pm 1$  до  $\pm 2$  метров. Средняя точность преобразования допускает погрешности от  $\pm 2$  до  $\pm 5$  метров. Приближенные способы заметно уступают последним, поскольку погрешности их преобразования намного выше  $\pm 5$  метров.

По форме представления способы преобразования координат делятся на три категории: аналитические, табличные и таблично-аналитические. К аналитическим относятся те, которые используют для расчётов поправок или преобразованных координат конкретные формулы. Понятно, что большинство аналитических способов реализуется на вычислительной технике и не предполагают, что штурман будет вручную считать по этим формулам. Табличные способы очень удобны в применении, но имеют ограничения. Первое ограничение заключается в том, что для обширных территорий и акваторий для достижения приемлемой точности преобразования требуются более подробные таблицы. Малые таблицы неизбежно вызовут потери точности из-за интерполяции. Здесь исключением является таблица для перехода от координат в системе WGS 72 к координатам в системе WGS 84. Объясняется это тем, что упомянутые геодезические системы довольно близки друг к другу. Табличные способы представления поправок весьма полезны для оперативного контроля работы программ преобразования, задействованных в программном обеспечении судовых приёмников радионавигационных систем. Табличные способы широко применяются на судах, которые совершают постоянные рейсы в пределах одного моря, омывающего берега нескольких держав. Таблично-аналитические способы предполагают расчёты поправок для преобразования с помощью упрощённых формул, в которые входят константы, не зависящие от текущих координат, а присущи только параметрам тех или иных геодезических систем.

Точность получения искомым координат зависит от сложности самого алгоритма преобразования, а также от точности координат центров референц-эллипсоидов, лежащих в основе геодезических

систем, и угловых элементов взаимного ориентирования осей референц-эллипсоидов. В расчётах по любому способу участвуют постоянные величины, характеризующие взаимное пространственное положение геодезических систем. Эти величины принято называть параметрами взаимного положения. Точность того или иного способа преобразования находится в прямой зависимости от количества участвующих в расчётах параметров. Поэтому способы преобразования координат ещё принято классифицировать по числу параметров.

К сожалению, непрерывные флуктуации поверхности Земли не всегда позволяют снизить неопределённость получения декартовых координат центра референц-эллипсоида, а многие из существующих способов преобразования основываются на элементах взаимного расположения референц-эллипсоидов в теле Земли. В последние годы у нас в стране и за рубежом создаются космические опорные геодезические сети и разрабатываются на их основе более современные способы преобразования, точность которых уже лежит в субсантиметровом диапазоне. Сложные и более точные способы реализуются либо на судовых персональных компьютерах, либо в программных обеспечениях спутниковых геодезических приёмников и ECDIS.

Способы преобразования координат независимо от их точности делятся на способы непосредственного вычисления координат и на способы вычисления поправок к координатам. Последние получили самое широкое распространение в практике судовождения. В 1983 году Международной гидрографической организацией было принято решение, по которому изготовители карт должны указывать название геодезической системы координат карт и поправки для взаимного перехода. Если величины поправок несущественны, то это также должно быть указано в Предупреждениях. До недавнего времени изготавливались морские карты с указанием поправок для перехода к WGS 72. С внедрением WGS 84 появились табличные и аналитические способы пересчета поправок для взаимного перехода WGS 72 и WGS 84. При плавании в одном и том же районе положительно зарекомендовали себя таблицы поправок.

Очень полезной оказалась технология преобразования координат с использованием сети Интернет. К настоящему времени ряд организаций создали программные продукты преобразования, доступ к которым возможен через Интернет. Чтобы получить преобразованные координаты в любой геодезической системе, достаточно войти в Интернет, выбрать нужную программу, задать



координаты в исходной геодезической системе и задать ту геодезическую систему, в которой необходимо получить искомые координаты.

Данный материал посвящен подробному рассмотрению существующих способов преобразования координат. Здесь приводятся примеры и рекомендации, которые могут помочь досконально разобраться с тем или иным способом даже в судовых условиях.

### 3.2. ВЫСОКОТОЧНЫЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как уже указывалось выше, высокоточные способы преобразования координат предполагают предельную точность до  $\pm 1$  метра. Такая точность достигается учетом линейного смещения центров референц-эллипсоидов, взаимной угловой ориентацией их осей и масштабных коэффициентов для расчета расстояний на поверхностях этих эллипсоидов.

**Способ Раппа.** Рапп (Rapp) в 1981 году предложил оригинальный подход к решению подобных задач и разработал несколько вычислительных процедур. Особенность способа Раппа заключается в учете начальных азимутов геодезических систем [39]. Способ Раппа относится к способам прямого вычисления координат. Общий вид этого способа сводится к следующему выражению:

$$X_B = X_A + dX + R(\omega, \varepsilon, \psi)X_A + dL \times X_A + dA \times R(\phi_0, \lambda_0) \times (X - X_1) + dS \times R(\phi_i, \lambda_i, \alpha_{i0}),$$

где  $X_B$  – вектор-столбец искомых прямоугольных координат геодезической системы ГС<sub>2</sub>;  $X_A$  – вектор-столбец известных прямоугольных координат геодезической системы ГС<sub>1</sub>;  $dX$  – вектор-столбец линейных элементов внутреннего ориентирования  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , то есть расстояния по главным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от центра эллипсоида второй геодезической системы до центра эллипсоида первой геодезической системы;  $R(\omega, \varepsilon, \psi)X_A$  – углы поворота осей первой геодезической системы до осей второй;  $dA \times R(\phi_0, \lambda_0) \times (X - X_1)$  – поправки за влияние ориентации начальных азимутов геодезических систем;  $dL \times X$  – изменение масштабов;  $dS \times R(\phi_i, \lambda_i, \alpha_{i0})$  – поправки за изменение расстояний на эллипсоидах при переходе от одной геодезической системы к другой.

К настоящему времени разработаны и апробированы несколько вычислительных алгоритмов, реализующих способ Раппа. Все они отличаются большой сложностью и широко применяются в геодезических приемоиндикаторах системы Навстар GPS. Реализованы они в ряде ГИС, а также в универсальных приемоиндикаторах, одновременно используемых в морской геодезии и навигации. Чаще всего вычисления способом Раппа применяются в наземной геодезии в ситуациях, когда на территории одного и того же государства одновременно используются две и более астрономо-геодезические системы. Тогда, как правило, параметры их взаимного расположения известны с высокой точностью, а поэтому достигается высокая точность при переходе от координат в одной геодезической системы к другой.

Способ Раппа впервые зарекомендовал себя в начале 80-х годов точными расчетами угловых и линейных расхождений между известными и широко применяемыми для составления морских навигационных карт геодезическими системами. Для этого были рассчитаны погрешности в координатах и расстояния, на которые смещается место судна, если не учитывать разницу в геодезических основах карт. Данный вычислительный эксперимент имитировал ситуацию, в которой может оказаться иностранный мореплаватель в Токийском заливе при использовании спутникового приемоиндикатора, отображающего координаты судна в национальных геодезических системах. Расчеты проводились для точки с координатами  $\varphi = 35^{\circ}37'30''N$ ,  $\lambda = 139^{\circ}45'E$  в Токийской системе геодезических координат (Токуо Datum). Результаты расчетов представлены в табл. 7. Анализировались следующие геодезические системы: Североамериканская 1927 года (NAD 27), Европейская 1950 года (ED 50), Австралийская геодезическая система 1966 года (AGD), Геодезическая система Южной Африки 1950 года (ARC 50), Геодезическая система Южной Америки 1969 года (S.Amer) и Геодезическая система Аляски (Alaska).

Таблица 7

Смещения координат из-за различия геодезических систем

Название геодезической системы	$\Delta\varphi''$	$\Delta\lambda''$	Смещение в метрах
NAD 27	16,38	-7,86	542
ED 50	17,58	-17,34	696
AGD	18,90	-16,43	559
ARC 50	29,91	-19,34	1042

S.Amer	13,83	-13,94	552
Alaska	6,05	-8,07	535

Отсюда следует вывод: если, скажем, судовой приемоиндикатор будет отображать обсервованные координаты в геодезической системе ARC 50, то нанося их в Токийском заливе на карту, составленную на основе геодезической системы Tokyo Datum, мореплаватель сместит их от действительного места на 1042 метра.

Способ Раппа чаще реализуется в геодезических приемниках, которые отображают геодезический вектор в прямоугольных координатах.

**Модифицированный способ Гельмерта.** Данный способ является итерационным. Разработан он был для приемоиндикаторов, работающих от СРНС Навстар GPS, и хорошо зарекомендовал себя при решении задачи преобразования координат из системы Пулково 42 (СК 42) в систему WGS 84 и наоборот. Он принадлежит к способам преобразования с использованием 7 параметров, так как использует три параметра взаимного линейного ориентирования, три параметра углового взаимного ориентирования и масштабный множитель, учитывающий разницу в расстояниях на поверхностях эллипсоидов.

Предположим, необходимо геодезические координаты  $B_A, L_A, H_A$ , принадлежащие геодезической системе  $A$ , преобразовать в геодезические координаты  $B_B, L_B, H_B$  геодезической системы  $B$ . Известны большие полуоси и квадраты первых эксцентриситетов референц-эллипсоидов, лежащих в основе этих геодезических систем, а также параметры взаимного ориентирования референц-эллипсоидов.

Схема вычислений выглядит следующим образом. Сначала по геодезическим координатам  $B_A, L_A, H_A$  рассчитываются прямоугольные пространственные координаты  $X_A, Y_A, Z_A$  в той же геодезической системе. Используя параметры взаимного ориентирования, координаты  $X_A, Y_A, Z_A$  преобразуются в прямоугольные координаты  $X_B, Y_B, Z_B$  геодезической системы  $B$ . Затем координаты  $X_B, Y_B, Z_B$  преобразуются в геодезические координаты  $B_B, L_B, H_B$  системы  $B$ .

Вычисление пространственных прямоугольных координат  $X_A, Y_A, Z_A$  выполняется по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} X_A &= (N_A + H_A) \cos B_A \cos L_A \\ Y_A &= (N_A + H_A) \cos B_A \sin L_A \\ Z_A &= (N_A + H_A - N_A e_A^2) \sin B_A \end{aligned} \right\}, \quad (3.2.1)$$

где  $N_A$  – радиус кривизны в первом вертикале референц-эллипсоида, принятого для данной местной геодезической системы  $A$  в метрах,

$$N_A = \frac{a_A}{\sqrt{1 - e_A^2 \sin^2 B_A}},$$

где  $a_A$  – большая полуось этого референц-эллипсоида,  $e_A$  – его первый эксцентриситет.

Переход к прямоугольным пространственным координатам системы  $B$  производится по следующей формуле:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + R \times \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \times (1 + \Delta m), \quad (3.2.2)$$

где  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – элементы линейного взаимного ориентирования, то есть отстояния центров референц-эллипсоидов,  $\Delta m$  – масштабный множитель, учитывающий разницу в расстояниях на поверхностях эллипсоидов,  $R$  – матрица вращения.  $R = R_X \times R_Y \times R_Z$ , где  $R_X, R_Y, R_Z$  – матрицы вращения вокруг осей  $X, Y, Z$  соответственно.

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_Z & \sin \varepsilon_Z & 0 \\ -\sin \varepsilon_Z & \cos \varepsilon_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_Y = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_Y & 0 & -\sin \varepsilon_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_Y & 0 & \cos \varepsilon_Y \end{bmatrix},$$

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_X & \sin \varepsilon_X \\ 0 & -\sin \varepsilon_X & \cos \varepsilon_X \end{bmatrix},$$

в которых  $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$  – углы вращения вокруг осей  $X, Y, Z$  соответственно. Угол вращения считается положительным, когда вращение усматривается по часовой стрелке, если смотреть по соответствующей оси из начала координат в сторону положительного направления оси. Углы вращения в расчётах участвуют в радианной мере.

После перемножения матрица вращения  $R$  примет такой вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

где  $r_{11} = \cos \varepsilon_Z \cos \varepsilon_Y, r_{12} = \cos \varepsilon_Z \sin \varepsilon_Y \sin \varepsilon_X + \sin \varepsilon_Z \cos \varepsilon_X,$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= \sin \varepsilon_Z \sin \varepsilon_X - \cos \varepsilon_Z \sin \varepsilon_Y \cos \varepsilon_X, r_{21} = -\sin \varepsilon_Z \cos \varepsilon_Y, \\
r_{22} &= \cos \varepsilon_Z \cos \varepsilon_X - \sin \varepsilon_Z \sin \varepsilon_Y \sin \varepsilon_X, \\
r_{23} &= \sin \varepsilon_Z \sin \varepsilon_Y \cos \varepsilon_X + \cos \varepsilon_Z \sin \varepsilon_X, \\
r_{31} &= \sin \varepsilon_Y, r_{32} = -\cos \varepsilon_Y \sin \varepsilon_X, r_{33} = \cos \varepsilon_Y \cos \varepsilon_X.
\end{aligned}$$

Поскольку углы вращения, как правило, малы, то для большинства расчётов элементы матрицы (3.2.3) заменяют на углы. Тогда матрица вращения становится такой:

$$R \approx \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Для приближённых расчётов используют матрицу вращения (3.2.4) и допускают, что масштабный множитель  $\Delta m = 0$ . Тогда вычисления прямоугольных пространственных координат в ГС  $B$  проводятся по упрощённым формулам (3.2.5):

$$\left. \begin{aligned}
X_B &= X_A + Y_A \varepsilon_Z - Z_A \varepsilon_Y + \Delta X \\
Y_B &= Y_A + Z_A \varepsilon_X - X_A \varepsilon_Z + \Delta Y \\
Z_B &= Z_A + X_A \varepsilon_Y - Y_A \varepsilon_X + \Delta Z
\end{aligned} \right\}. \quad (3.2.5)$$

На последнем этапе прямоугольные пространственные координаты  $X_B, Y_B, Z_B$  преобразуются в геодезические координаты ГС  $B$ . Для преобразования можно воспользоваться структурой формул (3.2.1) и находить искомые широту, долготу и высоту как корни системы трансцендентных уравнений. Причём, в качестве начальных приближений к корням можно использовать значения геодезических координат ГС  $A$ . Существует другой способ, при котором сначала вычисляется геодезическая долгота  $L_B$ .

$$L_B = \arctg \frac{Y_B}{X_B}. \quad (3.2.6)$$

Следует помнить, что по формуле (3.2.6) долгота получается в четвертном счёте. Чтобы получить долготу в естественном счёте, надо помнить такие правила:

если  $X_B > 0, Y_B > 0$ , то  $L_B = \arctg \frac{Y_B}{X_B}$ , долгота восточная;

если  $X_B < 0, Y_B > 0$ , то  $L_B = 180^\circ + \arctg \frac{Y_B}{X_B}$ , долгота восточная;

если  $X_B > 0, Y_B < 0$ , то  $L_B = \arctg \frac{Y_B}{X_B}$ , долгота западная;

если  $X_B < 0, Y_B < 0$ , то  $L_B = -180^\circ + \arctg \frac{Y_B}{X_B}$ , долгота западная.

Формула (3.2.6) мало применима при долготах близких к  $90^\circ$ . Поэтому вместо неё можно порекомендовать другую, которая определяет долготу в полукруговом счёте:

$$L_B = \arccos \frac{X_B}{D}, \quad (3.2.7)$$

где  $D = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$  является проекцией радиуса-вектора на плоскость экватора.

Тогда будут действовать более простые правила для определения наименования долготы:

если  $Y_B > 0$ , то  $L_B > 0$ , долгота восточная,

если  $Y_B < 0$ , то  $L_B < 0$ , долгота западная.

Геодезическая широта вычисляется методом итераций. Сначала отыскивается значение начального приближения:

$$B_B^0 = \arctg \left( \frac{Z_B}{D(1 - e_B^2)} \right),$$

Наименование широты полностью определяется знаком  $Z_B$ . Широта будет северной, если  $Z_B > 0$ , и будет южной, если  $Z_B < 0$ .

Затем вычисляются последующие приближения геодезической широты  $B_{Bi}$  по формуле

$$B_{Bi} = \arctg \left( \frac{Z_B}{D - e_B^2 N_{Bi-1} \cos B_{Bi-1}} \right),$$

где  $N_{Bi-1}$  - это предыдущее значение радиуса кривизны в первом вертикале референц-эллипсоида ГС  $B$ . Итерации прерываются тогда, когда разница между последующим и предыдущим значением широты станет меньше наперёд заданной величины, которая определит точность вычислений. В высокоточных геодезических расчётах обычно выполняется не более 6 итераций.

Геодезическая высота вычисляется в последнюю очередь таким образом:

$$H_B = \frac{D}{\cos B_{Bi-1}} - N_{Bi-1},$$

где в качестве широты и радиуса кривизны в первом вертикале принимаются их последние значения, полученные в ходе итерационных вычислений геодезической широты.

Следует помнить, что в модифицированном способе Гельмерта все линейные величины задаются в метрах.

Для перехода от прямоугольных координат к геодезическим и обратно можно также воспользоваться алгоритмами и формулами, изложенными в разделе “Переход от прямоугольных координат к геодезическим” параграфа 2.3. “Система координат WGS 84” данного учебного пособия.

Большой практический интерес представляет вопрос вычислительной точности модифицированного способа Гельмерта. Чтобы внести ясность, был предпринят вычислительный эксперимент по преобразованию координат из WGS 84 в геодезическую систему Новой Зеландии NZGD 49. Параметры перехода были таковы [56]:  $\Delta X = -59,47$  м,  $\Delta Y = 5,04$  м,  $\Delta Z = -187,44$  м,  $\varepsilon_X = 2,278624 \cdot 10^{-6}$  рад,  $\varepsilon_Y = -4,848136 \cdot 10^{-7}$  рад,  $\varepsilon_Z = 4,964492 \cdot 10^{-6}$  рад,  $\Delta m = 4,5993 \cdot 10^{-6}$ . Рассматривались следующие варианты расчётов:

вариант I – использование матрицы (3.2.3) и масштабного множителя,

вариант II – использование матрицы (3.2.4) и масштабного множителя,

вариант III – использование матрицы (3.2.3) без масштабного множителя,

вариант IV – использование матрицы (3.2.4) без масштабного множителя.

Вычисления проводились с разрядностью 25 знаков, а итерации ограничивались  $1 \cdot 10^{-10}$ . Исходными координатами в геодезической системе WGS 84 были:  $B_A = 41^\circ\text{S}$ ,  $L_A = 173^\circ\text{E}$ ,  $H_A = 100$  м. Результаты расчётов сведены в Таблицу 8.

Таблица 8

Результаты преобразования координат модифицированным способом Гельмерта

Вариант расчёта	$B_B$	$L_B$
I	41° 00' 06,204940760" S	172° 59' 59,485747446" E
II	41° 00' 06,204940791" S	172° 59' 59,485747561" E
III	41° 00' 06,208125893" S	172° 59' 59,485747889" E
IV	41° 00' 06,208125924" S	172° 59' 59,485748004" E

Сравнивая полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. На точность вычисления долготы вариант расчёта практически не оказывает влияния.

2. Замена матрицы вращения (3.2.3) на матрицу углов вращения (3.2.4) приводит к изменению в широте только седьмого знака после запятой.

3. Отказ от масштабного множителя вызывает изменение в широте уже третьего знака после запятой.

Следовательно, для большинства навигационных расчётов можно вполне обоснованно выполнять расчёты модифицированным способом Гельмерта, используя выражения (3.2.5).

Окончательная точность зависит в большей степени от точности линейных элементов взаимного ориентирования референц-эллипсоидов. В последние годы геодезические службы ряда держав выполнили дополнительные наблюдения с целью определения с высокой точностью величин 7 параметров. Эти величины для ряда наиболее распространённых геодезических систем стали публиковаться в открытых зарубежных источниках. Они сведены в таблицы А и В Приложения 10. Здесь надо помнить, что линейные элементы взаимного ориентирования, необходимые для расчётов модифицированным способом Гельмерта, не равны тем, которые помещены в Приложении 6 и не годятся для способа Молоденского.

Способ Гельмерта относится к способам, с помощью которых непосредственно вычисляются трёхмерные геодезические координаты, а не поправки. У способа Гельмерта есть одна разновидность, называемая способом Бурсы-Вольфа (Bursa-Wolf). Она предполагает разворот осей другой пространственной прямоугольной геодезической системы. Поэтому в матрице углов поворота знаки элементов противоположны тем, что в способе Гельмерта.

Здесь следует остановиться на применении способа 7 параметров на территории Российской Федерации. К сожалению, параметры геодезической системы Pulkovo-42 (West Russia), помещённые в Приложении 10, применимы только для Европейской части России. Дело в том, что большинство отечественных морских навигационных карт морей Северного Ледовитого и Тихого океанов содержат сдвиги координат, которые индивидуальны только для данной карты и не учитываются 7 параметрами.

В некоторых крупных компаниях, занимающихся разведкой и разработкой месторождений углеводородов на морском шельфе, их



геодезические службы самостоятельно определяют параметры для преобразования координат способом Гельмерта. Как правило, эти параметры достаточно хорошо себя оправдывают на сравнительно ограниченных акваториях, где достигается субметровая точность преобразования координат. Примером тому служит так называемая Common Offshore ED50 (см. Приложение 10). Эта система 7 параметров предназначена для перехода от координат в системе ED50 к координатам в системе WGS 84 в водах, омывающих южную часть Англии и Ирландского моря.

Если до недавнего времени модифицированный способ Гельмерта и способ Раппа были реализованы, главным образом, в аппаратуре космической геодезии, то в настоящее время способ Гельмерта начинают использовать в судовых приёмниках СРНС Навстар GPS для более точного преобразования координат в геодезическую систему WGS 84.

Отсутствие точных значений параметров сдерживало широкое применение способа Гельмерта. Поэтому в своё время были разработаны альтернативные высокоточные способы преобразования координат, которые не учитывали линейные и угловые элементы взаимного ориентирования или учитывали их опосредованно. К числу таких относится регрессионный способ преобразования.

**Регрессионный способ.** Он был разработан для применения на ограниченных территориях [42]. Этот способ относится к способам вычисления поправок и не требует знаний о линейных и угловых элементах взаимного ориентирования референц-эллипсоидов. Конкретные уравнения, разработанные на основе регрессионного подхода, уже учитывают взаимное расположение центров и осей референц-эллипсоидов.

Общий вид регрессионного уравнения для поправки к геодезической широте ( $\Delta\phi$ ) выглядит следующим образом:

$$\Delta\phi = A_0 + A_1U + A_2V + A_3U^2 + A_4UV + A_5V^2 + \dots + A_{99}U^9V^9,$$

где  $A_0$  – постоянный коэффициент,  $A_1, A_2, \dots, A_{99}$  – коэффициенты, рассчитанные заранее, причем, их количество и величины зависят от конкретного района поверхности Земли и от рассматриваемых референц-эллипсоидов;

$$U = k(\phi - \phi_m), \quad V = k(\lambda - \lambda_m),$$

где  $U$  – нормализованная геодезическая широта в рассматриваемой точке поверхности Земли,  $V$  – нормализованная геодезическая долгота в этой же точке,  $k$  – коэффициент, учитывающий изменение

масштабов при переходе от одного референц-эллипсоида к другому и переход от градусной меры в радианную,  $\phi$ ,  $\lambda$  – геодезические координаты в градусной мере в местной системе координат,  $\phi_m$ ,  $\lambda_m$  – средние значения геодезических координат в градусной мере в местной системе координат. В расчетах координаты принимаются со своими знаками. Аналогичные выражения существуют для поправок к геодезической долготе. Регрессионные способы не предназначены для вычисления высот.

Картографическое предприятие Министерства обороны США разработало для ряда районов с высокой интенсивностью плавания транспортных средств на внутренних водных путях конкретные уравнения и компьютерные программы для преобразования координат из местных геодезических систем в геодезическую систему координат WGS 84 [43]. Многочисленные наблюдения подтвердили высокую точность регрессионного способа преобразования.

Чтобы получить координаты судна в системе WGS 84, достаточно рассчитать поправки  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\lambda$  в секундах и придать их с полученными знаками к обсервованным координатам в местной геодезической системе, которые могут быть измерены на карте или получены приемоиндикатором, принимающим поправки от дифференциальных станций, опорные антенны которых имеют привязку также к местной системе координат. Для обратного перехода необходимо от координат в системе WGS 84 отнять поправки с их знаками.

Ниже приводятся регрессионные выражения, официально рекомендуемые картографическим предприятием Министерства обороны США [35] и Международной Гидрографической Организацией [100] для ряда регионов, где могут оказаться отечественные мореплаватели. Необходимо помнить, что предлагаемые выражения для расчета поправок применимы только для плавания по внутренним водным путям и в прибрежных зонах указанных государств.

АВСТРАЛИЯ (без Тасмании). Геодезическая система AGD84.

$$\begin{aligned} \Delta\phi'' = & 5,20604 + 0,25225U + 0,58528V - 0,41584U^2 - 0,3862UV - \\ & - 0,0682V^2 + 0,38699U^2V + 0,07934UV^2 + 0,37714U^4 - 0,52913U^4V + \\ & + 0,38095V^7 + 0,68776U^2V^6 - 0,03785V^8 - 0,17891U^9 - 4,84581U^2V^7 - \\ & - 0,35777V^9 + 4,23859U^2V^9, \end{aligned}$$

$$\Delta\lambda'' = 4,67877 - 0,73036U - 0,57942V + 0,2884U^2 + 0,10194U^3 - \\ - 0,27814UV^2 - 0,13598V^3 + 0,3467UV^3 - 0,46107V^4 + 1,29432U^2V^3 + \\ + 0,17996UV^4 - 1,13008U^2V^5 - 0,46832U^8 + 0,31948U^9 + 0,16735V^9 - \\ - 1,19443U^3V^9 ,$$

где  $U = K(\varphi + 27^\circ)$ ;  $V = K(\lambda - 134^\circ)$ ;  $K = 0,05235988$ .

Контрольный пример:

Координаты AGD 84	Поправки	Координаты WGS 84
$\varphi = (-)20^\circ 38' 00,67'' S$	$\Delta\varphi = 5,50''$	$\varphi = (-)20^\circ 37' 55,17'' S$
$\lambda = 144^\circ 24' 29,29'' E$	$\Delta\lambda = 4,11''$	$\lambda =$
$144^\circ 24' 33,40'' E$		

**Западная Европа.** Геодезическая система ED 50.

$$\Delta\varphi'' = -2,65261 + 2,06392U + 0,77921V + 0,26743U^2 + 0,10706UV + \\ + 0,76407U^3 - 0,9543U^2V + 0,17197U^4 + 1,04974U^4V - 0,22899U^5V^2 - \\ - 0,05401V^8 - 0,78909U^9 - 0,10572U^2V^7 + 0,05283UV^9 + 0,02445U^3V^9 , \\ \Delta\lambda'' = -4,13447 - 1,50572U + 1,94075V - 1,376U^2 + 1,98425UV + \\ + 0,30068V^2 - 2,31939U^3 - 1,70401U^4 - 5,48711UV^3 + 7,41956U^5 - \\ - 1,61351U^2V^3 + 5,92923UV^4 - 1,97974V^5 + 1,57701U^6 - 6,52522U^3V^3 + \\ + 16,85976U^2V^4 - 1,79701UV^5 - 3,08344U^7 - 14,32516UV^6 + \\ + 4,49096U^4V^4 + 9,9875U^8V + 7,80215U^7V^2 - 2,26917U^2V^7 + 0,16438V^9 - \\ - 17,45428U^4V^6 - 8,25844U^9V^2 + 5,28734U^8V^3 + 8,87141U^5V^7 - \\ - 3,48015U^9V^4 + 0,71041U^4V^9 ,$$

где  $U = K(\varphi - 52^\circ)$ ;  $V = K(\lambda - 10^\circ)$ ;  $K = 0,05235988$ .

Контрольный пример:

Координаты ED 50	Поправки	Координаты WGS 84
$\varphi = 46^\circ 41' 42,89'' N$	$\Delta\varphi = -3,08''$	$\varphi = 46^\circ 41' 39,81'' N$
$\lambda = 13^\circ 54' 54,09'' E$	$\Delta\lambda = -3,49''$	$\lambda = 13^\circ 54' 50,60'' E$

КОНТИНЕНТ ЮЖНАЯ АМЕРИКА. Геодезическая система South American Datum 1969 (SAD 69).

$$\begin{aligned} \Delta\varphi'' = & -1,67504 - 0,05209U + 0,25158V + 1,10149U^2 + 0,24913UV - \\ & - 1,00937U^2V - 0,74977V^3 - 1,5409U^4 + 0,14474V^4 + 0,47866U^5 + \\ & + 0,36278U^3V^2 - 1,29942UV^4 + 0,3041V^5 + 0,87669U^6 - 0,2795U^5V - \\ & - 0,46367U^7 + 4,31466U^4V^3 + 2,09523U^2V^5 + 0,85556UV^6 - \\ & - 0,17897U^8 - 0,57205UV^7 + 0,12327U^9 - 0,85033U^6V^3 - \\ & - 4,86117U^4V^5 + 0,06085U^9V - 0,21518U^3V^8 + 0,31053U^5V^7 - \\ & - 0,09228U^8V^5 - 0,22996U^9V^5 + 0,58774U^6V^9 + 0,87562U^9V^7 + \\ & + 0,39001U^8V^9 - 0,81697U^9V^9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda'' = & -1,77967 + 0,40405U + 0,50268V - 0,05387U^2 - 0,12837UV - \\ & - 0,54687U^2V - 0,17056V^3 - 0,144U^3V + 0,11351U^5V - 0,62692U^3V^3 - \\ & - 0,0175U^8 + 1,18616U^3V^5 + 0,01305U^9 + 1,0136U^7V^3 - 0,29059U^8V^3 + \\ & + 5,1237U^6V^5 - 5,09561U^7V^5 - 5,27168U^6V^7 + 4,04265U^7V^7 - \\ & - 1,6271U^8V^7 + 1,68899U^9V^7 + 2,07216U^8V^9 - 1,76074U^9V^9, \end{aligned}$$

где  $U = K(\varphi + 20^\circ)$ ;  $V = K(\lambda + 60^\circ)$ ;  $K = 0,05235988$ .

Контрольный пример:

Координаты SAD 69	Поправки	Координаты WGS 84
$\varphi = (-)31^\circ 56' 33,95'' S$	$\Delta\varphi = -1,36''$	$\varphi = (-)31^\circ 56' 35,31'' S$
$\lambda = (-)65^\circ 06' 18,66'' W$	$\Delta\lambda = -2,16''$	$\lambda = (-)65^\circ 06' 20,82'' W$

Иногда в зарубежной литературе регрессионный способ называют полиномиальным преобразованием (polynomial transformation) или MRT (Multiple Regression Transformation). У регрессионного способа есть разновидность, в которой полиномы преобразования содержат комплексные числа. Регрессионный способ предполагает преобразование координат в обе стороны. В приведённых выше полиномах знаки перед коэффициентами предполагают получение поправок к координатам для вычисления координат в системе WGS 84. Если же необходимо выполнить обратный переход, то достаточно поменять знаки перед коэффициентами на противоположные.

Точность регрессионного способа зависит от площади охватываемой поверхности и количества станций, на которых производятся определение точных координат в двух геодезических системах. Чем меньше площадь и чем чаще расположены станции, тем точнее вычисляются коэффициенты регрессионных уравнений для вычисления поправок. Например, в некоторых странах Европы с помощью регрессионного способа можно преобразовывать координаты с дециметровой точностью. Для обширных территорий, таких как Южная Америка, достигается точность не хуже  $\pm 2$  метров. В последние годы интерес к регрессионному способу преобразования координат снижается.

**Способ 10 параметров (Молоденский-Бадекас).** В способе Гельмерта вращение по осям происходит относительно точки начала координат. В способе преобразования координат 10 параметрами точка вращения координат выбирается из соображения достижения максимальной точности преобразования. Поэтому по сравнению со способом Гельмерта здесь число параметров увеличивается на три [101]. В силу этих причин, точность вычисления преобразованных координат способом 10 параметров выше, нежели способом Гельмерта.

Как и в способе Гельмерта, здесь сначала происходит переход от геодезических координат к пространственным прямоугольным. Затем вычисляются декартовы координаты геодезической системы, в которую осуществляется переход по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 & R_Z & -R_Y \\ -R_Z & 1 & R_X \\ R_Y & -R_X & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_S - X_P \\ Y_S - Y_P \\ Z_S - Z_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix},$$

где  $X_T, Y_T, Z_T$  – искомые прямоугольные координаты,  $M = 1 + \Delta m$ , где  $\Delta m$  является масштабным коэффициентом, учитывающим изменение линейных масштабов на поверхностях референц-эллипсоидов, принадлежащих данным геодезическим системам,  $R_X, R_Y, R_Z$  – матрицы вращения вокруг осей  $X, Y, Z$  соответственно,  $X_S, Y_S, Z_S$  – прямоугольные координаты точки на поверхности Земли в исходной системе координат,  $X_P, Y_P, Z_P$  – координаты точки вращения, измеренные относительно начала координат исходной геодезической системы,  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – параметры линейного отстояния начала координат исходной геодезической системы от начала координат геодезической системы, в которую преобразовываются координаты. Надо заметить, что величины  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  и  $\Delta m$  полностью соответствуют аналогичным величинам способа Гельмерта. Как и в способе Гельмерта линейные смещения  $\Delta X,$

$\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  задаются в метрах, а  $\Delta m$  – в миллионных долях. Поэтому для подстановки в приведённую формулу преобразования величины  $\Delta m$ , взятой из справочных материалов, её надо умножить на  $10^{-6}$ .

После получения искомым пространственных координат  $X_T$ ,  $Y_T$ ,  $Z_T$  они преобразуются в геодезические ровно также, как и в способе Гельмерта. Данный способ был почти одновременно предложен отечественным учёным С. М. Молоденским и Бадекисом. Поэтому в зарубежной геодезической литературе способ 10 параметров параллельно называют способом Молоденского-Бадекиса (Molodensky-Badekas). Применяется он главным образом для преобразования координат на территории одного государства, использующего у себя сразу несколько геодезических систем или переходящего к использованию новой. Точность преобразования координат способом 10 параметров достигает нескольких сантиметров.

**Способ 14 параметров.** Данный способ используется для вычисления координат в рамках одной и той же геодезической глобальной геоцентрической системы. Как уже было сказано выше, такие общепринятые геодезические системы, как WGS 84, GRS 80, ITRS, ETRS89 время от времени подвергаются переуравниванию, в результате чего у них заново с высокой точностью вычисляются все 7 параметров для преобразования координат способом Гельмерта при переходе от одной версии к последующей. Если же необходимо вычислить координаты на текущий момент времени, относящийся к промежутку времени между эпохами уравнивания, то используются ещё 7 параметров, которые представляют собой скорости изменения за год основных 7 параметров. Таким образом, формулы преобразования с помощью 14 параметров имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X + \Delta \dot{X} \times (t - t_0) \\ \Delta Y + \Delta \dot{Y} \times (t - t_0) \\ \Delta Z + \Delta \dot{Z} \times (t - t_0) \end{bmatrix} + R \times \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \times \{1 + \Delta m + \Delta \dot{m}(t - t_0)\}, \quad (3.2.3)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} 1 & [R_X + \dot{R}_X \times (t - t_0)] & -[R_Y + \dot{R}_Y \times (t - t_0)] \\ -[R_X + \dot{R}_X \times (t - t_0)] & 1 & [R_Z + \dot{R}_Z \times (t - t_0)] \\ [R_Y + \dot{R}_Y \times (t - t_0)] & -[R_Z + \dot{R}_Z \times (t - t_0)] & 1 \end{bmatrix}.$$

Если сравнить между собой формулы (3.2.2) и (3.2.3), то можно убедиться, что алгоритм вычисления у них один и тот же. Параметры, помеченные сверху точкой, означают скорость изменения этого

параметра за год. Разность  $(t - t_0)$  означает число лет, прошедших от эпохи последнего уравнивания сети пунктов данной геодезической системы. Точность преобразования способа 14 параметров достигает нескольких миллиметров.

**Переход от WGS 72 к WGS 84.** За длительный период применения геодезической системы WGS 72 во всем мире были проделаны фундаментальные работы по высокоточной привязке координат береговых ориентиров, передающих антенн радионавигационных систем и по высокоточному вычислению поправок для перехода от координат в местных геодезических системах к координатам в системе WGS 72. Министерство обороны США разработало простые и высокоточные формулы для вычисления поправок при переходе от координат системы WGS 72 к координатам в системе WGS 84 [35].

$$\Delta\varphi'' = \frac{4,5 \cos \varphi_{72}}{a \sin 1''} + \frac{\Delta f \sin 2\varphi_{72}}{\sin 1''}, \quad \Delta\lambda'' = 0,554'',$$

$$\Delta h_{\text{м}} = 4,5 \sin \varphi_{72} + a \Delta f \sin^2 \varphi_{72} - \Delta a - \Delta r,$$

где  $\Delta f = 0,3121057 \cdot 10^{-7}$ ,  $a = 6378135$  м,  $\Delta a = 2$  м,  $\Delta r = 1,4$  м.

Значение  $\sin 1''$  рекомендуется взять из Приложения 7.

Поправку к широте можно вычислить по другой формуле

$$\Delta\varphi'' = 0,1455 \cos \varphi_{72} + 0,0064 \sin 2\varphi_{72}.$$

Следует помнить, что при переходе от координат системы WGS 72 к координатам WGS 84  $\Delta\varphi''$  и  $\Delta\lambda''$  всегда имеют знак плюс. То есть, координаты в системе WGS 84 всегда будут севернее и восточнее соответствующих координат в системе WGS 72.

Чтобы получить координаты в системе WGS 84, достаточно к координатам в системе WGS 72 прибавить поправки  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta h$ , выраженные в градусной мере. Здесь нельзя забывать о принятых в судовождении правилах знаков для широт и долгот.

Максимальное расхождение между координатами WGS 72 и WGS 84 будет на экваторе и составит 4,4 метра по меридиану и 17,4 метра по экватору.

### 3.3. ТОЧНЫЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Способ Молоденского.** Академик М.С. Молоденский разработал и опубликовал в 1960 году сравнительно простой и высокоточный способ преобразования координат. В его постановке задача формулируется следующим образом [44]. Заданы две геодезические

системы ГС<sub>1</sub> и ГС<sub>2</sub>, в основе которых лежат два референц-эллипсоида с параллельными осями, с большими полуосями  $a_1$  и  $a_2$ , малыми полуосями  $b_1$  и  $b_2$ , сжатиями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и эксцентриситетами  $e_1$  и  $e_2$ . С первым эллипсоидом связана декартова система координат  $x, y, z$ , начало которой совпадает с его центром, ось  $z$  – с осью его вращения (т. е. с малой полуосью). В этой системе координаты центра второго эллипсоида отличаются на величины  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ , называемые линейными элементами взаимного ориентирования. Дана точка с геодезическими координатами относительно первого референц-эллипсоида  $B_1, L_1, H_1$ . Необходимо найти координаты  $B_2, L_2, H_2$  этой же точки относительно второго референц-эллипсоида. Способ Молоденского состоит в вычислении поправок  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ , которые следует алгебраически сложить с координатами  $B_1, L_1, H_1$ , чтобы получить искомые координаты  $B_2, L_2, H_2$ . То есть:

$$B_2 = B_1 + \Delta B, \quad L_2 = L_1 + \Delta L, \quad H_2 = H_1 + \Delta H.$$

Строгое решение этой задачи выглядит следующим образом [31]:

$$\Delta B = \frac{1}{M_1 + H_1} \left[ -\Delta X \sin B_1 \cos L_1 - \Delta Y \sin B_1 \sin L_1 + \Delta Z \cos B_1 + \right. \\ \left. + \frac{a_2 - a_1}{a_1} N_1 e_1^2 \sin B_1 \cos B_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \left( M_1 \frac{a_1}{b_1} + N_1 \frac{b_1}{a_1} \right) \sin B_1 \cos B_1 \right],$$

$$\Delta L = \frac{1}{M_1 + H_1} (-\Delta X \sin L_1 + \Delta Y \cos L_1) \sec B_1,$$

$$\Delta H = \Delta X \cos B_1 \cos L_1 + \Delta Y \cos B_1 \sin L_1 + \Delta Z \sin B_1 - \frac{a_1(a_2 - a_1)}{N_1} + \\ + (\alpha_2 - \alpha_1) \left( \frac{b_1}{a_1} \right) N_1 \sin^2 B_1,$$

$$\text{где } M_1 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{\sqrt{(1 - e_1^2 \sin^2 B_1)^3}}, \quad N_1 = \frac{a_1}{\sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 B_1}}.$$

Способ Молоденского обеспечивает высокую точность и просто реализуется на судовых персональных компьютерах, поскольку представляет собой алгоритм прямого вычисления, хотя и требует повышенной разрядности. По простоте вычислительных процедур способ Молоденского намного превосходит способ Гельмерта при том, что не намного уступает ему в точности.

Приведенный способ нашел широкое применение в навигации и морской геодезии. Однако его применение нуждается в



дополнительных пояснениях. За рубежом сложилась устоявшаяся практика перехода от локальных геодезических систем к геодезической системе WGS 84. Иными словами, в терминах постановки задачи способа Молоденского локальная геодезическая система – это ГС<sub>1</sub>, а ГС<sub>2</sub> традиционно представляет систему WGS 84. Объясняется это широким внедрением в зарубежную геодезическую практику системы WGS 84, что еще объясняется и весьма ценной работой Министерства обороны США по уточнению и заблаговременному опубликованию параметров связи существующих в мире геодезических систем с системой WGS 84 (см. Приложения 4, 5 и 6). Поэтому для расчетов по данным формулам величины  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  можно брать из Приложения 6. Разности  $a_2 - a_1$  также можно брать из Приложения 6, в котором они обозначены через  $\Delta a$ . Разности между сжатиями эллипсоидов  $\alpha_2 - \alpha_1$  в Приложении 6 приводятся умноженными на  $10^4$  ( $\Delta f \times 10^4$ ), поэтому чтобы воспользоваться данными из Приложения 6, необходимо  $\Delta f$  умножить на  $10^{-4}$ . Значения малых полуосей ( $b$ ), эксцентриситетов ( $e$ ) и квадратов эксцентриситетов можно выбирать из Приложений 1 и 2, но при этом надо сравнивать значения сжатий эллипсоидов, приведенных в Приложениях 1 и 4. Необходимо помнить, что если существуют расхождения, то следует использовать значения больших полуосей и знаменателей сжатия ( $f^{-1}$ ) Приложения 4, так как там содержатся уточненные данные, а затем рассчитать  $b$  и  $e$  по известным формулам с повышенной разрядностью. Следует помнить, что параметры линейного ориентирования  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , соответствующие способу Молоденского (Приложение 6), не равны аналогичным параметрам способа Гельмерта (Приложение 10).

Зачастую штурман оказывается в ситуации, когда судовой приемоиндикатор системы Навстар GPS не в состоянии отображать координаты в геодезической системе навигационной карты (локальной ГС), на которой ведется исполнительная прокладка. Тогда необходимо переключить приемоиндикатор в режим отображения координат в системе WGS 84 и по этим координатам вычислить поправки для перехода к системе координат карты. Здесь можно поступить двояко. Можно в приведенные выше формулы подставить значения  $\Delta a$ ,  $\Delta f$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , взятые из Приложения 6, но с обратными знаками. Тогда координаты в геодезической системе карты  $B_k$ ,  $L_k$ ,  $H_k$  определяются так:

$$B_k = B_{84} + \Delta B, \quad L_k = L_{84} + \Delta L, \quad H_k = H_{84} + \Delta H.$$

Можно поступить иначе. Если принять координаты  $B_{84}$ ,  $L_{84}$ ,  $H_{84}$ , полученные от приемоиндикатора за координаты в геодезической

системе используемой карты и для них рассчитать поправки  $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta H$  по приведенным выше формулам Молоденского с выборкой параметров из Приложения 6 без изменения знаков, то без потери точности искомые координаты вычисляются следующим образом:

$$B_{\kappa} = B_{84} - \Delta B, \quad L_{\kappa} = L_{84} - \Delta L, \quad H_{\kappa} = H_{84} - \Delta H.$$

Если же возникает необходимость преобразования координат для перехода от одной локальной геодезической системы к другой, то здесь можно идти двумя путями. Можно сначала сделать переход от ГС к ГС<sub>84</sub> с использованием параметров Приложения 6, а затем от ГС<sub>84</sub> к ГС<sub>2</sub>. Тогда для перехода от ГС<sub>84</sub> к ГС<sub>2</sub> рекомендуется использовать только что описанные выше два приема. Для непосредственного перехода от ГС<sub>1</sub> к ГС<sub>2</sub> сначала следует выбрать линейные элементы взаимного ориентирования из Приложения 6 для этих двух систем, затем получить  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  алгебраическим вычитанием из элементов ГС<sub>2</sub> элементов ГС<sub>1</sub> потом найти разности  $\Delta a$  и  $\Delta f$ , используя Приложения 1, 2, 4, 5.

Нельзя не упомянуть о двух ограничениях, существующих для способа Молоденского. Первое ограничение не позволяет применять его в приполярных районах. Второе ограничение связано с тем, что не всегда известны геодезические высоты  $H_1$  для местных геодезических систем. Как видно из формул, без значения геодезической высоты невозможно рассчитать  $\Delta B$  и  $\Delta L$ . Иногда судоводители ошибочно принимают возвышение антенны приемоиндикатора над уровнем моря за  $H_1$ , считая возвышение антенны над уровнем моря за возвышение над референц-эллипсоидом, на основе которого составлена данная карта, забывая о том, что средний уровень моря ассоциируется с поверхностью геоида, а нуль глубин карты не всегда совпадает со средним уровнем моря.

Второе ограничение способа Молоденского преодолимо, если решить задачу наоборот. Достаточно рассчитать поправки  $\Delta B$  и  $\Delta L$ ,  $\Delta H$  для перехода от координат WGS 84 к координатам навигационной карты, используя параметры Приложения 6 с обратными знаками, а затем поправки  $\Delta B$  и  $\Delta L$  с их знаками отнять от координат карты. В этом случае  $H_{84}$  для антенны приемоиндикатора можно рассчитать как сумму возвышения антенны над средним уровнем моря (с учетом прилива) и возвышения геоида над референц-эллипсоидом WGS 84 (см. Приложение 3). Не следует полагаться на то возвышение антенны, которое отображается на экране приемоиндикатора, так как эта величина сильно флуктуирует, а в наставлениях по эксплуатации

приемоиндикатора не всегда внятно говорится относительно какой поверхности (геоида или референц-эллипсоида) она рассчитывается и отображается.

**Дифференциальные формулы преобразования.** В последние годы в нашей стране получили распространение так называемые дифференциальные формулы преобразования координат. Они используют семь параметров преобразования и относятся к точным аналитическим способам [102, 103].

Дифференциальные формулы призваны для расчёта поправок в угловых секундах к геодезической широте ( $B_2$ ), к геодезической долготе ( $L_2$ ), а также поправки в метрах к геодезической высоте ( $H_2$ ) при преобразовании координат геодезической системы 2 в координаты геодезической системы 1. То есть

$$B_1 = B_2 + \Delta B, \quad L_1 = L_2 + \Delta L, \quad H_1 = H_2 + \Delta H.$$

В работе [102] поправки предлагается вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta B = & + \frac{\rho''}{M + H} \left[ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left( \frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ & \left. - (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \sin B + \cos B \Delta Z \right] + \sin L (1 + e^2 \cos 2B) \omega_X - \\ & - \cos L (1 + e^2 \cos 2B) \omega_Y - \rho'' m e^2 \sin B \cos B; \\ \Delta L = & + \frac{\rho''}{(N + H) + \cos B} (\cos L \Delta L - \sin L \Delta L) - \operatorname{tg} B (1 - e^2) (\cos L \omega_X + \\ & + \sin L \omega_Y) + \omega_Z; \\ \Delta H = & - \frac{a \Delta a}{N} + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\cos L \Delta L + \sin L \Delta L) \cos B + \sin B \Delta Z + \\ & + N e^2 \sin B \cos B \left( \frac{\sin L}{\rho''} \omega_X - \frac{\cos L}{\rho''} \omega_Y \right) + (N + H - N e^2 \sin^2 B) m. \end{aligned}$$

В приведённых формулах поправок знаки учитывают такую постановку задачи: известны геодезические координаты  $B, L, H$  в системе WGS 84 (система 2), необходимо рассчитать поправки для получения координат  $B, L, H$  в национальной системе координат 1. Следовательно, переменные без индексов относятся к WGS 84. В формулах  $M$  означает радиус кривизны меридиана референц-эллипсоида WGS 84

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}},$$

где  $a$  – большая полуось эллипсоида,  $e$  – его первый эксцентриситет;  $N$  означает радиус кривизны в первом вертикале

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

$\Delta a$  – разность между большой полуосью референц-эллипсоида, лежащего в основе национальной геодезической системы и большей полуосью референц-эллипсоида WGS 84, то есть:  $\Delta a = a_1 - a_2$ ;  $\Delta e$  – разность первых эксцентриситетов референц-эллипсоидов, то есть:  $\Delta e = e_1 - e_2$ ;  $\rho''$  – количество секунд в одном радиане.  $\rho'' = 206264,806247$ .

Методическая точность приведённых формул составляет несколько миллиметров. Окончательная точность, естественно, зависит от точности величин параметров преобразования и от разрядности вычислений. По этим причинам способ преобразования координат по дифференциальным формулам относится пока к точным способам.

Если сравнить приведённые выше формулы поправок с формулами специального способа преобразования, то можно сделать вывод о том, что специальный способ преобразования представляет собой усечённые дифференциальные формулы без учёта углов разворота осей и масштабного множителя.

В работе [103] изложена следующая модификация дифференциальных формул:

$$\begin{aligned} \Delta B = & +[e^2 N \sin B \cos B \frac{\Delta a}{a} + \left(1 + \frac{N^2}{a^2}\right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta X \cos L + \\ & + \Delta Y \sin L) \times \sin B - \Delta Z \cos B] / (M + H) + (1 + e^2 \cos 2B) \times \\ & \times (\omega_X \sin L - \omega_Y \cos L) / \rho'' + m e^2 \sin B \cos B; \\ \Delta L = & +(\Delta X \sin L - \Delta Y \cos L) / (N + H) \cos B - (1 - e^2) \operatorname{tg} B \times \\ & \times (\omega_X \cos L + \omega_Y \sin L) / \rho'' + \omega_Z / \rho''; \\ \Delta H = & -\frac{a \Delta a}{N} + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B - \\ & + \Delta Z \sin B + e^2 N \sin B \cos B (\omega_X \sin L - \omega_Y \cos L) / \rho'' - \\ & - (N + H - e^2 N \sin^2 B) m. \end{aligned}$$

### 3.4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СРЕДНЕЙ ТОЧНОСТИ

Как уже отмечалось выше, к числу таких относятся способы, точность которых находится в пределах от  $\pm 2$  до  $\pm 5$  метров. Верхний предел точности  $\pm 2$  метра такие способы уже не достигают из-за упрощения вычислительных процедур, чем они и отличаются от рассмотренных в предыдущем параграфе. Нижний предел  $\pm 5$  метров обуславливается точностью определения места судна  $\pm 10$  метров с вероятностью 0,95 согласно Резолюции ИМО А.815 (19), принятой 23 ноября 1995 года [45]. Следовательно, для вероятности 0,67 требуемая точность определения места составит  $\pm 5$  метров. О точности таких способов имеет смысл говорить еще и с точки зрения дифференциальных GPS (DGPS). Чаще всего DGPS обеспечивают точность определения места судна не хуже  $\pm 5$  метров с вероятностью 0,95. Если же координаты в системе WGS 84, полученные с такой точностью, преобразовывать в координаты в геодезической системе путевой карты, то неизбежно ощутимое понижение точности вплоть до предельно допустимой, оговоренной Резолюцией А.815 (19). На это еще накладываются возможные потери точности в процессе вычислений из-за, например, недостаточной разрядности, которую обеспечивает программное обеспечение данного вычислительного устройства, а также из-за не всегда точного знания элементов взаимного ориентирования референц-эллипсоидов. Перечисленные причины оказались среди прочих в основе решения ведущих морских держав перейти к изготовлению морских карт в геодезической системе WGS 84, а трансляцию дифференциальных поправок организовывать относительно опорных станций, приемные антенны которых также имеют геодезическую привязку к системе WGS 84.

Исходя из вышеизложенного, стоит напомнить о том, что способы преобразования координат средней точности следует применять с большой осторожностью, если определение обсервованного места судна происходит с использованием дифференциальных GPS.

**Стандартный способ Молоденского.** Данный способ представляет собой модификацию изложенного выше способа академика М.С. Молоденского. Модифицированный способ Молоденского получил за рубежом самое широкое применение. Практически все морские профессиональные приемоиндикаторы системы Навстар GPS зарубежного производства выполняют задачу преобразования координат по формулам стандартного способа Молоденского. Более того, геодезические службы Министерства

обороны США применяют этот способ в качестве официального для расчета поправок при переходе от местных геодезических систем к WGS 84 [35, 89, 100]. В зарубежной литературе стандартный способ Молоденского называют “Standard Molodensky Formulas”. Формулы стандартного способа обеспечивают достаточно высокую точность преобразования координат, близкую к  $\pm 2$  метрам, и поэтому их можно применять при работе в зонах действия станций дифференциальных GPS даже при небольших удалениях от них. Приводимые ниже формулы даны в обозначениях, принятых в англоязычной литературе, и справедливы для широт не более  $89^\circ$ .

$$\Delta\phi'' = \left[ -\Delta X \sin\phi \cos\lambda - \Delta Y \sin\phi \sin\lambda + \Delta Z \cos\phi + \Delta a \frac{R_N e^2 \sin\phi \cos\phi}{a} + \Delta f \left( R_M \frac{a}{b} + R_N \frac{b}{a} \right) \sin\phi \cos\phi \right] \cdot [(R_M + h) \sin 1'']^{-1},$$

$$\Delta\lambda'' = \frac{-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda}{(R_N + h) \cos\phi \sin 1''},$$

$$\Delta h = \Delta X \cos\phi \cos\lambda + \Delta Y \cos\phi \sin\lambda + \Delta Z \sin\phi - \Delta a \frac{a}{R_N} + \Delta f \frac{b}{a} R_N \sin^2\phi.$$

В приведенных формулах  $\phi$ ,  $\lambda$  являются геодезическими координатами местной геодезической системы (системы карты), выраженными в градусной мере. Южные широты и западные долготы подставляются в формулы со знаком минус. Через  $h$  обозначена геодезическая высота в метрах, то есть возвышение, например, антенны приемника над поверхностью референц-эллипсоида, лежащего в основе геодезической системы карты. Геодезическая высота измеряется по нормали к поверхности эллипсоида.

$h = N + H$ , где  $N$  – отстояние поверхности геоида от поверхности референц-эллипсоида. Если поверхность геоида располагается над поверхностью эллипсоида, то  $N$  имеет знак плюс.  $H$  – возвышение антенны приемника над поверхностью геоида. Поскольку в первом приближении поверхность геоида можно принять за средний уровень моря, то вблизи берегов, где приливо-отливные явления могут достигать несколько метров,  $H$  может принимать отрицательные значения для малых судов. Поправки к широте ( $\Delta\phi$ ) и к долготе ( $\Delta\lambda$ ) рассчитываются в угловых секундах, а  $\Delta h$  – в метрах.  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  – это линейные элементы взаимного ориентирования местного референц-эллипсоида относительно референц-эллипсоида

WGS 84. Предполагается, что эти элементы, входящие в формулы стандартного способа Молоденского, есть результат вычитания из координат центра референц-эллипсоида WGS 84 координат центра местного референц-эллипсоида. Следовательно, эти величины можно прямо выбирать из Приложения 6 со своими знаками. Величина  $a$ ,  $b$ ,  $f$  – это большая, малая полуоси и сжатие местного референц-эллипсоида соответственно. Необходимо помнить, что сжатие и полуоси находятся в следующем соотношении:  $1 - f = b/a$ .  $\Delta a$  и  $\Delta f$  являются разностями между большими полуосями и сжатиями эллипсоида WGS 84 и местного референц-эллипсоида соответственно. Эти величины можно выбрать из Приложения 6 с их знаками. Следует помнить, что в Приложении 6 разности между сжатиями для экономии места приведены умножениями на  $10^4$ . Поэтому для вычислений по формулам стандартного способа Молоденского разности сжатий, выбранные из Приложения 6, следует умножать на  $10^{-4}$ . Через  $e$  обозначен первый эксцентриситет местного эллипсоида. Его величину можно выбрать из Приложения 1 или рассчитать по следующей известной формуле:

$$e = \sqrt{2f - f^2}.$$

$R_N$  – радиус кривизны в первом вертикале

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}.$$

$R_M$  – радиус кривизны меридиана

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^3}}.$$

Величину  $\sin 1''$  можно выбрать из Приложения 7.

Формулы стандартного способа Молоденского составлены при предположении, что необходимо преобразовать координаты карты в координаты системы WGS 84. Следовательно, чтобы получить координаты в системе WGS 84, необходимо рассчитать поправки по координатам карты и по параметрам той геодезической системы, на основе которой составлена карта, а затем полученные поправки с их знаками придать к координатам карты. Для решения других задач можно применять рассуждения, аналогичные тем, что приведены при изложении точного способа Молоденского в предыдущем параграфе.

Когда приходится работать с поправками, выраженными в угловых секундах, то зачастую возникает необходимость оценить их в метрах. Длину дуги одной секунды меридиана в данной широте в

метрах можно вычислить так:  $\Delta\phi_M = \text{arc } 1'' \cdot R_M$ . Тогда длина дуги одной секунды долготы в метрах в данной широте с учетом предыдущей формулы определится довольно просто:  $\Delta\lambda_M = \Delta\phi_M \cos \phi$ . Для приближенных расчетов можно применять следующие формулы:

$$\Delta\phi_M = 30,92 \Delta\phi'', \quad \Delta\lambda_M = 30,92 \Delta\lambda'' \cos \phi.$$

Пример. Пусть на карте, составленной на основе геодезической системы NAD 27, имеется точка со следующими координатами:  $\phi_{27} = 30^\circ$  N,  $\lambda_{27} = 100^\circ$  W,  $h = 232$  м. Необходимо определить координаты этой же точки в геодезической системе WGS 84. По данным Приложения 6 рассчитанные поправки примут следующие значения  $\Delta\phi'' = +0,81''$ ,  $\Delta\lambda'' = -1,33''$ ,  $\Delta h = -37,18$  м. Тогда искомые координаты будут равны:

$$\begin{aligned} \phi_{84} &= +30^\circ + (+0,81'') = 30^\circ 00' 00,81'' \text{ N}, \\ \lambda_{84} &= -100^\circ + (-1,33'') = 100^\circ 00' 01,33'' \text{ W}, \\ h_{84} &= 232 + (-37,18) = 194,82 \text{ м}. \end{aligned}$$

**Специальный способ преобразования.** Этот способ был разработан отечественными геодезистами для перехода от ГС Пулково-42 к новой отечественной ГС ПЗ 90 [104]. Данным способом непосредственно вычисляются геодезические координаты по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_B &= B_A - \frac{\rho''}{M + H} \left[ \frac{Ne^2 \sin B \cos B \Delta a}{a} + \left( \frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B \right], \\ L_B &= L_A - \frac{\rho''}{(N + H) \cos B} (\Delta Y \cos L - \Delta X \sin L), \\ H_B &= H_A + \frac{a \Delta a}{N} - \frac{N \sin^2 B \Delta e^2}{2} - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B - \Delta Z \sin B, \end{aligned}$$

где  $\rho''$  – число секунд в одном радиане.

Данный способ является итерационным. На первом этапе вычислений в приведённые выше формулы подставляются координаты в системе ГС А, чтобы получить первые приближения  $B_B$ ,  $L_B$ ,  $H_B$ . На втором этапе в формулы подставляются полусуммы больших полуосей, квадратов первых эксцентриситетов, соответствующих координат и главных радиусов кривизн. Итерации прекращаются по достижении заданной точности вычислений.

Если сравнить приведённые выше формулы поправок с первыми дифференциальными формулами преобразования, то можно сделать вывод о том, что специальный способ преобразования представляет



собой усечённые дифференциальные формулы без учёта углов разворота осей и масштабного множителя.

**Табличный способ перехода от WGS 84 к WGS 72.** Такой способ преобразования координат предполагает использование поправок, вычисленных заранее и сведенных в таблицу, вход в которую осуществляется по текущим координатам судна. Работа с таблицами поправок существенно экономит время штурманов. Таблицы более наглядны, предполагают несложную интерполяцию и устраняют путаницу со знаками поправок.

Примером рассматриваемого способа преобразования служит приводимая в Извещениях мореплавателям 1–20, 9956.01 вып. № 1 от 1 января 1998 года Таблица 10 поправок для перехода от широты геодезической системы WGS 84 к широте геодезической системы WGS 72. Поправка к долготе при таком переходе будет постоянной и равной  $-0,55''$ . Из таблицы видно, что координаты одной и той же точки в системе WGS 72 всегда будут южнее и западнее координат в системе WGS 84.

Таблица 10

Поправки для перехода от широты геодезической системы WGS 84 к широте геодезической системы WGS 72.

$\varphi_N$	$\Delta\varphi''$	$\varphi_N$	$\Delta\varphi''$	$\varphi_S$	$\Delta\varphi''$	$\varphi_S$	$\Delta\varphi''$
+90°	-0,00''	+40°	-0,12''	-90°	-0,00''	-40°	-0,11''
85	0,01	35	0,13	85	0,01	35	0,11
80	0,03	30	0,13	80	0,02	30	0,12
75	0,04	25	0,14	75	0,03	25	0,13
70	0,05	20	0,14	70	0,05	20	0,13
65	0,07	15	0,14	65	0,06	15	0,14
60	0,08	10	0,15	60	0,07	10	0,14
55	0,09	5	0,15	55	0,08	5	0,14
50	0,10	0	0,15	50	0,09	0	0,15
45	0,11			45	0,10		

Чтобы получить широту в системе WGS 72, необходимо выбрать из таблицы величину  $\Delta\varphi''$  и сложить ее со своим знаком с широтой в системе WGS 84. Чтобы получить долготу в системе WGS 72, необходимо к долготе в системе WGS 84 придать поправку  $-0,55''$ . Таким образом:

$$\varphi_{72} = \varphi_{84} + \Delta\varphi, \quad \lambda_{72} = \lambda_{84} + \Delta\lambda.$$

Рассмотрим пример. Пусть координаты судна в системе WGS 84 равны  $\varphi_{84} = 42^\circ\text{N}$ ,  $\lambda_{84} = 139^\circ\text{E}$ . Получим координаты судна в системе WGS 72.

$$\varphi_{72} = +42^\circ + (-12'') = 41^\circ 59' 48''\text{N}, \quad \lambda_{72} = +139^\circ + (-0,55'') = 138^\circ 59' 59,45''\text{E}.$$

Так как поправки обладают свойством обратимости, то поправки из приведенной таблицы можно использовать с обратными знаками для перехода от координат в системе WGS 72 к координатам системы WGS 84. То есть:  $\varphi_{84} = \varphi_{72} - \Delta\varphi$ ,  $\lambda_{84} = \lambda_{72} - \Delta\lambda$ .

### 3.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Такие способы отличаются от предыдущих простыми вычислениями, реализуемыми даже на микрокалькуляторах, но характеризуются низкой точностью, которая заметно хуже  $\pm 5$  метров. Поэтому их не рекомендуется применять при использовании дифференциальных поправок. Приближенные способы применимы для проверки точности преобразования координат приемниками Навстар GPS, а также для расчетов поправок к координатам, вычисляемых приемником, который в своем меню не имеет данной местной геодезической системы.

**Приближённый способ Молоденского.** В отечественной практике преобразования координат получили развитие так называемые приближённые формулы академика Молоденского, которые являются упрощенными формулами более строгого решения, изложенного в предыдущем параграфе. Приближённый способ Молоденского, несомненно, проще с точки зрения вычислительных процедур, но уступает в точности предыдущим способам. Поэтому его можно смело применять при плавании в открытом море и с осторожностью при плавании вблизи берегов на больших удалениях от антенн опорных приемников станций дифференциальных GPS. Формулы приближённого способа Молоденского выглядят следующим образом:

$$\Delta B = \frac{1}{M} [-\Delta X \sin B_1 \cos L_1 - \Delta Y \sin B_1 \sin L_1 + \Delta Z \cos B_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) a_1 \sin 2B_1 + (a_2 - a_1) \alpha_1 \sin 2B_1],$$

$$\Delta L = \frac{1}{a_1} (-\Delta X \sin L_1 + \Delta Y \cos L_1) \sec B_1,$$

$$\Delta H = \Delta X \cos B_1 \cos L_1 + \Delta Y \cos B_1 \sin L_1 + \Delta Z \sin B_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) a_1 \sin^2 B_1 - (a_2 - a_1) \alpha_1.$$

Обозначения в приведенных выражениях полностью соответствуют обозначениям формул Молоденского, изложенных в предыдущих параграфах.

Анализ формул говорит о том, что в расчетах поправок к широте и к долготе геодезическая высота участка уже не принимает. Поэтому, с одной стороны, эти формулы удобны тем, что для практических расчетов вполне можно ограничиться первыми двумя поправками. С другой стороны, отсутствие геодезической высоты в расчетах  $\Delta B$  и  $\Delta L$  говорит о закруглении точности вычислений. Таким образом, приближенные формулы Молоденского применимы при плавании в зонах действия дифференциальных GPS только при большом удалении от опорной станции. При использовании приближенного способа Молоденского следует применять такие же рассуждения, что и для способов Молоденского, изложенных в предыдущих параграфах.

**Способ Слудского.** Еще более простые формулы без заметной потери точности были получены Ф.А. Слудским [31]:

$$\begin{aligned}\Delta B &= \frac{1}{a_1}(-\Delta X \sin B_1 \cos L_1 - \Delta Y \sin B_1 \sin L_1 + \Delta Z \cos B_1) + \\ &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 2B_1, \\ \Delta L &= \frac{1}{a_1}(-\Delta X \sin L_1 + \Delta Y \cos L_1) \sec B_1, \\ \Delta H &= \Delta X \cos B_1 \cos L_1 + \Delta Y \cos B_1 \sin L_1 + \Delta Z \sin B_1 + \\ &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1) a_1 \sin^2 B_1 - (a_2 - a_1).\end{aligned}$$

К вычислительным процедурам по формулам Слудского следует относиться аналогично приближенным формулам Молоденского.

**Преобразования координат с помощью МТ-2000.** Мореходные таблицы МТ-2000 содержат в себе три таблицы, которые применяются в целях преобразования координат. В Таблице 2.23. помещены величины больших полуосей и полярных сжатий основных референц-эллипсоидов. Эта таблица аналогична таблице Приложения 6 данного учебного пособия. В Таблице 2.24. содержатся параметры для перехода от координат в системе WGS 84 к координатам в геодезической системе, в которой составлена карта. В этой таблице приводятся линейные смещения центров локальных референц-эллипсоидов относительно координат центра референц-эллипсоида WGS 84 (то есть, известные  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ), а также величины

коэффициентов  $K_1 - K_4$ . Эти параметры используются для вычисления поправок к широте и долготе по упрощенным формулам Молоденского

$$\Delta\varphi = K_1 \sin 2\varphi + K_2 \sin \varphi \cos \lambda + K_3 \sin \varphi \sin \lambda + K_4 \cos \varphi,$$

$$\Delta\lambda = K_2 \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} - K_3 \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi}.$$

К сожалению, в описании Таблицы 2.24. не приведены формулы, по которым рассчитаны коэффициенты  $K_1 - K_4$ , что не позволяет с уверенностью судить о даже средней точности предлагаемого способа преобразования координат.

Далее в описании Таблицы 2.24. приводятся формулы для расчёта поправок в угловых секундах к широте и долготе по формулам Молоденского, которые имеют несколько иной вариант записи.

$$\Delta\varphi = \frac{a\Delta\alpha + \alpha\Delta a}{R_M \sin 1''} \sin 2\varphi - \frac{\Delta X}{R_M \sin 1''} \sin \varphi \cos \lambda - \frac{\Delta Y}{R_M \sin 1''} \sin \varphi \sin \lambda -$$

$$- \frac{\Delta Z}{R_M \sin 1''} \cos \varphi,$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\Delta X}{R_N \sin 1''} \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} + \frac{\Delta Y}{R_N \sin 1''} \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi},$$

где  $a$  и  $\alpha$  – большая полуось (в метрах) и полярное сжатие соответственно эллипсоида WGS 84,  $\Delta a$  и  $\Delta\alpha$  – разности между соответствующими элементами ( $a_K, \alpha_K$ ) эллипсоида, принятого для геодезической системы координат карты, и соответствующими элементами ( $a, \alpha$ ) эллипсоида WGS 84 ( $\Delta a = a_K - a, \Delta\alpha = \alpha_K - \alpha$ ),  $R_M$  и  $R_N$  – радиусы кривизны меридиана и первого вертикала соответственно эллипсоида WGS 84.

Для того, чтобы получить величину  $\Delta\alpha$  перед подстановкой её в эти формулы, штурману потребуются сделать дополнительные вычисления, делая выборку полярных сжатий эллипсоидов из Таблицы 2.23. Вычисление радиусов  $R_M$  и  $R_N$  требует знания величины квадрата первого эксцентриситета эллипсоида WGS 84. К сожалению, этой величины в МТ-2000 нет.

Достаточно полезна для практического применения Таблица 2.26., из которой можно выбирать поправки для перехода от координат геодезической системы WGS 84 к координатам в системе Пулково-42

(СК 42). С помощью этой таблицы можно, например, оперативно контролировать работу судового приёмника СРНС Навстар GPS, который настроен на отображение обсервованных координат в системе Пулково-42. К сожалению, эту таблицу можно применять на гражданских судах только при плавании в водах Европейской части России. Как уже отмечалось выше, навигационные карты Дальневосточных морей содержат искусственные сдвиги геодезических координат, величины которых сопоставимы с обсуждаемыми поправками. Остаётся надеяться, что новые карты, составленные на основе геодезической системы СК-95, уже не будут содержать сдвигов, а в новых мореходных таблицах появится таблица, аналогичная Таблице 2.26.

В МТ-2000 есть Таблица 2.25. поправок для перехода от WGS 84 к WGS 72. Она полностью идентична Таблице 10 предыдущего параграфа данного учебного пособия.

**Упрощенные способы Молоденского.** Рассматриваемые ниже способы были разработаны американскими учеными еще в семидесятых годах для перехода от координат, вычисляемых приёмниками спутниковой радионавигационной системы Транзит, к координатам в тех геодезических системах, в которых составлены навигационные карты. Поскольку точность определения места судна по СРНС Транзит не отличалась высокой точностью из-за счислимо-обсервованной природы, то для преобразования координат не требовалась высокая точность вычисления поправок. Этим и объясняется вычислительная простота обсуждаемых ниже упрощённых способов. В большинстве своем приёмники СРНС Транзит вычисляли счислимо-обсервованные координаты в геодезической системе WGS 72. Поэтому в те годы сложилась традиция перехода от координат в системе WGS 72 к координатам геодезической системы навигационной карты, что и отражают приводимые ниже формулы. Иными словами, чтобы получить координаты в геодезической системе карты  $(\varphi_K, \lambda_K)$ , необходимо рассчитанные поправки  $(\Delta\varphi, \Delta\lambda)$  и алгебраически сложить их с координатами в системе WGS 72, отображаемые приёмником СРНС Транзит. Упрощенные способы академика М.С. Молоденского применимы и для работы с геодезической системой координат WGS 84, на которую переведена была СРНС Транзит с января 1987 года. Для этого необходимо использовать параметры Приложения 6.

Остановимся на этих способах подробнее. Первый способ вычисления поправок имеет следующие формулы [46]:

$$\Delta\varphi' = \frac{3438}{M_{84}} [\Delta X \sin \varphi_{84} \cos \lambda_{84} + \Delta Y \sin \varphi_{84} \sin \lambda_{84} - \Delta Z \cos \varphi_{84} - (a_K \Delta f + f_K \Delta a) \sin 2\varphi_{84}],$$

$$\Delta\lambda' = \frac{3438}{N_{84} \cos \varphi_{84}} (\Delta X \sin \lambda_{84} - \Delta Y \cos \lambda_{84}),$$

где  $M_{84}$ ,  $N_{84}$  – радиусы кривизны меридионального и нормального сечений соответственно референц-эллипсоида WGS 84, рассчитываемые по известным формулам;  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  – отстояния центра референц-эллипсоида карты от центра референц-эллипсоида WGS 84, которые выбираются из Приложения 6;  $\varphi_{84}$ ,  $\lambda_{84}$  – координаты в геодезической системе WGS 84;  $a_K$  – большая полуось референц-эллипсоида карты, которая выбирается из Приложения 4;  $\Delta f = f_{84} - f_K$  – разность сжатий референц-эллипсоидов, которая выбирается из Приложения 6 и умножается на  $10^{-4}$  перед подстановкой в формулы;  $f_K$  – сжатие референц-эллипсоида карты, которое можно вычислить по данным Приложения 4;  $\Delta a = a_{84} - a_K$  – разность между большими полуосями референц-эллипсоида WGS 84 и референц-эллипсоида карты; величина  $\Delta a$  выбирается из Приложения 6.

Координаты в геодезической системе навигационной карты рассчитываются так:

$$\varphi_K = \varphi_{84} + \Delta\varphi', \quad \lambda_K = \lambda_{84} + \Delta\lambda'.$$

Как уже отмечалось ранее, поправки обладают свойством обратимости. Поэтому если необходимо от координат карты перейти к координатам в системе WGS 84, то достаточно из координат карты алгебраически вычесть поправки, рассчитанные по приближенным формулам Молоденского.

Существует более простой и менее точный способ Молоденского для расчета поправок. Его формулы имеют следующую запись [46]:

$$\Delta\varphi' = \frac{3438}{a_{84}} [\Delta X \sin \varphi \cos \lambda + \Delta Y \sin \varphi \sin \lambda - \Delta Z \cos \varphi - a_K \Delta f \sin 2\varphi],$$

$$\Delta\lambda' = \frac{3438}{a_{84} \cos \varphi} (\Delta X \sin \lambda - \Delta Y \cos \lambda).$$

В эти формулы в качестве  $\varphi$  и  $\lambda$  можно помещать счислимые координаты, либо координаты, полученные от приемоиндикатора.

В работе [105] изложена ещё одна версия формул Молоденского, которые по точности занимают промежуточное положение между

приближёнными и упрощёнными способами преобразования координат.

$$\Delta\varphi'' = \frac{1}{M} [-\Delta X \sin \varphi \cos \lambda - \Delta Y \sin \varphi \sin \lambda + \Delta Z \cos \varphi + (a\Delta f + f\Delta a)2 \sin \varphi \cos \varphi],$$

$$\Delta\lambda'' = \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{N \cos \varphi},$$

$$\Delta h = \Delta X \cos \varphi \cos \lambda + \Delta Y \cos \varphi \sin \lambda + \Delta Z \sin \varphi + (a\Delta f + f\Delta a) \sin^2 \varphi - \Delta a.$$

**Картографические способы.** Данный способ был разработан для нужд картографии. Он применяется тогда, когда необходимо рассчитать сдвиг меридианов и параллелей при составлении крупномасштабных карт во второй геодезической системе по данным первой. Поправки к широтам и долготам вычисляются по следующим формулам [29]:

$$\Delta B'' = 0,0323[(a_1\Delta\alpha + \alpha_1\Delta a) \sin 2B_1 + \Delta Z \cos B_1 - (\Delta X \cos L_1 + \Delta Y \sin L_1) \sin B_1],$$

$$\Delta L'' = 0,0323(\Delta Y \cos L_1 - \Delta X \sin L_1) \sec B_1,$$

где  $B_1, L_1$  – геоцентрические координаты в первой геодезической системе,  $a_1$  – большая полуось референц-эллипсоида первой геодезической системы,  $\Delta a$  – разность между большими полуосями референц-эллипсоидов второй геодезической системы ( $a_2$ ) и первой ( $a_1$ ),  $\Delta\alpha$  – разность между сжатиями референц-эллипсоидами:  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – разности между началами координат центра второй геодезической системы и первой, то есть:  $\Delta X = \Delta X_2 - \Delta X_1$ ,  $\Delta Y = \Delta Y_2 - \Delta Y_1$ ,  $\Delta Z = \Delta Z_2 - \Delta Z_1$ , где координаты центров референц-эллипсоидов ( $\Delta X, \Delta Y$ ) являются координатами центров относительно геоцентрической системы координат. Следует не отождествлять их с данными Приложения 6, где  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  заданы относительно центра референц-эллипсоида WGS 84.

Для реализации картографического способа преобразования координат следует использовать данные нижеследующей таблицы, а также данные Приложений 4 и 5. Необходимо помнить, что координаты  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  таблицы даны относительно геоцентрической системы координат.

Таблица 11

## Координаты центров основных референц-эллипсоидов [29]

Название геодезической системы	Референц-эллипсоид	$\Delta X$ (м)	$\Delta Y$ (м)	$\Delta Z$ (м)
Европейская	Хейфорда	-83	-111	-126
Токийская	Бесселя	-143	+514	+675
Австралийская	Австралийский	-123	-43	+137
Индийская	Эвереста	+293	+699	+229
Африканская	Кларка 1880	-128	-146	-348
Североамериканская	Кларка 1866	-21	+158	+176
Южноамериканская	Хейфорда	-78	+2	-43

Расчеты по формулам картографического способа имеют особенности, поэтому рассмотрим пример. Рассчитаем поправки для перехода от координат Индийской геодезической системы (первая система) к Европейской. Пусть геодезическая широта точки  $A$  в первой системе  $B_1 = 25^\circ \text{ N}$ , а долгота  $L_1 = 75^\circ \text{ E}$ . Данные для расчета помещены в промежуточную таблицу:

Название геодезической системы	$a$ (м)	$\alpha$	$\Delta X$ (м)	$\Delta Y$ (м)	$\Delta Z$ (м)
Европейская	6378388	$3,3670033 \cdot 10^{-3}$	-83	-111	-126
Индийская	6377276,345	$3,3244492 \cdot 10^{-3}$	+293	+699	+229
Разности	+1111,655	$+4,25541 \cdot 10^{-5}$	-376	-810	-355

По сравнению с референц-эллипсоидом Хейфорда большая ось референц-эллипсоида Эвереста больше на величину  $\Delta a = +1111,655$  м, а сжатие референц-эллипсоида Хейфорда меньше, поэтому  $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = +4,25541 \cdot 10^{-5}$ .  $\Delta X = -376$  м,  $\Delta Y = -810$  м,  $\Delta Z = -355$  м. Если подставить эти данные в формулы, то получим:  $\Delta B'' = +8,42''$ ,  $\Delta L'' = +5,47''$ . Следовательно, координаты точки  $A$  в Европейской геодезической системе будут:  $B_2 = 25^\circ 00' 08,42'' \text{ N}$ ,  $L_2 = 75^\circ 00' 05,47'' \text{ E}$ .

В послевоенные годы прошлого века в СССР был разработан довольно простой способ преобразования координат, который использовался в картографических целях для изготовления карт морских в геодезической системе Пулково-42 (СК-42) на иностранные воды. Точность преобразования был вполне достаточным для изготовления карт. Поправки для перехода к СК-42 вычислялись по следующим формулам [68]:



$$\Delta\varphi' = \cos(\lambda_0 - \lambda)\Delta\varphi_0, \quad \Delta\lambda' = \Delta\lambda_0 - \sin(\lambda_0 - \lambda)\operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta\varphi_0.$$

После этого вычислялись поправки за переход к эллипсоиду Красовского.

$$\Delta\varphi'' = (\varphi_0 - \varphi)\frac{\Delta a}{a} - (\varphi_0 - \varphi)(2 - 3\sin^2\varphi_m)\Delta\alpha,$$

$$\Delta\lambda'' = (\lambda_0 - \lambda)\frac{\Delta a}{a} + (\lambda_0 - \lambda)\sin^2\varphi_m \cdot \Delta\alpha, \quad \varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi).$$

В приведённых формулах  $\varphi_0, \lambda_0$  – широта и долгота исходного пункта геодезической системы,  $\varphi, \lambda$  – широта и долгота данного пункта,  $\Delta\varphi_0, \Delta\lambda_0$  – изменение координат исходного пункта,  $\Delta a/a$  – относительное изменение большой полуоси эллипсоида,  $\Delta\alpha$  – изменение сжатия эллипсоида. Знаки  $\Delta\varphi_0, \Delta\lambda_0, \Delta a, \Delta\alpha$  определяются в результате вычитания из координат СК-42 и размеров эллипсоида Красовского значений координат исходных пунктов геодезических систем, от которых происходит переход, и их эллипсоидов. Координаты исходных пунктов большинства астрономо-геодезических систем приводятся в Таблице 46 источника [68].

**Способ трёх параметров Молоденского.** Использование способа трёх параметров Молоденского предполагает, что оси декартовых координат геодезических систем параллельны. До создания спутниковых радионавигационных систем, когда технологии применения высокоточных способов преобразования координат не были развиты, такое предположение не вызывало критики. В последние годы интерес к этому способу утрачен. Однако им можно пользоваться для работ на ограниченной территории. В частности, его можно применять для перехода от координат в системе СК-42 к координатам в новой отечественной системе СК-95. Преобразование этим способом аналогично способу Гельмерта, а точность достигает  $\pm 15$  м.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix},$$

где  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – вектор отстояния центров геодезических систем.

### 3.6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ КАРТЫ

К числу наиболее часто применяемых в судовождении способов преобразования координат относится использование поправок, напечатанных на навигационных картах. Так как поправки в этом случае нет надобности вычислять, то тем самым устраняются затраты времени на выполнение расчетов на судне и возможные ошибки в процессе вычислений. С другой стороны, если даже поправки вычисляются штурманом, то сравнение их с напечатанными на карте служит прекрасным средством устранения промахов.

В своё время ведущие морские державы изготовили достаточно много карт, составленных на геодезической основе системы WGS 72. Если для графического счисления пути судна используется такая карта масштаба мельче 1:50000, то координаты, полученные в системе WGS 84 можно смело наносить без преобразования в систему WGS 72 непосредственно на карту. Объясняется это тем, что предельная точность масштаба карты (наименьшая длина на местности, способная быть измеренной на карте) становится больше поправок. Поясним это на примере. Пусть навигационная карта, используемая для ведения графического счисления, составлена в геодезической системе координат WGS 72 масштаба 1:250000. Предельная точность масштаба такой карты будет  $250000 \cdot 0,2 \text{ мм} = 50 \text{ метров}$ . Поправки (в метрах) для перехода к системе координат WGS 84 составят для широты Владивостока 3,7 м по меридиану и 12,4 м по параллели. Следовательно, поправки будут меньше следа от укола иглы измерителя на карте, а с точки зрения точности ведения графического счисления системы WGS 72 и WGS 84 для такой карты можно считать тождественными. Если же используется карта, составленная на основе WGS 72, масштаба 1:10000, то ее предельная точность масштаба составит уже 2 м, что заметно меньше поправок. Поэтому на такой карте обязательно должны быть напечатаны поправки для преобразования координат.

Всегда необходимо помнить о том, что указываемые на карте поправки для преобразования координат относятся к середине карты. По мере приближения к краям карты точность поправок ухудшается.

Существуют определенные национальные правила указания поправок на картах, о которых надо знать каждому судоводителю.

Начиная с июня 1993 года, на картах издания Главного Управления Навигации и Океанографии (ГУНиО) Российской Федерации поправки публикуются в следующей редакции:

- на картах масштаба мельче 1:50000 год учреждения систем WGS в Предупреждениях о поправках не указывается;
- на картах масштаба 1:50000 и крупнее в Предупреждениях о поправках указывается год учреждения системы WGS;
- указываемые поправки служат для перехода от соответствующей системы WGS к геодезической системе координат карты.

Переход к геодезической системе координат карты более естественен с точки зрения технологии ведения прокладки, так как удобнее судовой приемоиндикатор запрограммировать на вычисление обсервованных координат в системе WGS и ввести в него поправки, снятые с карты, для автоматического перехода к координатам карты. В таком случае приемоиндикатор будет высвечивать координаты, которые наносятся непосредственно на карту.

Всегда надо помнить, что знаки поправок полностью аналогичны знакам разности широт и разности долгот.

На картах ГУНиО поправки приводятся в угловых секундах. Большинство же приемоиндикаторов иностранного производства воспринимают вводимые поправки за переход к местным геодезическим системам координат в угловых минутах. В такой ситуации следует поправки в угловых секундах перед вводом в приемоиндикатор разделить на 60.

На судах отечественного флота можно встретить навигационные карты, отпечатанные до 1993 года, с указанием поправок для перехода к координатам карты из системы координат WGS 72. Здесь можно поступать двояко. Можно перевести приемоиндикатор на отображение координат в системе WGS 72 и ввести в него поправки, снятые с карты. Можно поступить иначе: перевести приемоиндикатор на отображение координат в системе WGS 84 и ввести в него поправки  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$ , которые будут являться суммой поправок для перехода из системы WGS 84 в систему WGS 72 ( $\Delta\varphi_{84-72}$ ,  $\Delta\lambda_{84-72}$ ) и поправок, снятых с карты ( $\Delta\varphi_{72-К}$ ,  $\Delta\lambda_{72-К}$ ),

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{84-72} + \Delta\varphi_{72-К}, \quad \Delta\lambda = \Delta\lambda_{84-72} + \Delta\lambda_{72-К}.$$

Для второго варианта рассмотрим пример. Пусть используется карта № 62082 издания ГУНиО 25.04.92. Карта № 62082 изготовлена на основе Токийской геодезической системы координат. В Предупреждениях этой карты напечатано: “Для перехода от системы координат WGS 72 к системе координат карты надлежит место на карте, полученное с помощью СНС, сдвинуть на 9,3 секунды к югу и на 13,4 секунды к востоку”. Пусть обсервованные координаты,

отображаемые судовым приемоиндикатором в геодезической системе WGS 84, равны  $\varphi_{84} = 42^\circ\text{N}$  и  $\lambda_{84} = 139^\circ\text{E}$ . Необходимо рассчитать поправки для перехода от координат WGS 84 к координатам карты.

Поправки  $\Delta\varphi_{84-72}$  и  $\Delta\lambda_{84-72}$  выберем из материала предыдущего раздела «Табличный способ» или рассчитаем по формулам раздела «Переход от WGS 72 к WGS 84». Эти поправки будут такими:  $\Delta\varphi_{84-72} = -0,12''$ ,  $\Delta\lambda_{84-72} = -0,55''$ . Поправки  $\varphi_{72-К}$ ,  $\Delta\lambda_{72-К}$ , исходя из текста Предупреждения на карте, примут следующие значения:  $\Delta\varphi_{72-К} = -9,3''$ ,  $\Delta\lambda_{72-К} = +13,4''$ . Отсюда искомые поправки станут такими:

$$\Delta\varphi = (-0,12'') + (-9,3'') = -9,4''; \quad \Delta\lambda = (-0,55'') + (+13,4'') = +12,9''.$$

Следовательно, обсервованные координаты судна в Токийской геодезической системе будут равны

$$\varphi_{\kappa} = (+)42^\circ\text{N} + (-9,4'') = 41^\circ 59' 50,6''\text{N}; \quad \lambda_{\kappa} = (+)139^\circ\text{E} + (+12,9'') = 139^\circ 00' 12,9''\text{E}.$$

В 1983 году Международной Гидрографической Организацией было принято решение, согласно которому на морских картах масштаба 1:500000 и крупнее изготовители карт должны помещать поправки для перехода от системы WGS к системе координат карты. Если величины поправок незначительны, то это также должно быть указано в Предупреждении.

На адмиралтейских картах поправки для перехода к местной геодезической системе координат печатаются уже более 15 лет. Принципы указания поправок аналогичны отечественным. Однако существуют отличия в единицах измерения поправок. Английское адмиралтейство печатает поправки в угловых минутах [47]. Частично это объясняется тем, что зарегистрированы значительные расхождения между местными геодезическими системами координат и системами WGS, достигающие до семи миль.

Поправки на адмиралтейских картах указываются с точностью до сотых долей минуты. На самом деле это недостаточно высокая точность, явно не применимая для районов плавания, в которых используются сигналы дифференциальных станций, так как одна сотая доля угловой минуты широты приблизительно соответствует 18 метрам. И, если реальная поправка будет меняться, скажем, от 0,005' до 0,014', то на карте все равно будет напечатано только 0,01', что говорит о низкой чувствительности такого отображения поправок.

На английских картах такого рода поправки указываются под заголовком «SATELLITE-DERIVED POSITIONS». Эта информация всегда находится рядом с заголовком карты. Например, на

адмиралтейской карте № 777 масштаба 1:75000, переизданной 8 октября 1993 года, напечатано:

*SATELLITE DERIVED POSITIONS*

*Positions obtained from satellite navigation systems are normally referred to WGS Datum; such positions should be moved 0.04 minutes SOUTHWARD and 0.06 minutes EASTWARD to agree with this chart.*

Так как эта карта имеет масштаб мельче 1:50000, то, как видно из текста, не оговаривается год учреждения системы WGS. Из текста предупреждения следует, что полученные от спутникового приемоиндикатора координаты перед нанесением на карту следует исправить поправками  $\Delta\varphi = -0,04'$  и  $\Delta\lambda = +0,06'$ . Например, пусть обсервованные координаты на экране спутникового приемоиндикатора, работающего в системе WGS 72 или WGS 84, равны  $\varphi_0 = 49^\circ 49,65'N$ ,  $\lambda_0 = 5^\circ 22,17'W$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_K &= \varphi_0 + \Delta\varphi = (+) 49^\circ 49,65' + (-0,04') = 49^\circ 49,61'N; \\ \lambda_K &= \lambda_0 + \Delta\lambda = (-) 5^\circ 22,17' + (+0,06') = 5^\circ 22,11'W.\end{aligned}$$

При вычислении надо учитывать знак широты и долготы, а также, что «southward» и «westward» подразумевают отрицательный знак поправки.

Указанные на картах поправки можно также вводить в приемоиндикатор для того, чтобы он автоматически исправлял обсервованные координаты.

Другой важной информацией, которую можно почерпнуть из навигационной карты, служит геодезическая система координат. С 1983 года все изготовители морских карт обязаны указывать название геодезической системы координат, в которой составлена данная карта. Зная название геодезической системы, можно самостоятельно вычислить поправки. Причем, точность вычисленных поправок будет гораздо выше, нежели указанных на карте. Для расчета поправок следует воспользоваться данными Приложения 6. При работе с Приложением 6 надо помнить о существовании модификаций одной и той же геодезической системы для разных районов плавания. Примером тому может служить уже упомянутая выше Токийская система, которая имеет четыре модификации: среднее значение, Японская модификация, Южно-Корейская модификация и версия для района Окинавы. Каждая модификация основана на референц-эллипсоиде Бесселя 1841 года, но имеет свои собственные линейные элементы внутреннего ориентирования. Аналогичная ситуация наблюдается с Европейской геодезической системой 1950 года и со

многими другими [47]. К сожалению, до сих пор не на всех адмиралтейских картах указывается геодезическая система. Поэтому на подходах к портам ряда стран можно по радио получить информацию о поправках для конкретных карт данного района плавания. Гидрографическая служба Адмиралтейства регулярно в Извещениях мореплавателям публикует поправки по таким картам. Несколько сложнее обстоит дело с электронными картами. Зачастую в описании электронных карт составители упоминают номера и год издания бумажных прототипов без указания названия геодезической системы.

### **3.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ В ПРИЁМНИКАХ И ПРОГРАММАМИ**

Изложенный выше материал необходим для объяснения основ эксплуатации существующего многообразия приемоиндикаторов и приемоиндикаторов системы Навстар GPS, а также программных продуктов, обеспечивающих решение задачи преобразования координат. К настоящему времени сложились довольно устойчивые тенденции в изготовлении приемной аппаратуры, работающей по сигналам СРНС Навстар GPS и Глонасс, и в создании программного обеспечения к ним. Помимо традиционных приемоиндикаторов, которые представляют собой полностью автономный прибор, изготавливаются многочисленные антенно-приёмные устройства (АПУ). АПУ не имеют в своем комплекте устройств отображения информации и подключаются как датчик информации о текущих координатах к специализированным видеопрокладчикам, к ECDIS или к персональным компьютерам. Причем, для настольных персональных компьютеров приемная плата АПУ, имеющая размеры визитной карточки, предназначена для установки внутри системного блока. В эксплуатации подобной техники существуют особенности, о которых должен знать штурман.

***Особенности работы с приёмниками GPS.*** С помощью приемоиндикатора СРНС Навстар GPS решать задачу преобразования координат можно тремя способами: заданием названия геодезической системы, вводом поправок и вводом параметров геодезической системы.

Первый способ выглядит весьма привлекательным из-за своей простоты. Практически любой приемоиндикатор в своей памяти хранит параметры ряда геодезических систем. Чтобы заставить прибор отображать обсервованные координаты в геодезической

системе навигационной карты, достаточно войти в меню, выбрать название геодезической системы координат, в которой составлена используемая в данный момент карта, и задать ее либо подсвечиванием названия, либо вводом ее номера из предлагаемого в меню списка систем. После задания таким образом геодезической системы процессор приемника автоматически будет преобразовывать обсервованные координаты из системы WGS 84 в геодезическую систему навигационной карты. Однако не каждый тип приемника здесь может оказаться полезным в полной мере. На сегодняшний день самым оснащенным в этом смысле является приемник GP-37 фирмы Furuno. В его памяти содержатся параметры 173 геодезических систем и их модификаций [106]. До недавнего времени параметры 170 геодезических систем содержались в памяти приемника GP-500 фирмы Furuno. За ним следует KGP-97 фирмы Koden, который хранит параметры 83 систем. По 50 систем содержится в MX-300 (фирма Magnavox) и в RS5310 (фирма Shipmate). 45 геодезических систем находится в памяти приемника XR4-GPS английской фирмы Navstar. Остальные приемники известных в мире изготовителей хранят в памяти параметры не более 6 – 12 систем. Из всего многообразия изготавливаемых портативных (носимых) приемников следует упомянуть NAV 2000 (фирмы Magellan) с 74 геодезическими системами и IPS-360 (фирмы Sony) с 23 геодезическими системами. В любом приемнике помимо WGS 84 обязательно есть система WGS 72. Несомненно, количество хранимых в памяти параметров геодезических систем является важным показателем профессиональности того или иного типа приемника. Однако эта важная для судовождения характеристика не всегда отражается в рекламных проспектах, что затрудняет выбор судовладельцами аппаратуры для оснащения своих судов. Более того, даже в руководствах по эксплуатации приборов не говорится о том, какие параметры геодезических систем хранятся в памяти, какими способами (высокоточными или приближенными) преобразовываются координаты и какова точность преобразования. Вполне возможно, что в качестве параметров используются просто заранее введенные поправки.

Некоторые фирмы-изготовители поставляют на рынок помимо приемников еще и микросхемы к ним с прошитыми версиями программных продуктов, в которых количество геодезических систем может быть увеличено. Версия программного обеспечения

высвечивается на экране либо автоматически при включении приемоиндикатора, либо с помощью особой вспомогательной функции. К сожалению, в руководствах по эксплуатации спутниковой навигационной аппаратуры этой особенности не уделяется внимание. Поэтому зачастую возникают ситуации, когда реальные возможности конкретного прибора отличаются от тех, что описаны в инструкциях по эксплуатации.

С постоянным переходом на повсеместное изготовление морских навигационных карт на основе геодезической системы координат WGS 84 исчезнут перечисленные проблемы эксплуатации приемоиндикаторов. Пока же штурману следует соблюдать особую осмотрительность при задании названия геодезической системы особенно на подходах к архипелагам и к отдельным островам, значительно удаленным от материков.

Второй способ преобразования координат с помощью ресурсов приемоиндикатора заключается в занесении в оперативную память этого прибора поправок (offset) к широте и к долготе. В этом случае вычисляемые обсервованные координаты будут соответствовать геодезической системе координат карты, на которой ведется графическое счисление пути судна. Такой режим работы приемоиндикатора чаще всего называют режимом исправления координат. Он характеризуется рядом особенностей в зависимости от типа прибора. Во-первых, не каждый приемоиндикатор обладает режимом исправления координат. Не всегда можно ввести поправки даже в профессиональный приемоиндикатор, а портативная аппаратура чаще всего не приспособлена работать в этом режиме. Во-вторых, перед заданием режима исправления координат необходимо проследить в какой геодезической системе работает прибор в данное время и задать либо WGS 84, либо WGS 72, если поправки будут вводиться относительно системы WGS 72. В некоторых моделях приемоиндикаторов поправки воспринимаются прибором только при задании WGS 84. В других же поправки воспринимаются и учитываются при любой геодезической системе, что порой приводит к большим погрешностям вычисления обсервованных координат. К сожалению, в инструкциях по эксплуатации приборов об этих особенностях не упоминается. В приемоиндикаторе MX-300 фирмы Magnavox для избежания подобных ошибок существует специальный режим «WGS 84 Plus Offset». В-третьих, при выключении прибора или при внезапном его обесточивании величины введенных поправок могут обнуляться. Они обязательно обнуляются после выполнения



функции очистки памяти приемоиндикатора. Если такого не происходит, то введенные поправки будут учитываться прибором сколь угодно долго. Поэтому штурману следует проявлять особое внимание при переходе с карты на карту и своевременно в зависимости от масштаба карт и их геодезических систем либо вводить новые поправки, либо вручную обнулять ранее введенные. В-четвертых, подавляющее большинство приемоиндикаторов воспринимает поправки, выраженные в угловых минутах.

Поправки к широте и к долготе можно получить на судне следующими путями:

- расчетом по формулам;
- выборкой из таблиц;
- считыванием с навигационной карты;
- выборкой из Извещений мореплавателям;
- запросом по радио;
- определением навигационным способом.

На последнем стоит остановиться несколько подробнее. Так как  $\varphi_K = \varphi_{84} + \Delta\varphi$ ,  $\lambda_K = \lambda_{84} + \Delta\lambda$ , то  $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_{84}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_K - \lambda_{84}$ .

Следовательно, чтобы в судовых условиях найти поправки к координатам ( $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$ ), достаточно определить с высокой точностью координаты судна на карте относительно береговых ориентиров ( $\varphi_K$ ,  $\lambda_K$ ) и с такой же точностью рассчитать обсервованные координаты в геодезической системе WGS 84 ( $\varphi_{84}$ ,  $\lambda_{84}$ ). Затем надо с учетом знаков вычесть из координат ( $\varphi_{84}$ ,  $\lambda_{84}$ ) обсервованные координаты, снятые с карты. Количественное выражение понятия высокой точности обуславливается тем, что поправки вводятся в приемоиндикатор с разрядностью 0,01, что соответствует неопределенности приблизительно 20 метров. Поэтому нет смысла достигать точности определения места судна лучше  $\pm 10$  метров. Отсюда следует, что масштаб карты, применяемой для этих целей, должны быть не мельче 1:50000.

Для определения места судна ( $\varphi_K$ ,  $\lambda_K$ ) следует применять способ двух горизонтальных углов, измеренных секстаном с последующим использованием протрактора. Можно применить способ определения по нескольким расстояниям, измеренным биноклем-дальномером. Определение  $\varphi_{84}$  и  $\lambda_{84}$  сводится к осреднению считанных с экрана приемоиндикатора обсервованных координат судна. Для этого рекомендуется зафиксировать не менее 40 наблюдений в течение часа. Если судно находится в зоне действия дифференциальной станции, то достаточно зафиксировать 10 точек с интервалом 10 – 20 секунд.

Понятно, что навигационный способ определения поправок может быть выполнен только на стоянке судна у причала.

Третий способ преобразования координат с помощью ресурсов приемоиндикатора состоит в вводе в оперативную память прибора параметров геодезической системы навигационной карты. При этом прибор самостоятельно будет рассчитывать поправки и придавать их к координатам, получаемым в геодезической системе WGS 84. На экране приемоиндикатора будут отображаться обсервованные координаты судна в геодезической системе, параметры которой введены в память. Точность преобразования координат таким способом гораздо выше по той причине, что поправки вычисляются по мере изменения места судна. Такой режим в приемоиндикаторах называется «user datum» или просто «user» и, как правило, замыкает в меню список геодезических систем. Режим «user datum» присутствует в большинстве профессиональных приемоиндикаторов. В каждом типе спутниковой аппаратуры есть свои особенности в реализации такого способа преобразования координат.

Профессиональные приемоиндикаторы фирмы Magellan в режиме «user» требуют ввода следующих параметров:  $\Delta a$ ,  $\Delta f \cdot 10^4$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$ . Их значения приводятся в Приложениях к инструкциям по эксплуатации приборов. В бланках для ввода параметров на экране индикатора эти параметры обозначены как  $a$ ,  $f$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно, что порой вызывает у штурманов сомнения. Так как преобразование координат в аппаратуре фирмы Magellan происходит по 5 параметрам, то по классификации такой способ скорее следует отнести к способам средней точности. В приложениях к описаниям приборов фирмы Magellan приводятся параметры 65 геодезических систем. В Приложении 6 данного пособия их более 200.

Морские профессиональные приемоиндикаторы фирмы Trimble Navigation в режиме «user datum» требуют ввода  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ,  $a$  и  $e^2$ . В бланках ввода этих параметров на экране индикатора они обозначаются как Delta X, Delta Y, Delta Z, A-axis и E-squared соответственно. Таким образом, в отличие от аппаратуры фирмы Magellan в рассматриваемые приборы вводятся большие полуоси референц-эллипсоидов и квадраты их эксцентриситетов. К сожалению, эти параметры в описаниях приборов отсутствуют, поэтому при работе в режиме «user datum» можно воспользоваться Приложениями данного учебного пособия. По названию геодезической системы из Приложения 5 выбирается связанный с ней референц-эллипсоид, а из Приложения 6 можно выбрать элементы его

линейного ориентирования ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ). По названию референц-эллипсоида из Приложения 2 выбирается большая полуось ( $a$ ) и квадрат эксцентриситета ( $e^2$ ).

Несколько особо в режиме «user datum» задается геодезическая система в профессиональных приемоиндикаторах морского предназначения фирмы Magnavox. Так, в приемоиндикатор MX 300 (версия программного обеспечения 300-01.2D) вводятся 9 параметров: большая полуось (major axis), знаменатель сжатия ( $1/f$ ), масштабный коэффициент перехода (Scale factor), элементы линейного ориентирования (Delta  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), углы поворотов осей (Rotation  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ). Ввод 9 параметров говорит о высокоточном способе преобразования координат. Следовательно, MX 300 можно применять для решения задач морской геодезии и тем более при плавании в зонах действия дифференциальных станций GPS. К сожалению, значения масштабных коэффициентов перехода и углов поворотов осей не доступны для штурманов на обычном судне.

До недавнего времени приёмники СРНС Навстар GPS иностранного производства не содержали в своей памяти параметры перехода от отечественной геодезической системы Пулково-42 (СК-42, SK-42) к системе WGS 84. С 2004 года такие приёмники появились на рынке. Эксплуатируя такие приёмники, следует помнить, о существовании искусственных сдвигов координат на , составленных в системе СК-42, картах Тихоокеанского побережья России. Поэтому в меню некоторых приёмников СРНС Навстар GPS, напоминая об этой особенности, система СК-42 обозначается как Pulkovo-42 (West Russia).

***Преобразование с помощью программных продуктов.*** Активное внедрение АПУ и ГИС побудило создание всевозможных программных продуктов, среди которых особое место занимают программы по преобразованию координат. В настоящее время их можно разделить на автономные и работающие под системной оболочкой. Все они по реализуемым способам преобразования различаются на высокоточные и программы средней точности. Высокоточные программные продукты, как правило, предназначены для нужд спутниковой геодезии и для формирования баз данных ГИС. Программы средней точности применяются в ГИС, а также в морской геодезии и навигации. В последнее время с развитием электронной картографии такие программы стали необходимы в судовых ECDIS не только для безошибочного отображения текущего места судна, но и для исправления координат при корректуре.

В морской навигации при использовании приемоиндикаторов лучше всего зарекомендовали себя автономные программные продукты. Они имеют низкие цены, удобны в работе, легко осваиваются даже малоподготовленными пользователями и чаще всего приспособлены к работе на персональных компьютерах с любым поколением процессоров.

Автономные программы преобразования вычисляют координаты в необходимой геодезической системе. Для работы же с приемоиндикатором необходимы поправки. Поэтому для их получения достаточно из координат в исходной геодезической системе вычесть координаты задаваемой. В судовых условиях исходной геодезической системой чаще выступает WGS 84 и реже WGS 72. Автономные программы наиболее эффективны при эксплуатации приемоиндикаторов с малым числом встроенных геодезических систем и имеющих возможность ввода поправок. Такие программы особенно полезны для составления таблиц поправок, а также для проверки точности преобразования координат приемоиндикатором. К большинству подобных программных продуктов имеется бесплатный доступ через Интернет.

Характерным примером автономного программного продукта служит программа MADTRAN (Mapping Datum Transformation), разработанная Картографическим предприятием Министерства обороны США (DMA). Этот продукт реализует стандартный способ Молоденского и содержит базу данных параметров геодезических систем, описанную в официальном документе DMA TR 8350.2 [35]. Дискеты с записью MADTRAN свободно продаются отдельно и прикладываются к различным официальным изданиям DMA (NIMA). Объем программы составляет 109 кВ.

Работа с программой MADTRAN происходит в диалоге. Сначала запрашивается формат представления координат. Программа предлагает на выбор следующие форматы: градусы и минуты; градусы, минуты и секунды. Затем уточняется переход: «Transform To or From WGS 84?», после чего предлагается ввести координаты либо в географическом представлении (GP), либо в представлении в военной топографической сетке, принятой в США (MGRS), либо в представлении на карте поперечной меркаторской проекции (UTM). Естественно, ответственному штурману следует выбрать «GP». После этого происходит переход к списку местных геодезических систем, который представлен в алфавитном порядке. Каждая система для удобства работы указывается для каждого государства или региона, где она применяется. Штурману достаточно задать необходимую

геодезическую систему по тому, какая навигационная карта в данный момент используется. Далее вводятся координаты, после чего на экране появляются результаты преобразования в виде координат в выбранной геодезической системе.

Если задать переход от геодезической системы WGS 84 к системе Токуо для Японии (TD) и ввести следующие координаты:  $\varphi_{84} = 42^{\circ}00'00''\text{N}$  и  $\lambda_{84} = 139^{\circ}00'00''\text{E}$ , то с помощью программы MADTRAN получим:  $\varphi_{\text{TD}} = 41^{\circ}59'51,0''\text{N}$ ,  $\lambda_{\text{TD}} = 139^{\circ}00'12,4''\text{E}$ . Отсюда поправки будут равны  $\Delta\varphi'' = -9,0''$  и  $\Delta\lambda'' = +12,4''$ .

### **3.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ГС**

В 2005 году в Российской Федерации для нужд судовождения используются три геодезические системы (ГС): СК-95, СК-42 и ПЗ 90. В отличие от двух первых геодезическая система ПЗ 90 не применяется для составления навигационных карт. Она служит для вычисления координат только в приёмоиндикаторах отечественной СРНС Глонасс. Изготовленные в России приёмоиндикаторы СРНС Глонасс могут отображать обсервованные координаты в ГС СК-42, СК-95 и WGS 84. Поэтому возникает необходимость контроля за надёжностью работы таких приёмоиндикаторов.

При эксплуатации на отечественных судах приёмоиндикатора СРНС Навстар GPS иностранного изготовления и ведении графического счисления пути судна на картах, составленных в ГС СК-42, также возникает необходимость преобразования координат из ГС WGS 84 в ГС СК-42.

Несмотря на то, что ГС СК-95 официально учреждена в нашей стране с 1 июля 2002 года, использование на отечественных судах навигационных карт, изданных в ГС СК-42, будет продолжаться ещё несколько лет, пока они не будут заменены картами в системе СК-95. Поэтому требуется преобразовывать координаты из СК-95 в СК-42 и обратно, а также из СК-95 в WGS 84.

**Преобразование координат WGS 84 и ПЗ 90.** В основе отечественной глобальной радионавигационной системы Глонасс лежит геодезическая система координат ПЗ 90 (Параметры Земли 1990 года). В зарубежной литературе ее обозначают через PE 90 или PZ 90. Ей предшествовали ПЗ 77 и ПЗ 85. В 1988 году СССР и США внесли предложение в ИКАО и в ИМО об использовании спутниковых систем Глонасс и Навстар GPS в качестве международных. В настоящее время они формально объединены в общую глобальную навигационную спутниковую систему под названием GNSS. Ещё до объединения

систем в нашей стране и за рубежом приступили к изготовлению приемоиндикаторов, одновременно работающих по сигналам спутников Глонасс и Навстар GPS. Главной причиной изготовления объединенной аппаратуры было отсутствие в сигналах спутников Глонасс искусственного загробления точности. Поэтому точность определения места судна по спутникам Глонасс даже без дифференциальных поправок лежит в пределах  $\pm 15 - \pm 30$  метров. В настоящее время система Навстар GPS обеспечивает точность для гражданских потребителей до  $\pm 15$  метров с вероятностью 0,95. Поэтому совместное использование двух спутниковых систем приводит к проблеме преобразования координат из WGS 84 в ПЗ 90 и наоборот.

Эфемеридная информация, передаваемая спутниками системы Глонасс содержит координаты фазового центра передающей антенны данного спутника в геоцентрической системе геодезических координат ПЗ 90. Эта система также как и принятая в Навстар GPS система координат WGS 84 относится к декартовым с началом координат в центре масс Земли и с осями, связанными с Землей. Но поскольку ПЗ 90 и WGS 84 создавались абсолютно независимо, то до сих пор существуют неоднозначные способы взаимного перехода с различной точностью. Так как системы координат WGS 84 и ПЗ 90 геоцентрические по определению, то они не могут значительно различаться. Многочисленные наблюдения в различных точках на поверхности Земли показали, что максимальные расхождения в координатах WGS 84 и ПЗ 90 не превышают 15 метров, минимальные расхождения достигают 2 метров, а в среднем их координаты различаются на 5 метров [38, 48 – 51]. Для плавания в открытом море такими расхождениями можно пренебречь. В зоне действия дифференциальных станций задача преобразования координат уже становится актуальной. Особо стоит вопрос о том, насколько точно происходит преобразование в комбинированных приемоиндикаторах Глонасс и Навстар GPS. Дело в том, что до 1993 года в СРНС Глонасс применялась геодезическая система координат ПЗ 85 (СГС 85), а параметры этой системы зачастую в комбинированных приемоиндикаторах иностранного изготовления принимались за параметры ПЗ 90. Кроме того, до недавнего времени не были с достаточной точностью установлены связи между геодезическими системами ПЗ 90 и WGS 84. Поэтому, эксплуатируя комбинированные приемоиндикаторы, крайне важно знать с какой точностью они способны преобразовывать координаты.

В судовых условиях проверить точность преобразования можно на стоянке в порту у причала, где осуществляется уверенный прием дифференциальных поправок, когда до приемной антенны опорной станции DGPS не более 20 миль. Комбинированный приемоиндикатор следует установить на прием сигналов СРНС Навстар GPS и дифференциальных поправок, а отображение обсервованных координат установить в WGS 84. В таком режиме надо зафиксировать 40–60 координат и затем осреднить их. Затем надо установить приемоиндикатор на прием сигналов спутников Глонасс и на прием дифференциальных поправок DGPS с отображением обсервованных координат в геодезической системе WGS 84. Фиксируется также 40–60 координат с последующим осреднением. Расхождение между осредненными координатами, полученными по сигналам Глонасс и Навстар GPS, не должны превышать 2 метров.

Можно заранее самостоятельно рассчитать поправки для перехода от системы ПЗ 90 к WGS 84 и ввести их в приемоиндикатор. Здесь применяются высокоточные способы и способы преобразования средней точности.

Если для нужд морской геодезии необходимо осуществить высокоточный переход от пространственных прямоугольных координат  $(X, Y, Z)$  в системе ПЗ 90 к прямоугольным координатам  $(X_1, Y_1, Z_1)$  в системе WGS 84, то следует воспользоваться способом Гельмерта (см. раздел Модифицированный способ Гельмерта и [38])

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_{WGS84} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + (1 + \Delta m) \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ПЗ90},$$

где  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – линейные элементы взаимного ориентирования двух геодезических систем ПЗ 90 и WGS 84 (метры);  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  – угловые элементы взаимного ориентирования, то есть углы поворотов осей (радианы);  $\Delta m$  – масштабный коэффициент, учитывающий различие в расстояниях между двумя соответствующими точками на поверхностях эллипсоидов ПЗ 90 и WGS 84. Поскольку эти две геодезические системы создавались независимо друг от друга, то после формального объединения СРНС Глонасс и Навстар GPS сразу возникла необходимость установления связи между ПЗ 90 и WGS 84. Для этой цели были проведены одновременные наблюдения в нашей стране и за рубежом [48 – 54]. На сегодня наиболее точные параметры связи для перехода от ПЗ 90 к WGS 84 определены такими [49]:

$$\Delta X = -0,45 \text{ м}, \quad \omega_X = 0,090 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta m = 22 \cdot 10^{-9}.$$

$$\begin{aligned}\Delta Y &= -0,59 \text{ м}, & \omega_Y &= 0,015 \cdot 10^{-6}, \\ \Delta Z &= -1,58 \text{ м}, & \omega_Z &= -1,699 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Знаки угловых элементов даны в радианной мере при положительном вращении против часовой стрелки.

Если существует необходимость рассчитать поправки для перехода от геодезических координат  $(B, L, H)$  в системе ПЗ 90 к геодезическим координатам в системе WGS 84, то сначала осуществляется переход к пространственным прямоугольным координатам  $X, Y, Z$ , затем к пространственным прямоугольным координатам  $X_1, Y_1, Z_1$ , которые, в свою очередь, преобразуются итерационным способом в геодезические координаты в системе WGS 84 (см. раздел Модифицированный способ Гельмерта). Чтобы получить необходимые поправки, надо от геодезических координат в системе WGS 84 отнять соответствующие геодезические координаты в системе ПЗ 90. Надо сказать, что предложенный способ в настоящее время весьма актуален для расчета поправок для перехода от ПЗ 90 к координатам в Международной наземной опорной системе координат 1994 года (ITRS – International Terrestrial Reference System).

Для получения подобных поправок более простыми и менее точными путями следует воспользоваться любым из способов преобразования средней точности, изложенным выше.

**Преобразование координат ПЗ 90 и СК 42.** Отечественные приемоиндикаторы морского предназначения, работающие от СРНС Глонасс, способны отображать обсервованные координаты в Пулковской геодезической системе координат 1942 года (СК-42). При эксплуатации такой аппаратуры зачастую возникает необходимость в проверке точности преобразования отображаемых обсервованных координат. Для этой цели пригоден известный модифицированный способ Гельмерта и специальный способ расчета поправок.

Для того, чтобы воспользоваться модифицированным способом Гельмерта, необходимо при переходе от координат ПЗ 90 к координатам в системе СК-42 применять следующие семь параметров связи [55]:

$$\begin{aligned}\Delta X &= -25,90 \text{ м}, & \omega_X &= -0,108'', & \Delta m &= -4,24 \cdot 10^{-7}. \\ \Delta Y &= +130,94 \text{ м}, & \omega_Y &= -0,073'', \\ \Delta Z &= +81,76 \text{ м}, & \omega_Z &= -0,019''.\end{aligned}$$

В официальном документе [60] приводятся несколько иные параметры перехода от СК-42 к ПЗ 90

$$\begin{aligned}\Delta X &= 25 \text{ м}, & \omega_X &= 0'', & \Delta m &= 0. \\ \Delta Y &= -141 \text{ м}, & \omega_Y &= -0,35'',\end{aligned}$$



$$\Delta Z = -80 \text{ м}, \quad \omega_Z = -0,66''.$$

Для перехода от секунд к радианам надо секунды разделить на  $\rho''$  (206264,8062)

Без особой потери точности можно воспользоваться специальным способом расчета поправок [55]:

$$B_{42} = B_{90} + \Delta B, \quad L_{42} = L_{90} + \Delta L, \quad H_{42} = H_{90} + \Delta H,$$

где индекс 42 говорит о принадлежности к геодезической системе координат СК 42, а 90 – к геодезической системе ПЗ 90,

$$\Delta B = \frac{\rho''}{M + H} \left\{ \left[ \frac{N}{a} e^2 \Delta a + \left( \frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \frac{\Delta e^2}{2} \right] \sin B \cos B - \right. \\ \left. - (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \sin B + \cos B \Delta Z \right\},$$

$$\Delta L = \frac{\rho''}{(N + H) \cos B} (\cos L \Delta Y - \sin L \Delta X),$$

$$\Delta H = -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \cos B + \sin B \Delta Z.$$

Приведённый алгоритм является итерационным и имеет свои особенности. На первом этапе в формулы подставляются координаты в системе ПЗ 90. По вычисленным поправкам  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$  определяются приближённые координаты в системе СК-42. Затем вычисляются средние величины

$$a = (a_{42} + a_{90})/2, \quad e^2 = (e^2_{42} + e^2_{90})/2, \quad B = (B_{42} + B_{90})/2, \\ L = (L_{42} + L_{90})/2, \quad H = (H_{42} + H_{90})/2, \quad M = (M_{42} + M_{90})/2, \\ N = (N_{42} + N_{90})/2,$$

которые вновь подставляются в формулы для вычисления поправок. С помощью вновь полученных поправок определяются уточнённые координаты в системе СК-42. Процесс повторяется до достижения наперёд заданной точности преобразования.

Необходимо помнить, что  $\rho''$  – число секунд в одном радиане (см. Приложение 7),  $a_{42}$  – это большая полуось референц-эллипсоида Красовского,  $a_{90}$  – большая полуось эллипсоида геодезической системы ПЗ 90 ( $a_{90} = 6378136$  м),  $e^2_{42}$  – квадрат первого эксцентриситета референц-эллипсоида Красовского,  $e^2_{90}$  – квадрат первого эксцентриситета эллипсоида геодезической системы ПЗ 90 ( $e^2_{90} = 0,006694366193$ ),  $\Delta a = +109$  м,  $\Delta e^2 = -0,00000094457$ .

Для перехода от СК-42 к ПЗ 90 следует принимать:

$$B_{90} = B_{42} - \Delta B, \quad L_{90} = L_{42} - \Delta L, \quad H_{90} = H_{42} - \Delta H.$$

**Преобразование координат СК-42 и СК-95.** Для высокоточного преобразования координат из системы СК-42 в новую систему СК-95 в современной геодезической практике применяется способ Гельмерта (способ семи параметров), Параметры перехода имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \Delta X &= -1,8 \text{ м}; & \omega_x &= +0,02''; & \Delta m &= 0,15 \cdot 10^{-6}. \\ \Delta Y &= +9,0 \text{ м}; & \omega_y &= -0,38''; \\ \Delta Z &= -6,8 \text{ м}; & \omega_z &= -0,85''; \end{aligned}$$

**Преобразование координат СК-95 и ПЗ 90.** Связь между геоцентрической системой координат ПЗ 90 и новой референсной системой СК-95 будет осуществляться тремя линейными параметрами преобразования координат:

$$\Delta X = +25,90 \text{ м}, \quad \Delta Y = -130,94 \text{ м}, \quad \Delta Z = -81,76 \text{ м}.$$

Знаки соответствуют переходу от координат в СК-95 к координатам в системе ПЗ-90 [58]. Здесь можно воспользоваться преобразованием способом трёх параметров Молоденского.

**Преобразование координат СК-42 и WGS 84.** За время эксплуатации СРНС Навстар GPS в нашей стране и за рубежом был накоплен достаточно обширный опыт преобразования ГС СК-42 и WGS 84. В настоящее время достаточно хорошо апробированы стандартный способ преобразования Молоденского и способ Гельмерта.

Преобразование координат при переходе от ГС СК-42 к ГС WGS 84 в зарубежной практике стандартным способом Молоденского (способом 5 параметров) происходит с использованием следующих параметров:

$$\begin{aligned} \Delta X &= +28 \text{ м} & \Delta Y &= -121 \text{ м} & \Delta Z &= -77 \text{ м} \\ \Delta a &= -108 \text{ м} & \Delta f &= 0,00480795 \times 10^4 \end{aligned}$$

Эти параметры используются в программных продуктах, применяемых в математическом обеспечении судовых приёмников СРНС Навстар GPS иностранного изготовления.

В отечественной практике используют параметры перехода, оговоренные ГОСТ 51794–2001.

$$\begin{aligned} \Delta X &= +23,92 \text{ м} & \Delta Y &= -141,27 \text{ м} & \Delta Z &= -108,0 \text{ м} \\ \Delta a &= -108 \text{ м} & \Delta f &= 0,00480795 \times 10^4 \end{aligned}$$

Иностранные источники предоставляют для преобразования координат способом Гельмерта такие параметры перехода:

$$\begin{aligned}
\Delta X &= -21,58719 \text{ м} & \omega_x &= -1,01378'' \\
\Delta Y &= -97,54127 \text{ м} & \omega_y &= -0,58117'' \\
\Delta Z &= -60,92546 \text{ м} & \omega_z &= -0,2548'' \\
\Delta m &= -4,6124 \times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

В отечественной геодезической практике вычисления прямоугольных пространственных координат точки в ГС СК-42 способом Гельмерта выполняются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
X_{42} &= (1 + \Delta m)(X_{WGS} + \varepsilon_Z Y_{WGS} - \varepsilon_Y Z_{WGS}) + \Delta X, \\
Y_{42} &= (1 + \Delta m)(-\varepsilon_Z X_{WGS} + Y_{WGS} + \varepsilon_X Z_{WGS}) + \Delta Y, \\
Z_{42} &= (1 + \Delta m)(\varepsilon_Y X_{WGS} - \varepsilon_X Y_{WGS} + Z_{WGS}) + \Delta Z,
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_X = \omega_X/\rho''$ ,  $\varepsilon_Y = \omega_Y/\rho''$ ,  $\varepsilon_Z = \omega_Z/\rho''$ .

Параметры перехода по этим формулам таковы:

$$\begin{aligned}
\Delta X &= -25 \text{ м} & \omega_x &= 0 \\
\Delta Y &= 141 \text{ м} & \omega_y &= 0,35'' \\
\Delta Z &= 78,5 \text{ м} & \omega_z &= -0,736'' \\
\Delta m &= 0.
\end{aligned}$$

## 4. ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 4.1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Россия с её обширными пространствами служит уникальным примером сложности геодезического освоения протяжённых территорий. Необходимость составления карт для развития экономики государства была понятна русскими царями ещё в допетровские времена. И только при Петре I оформилась и утвердилась идея создания морских и сухопутных карт на единой математической основе. В 1717 году в России была издана книга Х. Гюйгенса “Космотеорис” с предисловием самого Петра I. А в 1725 году по его указанию Санкт-Петербургская Академия Наук на своём первом заседании обсуждала вопрос о сжатии Земли на основе учения о всемирном тяготении. Однако широкая топографо-геодезическая деятельность в России, как и в других странах Европы, была связана с наполеоновскими войнами. В 1797 году Павел I учредил Императорское Депо карт. В 1812 году оно было передано в Военное министерство и стало называться Военно-топографическим Депо (ВТД). В декабре 1815 года Главный Штаб и ВТД возглавлял генерал-фельдмаршал князь Пётр Михайлович Волконский (1776 – 1852). Он после Тильзитского перемирия изучал постановку топографо-геодезических работ во Франции. П. М. Волконский предписал командующему 1-й армией приступить к топографической съёмке Виленской губернии. Управляющим Виленской съёмки был назначен полковник Карл Иванович Теннер (1783 – 1860), который составил первую в России Инструкцию по триангуляции. Начало топографической съёмки Виленской губернии на строгой геодезической основе стало началом знаменитого Русско-Скандинавского градусного измерения.

Градусные измерения были необходимы для определения параметров земного эллипсоида. Чтобы получить величины его полуосей, следовало выполнить измерения длины дуги меридиана, а также произвести вычисления широт точек, принадлежащих этой дуге. Свои меридиональные измерения К. И. Теннер начал примерно на широте  $55^{\circ}20'N$ , связав их долготными определениями с астрономической обсерваторией в Вильно. Работы закончились в 1848 году на юге в селе Старо-Некрасовка вблизи Измаила на Дунае [57].

В то же самое время Лифляндское экономическое общество приступило к триангуляционным работам для предстоящей

топографической съёмки. Руководство работами было поручено профессору астрономии и геодезии Дерптского университета Василию Яковлевичу Струве (1793 – 1864). Исходным пунктом Лифляндской съёмки была назначена астрономическая обсерватория Дерптского университета. Виленская и Лифляндская съёмки по воле руководителей этих работ Теннера и Струве положили начало знаменитому Русско-Скандинавскому градусному измерению. Как выдающиеся астрономо-геодезисты, они понимали назначение вывода размеров земного эллипсоида из измерений меридиональных дуг, проходящих по территории России. Подтверждением тому служит вычисления Теннером в 1844 году параметров эллипсоида по русским градусным измерениям. “Русская дуга” сначала имела длину 8 градусов и 20 минут и образовалась соединением в 1830 году рядов триангуляции Теннера и Струве.

В 1822 году был основан Корпус военных топографов (КВТ). С момента его образования и до 1827 года им были предприняты измерения Балтийской части дуги, а с 1830 по 1844 год – Финляндской части дуги. По договорённости между правительствами России, Швеции и Норвегии ряд измерений был продолжен до Фунгленса, расположенного на берегу Северного Ледовитого океана. В результате этих работ в 1855 году образовалось самое большое в мире Русско-Скандинавское градусное измерение по меридиану протяжением 25 градусов и 20 минут (2880 км). Конечные точки дуги по указанию императора Александра II и короля Норвегии и Швеции Карла XV были закреплены монументами. Они сохранились до настоящего времени.

Русско-Скандинавское градусное измерение состояло из 158 основных треугольников, 10 базисных сторон и 13 астрономических пунктов. Более 60% всех измерений было выполнено под началом и при непосредственном участии Теннера. Методы и точность измерений, особенно в Российской её части, не уступали французским, английским и немецким градусным измерениям. Значение Русско-Скандинавского градусного измерения трудно переоценить. Измерения начались на несколько лет раньше, чем два коротких немецких: Ганноверской под руководством Гаусса (протяжением  $2^{\circ}01'$ ) и Восточно-Прусской под руководством Бесселя (протяжением  $1^{\circ}30'$ ). Размер большой полуоси земного эллипсоида, вычисленный только по одному Русско-Скандинавскому градусному измерению отличался всего на несколько десятков метров от размера известного эллипсоида Хейфорда, который был получен в 1909 году. Полученные в те годы данные использовались при вычислении

параметров референц-эллипсоида Красовского 1940 года. Русско-Скандинавское градусное измерение в мировой геодезической литературе называют Дугой Струве [58, 59].

Корпус военных топографов после выполнения работ на меридианной дуге в 1862 – 1870 годах занимался продолжением градусных измерений по параллелям  $47^\circ$  и  $52^\circ$  согласно международному проекту “Европейское градусное измерение”. Этим было положено начало образованию Международной Геодезической Ассоциации (МГА) в составе в составе Международного Геодезического и Геофизического Союза (МГГС). Градусное измерение по параллелям  $47^\circ$  –  $48^\circ$  началось в г. Бресте (Франция) и заканчивалась в Австрии. Дуга по параллели  $52^\circ$  началась в Ирландии, проходила через Гринвич, а заканчивалась в России в Орске. Деятельность Корпуса военных топографов была тесным образом связана с работой астрономических обсерваторий Санкт-Петербурга, Дерпта (Тарту), Пулкова и Ташкента. Старейшая Санкт-Петербургская астрономическая обсерватория и её директор Фёдор Иванович Шуберт (1758 – 1825) сыграли большую роль в развитии геодезической астрономии не только в России, но и за рубежом [57]. В 1839 году была открыта Главная астрономическая обсерватория (ГАО) в Пулкове. Её возглавил В. Я. Струве. Он был не только крупным администратором, но и большим учёным-теоретиком. Им были разработаны различные способы определения широты, долготы и точного времени для полевых измерений. Пулковская обсерватория добилась исключительно больших успехов в составлении фундаментальных каталогов координат звёзд. Директор Гринвичской обсерватории Дж. Эри писал: “Точные способы наблюдений там столь же поучительные, как и само устройство зданий обсерватории, выбор и свойства инструментов” [61].

Описанный этап развития геодезии в России знаменателен тем, что он заложил основу создания астрономо-геодезических сетей, в которых астрономическими способами определялись координаты пунктов, а с помощью триангуляции координаты передавались на окружающие территории.

Следующий этап связан прежде всего с повышением точности определения долгот астрономических пунктов сети, которые из-за технических трудностей определения времени не удовлетворяли требованиям геодезии. По инициативе ГАО с 1842 года стал применяться так называемый способ хронометрических рейсов. В результате перевозки большого числа хронометров (40 и более) точность определения разности долгот повысилась до 0,06 секунды. С 1860 года

началось использование телеграфа для передачи времени при определении долгот. Пулковский астроном П. М. Смыслов разработал звуковой способ сравнения передачи меток времени с показаниями хронометра. Его способ приблизил точность определения долгот к широтным. Так разность долгот Московской и Пулковской обсерваторий была определена с погрешностью 0,02 секунд времени [57]. В 1873 – 1876 годах военные геодезисты К. В. Шарнгорст и П. П. Кульберг этим способом определили долготы на 12 пунктах, расположенных в крупных городах между Москвой и Владивостоком.

Ещё указом Петра I в 1720 году предписывалось “сочинять ландкарты” губерний. За указом последовала его инструкция. Она требовала в каждом городе определять широту и долготу. Через столетие перед Корпусом военных топографов уже ставилась задача не “сочинять ландкарты”, а выполнить топографическую съёмку губерний на триангуляционной основе. Поэтому второй этап построения астрономо-геодезической сети России связан с работой Корпуса военных топографов по созданию триангуляционной сети в губерниях европейской части России. Начиная с 1877 года, КВТ был переориентирован на первоочередное обеспечение топографическими съёмками только военных задач. Поэтому триангуляционные работы сосредоточились в основном в пограничных пространствах России.

Из-за недостатка сил, средств и времени триангуляции регионов и отдельных губерний развивалась независимо друг от друга. При этом каждая губерния имела свои исходные начала. Исходными геодезическими датами служили в лучшем случае координаты астрономических обсерваторий, а чаще всего астрономические координаты рядовых пунктов, в качестве которых нередко выбирались колокольни. В Москве, например, была выбрана колокольня Ивана Великого в Кремле. Погрешности в определении астрономических координат, особенно долгот, измерения базисов и азимутальной ориентировки вызвали большие расхождения геодезических координат на стыке триангуляций. Расхождения нередко доходили до 200 – 300 метров. Для исключения разногласий в координатах при вычислениях применялся так называемый “согласующий эллипсоид”. По непонятным причинам Военно-топографическое Депо не установило единого для всей страны земного эллипсоида. Математическая обработка геодезических измерений велась на эллипсоидах Вальбека, Бесселя и Кларка. Это усложняло анализ причин разногласий в координатах смежных триангуляций и приводило к разрывам в топографических съёмках.

К началу 1870 года две трети губерний Европейской России, Кавказ и Финляндия были покрыты триангуляциями. Большинство сетей губернских триангуляций создавались на сфероиде Вальбека ( $a = 6376896$  м, знаменатель сжатия = 302,8). Отдельные сети существовали до 1880 года. Со всей остротой встал вопрос их математической обработки.

Исторически сложилось так, что в России работало и жило много немцев. Поэтому немецкая геодезическая школа Гаусса и Бесселя оказала огромное влияние на развитие отечественной геодезии. Теннер и Струве имели постоянную переписку с Бесселем – математиком, астрономом и геодезистом. Астроном Ф. И. Шуберт писал и издавал свои труды на немецком языке, а его сын Ф. Ф. Шуберт после окончания службы в Главном Штабе, как и многие немцы, занимавшие высокие должности в России, доживал свой век в Германии. Начиная с первой половины XIX века, в России стали применяться методы и формулы сфероидической геодезии, основы которой заложили Гаусс и Бессель. Гауссом была разработана теория проекций, а также методы конформного изображения поверхности эллипсоида на шар и плоскость. Он одновременно с Лежандром создал теорию наименьших квадратов. Достижения учёных Германии и Франции в области математики широко применялись русскими геодезистами. Струве произвёл строгую математическую обработку Русско-Скандинавской дуги способом наименьших квадратов. В 1861 году Ф. Ф. Шуберт уже в семидесятилетнем возрасте по русским градусным измерениям вычислил размеры земного эллипсоида. Значение большой полуоси у него получилось равным 6378547 м при полярном сжатии 1:283,0. Размеры земного эллипсоида, выведенные Шубертом, оказались точнее, нежели у Бесселя, и приближались к более поздним выводам Кларка и Хейфорда. Шуберт первым в мире выдвинул идею трёхосности общеземного эллипсоида, далеко опередив развитие геодезической науки того времени. Ф. Ф. Шуберт известен также созданием своей теории прямоугольных координат. Известно, что прямоугольные координаты в геометрии были введены Декартом в 1637 году. В геодезии они были впервые применены через столетие в 1734 году французским геодезистом Кассини, прославившимся ещё и тем, что при обработке градусного измерения по меридиану Парижа он пришёл вопреки теории Ньютона к ошибочному выводу о вытянутости Земли к полюсам. Кассини для вычисления приращений координат стал применять плоскую систему Декарта. За ось абсцисс был принят меридиан. С тех пор в геодезии и в навигации появилась система координат, отличная от математической своим направлением осей. В



1810 во Франции была опубликована Пюисаном упрощенная теория прямоугольных координат применительно к сфере с учётом только сферических избытков треугольников. Шуберт, критически рассмотрев систему координат Пюисана, предложил собственную, по которой вычислял проложенные под его руководством триангуляции.

Математическая обработка губернских триангуляций началась в 1887 году под руководством известного астронома-геодезиста генерала К. В. Шарнгорста. За исходный пункт была принята астрономическая обсерватория в Дерпте, а за поверхность относимости – эллипсоид Бесселя 1841 года ( $a = 6377397$  м, знаменатель сжатия = 299,15). Исходными также служили координаты пунктов триангуляции дуги Струве-Тернера. Главной целью работы ставилось устранение разногласий в координатах разрозненных губернских триангуляций. Однако устранить разрыв в положении пунктов смежных триангуляций не удавалось.

В 1910 году Корпус военных топографов приступил к реализации новой схемы триангуляции. Проведение триангуляций началось с ряда Пулковско-Николаев от Саблинской базисной сети, расположенной вблизи Пулковской астрономической обсерватории. Поскольку центр Круглого зала Пулковской астрономической обсерватории не входил ни в одну триангуляцию, то связь Саблинской базисной сети была осуществлена геодезическим четырёхугольником с пунктом “Сигнал А”, расположенным недалеко от здания ГАО. Пункт “Сигнал А” был рядовым в триангуляции I класса Санкт-Петербургской губернии, проложенной в 1887 – 1904 годах. Так с 1910 года были нарушены основные требования к установлению исходных геодезических дат страны. Астрономические координаты центра Круглого зала ГАО были получены из многочисленных наблюдений с 1839 года. Азимут с пункта “Сигнал А” ни на один из пунктов Саблинской базисной сети и обратно никогда не наблюдался. Астрономический азимут на Саблинской базисной сети определялся в 1912 году военным геодезистом О. Г. Дитцем и только в одном направлении [57].

Второй этап развития геодезии в России принято заканчивать началом Первой мировой войны. Прошедший этап отчётливо показал крайнюю необходимость концентрации в одних руках управления всеми геодезическими работами в России.

Прошедшие мировая и гражданская войны надолго приостановили организационные мероприятия и внедрение более прогрессивных методов ведения работ и обработки полевых

измерений. В марте 1919 года было организовано Высшее Геодезическое Управление (ВГУ). В 1923 году заведующий кафедрой Высшей геодезии Московского межевого института Феодосий Николаевич Красовский (1878 – 1948) был назначен на должность председателя Технического совета и заместителем начальника ВГУ. В постановке астрономо-геодезических работ было принято за правило преследовать при их выполнении не только чисто практические задачи, но и научные, обеспечивая возможную полноту научного использования получаемых материалов. Большую роль в становлении геодезического дела в Советской России сыграли геодезические совещания. Первое совещание состоялось в 1926 году. По докладам Ф. Н. Красовского совещание приняло следующее решение: при обработке триангуляций в СССР принять сфероид Бесселя и одну исходную точку; введение международного сфероида Хейфорда признать преждевременным; работы по производству триангуляций признать имеющим общегосударственное значение; разработать программу работ по выводу сфероида, наилучшим образом подходящего к геоиду на Европейской части СССР; завершить нивелирную связь уровней Балтийского моря с Тихим океаном; определить точную разность долгот между Пулковом и Гринвичем и начать планомерное определение долгот по радиотелеграфу. Важным решением третьего геодезического совещания в 1928 году было принятие по результатам докладов профессоров В. В. Каврайского, Н. Г. Келля и Н. Н. Матусевича прямоугольных координат Гаусса-Крюгера для немедленного применения в СССР при составлении сухопутных карт.

В 1930 году под руководством Ф. Н. Красовского началось уравнивание 8 обширных полигонов триангуляции. При этом впервые выявились недостатки, связанные с тем, что центр Круглого зала Пулковской астрономической обсерватории не является пунктом триангуляции I класса. Поэтому пришлось пункт Саблино взять вместо Пулково за исходную точку. Работы по уравниванию были завершены в 1932 году, поэтому принятая система координат получила название “Система координат 1932 года”. Позднее её стали обозначать как СК-32 [59].

В эти годы сложилась своя национальная терминология, которая применяется до сих пор. Важнейшим понятием стала геодезическая сеть, которой называется система закреплённых на поверхности Земли точек, положение которых определено с высокой точностью в общей для них системе геодезических координат. Геодезическая сеть,

обеспечивающая распространение координат на территорию государства и являющаяся исходной для построения других сетей, называется государственной геодезической сетью. Геодезические сети, создаваемые в развитие сетей более высокого порядка, получили название сетей сгущения. Геодезическая сеть сгущения, предназначенная специально для обеспечения съёмки, называется съёмочной геодезической сетью. Геодезические сети состоят из геодезических пунктов. Устройство или сооружение, обозначающее положение геодезического пункта на местности, называется геодезическим знаком, а устройство, являющееся носителем координат, называется центром геодезического пункта [64].

#### **4.2 СИСТЕМА КООРДИНАТ 1942 ГОДА (СК-42)**

Ещё задолго до окончания работ по составлению СК-32 Ф. Н. Красовский поставил на повестку дня необходимость следующих подходов к созданию новой геодезической системы, отвечающей запросам геодезии в СССР: референц-эллипсоид на обширной территории страны должен приближаться к нормальному сфероиду, а в определении его размеров должны использоваться результаты гравиметрической съёмки; исходный пункт астрономо-геодезической сети страны должен быть расположен примерно в центре территории страны с малыми и надёжно определёнными абсолютными значениями уклонений отвеса; все геодезические измерения перед их уравниванием должны быть редуцированы на поверхность референц-эллипсоида, для чего необходимо проводить высокоточную гравиметрическую съёмку и составлять карты уклонений отвеса.

В 1936 году по инициативе Ф. Н. Красовского проводится научная работа по теме “Исследование фигуры геоида”. К исследованию по новому направлению привлекается молодой учёный Михаил Сергеевич Молоденский (1909–1991). Он разрабатывает новую теорию определения фигуры геоида только по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным, не прибегая к гипотезам о внутреннем строении Земли. Его научная работа “Основные вопросы геодезической гравиметрии”, опубликованная в 1945 году, стала основополагающей в геодезии. В тридцатых годах наряду с наземными развернулись и морские гравиметрические работы на Чёрном и Охотском морях. Несколько забегая вперёд, следует упомянуть о том, что первая послевоенная гравиметрическая экспедиция на подводных лодках была организована в 1947 году в Баренцевом море.

В 1938 году Центральному научно-исследовательскому институту геодезии, аэрофотосъёмки и картографии (ЦНИИГАиК) было поручено разработать проект схемы и программу развития Государственных триангуляционной и нивелирной сетей. Основные положения проекта были утверждены 20 октября 1939 года. С этого момента началась очень важная работа по созданию уникальной системы геодезических координат, которая существовала в нашей стране до недавнего времени.

С 1932 года Пулковская система развивалась на восток и распространилась на часть Западной Сибири (до Красноярска), Казахстан и Среднюю Азию. В 1934-1935 годах на Дальнем Востоке образовалась Свободненская система координат, а в Колымско-Индигирском регионе пришлось ввести Магаданскую систему. Свободненская система координат была учреждена в 1935 году с Черниговским исходным пунктом I класса с координатами  $B_0=51^{\circ}25'36,55''N$ ,  $L_0=128^{\circ}11'34,77''E$  на основе референц-эллипсоида Бесселя. По сути дела на территории СССР образовались три системы координат: Пулковская, Ташкентская и Свободненская. Они создавались на основе сфероида Бесселя 1841 года, но в каждой из них сфероид имел собственную ориентацию, что нарушало неразрывность координат на их стыках. Так, в районе Красноярска координаты Пулковской и Свободненской систем различались по широте примерно на 270 м, а по долготе – на 790 м. Этот факт также требовал создание новой системы, которая смогла бы объединить на единой геодезической основе самые протяжённые в мире территории.

7 апреля 1940 года Главным управлением геодезии и картографии (ГУГК) была признана необходимость введения в стране новых исходных геодезических дат. К этому времени работа по выводу размеров референц-эллипсоида для СССР продолжалась уже более десяти лет. Сначала она велась лично Ф. Н. Красовским, а в 1935 году была включена в план работ ЦНИИГАиК и выполнялась под его непосредственным руководством при активном участии Александра Александровича Изотова (1907–1988) и М. С. Молоденского. Ф. Н. Красовский ещё в 1932 году в своих исследованиях, изложенных в “Руководстве по высшей геодезии”, показал, что строгая математическая обработка новой астрономо-геодезической системы (АГС) должна выполняться не на эллипсоиде Бесселя, а на другом, наиболее пригодном для территории СССР по критерию наименьшего отступления от геоида. Кроме того, он доказал, что ориентирование референц-эллипсоида будет точнее в

исходном пункте, расположенном в центре страны. При выводе нового эллипсоида Ф. Н. Красовский предлагал соединить градусные измерения СССР и США через Берингов пролив и с Индией через Памир. По военно-политическим соображениям связи геодезических измерений СССР и США не состоялись, а связь с Индией оказалась низкой по точности. Учёного беспокоили и исходные геодезические координаты в Пулкове.

Прежде чем сделать окончательный выбор параметров эллипсоида для СССР, Ф. Н. Красовским была составлена их сводка. Параметры классифицировались по объёму принятых при вычислении градусных измерений по СССР, США, Западной Европе, Африке, Индии вместе и отдельно, а также с учётом трёхосности эллипсоида и без учёта. В результате анализа Ф. Н. Красовский сделал следующее заключение: на основании геодезического материала США, СССР и Западной Европы и с учётом трёхосности следует принять большую полуось равной 6378245 м, а сжатие – 1:298,3. Поначалу эллипсоид с этими параметрами назывался эллипсоидом ЦНИИГАиК.

Поскольку центр Круглого зала Пулковской астрономической обсерватории оказался геодезически плохо связанным с пунктами Саблинской базисной сети, то в результате обсуждений было решено исходным пунктом АГС СССР принять пункт Эликты Кокчетавской базисной сети в Казахстане. Высокоточные астрономические определения на пункте Эликты выполнялись ЦНИИГАиК по усиленной программе в 1940 году [57]. Значения астрономических координат пункта Эликты получились следующими: широта  $53^{\circ}14'03,10''N$ , долгота  $69^{\circ}08'55,66''E$ , азимут на пункт Исканжал составил  $143^{\circ}19'19,54''$ .

Если система 1932 года была составлена на основе уравнивания 8 полигонов, то перед уравниванием новой АГС их уже было 87. Они охватывали Европейскую часть СССР и Среднюю Азию и шли далее по югу Сибири до Хабаровска.

Программа общего уравнивания триангуляции АГС СССР определена на специальном совещании ГУГК 14 мая 1941 года. Было принято решение уравнивать способом Красовского-Урмаева. При уравнивании необходимо было решить систему из 484 условных уравнений. Ранее в мире подобного уравнивания по объёму и сложности вычислительных процедур нигде не выполнялось [59]. 4 апреля 1942 года вышел совместный приказ ГУГК при Совнаркомоме СССР и Военно-топографического управления Генштаба Красной Армии “О размерах референц-эллипсоида для уравнивания

астрономо-геодезической сети СССР”. В приказе указывалось: “В предстоящем уравнивании АГС СССР принять следующие размеры референц-эллипсоида ЦНИИГАиК: большая полуось 6378245 м, сжатие 1:298,3; систему координат, вычисленную в этих размерах земного эллипсоида и принятой ориентировке при уравнивании АГС СССР, именовать “Система координат 1942 года”; впредь до особого указания уравнивательные вычисления триангуляции I класса для практических целей производить также в существующих системах координат – Пулковской или Свободненской – на эллипсоиде Бесселя”. Как видно из текста, в этом приказе вопрос ориентировки эллипсоида ещё не был окончательно решён. Комиссия по уравниванию АГС отмечала, что “действовавшие Пулковская и Свободненская ориентировки выполнены весьма примитивно и грубо. Поэтому не может быть и речи об их сохранении в будущем” [57].

28 июля 1943 года последовал приказ ГУГК № 429 “Об установлении исходных геодезических дат для уравнивания астрономо-геодезической сети СССР”. Исходным пунктом АГС СССР снова был принят центр Круглого зала Пулковской обсерватории, как уже отмечалось выше, не являющейся пунктом триангуляции. Исходные геодезические даты были вычислены А. А. Изотовым и М. С. Молоденским путём введения поправок за отклонение отвеса в астрономические координаты. Согласно приказу, значения геодезических координат исходного пункта равнялись: широта  $59^{\circ}46'18,55''N$ , долгота  $30^{\circ}19'42,09''E$ , азимут, вычисленный на пункт Бугры Саблинской сети, составил  $121^{\circ}40'38,79''$ . Надо напомнить о том, что исходные геодезические даты не определялись в результате наблюдений, а вычислялись, потому что здание Пулковской обсерватории, где находился исходный пункт “центр Круглого зала”, во время войны было разрушено. По приказу № 429 высота геоида над поверхностью референц-эллипсоида была принята равной нулю. Время показало ошибочность принятого решения.

На самом деле, такое директивное указание о задании поверхности геоида противоречит естественному представлению о сути астрономо-геодезической системы координат, когда ориентирование референц-эллипсоида происходит в результате минимизации отклонений поверхности референц-эллипсоида от поверхности геоида. Позже от приказа № 429 пришлось отойти, но, к сожалению, в литературе до сих пор встречается упоминания о прохождении поверхности геоида через центр Круглого зала. В Приложении 8 дан каталог возвышений геоида над поверхностью

референц-эллипсоида Красовского для геодезической системы СК-42 (Пулково-42) через 10 градусов широты и долготы. В исходном документе [70] возвышения даются через 5 градусов. Из Приложения 8 следует, что поверхность геоида на 12,8 м располагается выше поверхности референц-эллипсоида Красовского. В Приложении 3 приведён каталог возвышений геоида, принятого в системе координат WGS-84. В этой системе геоид расположен выше референц-эллипсоида WGS-84 на 18 м. Объясняется это, во-первых, различными размерами эллипсоидов, во-вторых, тем, что геометрический центр эллипсоида Красовского сдвинут относительно геометрического центра общеземного эллипсоида WGS-84.

Уравнивание АГС СССР было завершено в 1946 году. Постановлением Совета Министров СССР № 760 от 7 апреля 1946 года “О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР” учреждалась новая “Система координат 1942 года”. В постановлении говорилось:

“1. Вести единую систему геодезических координат и высот в топографо-геодезических работах, выполняемых на территории СССР, принять за начало координат Пулково, а исходный уровень высот – Балтийское море (Кронштадтский футшток).

2. Принять при вычислении геодезических координат размеры референц-эллипсоида, выведенные профессором Ф. Н. Красовским, а именно:

Большая полуось = 6378245 метров.

Сжатие = 1:298,3.

3. Обязать Министерства и ведомства, ведущие топографо-геодезические работы, применять установленную систему координат и высот с 1946 года.

4. Возложить на Генеральный Штаб Вооружённых Сил СССР и Главное Управление Геодезии и Картографии при Совете Министров СССР перевычисление в единую систему координат и высот триангуляционной и нивелирной сетей, выполненных до 1946 года, и обязать их закончить эту работу в пятилетний срок.

5. Возложить контроль за переизданием в новой системе координат и высот топографических карт на Генеральный Штаб Вооружённых Сил СССР, а морских карт на Главный Штаб Военно-морских Сил.”

Постановление подписал Председатель Совета Министров Союза СССР И. Сталин. Так, начиная с этого постановления,

эллипсоид, принятый в СССР для геодезических работ, получил официальное название референц-эллипсоида Красовского 1940 года.

Нетрудно заметить, что если в этом постановлении исходный уровень высот – Балтийское море конкретизирован Кронштадтским футштоком, то Пулково дано без указания точки отсчёта. Поэтому были проделаны дополнительные работы и в 1948 году в “Основных положениях о Государственной геодезической сети (ГГС)” за исходный пункт триангуляции СССР был принят сигнал “А” со следующими исходными датами:  $B = 59^{\circ}46'15,359''N$ ,  $L = 30^{\circ}19'28,318''E$ ,  $h = 0$ ,  $A = 121^{\circ}06'42,305''$  с пункта сигнал “А” на пункт Бугры Саблинской базисной сети [57, 59]. Уклонение отвесной линии в плоскости меридиана принято  $+0,16''$ , а в плоскости первого вертикала  $-1,78''$  [14]. Так была окончательно учреждена Система координат 1942 года (СК-42). В зарубежной литературе эту систему называют Pulkovo 42, S-42 или SK-42. На отечественных навигационных картах, изданных до 1992 года, эта система указывалась как “Система координат советских морских карт”.

Дальнейшее распространение системы координат 1942 года на территорию бывшего СССР проводилось последовательно по блокам: блок Север (1968), блок Крайний Север (1971), блок Дальний Восток (1972) и так далее [59]. Надо отметить, что территория Сахалина, Камчатки и Приморья были привязаны гораздо позже. Распространение системы координат проводилось методом “нанизывания”, когда координаты предыдущего блока принимались за твёрдые при уравнивании последующего. Таким способом система координат 1942 года была распространена на всю территорию бывшего СССР. Этот способ имел ряд недостатков, но был оправдан тем, что необходимо было в кратчайшие сроки распространить систему координат на всё огромное пространство, обеспечив тем самым возможность сплошного его картографирования. Особо в этом нуждались мореплаватели, так как уже начиналась эра спутниковой навигации, а морские карты, составленные на отечественные воды Дальнего Востока и Севера, не отличались точностью привязки.

По первоначальным планам в соответствии с поручением Правительства СССР 1948 года общее уравнивание должно быть завершено в 1985 году. На самом деле оно было выполнено в 1991 году. Причиной тому послужило увеличение объёма работ, которые, в свою очередь, требовали колоссальных затрат на вычисления и создание новых подходов к построению и распространению такой масштабной системы, которой явилась система координат 1942 года.



Огромные затраты потребовало изготовление карт. Этой составляющей тоже уделялось огромное внимание, памятуя о том, что военные неудачи 1941 года частично объяснялись отсутствием топографических карт.

На Варшавской конференции в октябре 1954 года было принято решение о распространении системы координат 1942 года на территории Польши, ГДР, Чехословакии, Венгрии, Румынии и Болгарии. Этот проект был назван “Двинский объект” [57]. Исходными данными служили координаты триангуляционного ряда I класса Пулково-Николаев. Окончательно работы по Двинскому объекту были завершены только в 1960 году. С этих пор упомянутые выше государства стали изготавливать топографические и морские карты в системе координат 1942 года. В 1973 году на совещании геодезических служб стран-членов Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ) и Варшавского договора было принято решение вторично уравнивать астрономо-геодезическую сеть этих стран в пределах Двинского объекта от ряда Пулково-Николаев до Потсдама. Завершилась эта работа в 1983 году. Погрешности взаимного положения смежных пунктов составляли порядка 4 – 5 см. При вычислениях Г. Е. Ефимовым было обнаружено, что исходный азимут Саблино-Бугры содержит погрешность 4" – 5", не обнаруженную при предыдущих уравниваниях [57]. Эти погрешности были допущены астрономом Рассадиным в 1926 году. При анализе выяснилось, что первое определение этого азимута, сделанное ещё в 1912 году известным военным геодезистом А. Г. Дитцем, оказались правильными, хотя и было выполнено в одном направлении. Результаты измерений А. Г. Дитца в уравнивательных вычислениях 30-х и 40-х годах не принимались во внимание. В 1981 году объединение Севзапаэрогеодезия заново выполнило измерения. Новое значение астрономического азимута Бугры-Саблино  $136^{\circ}54'55,09''$  всего на  $1,25''$  отличалось от значения, полученного Дитцем.

Этот факт и ряд других фактов послужили причиной пересмотра планов развёртывания системы координат 1942 года на восток. После распада СССР и Варшавского Договора ряд стран ввели у себя свои национальные системы геодезических координат, в основе которых продолжал оставаться референц-эллипсоид Красовского. Введены были новые начальные пункты и измерены параметры ориентирования эллипсоида.

Некоторую задержку работ по распространению системы 1942 года вызвала попытка согласования этой системы с международными,

а также изменения в метрологическом обеспечении астрономо-геодезических работ. Так, приказом ГУГК от 18 декабря 1973 года было введено Международное начало координат полюса (ОСИ) и нуль-пункт счёта долгот Международного бюро времени В1Н-68.

Была ещё одна причина задержки. Заключалась она в геодинамическом аспекте, который ранее не учитывался. В конце 50-х годов в Прибайкалье произошло два 9 – 10-бальных землетрясения: Муйское в 1957 году и Средне-Байкальское в 1959 году. В результате первого на земной поверхности появились трещины до 5 метров, а после второго дно Байкала на протяжении 30 – 50 км опустилось на 10 – 15 метров. Эти явления вызвали большой объём дополнительных полевых работ. Сравнение данных показало, что астрономические азимуты изменились после землетрясений в этом регионе на 5 – 10 и более секунд. После уравнивания в начале 80-х годов оказалось, что расхождения координат астрономических пунктов сети в междуречьях Северной Двины и Печоры, Оби и Енисея они достигали 10 метров. На Чукотке сдвиг составил 25 метров за 40 лет.

Попыткой ускорить распространение системы координат 1942 года стало введение так называемой “Системы координат 1963 года” (СК-63), а также местных систем координат. Система 1963 года по формальным признакам относится к местным системам. Она была распространена на несколько обширных зон СССР. Для перехода от координат зоны к системе 1942 года использовались ключи перехода. Практика показала, что переход от СК-63 к СК-42 не обеспечивал необходимую точность, и от неё пришлось отказаться, сохранив для ряда территорий СССР местные системы координат, ключи которых обеспечивали более высокую точность координат при переходе к СК-42.

Необходимо отметить, что многие крупномасштабные морские карты на побережье Дальнего Востока России были составлены в местных системах координат, хотя в заголовке имели указание на геодезическую основу Пулково-42. Использование спутниковых радионавигационных систем Цикада, Транзит, Глонасс и Навстар GPS приводило к заметному сдвигу обсервованных координат на этих картах. Поэтому в последние годы на таких картах стали печатать поправки к обсервованным координатам, полученным с помощью навигационных приёмников системы Навстар GPS, для перехода к геодезическим координатам карты. Напечатанные поправки являются по сути дела ключами для перехода от системы координат WGS-84 к местной системе координат карты. Вполне возможно, что существование ряда местных систем координат останавливало

зарубежных изготовителей навигационных приёмников СРНС Навстар GPS от ввода в программное обеспечение приёмников параметров для автоматического преобразования координат из системы WGS-84 в СК-42.

Окончанием работ по распространению системы координат 1942 года принято считать геодезическую привязку о. Сахалин. Островная геодезическая сеть была привязана с помощью аппаратуры Навстар GPS в 1991 году с точностью  $\pm 15$  см [59]. Попутно было повышено качество слабого в геодезическом отношении фрагмента астрономо-геодезической сети Приморского края.

На создание опорной сети для развёртывания системы координат 1942 года было затрачено порядка 800 миллиардов рублей в масштабе цен 1997 года [59]. Поддержание в рабочем состоянии пунктов сети, а также текущие работы по переуравнению сети и необходимые полевые работы ежегодно требуют больших расходов. Поэтому ещё в 80-х годах прошедшего столетия сформировалась необходимость замены СК-42, в которой координаты исходного пункта передаются с помощью рядов триангуляции, на более прогрессивную систему координат.

### **4.3. СПУТНИКОВЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Опыт построения и поддержания на должном уровне точности астрономо-геодезических сетей (АГС), основанных на рядах триангуляции, наглядно показал методологические, технологические и эксплуатационные недостатки традиционных систем координат, базирующихся на референц-эллипсоидах, ориентирование которых в теле Земли происходит по критерию минимума отклонений их поверхностей от поверхности геоида (квазигеоида) на территории страны или региона. С появлением спутниковых радионавигационных систем (СРНС) стало тем более понятно, что триангуляционные системы геодезических координат неудобны как с точки зрения определения координат наземными потребителями, так и с точки зрения геодезического обеспечения полётов спутников. Поэтому с 60-х годов прошлого столетия начали создаваться разнообразные спутниковые геодезические системы, в основе которых уже находились общеземные эллипсоиды (ОЗЭ).

Спутниковая геодезия решает следующие задачи: определяет взаимное положение пунктов в некоторой геодезической системе координат; определяет положение центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли; определяет координаты пунктов в

абсолютной системе, отнесённой к центру масс Земли; устанавливает связи между отдельными геодезическими системами; создаёт предпосылки к построению единой мировой системы геодезических координат; изучает параметры внешнего гравитационного поля и форму Земли; уточняет некоторые фундаментальные постоянные.

Методы спутниковой геодезии имеют существенные преимущества при решении некоторых задач по сравнению с традиционными. Возникает возможность быстрой передачи координат на расстояния в несколько тысяч километров и создания построений в абсолютной системе координат, отнесённой к центру масс Земли. Определение параметров гравитационного поля по наблюдениям ИСЗ требует сравнительно небольшого числа станций на поверхности Земли, в то время как использование для этой цели традиционных методов основывается на густой сети пунктов на суше и на море. Применение спутниковой альтиметрии позволяет за короткий срок детально изучить форму геоида в океанах.

*Доплеровская геодезическая сеть (ДГС).* Она построена в СССР по результатам обработки доплеровских наблюдений ИСЗ американской навигационной системы Транзит, выполненных на пунктах сети за период с 1984 по 1993 год. Построение сети выполнялось в два этапа. На первом этапе обрабатывались доплеровские наблюдения в ходе одного или нескольких сеансов связи со спутниками, проведённых в разное время на близко расположенных пунктах ДГС [59]. В этой сети расстояния между одновременно наблюдавшимися пунктами были сравнительно небольшими в понятиях спутниковых сетей (500 – 2000 км). Принимаемая с ИСЗ эфемеридная информация применялась для уточнения геоцентрических координат пунктов. Так как СРНС Транзит работала сначала в геодезической системе координат WGS-72, а затем – в системе WGS-84, то и абсолютные координаты пунктов ДГС уточнялись в этих системах.

В результате первого этапа обработки было построено несколько фрагментов ДГС, покрывающих с некоторыми перекрытиями всю территорию бывшего СССР и стран Восточной Европы. На каждом фрагменте точность координат оценивалась с погрешностью порядка 3 – 4 м.

На втором этапе выполнилось объединение отдельных фрагментов через их общие пункты в единую ДГС. Точность определения координат в объединённой сети в системе координат WGS-84 возросла до 1 – 1,5 м.

В окончательном виде ДГС состояла из 162 пунктов, из которых 131 располагались на материковой части бывшего СССР, два пункта находились на Командорских островах, а остальные принадлежали странам Восточной Европы.

**Космическая геодезическая сеть (КГС).** В зависимости от конкретных задач, стоящих перед сетью космической триангуляции, возможны три типа их построения:

- 1) построение отдельных фигур или засечек для определения координат уединённых пунктов (например, при геодезической привязке местных (локальных) геодезических систем, разделённых морями или протяжёнными территориями, к единой (материковой) геодезической сети);
- 2) построение рядов для передачи системы координат на большие расстояния и для связи удалённых геодезических систем (например, европейской и австралийской триангуляции);
- 3) развитие сплошных сетей для обеспечения обширных территорий единой системой координат и создания сети геодезических пунктов с заданной плотностью.

Построение сетей космической триангуляции обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами построений. Главное преимущество заключается в избыточности измерений из-за того, что положение спутника наблюдается одновременно с нескольких пунктов. Для определения положения пунктов в процессе длительных наблюдений накапливается большое количество избыточных измерений, приводящее к повышению точности.

КГС была создана Топографической службой Вооружённых Сил Российской Федерации. Она реализует геоцентрическую систему координат, что, в свою очередь, является частью системы геодезических параметров Земли 1990 года (ПЗ 90), построенной по результатам фотографических, доплеровских, радиодальномерных и альтиметрических наблюдений геодезических спутников системы “Гео-ИК”. Также использовались данные дальномерных наблюдений отечественных ИСЗ Глонасс и “Эталон”.

После обработки траекторных и высотомерных наблюдений определялись геоцентрические координаты пунктов и параметры гравитационного поля Земли. По результатам окончательного решения геоцентричность КГС оценивалась средней квадратической погрешностью  $\pm 1$  м, а точность взаимных положений пунктов КГС была достигнута порядка 0,2 – 0,3 м.

**Система координат ПЗ-90.** После М. С. Молоденского лидером в области геодезической гравиметрии слал профессор Леонард Павлович Пеллинен (1921 – 1991). В 1956 году Л. П. Пеллинен возглавил исследования фигуры и гравитационного поля Земли в связи с предстоящими работами по освоению космического пространства. Освоение космоса потребовало создания общеземного эллипсоида, центр которого должен совпадать с центром масс Земли, а его параметры были бы как можно ближе к фундаментальным характеристикам Земли как физического тела. Л. П. Пеллинен для вывода параметров общеземного эллипсоида и глобальной гравитационной модели Земли использовал результаты всех известных гравиметрических работ на суше, а также на морях Мирового океана, выполненных на кораблях ВМФ СССР.

Большую полуось общеземного эллипсоида вычислили вместе с прямоугольными пространственными координатами центра эллипсоида Красовского относительно центра масс Земли. В результате вычислений были получены следующие фундаментальные постоянные: большая полуось ( $a$ ) – 6378137 м, геоцентрическая гравитационная постоянная ( $GM$ ) –  $398600,4 \text{ км}^2\text{с}^{-2}$ , сила тяжести на экваторе ( $g_e$ ) – 978,0324 Гал, сжатие –  $1/298,250$ . Эти величины вместе с известной угловой скоростью вращения Земли позволили вывести систему параметров Земли 1962 года (ПЗ-62), принятую в СССР в баллистических расчётах при исследовании космического пространства. Только через 18 лет после аналогичных исследований в США Международной геодезической ассоциацией были приняты фундаментальные геодезические постоянные, названные GRS. Они имели следующие значения:  $a = 6378136,6 \text{ м}$ ,  $GM = 398441,8 \text{ км}^2\text{с}^{-2}$ ,  $g_e = 9780327 \text{ Гал}$ , сжатие =  $1/298,257$ . Практически точное совпадение ПЗ-61 и GRS свидетельствуют о высокой точности гравиметрических определений, выполненных на территории СССР [57]. По мере накопления знаний о гравитационном поле Земли, по мере развития методов траекторных измерений искусственных спутников Земли и формирования методологии спутниковой геодезии и навигации возникли предпосылки использования общеземного эллипсоида в качестве опорной (референсной) поверхности для создания принципиально новых систем геодезических координат.

В середине 80-х годов в нашей стране был осуществлён вывод системы параметров гравитационного поля Земли по совокупности гравиметрических, спутниковых и астрономо-геодезических данных. Это позволило приступить к решению задачи определения координат

наземных пунктов и гравитационной задачи, а затем построить первую геоцентрическую систему координат. Кроме того, удалось получить элементы ориентирования государственной референсной системы координат 1942 года (СК-42) относительно геоцентрической системы координат с точностью линейных элементов ориентирования  $\pm 3 - 5$  м, а также построить карты высот квазигеоида над общеземным эллипсоидом (ОЗЭ) и над эллипсоидом Красовского. Полученные результаты были введены в практику геодезических работ в 1975 – 1980 годах.

Дальнейший прогресс в точности определения геодезических параметров Земли был связан с повышением точности измерительных систем, в первую очередь доплеровских, а также с совершенствованием методов построения координатной основы геоцентрической системы координат и определения характеристик гравитационного поля Земли (ГПЗ). Была разработана методика вывода параметров ГПЗ, обеспечивающая построение универсальных моделей ГПЗ в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям и параметров набора систем точечных масс с целью планетарного описания и детального представления гравитационного поля. Впервые в космической геодезии был осуществлён переход к выводу глобальных моделей геопотенциала непосредственно через систему точечных масс с учётом методических погрешностей сферической аппроксимации.

В ходе многочисленных наблюдений были получены координаты пунктов, закрепляющих геоцентрическую систему координат. Кроме того, было получено значение большой полуоси ОЗЭ – 6378136 м [60]. Параметры ОЗЭ, модели ГПЗ, элементы ориентирования системы координат 1984 года составили содержание “Параметров Земли 1985 года” (ПЗ-85).

С 1985 года по настоящее время в России функционирует специальный космический геодезический комплекс “Гео-ИК”. Геодезические спутники этой системы имеют почти круговые орбиты с высотой порядка 1500 км и наклоном  $74^\circ$  и  $83^\circ$ . Эти спутники оснащены радиовысотомерами с точностью измерения высот над морской поверхностью  $\pm 0,5 - 1$  м, доплеровскими передатчиками, обеспечивающими траекторные измерения на наземных пунктах наблюдения радиальной скорости ИСЗ с точностью  $\pm 1$  см/с, уголковыми отражателями, обеспечивающими лазерные измерения дальности с дециметровой точностью, запросной радиодальномерной системой с точностью измерения расстояний до спутника около  $\pm 1$  м,

системой импульсной световой сигнализации, обеспечивающей визуальное измерение углов на ИСЗ с точностью  $\pm 1,5''$ . К 1989 году была накоплена измерительная информация Гео-ИК в объёмах, достаточных для вывода с заданной точностью новой системы “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90). Эта система предназначена для выполнения целого ряда задач геодезии, обеспечения космических полётов, а также для геодезического обеспечения работы отечественных спутниковых радионавигационных систем Глонасс и Цикада [26, 60].

Параметры Земли 1990 года включают основные астрономические и геодезические постоянные; характеристики координатной основы – геоцентрической системы координат (в том числе параметры общеземного эллипсоида, координаты пунктов космической геодезической сети, закрепляющие эту систему на поверхности Земли, элементы связи с референц-системами координат); планетарные модели нормального и аномального гравитационного поля Земли.

К числу преимуществ ПЗ-90 по сравнению с американской WGS-84 относятся также детальные характеристики гравитационного поля в Мировом океане (высоты квазигеоида, аномалии силы тяжести и отклонения отвесных линий). Была достигнута точность геоцентрических положений пунктов  $\pm 2$  м. Точность взаимного положения пунктов на территории страны была достигнута порядка  $\pm 0,2 - 0,3$  м при среднем расстоянии между соседними пунктами сети  $1,5 - 2$  тыс. км.

По определению система координат ПЗ-90 является геоцентрической прямоугольной пространственной системой с началом в центре масс Земли. Ось  $Z$  направлена к Условному Земному полюсу, как это определено рекомендациями Международной службой вращения Земли (IERS). Ось  $X$  направлена в точку пересечения плоскости экватора и нулевого меридиана, установленного Международным Бюро Времени (Bureau International de l'Heure). Ось  $Y$  дополняет систему до правой. Реализация этой системы осуществляется через координаты пунктов КГС. Пункты наземного комплекса управления системой Глонасс совмещены с пунктами КГС.

Все пункты КГС на территории России были определены в системе координат СК-42. Численные значения элементов ориентирования СК-42 относительно системы ПЗ-90 и их средние квадратические погрешности составили следующие величины:



$$\begin{aligned}\Delta X &= +25 \text{ м} (\pm 2 \text{ м}), & \Delta Y &= -141 \text{ м} (\pm 2 \text{ м}), & \Delta Z &= -80 \text{ м} (\pm 3 \text{ м}), \\ \omega_X &= 0,00'' (\pm 0,1''), & \omega_Y &= -0,35'' (\pm 0,1''), & \omega_Z &= -0,66'' (\pm 0,1''), \\ \Delta m &= (0,00 \pm 0,25) \times 10^{-6}.\end{aligned}$$

Эти величины были рассчитаны на первоначальном этапе создания системы ПЗ-90. В дальнейшем они неоднократно уточнялись. Поэтому аналогичные параметры, приведённые в разделе “Преобразование координат ПЗ 90 и СК 42” данного учебного пособия, соответствует более современным исследованиям.

Как уже говорилось выше, в 1991 году произошло очередное уточнение астрономо-геодезической системы 1942 года в результате переуравнивания. Пункты получили новые координаты, а система получила название АГС 91. Иногда в литературе её называют СК-91. С помощью ПЗ-90 были определены следующие параметры преобразования координат при переходе от АГС 42 к АГС 91:

$$\begin{aligned}\Delta X &= -3,9 \text{ м}, & \Delta Y &= +5,9 \text{ м}, & \Delta Z &= -6,5 \text{ м}, \\ \omega_X &= -0,06'', & \omega_Y &= +0,32'', & \omega_Z &= +0,81'', \\ \Delta m &= -0,48 \times 10^{-6}.\end{aligned}$$

Так как помимо СРНС Глонасс в геодезии, в воздушной и морской навигации уже широко применялась аналогичная американская СРНС Навстар GPS, то вполне естественно возникла задача вычисления параметров для перехода от координат в системе ПЗ-90 к координатам в WGS-84. Задача решалась с помощью наблюдений в пунктах КГС за спутниками системы Навстар GPS, а также в ходе многочисленных измерений координат неподвижно установленного приёмника, который одновременно принимал сигналы спутников созвездий Глонасс и Навстар GPS.

Параметры общеземного эллипсоида ПЗ-90 и фундаментальные постоянные содержатся в таблице 1 раздела “Референц-эллипсоид” данного учебного пособия.

Важнейшей компонентой системы ПЗ-90 является принятая в ней модель гравитационного поля. Гравитационное поле ПЗ-90 представлено в виде параметров нормального и аномального полей. Нормальное гравитационное поле представлено в двух формах: в виде нормированных гармонических коэффициентов нормального потенциала и в виде системы семи точечных масс. Аномальное гравитационное поле Земли ПЗ-90 представлено в трёх интерпретациях: в форме полностью нормированных коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 36

степени и порядка, в форме параметров системы 320 точечных масс и в форме параметров 60 точечных масс. В 1993 году на основе этих моделей была получена модель аномального гравитационного поля Земли в виде коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 200 степени и порядка, а также созданы детальные каталоги высот квазигеоида над общеземным эллипсоидом и эллипсоидом Красовского системы СК-42. Точность представления гравитационного поля Земли коэффициентами до 200 степени характеризуется средней квадратической погрешностью высот квазигеоида над общеземным эллипсоидом по всей поверхности Земли в среднем  $\pm 2$  м, системой 320 точечных масс и коэффициентами до 36 степени –  $\pm 3$  м, системой точечных масс –  $\pm 4$  м

Разнообразие интерпретаций гравитационного поля Земли позволяют потребителю выбрать оптимальный вариант модели для решения конкретной прикладной задачи. В системе Глонасс для расчёта бортовых эфемерид ИСЗ используются гармонические коэффициенты геопотенциала до 8 степени и порядка включительно. Эти коэффициенты приведены в источнике [60]. Для расчёта апостериорных орбит ИСЗ при постобработке геодезических наблюдений используются более детальные модели. Для вычисления нормальных высот непосредственно в приёмниках СРНС Глонасс удобно использовать системы точечных масс. Параметры системы 60 точечных масс и необходимые формулы для вычисления нормальных высот также приведены в источнике [60]. Для высокоточных расчётов нормальных высот при дифференциальных режимах работы приёмников СРНС Глонасс требуются более точные модели гравитационного поля Земли и каталоги высот квазигеоида.

Забегаю несколько вперёд, следует сказать о современном статусе геодезической системы ПЗ-90. Постановлением Правительства РФ от 28 июля 2000 года № 568 “Об установлении единых государственных систем координат” геоцентрической системе координат “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90) отводится роль обеспечения орбитальных полётов и решения навигационных задач. Принятая система координат 1995 года (СК-95) предназначается для использования для геодезических и картографических работ. С позиции навигационного применения приёмников СРНС Глонасс это говорит о том, что обсервованные координаты судна сначала должны быть вычислены в системе ПЗ-90, а потом преобразованы в геодезическую систему СК-95, для того, чтобы наносить их на карту.

#### 4.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ 1995 ГОДА (СК-95)

Система геодезических координат определяется положением центра референц-эллипсоида и ориентировкой его осей в теле Земли (геоида). В классических астрономо-геодезических системах положение референц-эллипсоида закрепляется астрономическим азимутом с одного пункта на другой в предположении, что оба пункта одновременно принадлежат геоиду и референц-эллипсоиду. Но поскольку эта система координат физически реализуется положением всей совокупностью геодезических пунктов, закреплённых на поверхности Земли, то положение центра референц-эллипсоида и ориентировка его осей фактически определяются значением координат по результатам уравнивания. Поэтому всякое изменение координат пунктов АГС приведёт к смещению референц-эллипсоида в теле Земли.

В традиционных геодезических системах большое внимание уделялось определению исходных геодезических дат, поскольку исходные геодезические даты по существу являлись формализованными элементами ориентирования референц-эллипсоида и определяли его положение в теле Земли. Именно поэтому исходные геодезические даты определялись по совокупности результатов астрономо-геодезических данных для всей сети. При этом определялись поправки в исходный азимут, уклонение отвесной линии и высота квазигеоида в исходном пункте по результатам анализа азимутальных измерений и уклонений отвесных линий в астропунктах по всей сети при условии максимальной близости эллипсоида к поверхности квазигеоида (геоида). Каких-либо других способов достаточно точной фиксации положения системы координат в теле Земли не существовало вообще.

Однако вопреки существовавшему мнению среди многих геодезистов, сами значения исходных геодезических дат устанавливают только систему отсчёта геодезических координат, но не определяют точность самой геодезической сети. Геодезическая сеть служит для распространения координат по территории. Точность геодезической сети определяется всей совокупностью астрономо-геодезических измерений. Точность взаимного положения геодезических пунктов не зависит ни от расположения исходного пункта, ни от значений исходных геодезических дат.

В современных условиях, когда имеются достаточно точные реализации общеземной геоцентрической системы координат, исходные геодезические даты как формализованные параметры

ориентирования референц-эллипсоида по существу заменяются параметрами взаимного ориентирования референцной и общеземной геоцентрической систем [59].

Развитие мировой гравиметрической съёмки, а также определение планетарных характеристик геопотенциала по спутниковым данным сделали возможным с высокой точностью определить положение центра референц-эллипсоида Красовского относительно центра масс Земли по гравиметрическим данным. Созданная космическая геодезическая сеть (КГС) позволяет определять как линейные, так и угловые элементы взаимного ориентирования геодезической референсной системы (эллипсоида Красовского) и геоцентрической системы ПЗ-90 (общеземного эллипсоида).

Определение возвышений квазигеоида над эллипсоидом Красовского методом астрономо-гравиметрического нивелирования обеспечивает необходимую точность проектирования результатов измерений на поверхность эллипсоида. Сама величина возвышения квазигеоида в данном случае на точность проектирования не влияет. Карты возвышений квазигеоида над референц-эллипсоидом Красовского для территории бывшего СССР указывают на значительные отклонения поверхности эллипсоида от квазигеоида для районов Дальнего Востока и Северо-востока страны. Объясняется это тем, что астрономо-геодезические данные этих районов не участвовали в определении исходных дат СК-42 (Pulkovo-42). В последние десятилетия ушедшего столетия стало понятно, что величины высот квазигеоида не влияют на точность построения геодезической сети. Поэтому сейчас уже нет острой необходимости в подборе параметров референц-эллипсоида с условием его максимальной близости к геоцентрической системе координат и общеземному эллипсоиду, к которым в настоящее время стремятся перейти многие страны мира. Целесообразность такого перехода в этих странах диктуются практическими соображениями в связи с массовым использованием в системе геодезического обеспечения спутниковой глобальной радионавигационной системы Навстар GPS, которая функционирует в геоцентрической системе координат WGS 84. Однако такой переход для нашей страны связан с необходимостью больших финансовых и трудовых затрат. В первую очередь затраты будут вызваны необходимостью переиздания карт и невозможностью их совместного использования с уже изданными картами в системе координат 1942 года, так как поправки к координатам в этом случае могут достигать 100 м и более.

Для эффективного применения спутниковых технологий СРНС Глонавс и Навстар GPS в условиях использования в нашей стране государственной референцной геодезической системы координат требуется с высокой точностью определить параметры перехода от геоцентрической общеземной системы координат к референцной геодезической. Однако отечественная геодезическая сеть в системе координат 1942 года не является однородным геодезическим построением. Сеть вводилась поэтапно блоками, каждый из которых уравнивался в отдельности, в разное время в соответствии с постепенным продвижением её создания с запада на восток и северо-восток. В результате эти блоки АГС имеют различный уровень систематических и случайных погрешностей координат геодезических пунктов. Поэтому при использовании значений геодезических координат пунктов в системе 1942 года практически невозможно определить для всей сети АГС единые параметры перехода от геоцентрической к геодезической референцной системе, обеспечивающие перевычисление координат на современном уровне точности.

Выполненные в своё время определения элементов взаимного ориентирования СК-42 и геодезической системы ПЗ-90 по существу являются аппроксимацией разностей координат в обеих системах для конкретной реализации КГС для территории бывшего СССР. О том, что это именно формальная аппроксимация свидетельствуют полученные величины углов разворота  $\omega_Z$  и  $\omega_Y$  относительно осей  $Z$  и  $Y$  соответственно. В то же время известно, что суммарная точность приведения астрономических измерений к одному полюсу и к единому началу отсчёта долгот значительно выше, чем величины полученных углов разворота. Поэтому по своему физическому смыслу эти параметры скорее следует рассматривать не как элементы взаимного ориентирования двух отсчётных эллипсоидов (общеземного и референц-эллипсоида Красовского), а как формальные параметры преобразования одной системы координат в другую при частной реализации этих систем совместными пунктами КГС АГС. При этом, когда используются единые параметры преобразования, то для отдельных участков АГС из-за её значительных региональных деформаций могут возникать погрешности, достигающие 10 – 15 метров. Для так называемых местных систем координат эти погрешности достигают гораздо больших величин.

В шестидесятых годах ЦНИИГАиК начал проводить работы по выводу элементов ориентирования по всей совокупности астрономических пунктов АГС. Казалось, что это должно было в

лучшей степени обеспечить точность получения единых параметров преобразования систем координат для всей страны в целом. Однако результаты этих работ, проделанных в 1962, 1964, 1971 и в 1977 годах, во-первых, показали различия в параметрах, во-вторых, подтвердили тот факт, что их невозможно использовать в качестве единых для всей территории страны [59]. Из этого факта следует другой важный вывод: увеличение числа пунктов спутниковой сети качественно не изменит значения единых параметров элементов взаимного ориентирования для системы координат 1942 года и геоцентрической системы.

Анализ результатов проделанной работы говорил о возможных двух вариантах объяснения причин расхождения получаемых углов разворота осей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и масштабного коэффициента  $\Delta m$  между системами КГС и АГС:

- существует общий систематический разворот осей АГС относительно КГС, но его картина искажена локальными и региональными погрешностями;
- общего разворота на самом деле не существует, а значения углов и масштабного коэффициента есть результат суммарного влияния локальных и региональных деформаций сети.

Если исходить из первого постулата, объясняющего причины появления углов и масштабного коэффициента, то наиболее строгим будет следующий подход к заключительной стадии уравнивания и установления новой референцной системы:

- переход от общеземной системы координат к системе координат АГС осуществляется всеми семью элементами преобразования координат;
- завершающий этап уравнивания осуществляется с опорой на общие твёрдые пункты в системе координат АГС 1991 года;
- после заключительного уравнивания АГС во все пункты АГС вводятся необходимые поправки за элементы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и  $\Delta m$ ;
- далее при переходе от общеземной системы координат к референцной системе используются только три линейных элемента  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$ .

При условии истинности первого постулата сеть АГС будет в минимальной степени подвержена региональным деформациям на стадии заключительного уравнивания.

Если принять второй постулат, объясняющий причины получения параметров общей деформации сети АГС, то при переходе к заключительной стадии уравнивания координаты твёрдых пунктов из системы координат КГС необходимо переводить в систему координат

АГС с использованием только трёх линейных элементов  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$ . В этом случае при выполнении заключительной стадии уравнивания оптимальным образом будут исправлены территориальные деформации сети, результатом чего при совместном уравнивании было появление элементов разворота и масштабного коэффициента.

Правомерность этих рассуждений при выборе рассмотренных двух вариантов перехода к заключительной стадии уравнивания достаточно наглядно иллюстрируется следующим примером. Предположим, что космическая геодезическая сеть и доплеровская геодезическая сеть расположены только на Европейской части нашей страны. Если полученные для Европейской части значения угловых элементов разворота и масштабного коэффициента справедливы и для остальной части сети, то необходимо будет трансформировать всю сеть АГС перед окончательным уравниванием. Если же значения  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и  $\Delta m$  характеризуют только региональные деформации сети на Европейской части, то переход к заключительному уравниванию необходимо осуществлять только с тремя линейными элементами. Иначе произойдёт трансформация сети для территории Сибири и Дальнего Востока за те элементы, которые характеризуют только деформации сети на Европейской части.

Анализ деформации АГС в системе координат 1942 года показал необходимость оперативного введения новой системы геодезических координат. Её назвали системой геодезических координат 1995 года (СК-95).

Введение новой системы на государственном уровне требует выполнения целого комплекса организационных и технических мероприятий, реализация которых связана со значительными финансовыми затратами. Поэтому новое качество системы координат СК-95 не может служить единственным основанием для её скорейшего внедрения в топографо-геодезическое производство только как естественное желание использовать более новую систему по сравнению с СК-42. Главным основанием оперативного внедрения новой системы является невозможность эффективного внедрения современных спутниковых технологий в геодезическое производство и в широкую навигационную практику при использовании системы координат 1942 года.

Практика применения современных спутниковых технологий в геодезическом обеспечении показала, что эффективное использование спутниковых приёмников навигационных систем Глонасс и Навстар GPS в системе координат 1942 года во многих случаях невозможно. Это объясняется следующими причинами:

1. Система координат 1942 года не обеспечивает на требуемом уровне точности однозначного перехода к геоцентрическим системам координат, в которых работают глобальные навигационные системы Глонасс и Навстар GPS. Средняя квадратическая погрешность перехода из СК-42 к геоцентрическим составляет около  $\pm 4$  м в среднем для всей территории бывшего СССР. Для отдельных регионов эта погрешность может достигать  $\pm 10$  м и даже более.

2. Погрешности взаимного положения пунктов государственной геодезической сети (ГГС) в системе координат 1942 года на расстояниях порядка 50 – 100 км могут достигать  $\pm 0,5$  –  $\pm 1,0$  м. Это не позволяет во многих случаях однозначно осуществить геодезическую привязку к пунктам ГГС геодезических сетей специального назначения, развиваемых в настоящее время с помощью приёмников Глонасс и Навстар GPS. Эти противоречия связаны не только с тем, что спутниковая аппаратура имеет более высокую точность, но также и с тем, что требуемая точность построения специальных сетей значительно превышает точность координат пунктов ГГС в системе 1942 года.

3. Точность системы координат 1942 года и деформации ГГС в пределах зоны местной системы координат во многих случаях не позволяют однозначно с требуемой точностью определить параметры перехода (ключи) к местным системам координат.

4. Современное навигационное оборудование создаётся на базе спутниковой аппаратуры систем Глонасс и Навстар GPS, работающих в геоцентрических системах координат ПЗ-90 и WGS-84. До настоящего времени для морской навигации в России используются навигационные карты в системе координат 1942 года, которая не позволяет осуществлять однозначный переход к геоцентрическим системам с требуемой точностью.

Немаловажным вопросом внедрения новой системы координат является проблема ориентирования и подбора оптимальных элементов ориентирования относительно системы координат 1942 года. Рассматривались три варианта установления элементов ориентирования новой референцной системы координат СК-95:

1. Подобрать элементы ориентирования СК-95 с точки зрения минимума поправок к системе координат 1942 года для всей территории бывшего СССР. Но в таком случае возникли бы достаточно большие поправки для территории Европейской части, в том числе и для пункта Пулково, то есть для районов страны с наиболее активной экономической деятельностью. В результате такого подхода все карты масштаба 1:10000 для этой территории подлежали бы переизданию.



2. Элементы ориентирования СК-95 подобрать с условием минимума поправок для Европейской части бывшего СССР и районов Западной Сибири. В этом случае пункт Пулкова получил бы поправки порядка 1 – 2 метра по обеим координатам ( $X$ ,  $Y$ ), но в целом для этого региона поправки были бы минимальными и не превышали бы 3 метров за исключением районов Крайнего Севера.

3. Элементы ориентирования СК-95 должны сохранять неизменными координаты исходного пункта Пулкова, принятые для системы координат 1942 года.

В итоге был принят третий вариант из соображения сохранения геодезической традиции, поскольку из-за малых величин поправок для Европейской части территории бывшего СССР с точки зрения практической реализации варианты 2 и 3 по существу равнозначны [59].

По этой причине элементы взаимного ориентирования КГС и АГС, полученные по результатам совместного уравнивания, были скорректированы с целью соблюдения равенства нулю поправок в координаты исходного пункта Пулкова. Таким образом, связь между геоцентрической системой координат ПЗ-90 и новой референсной системой СК-95 будет осуществляться тремя линейными параметрами преобразования координат:

$$\Delta X = +25,90 \text{ м}, \Delta Y = -130,94 \text{ м}, \Delta Z = -81,76 \text{ м}.$$

Знаки соответствуют переходу от координат в СК-95 к координатам в системе ПЗ-90 [58]. Таким образом, в практику отечественной геодезии вводятся две системы координат: ПЗ-90 и СК-95.

Единая государственная система геодезических координат (СК-95) установлена постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 года за номером 568 “Об установлении единых государственных систем координат” [58]. В Постановлении написано следующее:

“В соответствии с Федеральным законом “О геодезии и картографии” Правительство Российской Федерации постановляет:

1. Установить следующие единые государственные системы координат:

система геодезических координат 1995 года (СК-95) – для использования при осуществлении геодезических и картографических работ начиная с 1 июля 2002 г.;

геоцентрическая система координат “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90) – для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полётов и решения навигационных задач.

2. Федеральной службе геодезии и картографии России осуществить организационно-технические мероприятия, необходимые для перехода к использованию системы геодезических координат 1995 года (СК-95). До завершения этих мероприятий используется единая система геодезических координат, введённая постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.

3. Министерству обороны Российской Федерации обеспечить в установленном порядке федеральные органы исполнительной власти по их запросам сведениями, необходимыми для использования геоцентрической системы координат “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90), и осуществить контроль за состоянием и развитием пунктов космической геодезической сети для этой системы координат.

Председатель Правительства Российской Федерации М. Касьянов”

Полученная в результате совместного уравнивания координат космической геодезической сети и астрономо-геодезической сети на эпоху 1995 года система координат СК-95 закреплена пунктами государственной геодезической сети. СК-95 строго согласована с единой государственной геоцентрической системой координат “Параметры Земли 1990 года” [58].

Система координат СК-95 установлена с условием параллельности осей её референц-эллипсоида пространственным осям системы координат ПЗ-90. За отсчётную поверхность в СК-95 принят референц-эллипсоид Красовского со следующими параметрами:  $a = 6378245$  м,  $\alpha = 1:298,3$ . Положение точек в принятой системе координат задаётся следующими координатами:

– пространственными прямоугольными координатами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (направление оси  $Z$  совпадает с осью вращения отсчётного эллипсоида, ось  $X$  лежит в плоскости нулевого меридиана, а ось  $Y$  дополняет систему до правой; началом системы координат является центр отсчётного эллипсоида);

– геодезическими координатами: широтой –  $B$ , долготой –  $L$ , высотой –  $H$ ;

– плоскими прямоугольными координатами  $x$  и  $y$ , вычисленными в проекции Гаусса-Крюгера или в других проекциях поверхности эллипсоида на плоскость.

Геодезическая высота  $H$  образуется как сумма нормальной высоты и высоты квазигеоида над отсчётным эллипсоидом. Нормальные высоты точек определяются в Балтийской системе высот 1977 года, исходным началом которой является нуль Кронштадтского

футштока, а высоты квазигеоида вычисляются над поверхностью эллипсоида Красовского [58].

Точность СК-95 характеризуется следующими средними квадратическими погрешностями взаимного положения пунктов по каждой из плановых координат: 2 – 4 см для смежных пунктов АГС; 0,3 – 0,8 м при расстояниях между ними от 1 до 9 тысяч км.

Точность определения нормальных высот характеризуется в зависимости от метода их определения следующими средними квадратическими погрешностями: 6 – 10 см в среднем по стране из уравнивания нивелирных сетей; 0,2 – 0,3 м из астрономо-геодезических определений при создании АГС.

Точность определения превышений высот квазигеоида астрономо-гравиметрическим методом характеризуется следующими средними квадратическими погрешностями: 6 – 9 см при расстояниях 10 – 20 км; 0,3 – 0,5 м при расстоянии 1000 км.

Система координат СК-95 отличается от системы координат СК-42 следующим:

- повышением точности передачи координат на расстояния свыше 1000 км в 10 – 15 раз и точности взаимного положения смежных пунктов в государственной геодезической сети в 2 – 3 раза;
- одинаковой точностью распространения системы координат для всей территории Российской Федерации и стран, входивших в состав СССР;
- отсутствием региональных деформаций государственной геодезической сети, достигающих в СК-42 нескольких метров и более;
- возможностью создания высокоэффективной системы геодезического обеспечения на основе использования глобальных спутниковых навигационных систем Глонасс и Навстар GPS.

Введение новой системы координат порождает новые проблемы, связанные с изменением координат всех объектов местности. Сделать эти проблемы менее болезненными для изготовителей и потребителей картографического материала – одна из задач, которая должна быть решена при переходе на новую систему.

Переход к новой более точной системе не снимает полностью всех проблем, поскольку и вновь вводимая система, основанная преимущественно на традиционной измерительной базе, всё ещё не соответствует возможностям спутниковых методов. Эти противоречия будут сняты лишь при построении системы координат, внутренне согласованной на уровне единиц сантиметров по всей территории страны после создания на соответствующем уровне точности

фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС), спутниковой геодезической сети I класса и высокоточной геодезической сети, предусматриваемой Концепцией и Подпрограммой перевода геодезического обеспечения на спутниковые методы [59].

Несомненно, в ближайшей перспективе практика практического геодезического обеспечения будет основана на использовании нескольких (не более 30) постоянно действующих пунктов спутниковых наблюдений и создании мобильных передвижных спутниковых дифференциальных геодезических станций. При этом геодезические съёмки будут выполняться непосредственно относительно этих пунктов на уровне точности первых сантиметров.

Введение новой системы координат естественно не может быть сведено только к замене старых координат пунктов опорной сети на новые. Так или иначе, потребуются способы аналитического или численного взаимного преобразования координат. При этом возможности установления связи между существующей и вновь вводимой референцной системы в смысле обеспечения достаточно точного взаимного преобразования координат с единым используемым набором параметров преобразования существенно ограничены. Как уже упоминалось выше, ограничения обусловлены высоким уровнем внутренних деформаций системы координат 1942 года и прежде всего их значительной нерегулярностью.

Переход на новую систему координат потребует издание новых карт. Об объёмах этих работ говорят такие факты. Для карт масштаба 1:10000 на Европейскую часть России потребуется издание новых карт для 20% территории. Для Сибири и Дальнего Востока для всех областей, расположенных восточнее 85 градусов долготы, потребуется переиздание всех карт того же масштаба.

Геодезической основой морских карт служит опорная сеть геодезических пунктов, координаты которых приведены в установленную для данного района земной поверхности систему координат, а высоты навигационных ориентиров приведены к принятому уровню моря. Для отечественных морских карт, издаваемых до настоящего времени ГУНиО в масштабе крупнее 1:500000 на воды бывшего СССР, всех европейских и средиземноморских государств, Турции, северного побережья Ирана, воды КНДР, Республики Кореи и Ляодунского полуострова, а также для карт в масштабах 1:500000 и мельче на весь Мировой океан геодезической основой в плановом отношении являются геодезические пункты в системе координат 1942 года. Поэтому с внедрением СК-95 предстоит их переиздание.

#### 4.5. БАЛТИЙСКАЯ СИСТЕМА ВЫСОТ 1977 ГОДА

Важнейшим вопросом, существенно влияющим на безопасность мореплавания, является вопрос выбора исходной поверхности, от которой ведётся отсчёт высот и глубин, помещаемых на карте. С давних времён за такую поверхность принимался средний уровень моря. Определение положения такой поверхности требует проведения систематических наблюдений за уровнем моря в течение многих лет. Первым в Европе для этих целей был Амстердамский футшток, установленный 1 сентября 1684 года. Закреплённая им уровенная поверхность, называемая Система высот Амстердама (Amsterdam Ordinance Datum) или Амстердамский нуль высот (Normal Amsterdams Peil), принята во многих странах северной Европы.

Стимулом для организаций таких наблюдений в России послужило развитие русского военного флота. Регулярные наблюдения за уровнем моря в военно-морской крепости Кронштадт (о. Котлин в Финском заливе Балтийского моря) были начаты в 1703 году по указанию Петра Первого, так как при сооружении береговых укреплений пришлось считаться с колебаниями уровня моря. В то время средний уровень моря назывался “ординарной водой” или “ординаром” [62]. Высота ординарной воды отличалась на воротах шлюзов и стенках Морского канала в Кронштадте. Первые водомерные рейки (футштоки) в России были установлены в Кронштадте и в Петербурге в начале XVIII века. К сожалению, данные наблюдений тех лет утеряны. Один из таких футштоков был установлен в Кронштадте в Купеческой гавани у быка Синего моста через Адмиралтейский (Обводной) канал в 1800 году. С того времени и до наших дней он служит для измерения колебаний уровня Балтийского моря.

Первые водомерные рейки, установленные в Финском заливе и в устье Невы, нужны были для наблюдений за изменением уровня воды, чтобы обеспечивать безопасность судоходства на этой сложной в навигационном отношении акватории. В XVIII веке наблюдения за уровнем моря в Финском заливе, сочетающиеся с промерными работами, проводились исключительно в целях составления навигационных карт и руководств для плавания. Именно здесь и в это время зарождалась отечественная гидрография.

Необходимость выбора единой отсчётной поверхности для измерения высот гор, холмов, сооружений проявился в начале XIX века, когда в России начались масштабные геодезические работы. К тому

времени уже были разработаны основные методы нивелирования. Нивелированием называется определение высот точек земной поверхности относительно некоторой избранной поверхности. В начале XIX века применялись геометрические, тригонометрические и гидростатические методы нивелирования. При геометрическом нивелировании определяют разность высот точек земной поверхности при помощи горизонтального визирного луча, измеряемого при помощи специального геодезического инструмента, называемого нивелиром. Геометрическое нивелирование предполагает, что высота одной точки уже известна, а с помощью нивелира определяется высота второй. Если эти точки расположены друг от друга на большом расстоянии, то путём последовательных перестановок нивелира определяют высоты промежуточных точек. Так формируется так называемый нивелирный ход. Тригонометрическое нивелирование подразумевает определение разности высот между двумя точками земной поверхности по вертикальному углу, измеренному из точки с известной высотой, и по известному расстоянию между точками. Понятно, что тригонометрическое нивелирование уступает в точности геометрическому, но позволяет гораздо быстрее выполнить геодезическую съёмку. Гидростатическое нивелирование определяет разность высот на основе использования свойства жидкостей устанавливаться в сообщающихся сосудах на одинаковом уровне. Этот способ был ещё известен в древнем Египте. Гидростатическое нивелирование применялось и применяется поныне не только в геодезии, но и в строительстве гидротехнических сооружений, в кораблестроении в тех случаях, когда применение нивелиров невозможно. Точность передачи уровня при гидростатическом нивелировании достигает  $\pm 0,2$  мм [65].

Первые геодезические определения высот точек земной поверхности в России были проведены методом тригонометрического нивелирования. Начиная с 1816 года, оно было выполнено по всей Русско-Скандинавской дуге.

В 1836 – 1837 годах А. Н. Савич и Е. Е. Саблер под общим руководством В. Я. Струве осуществили тригонометрическое нивелирование между Таганрогом и Чёрным Рынком для определения разностей уровней Азовского и Каспийского морей. Ими был проложен нивелирный ход протяжением 878,6 км с определением высот ряда гор Кавказа: Казбека, Эльбруса, Бештау и др. Уровень Каспийского моря по их определению оказался на 26 м ниже Азовского моря, то есть близким к его значению, полученному впоследствии из высокоточного

геометрического нивелирования. Тригонометрическое нивелирование широко применялось вплоть до начала 1870 года. С 1873 года в определении высот стало применяться геометрическое нивелирование.

В начале XIX века наблюдения за уровнем моря в Финском заливе приняли систематический характер. В 1837 году Петербургская академия наук по случаю новой инструментальной съёмки прибалтийских берегов обратилась в Морское министерство с просьбой поручить известному русскому гидрографу вице-адмиралу Михаилу Францевичу Рейнеке (1801 – 1859) с целью изучения смещения береговой линии вырубить на скалах Финского залива специальные знаки, наподобие финских и шведских, и определить их высоты над ординарной водой Балтийского моря. Эта работа была начата с упорядочения существующей уровневной сети, в результате которого к 1840 году были переопределены и закреплены высоты нулей отечественных футштоков над средним уровнем моря, вычисленным М. Ф. Рейнеке за период с 1825 по 1840 год. Полученный средний многолетний уровень Балтийского моря был в 1840 году закреплён в виде черты, выбитой на гранитном устое Синего моста в Кронштадте, с которой в дальнейшем совмещались нули уровневных реек. Этот уровень, который в дальнейшем получил название “нуль Кронштадтского футштока”, по предложению Главного штаба с 1872 года стал использоваться для отсчёта всех высот в Российской империи [62]. До этого выбитая черта называлась “меткой Рейнеке”. Позднее, в 1886 году, этот уровень был привязан к стоящему невдалеке памятнику другому известному русскому гидрографу Петру Кузьмичу Пахтусову (1800 – 1835) к горизонтальной высечке буквы “П” в слове “ПОЛЬЗА”. В эти же годы выявился главный недостаток выбранного места наблюдений за колебанием уровня моря. Заключался он в необходимости точной передачи среднего многолетнего уровня на материк. Впервые нивелирную связь установили в 1872 году для нивелир-теодолитного хода по Балтийской железной дороге. Путём сложных измерений высота нуля Кронштадтского футштока была перенесена на материк и закреплена маркой № 173 Главного штаба, а в 1892 году маркой Ф. Ф. Витрама, заложенной в здание железнодорожного вокзала станции Ораниенбаум (г. Ломоносов). Эти марки долгое время служили исходными высотами при производстве нивелирования на территории нашей страны. Марка № 173 во время Великой Отечественной войны была уничтожена [63].

В период с 1873 по 1876 год между Петербургом и Москвой была проложена первая линия геометрического нивелирования. Точные нивелировки стали закрепляться на местности металлическими грунтовыми и стенными реперами и так называемыми марками,

вмурованными в стены каменных зданий. Военными геодезистами был разработан новый способ точного геометрического нивелирования, получивший название “русского”. В 1881 году была утверждена программа и проект точного нивелирования на Европейскую часть России. Проектом предусматривалось связать геометрическим нивелированием Балтийское и Чёрное моря и распространить единую систему высот до Оренбурга.

В 1975 году А. А. Тилло и В. Е. Фусс выполнили ещё одно нивелирование по льду с целью более точной привязки марки на материке к нулю Кронштадтского футштока. В 1884 году А. А. Тилло составил сводку всех гипсометрических данных России, в которой абсолютные высоты вычислены от среднего уровня Балтийского моря. В 1886 году Ф. Ф. Витрам установил медную доску с чертой, соответствующей высечке, сделанной М. Ф. Рейнеке. В 1886 и 1888 годах В. Е. Фусс и В. А. Астафьев произвели повторное нивелирование по льду. В 1894 году Военно-топографическим отделом Главного штаба издан каталог высот русской нивелирной сети, составленный С. Д. Рыльке, где в качестве исходных данных для нивелирования использован средний уровень Балтийского и Чёрного морей. К этому уровню до 1934 года относились все нивелировки, связанные непосредственно с нивелирной сетью, уравненной С. Д. Рыльке.

В конце XIX века нивелирная сеть России была связана с нивелировками Германии и Австро-Венгрии, что позволило определить разности уровней Балтийского, Северного и Эгейского морей. После Русско-Скандинавского градусного измерения это был второй случай, когда полевые работы завершились строгой математической обработкой. Было выявлено, что уровни Балтийского, Чёрного, Северного и Эгейского морей, футштоки которых были включены в нивелирную сеть, не совпадают. Поскольку это явление оказалось неожиданным и не находило другого объяснения, кроме влияния погрешностей измерений, то уровни Балтийского и Чёрного морей посчитали одинаковыми. Так в России была введена Балтийско-Черноморская система высот, просуществовавшая до 1934 года.

С 1901 года началось нивелирование вдоль Транссибирской магистрали. Благодаря самоотверженному труду военного геодезиста А. А. Александрова, в 1911 году нивелирование достигло Байкала – района с высокой сейсмичностью. Именно здесь вычислители Военно-топографического управления, анализируя материалы повторного нивелирования по законченной в 1928 году во Владивостоке Транссибирской нивелирной линии, выявили деформации земной



поверхности в результате землетрясений. Однако идея использования точных нивелировок для изучения современных вертикальных движений земной коры в России возникла при анализе аварий, связанных с разработкой нефтяных месторождений в районе Баку. Здесь надо отметить важный исторический факт: в период с 1910 по 1912 год впервые в мире Корпус военных топографов создал на Апшеронском полуострове Каспийского моря полигон по изучению вертикальных подвижек земной коры [57]. Окончание нивелирного хода во Владивостоке в 1928 году позволило привязать Тихоокеанскую систему высот с Балтийским морем. В ознаменование этих работ на здании железнодорожного вокзала станции Владивосток была укреплена чугунная доска с чертой, от которой отсчитывался уровень Балтийского ординара. Доска сохранилась до сих пор.

Конец XIX века характеризуется созданием постоянных уровенных постов на всех морях, омывающих Европейскую часть России. Постоянные уровенные посты представляют собой капитальные сооружения, предназначенные для непрерывного длительного наблюдения за уровнем моря в любую погоду и в любой сезон года с целью определения среднего многолетнего уровня моря и нуля глубин с высокой точностью и надёжностью, а также для определения поправок к измеренным глубинам в пределах зоны действия [64]. Постоянные уровенные посты оснащаются самописцами уровня моря (мареографами), предназначенными для автоматической регистрации на бумажную ленту колебаний уровня моря. Первый постоянный уровневый пост с мареографом был построен в 1898 году в непосредственной близости от Синего моста в Кронштадте. В 1913 году заведующий инструментальной камерой Кронштадтского порта Х. В. Тонберг установил новую медную доску на устоях Синего моста взамен прежней, выпавшей и утерянной.

На геодезическом совещании в 1926 году было принято несколько следующих важных решений:

- нивелирование высокой точности признать работами, имеющими большое научное значение;
- считать нуль Кронштадтского футштока основным нулём всех высот в СССР;
- в самое непродолжительное время завершить нивелирную связь Чёрного и Белого морей и связь Балтийского моря с Тихим океаном;
- признать необходимым установление нивелирной связи всех водомерных постов между собой [57].

Под руководством Н. А. Павлова из ЦНИИГАиК в 1931 году Гидрографическим отрядом, в состав которого входили Н. Ю.

Рыбалтовский, В. В. Копосов, В. В. Степанов и другие, было выполнено геометрическое нивелирование по льду Финского залива с установкой реек на сваях, вбитых в грунт. Всего было забито 58 свай через 100 м.

В 1933 году было выполнено второе после 1894 года уравнивание нивелирной сети страны. Сеть состояла уже из 106 линий общим протяжением 69450 км. Нивелирные ходы соединили Кронштадтский футшток с урвнмерными постами Белого, Чёрного, Азовского морей и бухты Золотой Рог во Владивостоке. По результатам вычислений уровень Чёрного моря на футштоках Севастополя, Одессы, Феодосии и Новороссийска оказался ниже Балтийского на 0,41 м, а Азовского моря – на 0,39 м. В уравнивание 1933 года были включены нивелировки, выполненные только в Европейской части СССР, хотя уже имелась нивелирная связь с Владивостоком. Причиной послужило большое расхождение в 1,873 м на стыке Европейской и Сибирской нивелировок. Поэтому в 1934 году в Сибири было признано целесообразным сохранить Тихоокеанскую систему высот.

Принятое Советом Министров СССР 7 апреля 1946 года Постановление “О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР” предписывало считать за исходный уровень высот уровень Балтийского моря по наблюдениям на Кронштадтском футштоке. Поскольку средний многолетний уровень моря не является достаточно определённой величиной, так как имеет вековые колебания и, кроме того, зависит от периода осреднения и принятой методики вычислений, то в течение многих лет не было единства в установлении измеренных высот. Отметки марок брались “по Рыльке”, “по Шокальскому”, “по Главному штабу” и т. д., что приводило к путанице. Поэтому в Постановлении от 7 апреля 1946 года в соответствии с ранее высказанным предложением известного советского океанографа и картографа Юлия Михайловича Шокальского (1856 – 1940) в качестве исходного уровня высот был определён не средний многолетний уровень Балтийского моря, а нуль Кронштадтского футштока. В связи с тем, что связанная с этим нулём нивелирная марка № 173 на материке во время Великой Отечественной войны была утрачена, то зимой 1947 года под руководством А. В. Драке был вновь проложен нивелирный ход по льду от Кронштадта до материка. Всего было забито 118 свай через 100 м парами на расстоянии 4 – 5 м друг от друга. Это позволило закрепить нуль Кронштадтского футштока фундаментальным репером № 6521 Главного управления геодезии и картографии при Совете Министров СССР, заложенном в парке г. Ломоносова. С этих пор головка этого репера является исходным пунктом для измерения

высот в СССР и странах Восточной Европы в так называемой Балтийской системе высот. Так усилиями нескольких поколений гидрографов и геодезистов была создана возможность путём проведения нивелирований между нулём футштока в Кронштадте и фундаментальным репером в г. Ломоносове сравнивать их высоты и следить за колебаниями уровня Балтийского моря.

Отсчёт высот принято производить по нормали к уровенной поверхности, проходящей через исходный нуль, то есть относительно геоида. Однако в силу того, что уровенные поверхности, лежащие на разной высоте, не параллельны между собой, то измеренные в результате нивелирования высоты оказываются отнесёнными не к геоиду, а к другой, близкой ему поверхности, названной советским геофизиком-геодезистом М. С. Молоденским квазигеоидом. Квазигеоид только на материках, да и то незначительно, отстает от уровенной поверхности геоида, принимаемой за “уровень моря”. В качестве основной системы отсчёта высот государственной нивелирной сети Российской Федерации принята нормальная система высот, то есть высот, отсчитываемых по нормали от поверхности квазигеоида, которые и обозначаются на топографических и морских картах. В точке нуля Кронштадтского футштока поверхности геоида и квазигеоида совпадают. В этом состоит уникальность Кронштадтского футштока из-за его удалённости от материка.

Само понятие “нуль Кронштадтского футштока” является чисто условным. Действительно, на устой Синего моста укреплен футшток, по которому можно судить о фактическом (мгновенном) уровне моря. Однако систематические наблюдения ведутся с помощью самописца уровня моря, установленного в специальном павильоне, расположенном рядом. Поэтому правильнее говорить не о Кронштадтском футштоке, а о Кронштадтском уровенном poste. Вместе с тем, понятие “нуль Кронштадтского футштока” не идентично понятию “нуль Кронштадтского уровенного поста”, поскольку за единый нуль постов, от которых производится отсчёт уровня моря на всех акваториях бывшего СССР, связанных с океаном, принят горизонт, лежащий на 5 м ниже нуля Кронштадтского футштока [62,63,64]. Сделано это для того, чтобы избежать осушения нулей водомерных рек на уровенных постах. Таким образом, нуль Кронштадтского футштока – это не нулевое деление на данном футштоке и не нуль Кронштадтского уровенного поста, а средний многолетний уровень моря, измеренный на Кронштадтском

уровенном посту за период с 1825 по 1840 год и закреплённый в виде репера в г. Ломоносове.

К 1950 году были завершены нивелирные работы в Европейской и в восточных регионах СССР. Восточная нивелирная сеть состояла уже из 140, а западная из 100 полигонов протяжением 108 тыс. км и 30 тыс. км соответственно. По результатам нивелирных работ и их уравнивания был издан в 1952 году Каталог высот нивелирной сети СССР. В результате уравнивания нивелирной сети отметки средней уровенной поверхности морей относительно нуля Кронштадтского футштока получились следующими:

Баренцева моря (Мурманск)	-0,467 м;
Белого моря (Архангельск)	+0,015 м;
Чёрного моря (Севастополь)	-0,433 м;
Азовского моря (Таганрог)	-0,446 м;
Японское море (Владивосток)	-0,517 м.

Определение разностей уровней морей СССР особенно для Тихоокеанского побережья стало большим научным достижением, имевшим мировое значение. Так вводилась единая Балтийская система высот, которую иногда называют Балтийской системой высот 1942 года.

В 1951 году пластина Тонберга на устье Синего моста была закрыта специальной защитной металлической рамкой, на которой выгравировано: “Исходный пункт нивелирной сети СССР”.

Растущие потребности в высокоточном нивелировании территории бывшего СССР вызвали разработку новой программы работ. Такая программа была разработана и одобрена 29 января 1968 года. Программа предусматривала схему развития новых нивелирных линий, совершенствование морских уровнемерных постов, изучение современных вертикальных движений земной коры, обусловленных тектоникой, сейсмичностью и крупным гидротехническим строительством. Работы по программе велись почти 10 лет. В результате уравнивательных вычислений были получены разности высот многих уровнемерных постов относительно нуля Кронштадтского футштока Балтийского моря. Все уровни морей страны оказались ниже уровня Балтийского моря [57].

Чёрное море:

Севастополь -0,25 м; Сочи -0,25 м; Сухуми -0,26 м.

Каспийское море:

Баку -28,59 м; Красноводск -28,76 м; Форт Шевченко -28,57 м.

Тихий океан:

Владивосток -1,00 м; Советская Гавань -0,66 м; Магадан -0,52 м;

Эгвекинот  $-0,34$  м.

Северный Ледовитый океан:

Мыс Шмидта  $-0,36$  м; Амбарчик  $-0,79$  м; Усть-Кара  $-0,46$  м;  
Архангельск  $-0,3$  м.

Государственная геодезическая служба решила задачу огромной научной важности, передав через территорию всей страны на восток, выявив, что уровень Тихого океана ниже уровня Балтийского моря и повышается на север в пределах от 1 м во Владивостоке до  $0,3 - 0,5$  м к Берингову проливу. В 1977 году были подготовлены к изданию пять томов Каталога нивелирования, а также Каталог всех уровнемерных станций страны. Совместным приказом Главного управления геодезии и картографии и Военно-топографического управления Генерального штаба была введена Балтийская система высот на эпоху 1977 года. Балтийская система высот 1977 года действует до сих пор.

Перед началом выполнения программы по созданию Балтийской системы высот 1977 года в 1969 году Геодезической группой Института физики и астрономии АН ЭССР и предприятием № 10 Главного управления геодезии и картографии под руководством Л. Я. Тамме методом гидростатического нивелирования выполнено 213 измерений превышений между Кронштадтом и Ломоносовым. Измерения проводились в течение 3 суток с интервалами  $15 - 30$  мин.

К концу минувшего столетия геодезистам и гидрографам стало окончательно понятно, что необходимо реорганизовать национальные уровнемерные сети. С одной стороны, это вызвано вертикальными колебаниями участков земной поверхности и колебаниями уровня моря, с другой стороны, необходимость реорганизации обусловлена быстро возрастающей точностью спутниковой альтиметрии, позволяющей на высоком научно-техническом уровне решать целый ряд задач в области океанографии, геодезии, геодинамики и создании единой глобальной системы высот [63].

Большинство действующих уровнемерных постов находятся в районах с активной хозяйственной деятельностью человека. Освоение шельфа Мирового океана, эксплуатация артезианских вод, добыча нефти и газа, сооружение гидротехнических комплексов вызывает изменение уровня. Нередко это приводит к деформациям земной поверхности в местах расположения уровнемерных постов и фундаментальных геодезических пунктов, что, в свою очередь, неизбежно искажает однородность продолжительного ряда наблюдений, которые невозможно учесть традиционными способами. Примером тому может служить Таллиннский уровнемерный пост, территория которого из-за

эксплуатации подземных вод опустилась более чем на 68 см с 1911 года [63]. С точки зрения обеспечения инструментального контроля за движением нуль-пунктов уровнемерных постов исследование колебаний уровня океана неразрывно связано с задачей изучения вертикальных движений земной коры.

В связи с предстоящим строительством гидротехнического комплекса защиты Ленинграда от наводнений в районе Кронштадтского футштока должен быть нарушен уровненный режим, а сам пост окажется внутри акватории Невской губы, отгороженной от Финского залива дамбой. Поэтому вполне обоснованно возникли сомнения в высотной стабильности фундаментального репера в г. Ломоносове. Одновременно выяснилась недостаточная геолого-тектоническая изученность региона, где существуют протяжённые зоны тектонических нарушений, пересекающих Кронштадт и Ломоносов. И, как оказалось, общее состояние уровнемерной сети на Балтийском море не позволило обеспечить преемственность Кронштадтского уровнемерного ряда наблюдений на каком-либо другом посту.

По этим причинам 11 – 13 апреля 1983 года в Ленинграде состоялось Межведомственное совещание по вопросу “Состояние наблюдений за уровнем моря и проблема Кронштадтского футштока”. На совещании были разработаны следующие мероприятия по решению этой проблемы:

- создание в дополнение к действующему в Кронштадте нового опорного уровнемерного поста;
- организация синхронных наблюдений за уровнем моря на трёх уровнемерных постах в Кронштадте, Ломоносове и на дублёре Кронштадтского футштока в целях определения и учёта величин, характеризующих изменения уровнемерного режима, вызванного строительством сооружений Ленинграда, предотвращающих наводнения;
- сооружение трёх специальных глубинных скважин реперных постов в Кронштадте, Ломоносове и в районе маяка Шепелевский для долговременного (векового) закрепления высотной основы и систематических привязок нулей футштоков и мареографов.

Дублёр Кронштадтского футштока построен примерно в 40 км к западу от г. Ломоносова южнее маяка Шепелевский в районе мыса Каменный бухты Батарейная. Дублёр представляет собой гидрометеорологический и уровнемерный комплексы. В состав последнего входят здание обсерватории со служебными и жилыми помещениями, морская часть (башня мареографа, подводные трубы,

приёмные колодцы), подходная дамба, соединяющая колодец мареографа с берегом, глубинный скваженный пост. Наблюдения на Шепелевском poste синхронизированы с наблюдениями на уровнемерных постах в Кронштадте и Ломоносове и регулярно проводятся с 1 ноября 1987 года [63].

Кронштадтский футшток сыграл свою выдающуюся роль благодаря многолетним систематическим наблюдениям и обобщающим трудам, выполненным русскими военными гидрографами, геодезистами, топографами и советскими гидрометеорологами. В 1990 году исполнилось 150 лет со дня установления гидрографом М. Ф. Рейнеке нуля Кронштадтского футштока, имеющего особое значение в истории русской и мировой гидрографии и картографии.

#### **4.6. ОТСЧЁТ ВЫСОТ И ГЛУБИН В СУДОВОЖДЕНИИ**

В современной навигации используется несколько уровней, относительно которых производятся измерения высот и глубин. От того, насколько грамотно штурман применяет знания о рельефе суши и дна, зависит безопасность плавания судна вблизи берегов и в узкостях.

**Абсолютные высоты.** Высотное положение точек земной поверхности на морских навигационных картах, отсчитываемое от принятого в данном государстве нуля системы высот, называется абсолютным. Абсолютные высоты, указанные на морских картах, изданных на прибрежные воды Российской Федерации, являются нормальными, так как отсчитываются в Балтийской системе высот 1977 года, то есть от поверхности квазигеоида. Здесь будет нелишним напомнить, что высоты, отсчитываемые от поверхности референц-эллипсоида, называются геодезическими. Как уже неоднократно говорилось выше, в самом общем случае поверхности референц-эллипсоидов и геоидов (квазигеоидов) не совпадают.

На навигационных картах рельеф суши показывается вершинами гор и холмов с указанием их высот, а также горизонталями (изогипсами) и бергштрихами. На современных топографических картах в заголовке “Система высот Балтийская” говорит о том, что для отсчёта высот рельефа применяется Балтийская система высот 1977 года. На топографических картах прежних лет изданий в заголовке указывалось “Балтийская система высот”, что подразумевало отображение рельефа в системе высот, существовавшей до 1977 года. На морских навигационных картах после принятия Балтийской системы высот 1977 года значения высот

рельефа практически не поменялись из-за незначительных различий между системами высот 1942 и 1977 годов (см. предыдущий параграф), а также из-за приближённого представления высот с точностью до 1 м. Исключение составляют карты на морское побережье юга Приморского края и на те районы плавания, где ранее существовали так называемые местные системы высот.

Когда на морских навигационных картах сечения рельефа суши показывается горизонталями, то в заголовке карты записывается: *”Горизонтали проведены через ... м”*. Кратные горизонтالي печатаются более жирными линиями. Если рельеф суши изображается приближёнными горизонталями или отдельными высотными отметками, то в заголовке записывается: *“Высоты в метрах”*. Когда же на морской навигационной карте рельеф суши не показан или отсутствуют данные о высотах форм рельефа и помещаются только данные о высотах сооружений, мостов, осушек и т. д., то в заголовке текст *“Высоты в метрах”* не помещается. Это говорит о том, что на данной карте высоты даны относительно так называемого нуля высот, имеющего локальный характер, а сам этот нуль в рамках данной карты к нулю абсолютной системы высот не привязан.

Несколько отдельно стоит вопрос о замкнутых акваториях, средний уровень которых сильно отличается от принятой в данном государстве нуля системы отсчёта абсолютных высот. Для Российской Федерации к таким акваториям относятся прежде всего Каспийское море и озеро Байкал. Так, например, на картах Каспийского моря сведения о высотах указываются в примечаниях: *“Высоты на карте даны в Балтийской системе высот. Для приведения высот к среднему уровню моря за период ... их следует увеличить (уменьшить) на ... м”*.

**Относительные высоты.** Существуют довольно обширные участки побережий бывшего СССР, которые удалены от государственных нивелирных сетей, а поэтому не связаны с нулём Кронштадтского футштока. На картах таких побережий применяются местные системы высот. В местных системах высот используются условные нули высот. Отсчитываемые от них высоты точек земного рельефа (но не сооружений) называют относительными.

На морских планах, частных и путевых картах побережий бывшего СССР до масштаба 1:250000 включительно, где ещё сохраняется местная система высот, в примечании указывается: *“Высоты даны относительно ... (название уровня)”*. Такое же примечание помещается на картах на иностранные побережья,



издаваемых ГУНиО, масштабов до 1:300000 включительно, если имелись сведения о системе высот на исходных иностранных картах.

**Средний уровень моря.** Прикладной характер задач, решаемых в судовождении, ранее не требовал, чтобы в качестве отсчётной поверхности применялся геоид (квазигеоид) или референц-эллипсоид. В качестве отсчётных поверхностей использовались и до сих пор успешно используются условные (т. е. оговорённые) уровни моря. В связи с широким использованием в практике судовождения приёмоиндикаторов СРНС Навстар GPS и Глонасс появляется необходимость соотнесения принятых условных уровней моря к поверхностям, нашедшим применение в спутниковой навигации. Одним из таких уровней является средний многолетний уровень моря (СМУ).

Средний многолетний уровень, вычисленный в ходе непрерывных наблюдений на уровне поста, называется установившимся (или нормальным), если дальнейшее увеличение наблюдений не изменит его величину более чем на 1 см. Время наблюдений для получения СМУ обычно составляет не менее 10 лет [64]. В последние годы обязательным условием для получения нормального уровня является исключение вертикального смещения водомерной рейки уровневого поста в результате перемещения участков земной поверхности. Надёжное значение СМУ представляет собой среднее арифметическое всего ряда наблюдений над уровнем моря за промежуток времени не менее 18,6 лет [69]. В течение этого периода все основные неравенства приливов, вызываемые астрономическими причинами, повторяются. Здесь нельзя смешивать период 18,6 лет, за который медленно изменяется средняя амплитуда колебаний уровня моря по астрономическим причинам [69], и так называемый период сароса, длящийся 18,04 лет [14]. Средний многолетний уровень часто называют просто средним уровнем.

Существует понятие нуля уровневого поста (нуля отсчёта). Им называется отметка горизонта, к которому приводятся все высоты уровней, отсчитываемые на данном посту за весь период его работы. За нуль поста принимается высота нуля одной из реек (или другого уровнемерного устройства), надёжно связанной с репером (маркой) государственной нивелирной сети, или высота нуля одной из реек данного поста наблюдений, по которой наблюдение начато ранее всего или продолжалось наиболее длительное время [69]. Поскольку высоты вод отсчитываются от нуля уровневого поста, а он может иметь слабую привязку к государственной нивелирной сети или, более того, имеет привязку к местной системе высот, то СМУ на

разных уровенных постах могут содержать значительные систематические погрешности.

Средний многолетний уровень моря ассоциируется с поверхностью геоида в районе уровенного поста. Иными словами, предполагается, что СМУ должен совпадать с уровнем, принятым для отсчёта абсолютных высот. Тем не менее, как следует из предыдущего параграфа, для Владивостокского уровенного поста разница между этими уровнями составляет 1 метр, что может объясняться прежде всего динамикой установившейся циркуляции вод в относительно замкнутых обширных акваториях, к которым относится Японское море.

Знание разностей этих уровней важно для судовождения при выполнении обсерваций по вертикальным углам. Подобная информация потенциально полезна для повышения точности определения обсервованных координат с помощью приёмников СРНС Навстар GPS в режиме 2D. Кроме того, в последнее время разрабатываются новые методы повышения точности обсерваций по СРНС Навстар GPS, основанные на точном знании возвышения антенны приёмника над поверхностью геоида и референц-эллипсоида.

Сведения о СМУ можно почерпнуть из отечественных “Таблиц приливов”. Но в них положение уровня СМУ даётся над нулём глубин. В ряде зарубежных государств в навигационных изданиях приводятся отстояния уровней нулей глубин от нуля абсолютных высот. Так, например, в Великобритании ежегодно публикуется “Brown’s Nautical Almanac”, в котором в таблице “Height in Metres of Chart Datum Relative to Ordnance Datum in the British Isles” даны возвышения нуля системы абсолютных высот, принятой в Великобритании, над известными нулями глубин. Такая форма представления этих уровней гораздо удобнее для вычисления высот над действующим уровнем моря ориентиров, высоты которых на картах даны в системе абсолютных высот. В Великобритании за нуль абсолютных высот принят средний уровень моря в пункте Newlyn за период наблюдений с 1915 по 1921 год. Его принято называть “Ordnance Datum (Newlyn)” и обозначать в Адмиралтейских изданиях как O.D.(N) [71,73]. К примеру, нуль глубин для Дувра расположен ниже O.D.(N) на 3,67 м, а нуль глубин Бэрри (Barry) – на 6,1 м.

Поэтому давно назрела необходимость публикации для мореплавателей положений уровня СМУ относительно действующей системы абсолютных высот или относительно поверхности

общеземных референц-эллипсоидов не только для основных и относительных пунктов, но и для обширных прибрежных зон.

**Нуль глубин.** Традиционно принципиальное значение для безопасности мореплавания имеет уровень, принимаемый для отсчёта глубин. Нуль глубин – это условная уровенная поверхность, от которой на картах отсчитываются глубины, а в таблицах приливов – высоты приливов. В настоящее время к установлению уровня, принимаемого за нуль глубин, предъявляются следующие требования [64]:

- определение понятия “нуль глубин” должно быть однозначным, исключая двусмысленное представление о его свойствах и количественных характеристиках;
- уровень нуля глубин должен выбираться по единому физическому смыслу для всех морей, отличающихся характером приливо-отливных явлений и сгонно-нагонных явлений;
- желательно, чтобы нули глубин были постоянными по высоте (т. е. параллельны поверхности квазигеоида) в пределах географически обособленных акваториях;
- понижения уровня моря ниже нуля глубин по величине и продолжительности должны быть незначительными;
- нули глубин должны обеспечивать безопасное плавание в районах с минимальными глубинами;
- карты и другие картографические материалы, созданные с учётом принятого нуля глубин, должны быть пригодными для выполнения разного рода работ (в том числе и строительных) в непосредственной близости от уреза воды, в прибойной полосе и в море;
- карты, картографические и описательные материалы, таблицы приливов, а также другие пособия, где используются глубины, должны составляться на основе установленного для данного района единого нуля глубин;
- глубина, измеренная в любой точке акватории и в любой момент времени, должна простыми приёмами приводиться к нулю глубин карты;
- карты, составленные с использованием нулей глубин, имеющих различную абсолютную высоту, должны легко приводиться к единому нулю глубин;
- способы определения нуля глубин должны быть простыми и обеспечивать при этом высокую точность его получения.

Анализ перечисленных требований говорит о их противоречивости. Поэтому нуль глубин носит ярко выраженный условный характер, и в силу этого применим на ограниченных

акваториях. С перемещением в другой географический район меняются приоритеты требований и, как следствие, меняется уровень моря, принимаемый за нуль глубин.

Традиционно при выборе нуля глубин все акватории делят на две категории: на моря с приливами (приливные) и моря без приливов (неприливные). За нули глубин морских карт и картографических материалов на отечественные воды берутся следующие уровни в зависимости от средней величины периодических колебаний уровня моря:

- для районов морей со средней величиной прилива, равной или превышающей 50 см, – наинизший теоретический уровень (НТУ);
- для районов морей без приливов или со средней величиной прилива менее 50 см – средний многолетний уровень моря;
- для трассы Северного морского пути – уровень, установленный Гидрографическим предприятием Морского департамента Минтранса в Обзоре нулей глубин, принятых на навигационных картах трассы Северного морского пути в 1965 году. В тех случаях, когда нуль глубин исходного картографического материала по гидрографическим работам, выполненным ранее 1965 года, не соответствует нулю глубин, установленному для данного района Гидрографическим предприятием в 1965 году, то за нуль глубин карты принимается нуль глубин, установленный в 1965 году; тогда при картографировании в отметки глубин вводятся соответствующие поправки за их приведение к новому нулю глубин;
- для Каспийского моря – средний уровень за период с 1940 по 1955 год.

Сведения о нуле глубин помещаются в заголовках морских планов, частных и путевых картах, а также в примечаниях и предупреждениях на карте. В общем случае эти сведения приводятся в заголовке в следующей редакции: *“Глубины в метрах приведены к ... (название уровня)”*. Если на карте изображается участок моря без приливов (неприливногo моря), то кроме указания о нуле глубин, помещаемого в заголовке, в примечании приводятся данные о связи нуля глубин с нулём Кронштадтского футштока или с нулём уровнемерных постов данного моря (озера).

На картах Каспийского моря в заголовке записывается: *“Глубины в метрах приведены к среднему уровню моря”*. А в предупреждениях указывается о том, что сведения об изменениях уровня моря публикуются в Извещениях мореплавателям Гидрографической службы Каспийской флотилии. Уточнённые поправки глубин из-за ярко выраженных сгонно-нагонных явлений в этом море ежедневно объявляются по радио в гидрометеорологических сообщениях. Поэтому

для определения фактических глубин на день плавания необходимо глубины, показанные на карте, исправить указанными поправками. В примечании указывается: *“Средний уровень моря за период 1940 – 1955 гг. ниже нуля Кронштадтского футштока на 28,0 м”*

Указания о нулях глубин в заголовках карт не помещаются в следующих случаях:

- на генеральных картах;
- если нули глубин на исходных картографических материалах неизвестны или не согласованы, а данные для их согласования отсутствуют;
- если карты составлены по материалам, на которых приняты приближённые нули глубин.

В перечисленных случаях на картах в соответствующей строке заголовка помещается надпись: *“Глубины в метрах”*.

В случаях, когда на карте помещается и участок неприливногo моря и устьевой участок реки, то в примечании указывается информация о связи нуля глубин приустьевого участка карты с нулём Кронштадтского футштока или с нулём уровня поста или о положении разграничительной линии между участком моря и устьевым участком реки, где отметки глубин приведены к различным нулям глубин.

На картах, составленных по материалам, на которых приняты приближённые нули глубин, в примечании указывается: *“Глубины приведены к нулю глубин, приближённо соответствующему ... (название уровня)”*.

На картах, составленных из нескольких планов, данные о нулях глубин (если они одинаковы) помещаются в общем заголовке. При различных нулях глубин соответствующие данные помещают в заголовке каждого плана.

На морях без приливов колебания уровня, вызываемые гидрометеорологическими факторами, как правило, кратковременны и незначительны. Следовательно, указанные на карте глубины будут в большинстве случаев соответствовать действительности, так как средний уровень моря является наиболее вероятным.

На морях с приливами глубины приводятся к наименьшему теоретическому уровню (НТУ), рассчитанному исходя прежде всего из действий приливообразующих сил. Следовательно, мореплаватель, выбирая маршрут движения судна, будет знать, какие наименьшие глубины он может встретить в самую малую воду. Это позволяет пользоваться картой даже при отсутствии таблиц приливов и, кроме того,

упрощает применение этих таблиц, так как поправки к глубинам на карте всегда будут положительными. Это справедливо только для районов с большими высотами приливов. С увеличением высот приливов искажения предельно возможных положений уровня сгонно-нагонными явлениями уменьшаются. Там, где наблюдаются большие приливы, наивысшие и наинизшие уровни практически связаны только с приливными подъёмами и падениями уровня из-за малой вероятности совпадения максимальных приливов с большими нагонами и сгонами. Поэтому теоретический нуль глубин может иметь обеспеченность от 50% до 100% в зависимости от величины приливов и сгонно-нагонных явлений [66].

Как было отмечено выше, в отечественной практике за нуль глубин для морей с приливами принимается наинизший теоретический уровень. На постоянных и дополнительных уровенных постах НТУ вычисляется по методу Н. П. Владимирского [69]. Данный метод основывается на представлении сложной кривой изменения уровня моря в виде суммы ряда правильных волн, каждая из которых есть простое гармоническое колебание, определяемое средним местным временем, угловой скоростью, амплитудой волны и начальной фазой волны. Угловая скорость волны зависит от астрономических факторов, и для одной и той же волны она всегда одинакова. Амплитуда и начальная фаза волны зависит от местных условий в данном пункте и вычисляется по результатам наблюдений за приливами. Так как амплитуда и начальная фаза волны изменяются со временем, то возникает необходимость определения угла положения волны и её средней амплитуды. Они характеризуют каждую составляющую волну прилива в данном районе побережья и называются гармоническими постоянными прилива. Число членов ряда составляющих волн, которое необходимо брать для вычисления НТУ в том или ином случае зависит от характера и степени сложности прилива в данном месте. На практике используют чаще всего 11 главных волн. Н. П. Владимирский разработал метод расчёта НТУ, учитывающий только восемь составляющих волн прилива. А для учёта влияния мелководья им было предложено использовать дополнительные поправки.

В зарубежной практике к морям без приливов относят акватории, на которых величина прилива составляет 10 см и менее [64]. На иностранных картах за нуль глубин приняты различные уровни моря [64, 66, 69]: – в КНР, ФРГ, Италии, Югославии, Албании, Греции, Канаде (Атлантическое побережье), Дании, Бельгии, Норвегии, Индонезии, Японии, Аргентине и в зоне Панамского канала в морях с

правильными полусуточными приливами – средний уровень малой сизигийной воды (Mean Level of Low Water Springs – MLLWS), а в морях с неправильными приливами – средний уровень из наинизших малых вод (Mean Lower Low Water Springs – MLWS);

- во Франции, Испании, Португалии и Бразилии – наинизший наблюдавшийся уровень малой сизигийной воды (Lowest Observed Low Waters Springs – LOLW);
- в Швеции (побережье Северного моря и район проливов) и Нидерландов – средний уровень из всех малых вод (Mean of all Low Water – MLW);
- в США (Атлантическое побережье), в США, Канаде (Тихоокеанское побережье), на Гавайях, Аляске и Филиппинских островах – средний уровень из всех низких малых вод (Mean of all the Lower of the Low Waters – MLLW);
- для побережий государств, омываемых Индийским океаном, и в Корею принят так называемый индийский нуль глубин (индийская малая сизигийная вода), уровень которого находится ниже среднего на сумму первых четырёх гармоник прилива (Indian Spring Low Water – ISLW).

Нетрудно убедиться, что приведённые примеры нулей глубин, применяемые в нашей стране и за рубежом, отражают астрономический подход к назначению отсчётного уровня.

В связи с тем, что при расчёте нулей глубин не учитываются кратковременные колебания уровня из-за метеорологических причин, а при расчёте наинизшего теоретического уровня не учитываются также влияние стока вод в устьевых участках рек, в некоторых портах, расположенных в мелководных районах, применяется так называемый нуль глубин порта. Там, где приняты нули глубин порта, на морских картах приводятся специальные примечания, а в лоциях содержатся указания о принятом нуле глубин и возможных средних предельных колебаниях уровня по метеорологическим причинам.

В некоторых портах и на подходах к ним развёрнуты постоянно действующие службы оперативного оповещения (по радио или визуальными средствами) о действительном уровне моря.

Следует отметить ещё один факт. Он заключается в том, что некоторые государства меняют подходы к определению нуля глубин. Происходит это из-за принятия Международной Гидрографической Организацией (ИНО) резолюции, которая утверждает, что принимаемый нуль глубин должен быть заведомо низким, чтобы избегать частого падения уровня моря ниже него [71]. Если раньше на адмиралтейских картах глубины приводились к различным уровням

малых вод, то на новых за нуль глубин принят уровень, который расположен как можно ближе к наинизшей воде астрономического прилива (Lowest Astronomical Tide – LAT) [71]. Этот уровень близок к НГУ, принятому в отечественной гидрографии.

Разобщённость в подходах к установлению нуля глубин, тем не менее, устранима. В конце тридцатых годов прошлого столетия известный советский учёный-гидрограф Т. П. Марютин предложил за нуль глубин принимать уровень, обеспеченность которого составляет 95%. Такой нуль глубин вычисляется статистически и является единым как для морей с приливами, так и для морей без приливов [69]. При таком подходе нуль глубин имеет такую же строгую математическую природу, что и СМУ.

В действующей мировой практике назначения нуля глубин есть ещё один принципиальный недостаток, состоящий в том, что этот уровень определяется на уровне поста, который расположен непосредственно у берега. По мере удаления от поста неизбежно изменение по высоте уровня, соответствующего принятому нулю глубин из-за гидродинамики волны прилива. Уровневые посты распределены по побережью неравномерно. Они размещаются, как правило, в портах и в порт-пунктах. Поэтому с удалением от поста как вдоль берега, так и в сторону открытого моря рельеф изоповерхности, каждая точка которой отвечает постоянству принятого нуля глубин (НГ-поверхность), будет изменяться. И если для морских планов такими изменениями можно пренебречь в силу их малости, то на частных картах, охватывающих обширные акватории, НГ-поверхности, а следовательно, и рельеф дна, представленный на карте, будет искажаться, так как промеры также привязаны к нулю глубин ближайшего уровневого поста. Безусловно, с точки зрения предотвращения посадки на мель подобные рассуждения не актуальны для открытого моря. Однако для дальнейшего развития методов и средств определения места судна по рельефу дна привязка НГ-поверхности к поверхности референц-эллипсоида или к поверхности геоида (квазигеоида) уже начинает иметь существенное значение. Более того, на стыках привязок глубин к уровневым постам соответствующие им НГ-поверхности совпадать не будут. Эти факты служат существенным препятствием для перехода электронной картографии от действующей в настоящее время концепции копирования уже созданных бумажных карт с их рамками и информацией о нулях глубин к концепции создания больших электронных баз гидрографических данных, при которой будет отсутствовать понятие номера карты. Здесь в первую очередь потребуется информация о рельефе НГ-поверхности. Такие сведения можно получить



по результатам обработки данных спутниковой альтиметрии и по наблюдениям, полученным на океанографических буях, оборудованных геодезическими приёмниками СРНС Навстар GPS и Глонасс.

О положении уровня, соответствующего нулю глубин, можно судить по изображению осушки на карте.

**Нуль высот.** В судовождении используется ещё один уровень моря, относительно которого измеряются высоты островков, надводных скал (камней), мысов, вершины несветящихся знаков, высоты фокальных плоскостей оптических аппаратов маяков и светящихся знаков береговых средств навигационного оборудования, высоты навигационных огней, некоторых искусственных сооружений, принимаемых в качестве навигационных ориентиров (например, заводских труб). Такой уровень по аналогии с нулём глубин называют нулём высот.

В отечественной практике для морей без приливов в качестве нуля высот принимается средний многолетний уровень моря. На картах акваторий, где высота прилива 50 см и более за нуль высот берётся средний уровень полных сизигийных вод. Здесь присутствует определённая логика. Чем выше огонь маяка, тем на большем расстоянии он обнаруживается. Факт обнаружения огня предупреждает штурмана о приближении к берегу, то есть к малым глубинам. При отливе высота огня над действующим уровнем моря увеличивается, что приводит к более раннему его открытию.

На отечественных картах крупнее 1:500000 возле условных знаков ориентиров помещают их высоты до вершины дробью, в которой числитель – это высота над нулём высот, а в знаменателе – от основания. В пособии “Огни ...” приводится более подробная информация с обязательным указанием уровня, от которого отсчитываются высоты. Высоты мысов, островков, надводных скал над нулём высот на отечественных картах указываются цифрами в круглых скобках жирным шрифтом без наклона. Представление о нуле высот карты даёт нанесённая линия берега над осушкой.

На адмиралтейских картах за нуль высот принимается средний уровень моря (Mean Sea Level – MSL) для акваторий без приливов. На морях с приливами принимается либо средняя полная сизигийная вода (Mean High Water Springs – MHWS), либо средняя высокая полная вода (Mean Higher High Water – MHHW) [72]. Следует заметить, что для морей с приливами нуль высот и нуль глубин не всегда располагаются симметрично относительно среднего многолетнего уровня (СМУ).

Для полноты изложения материала представим схему расположения друг относительно друга описанных выше уровней, для чего обратимся к рис. 14.

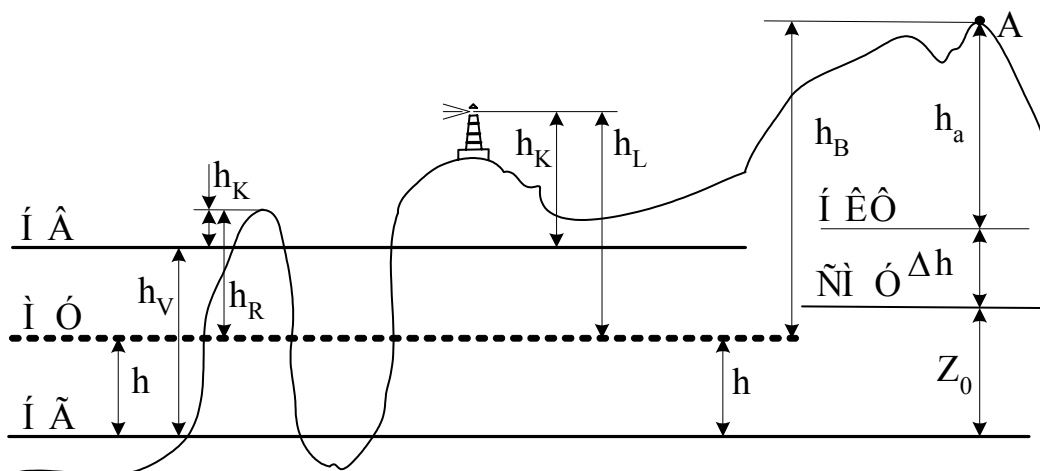


Рис. 14. Отсчёт высот для морей с приливами

Для расчёта возвышения  $h_B$  вершины (точка A) рельефа суши над мгновенным уровнем моря (МУ) необходимо сложить возвышение  $h_a$  над уровнем государственной нивелирной сети, то есть над нулём Кронштадтского футштока (НКФ), с отстоянием СМУ от НКФ ( $\Delta h$ ) и с возвышением СМУ над нулём глубин (НГ). Затем из полученной суммы следует вычесть мгновенный приливной уровень моря ( $h$ ).

$$h_B = (h_a + \Delta h + Z_0) - h,$$

где  $h_a$  – нанесено на карту,  $\Delta h$  – оценивается, используя информацию параграфа “Балтийская система высот 1977 года”,  $Z_0$  – это возвышение среднего многолетнего уровня моря (СМУ) над нулём глубин (выбирается из таблиц приливов).

Чтобы рассчитать возвышение скалы ( $h_R$ ), фокальной плоскости оптического аппарата маяка или светящего знака ( $h_L$ ) над мгновенным уровнем моря, необходимо знать отстояние уровня нуля высот (НВ) над нулём глубин (НГ). На рис. 14 это отстояние обозначено как  $h_V$ . Его можно просто оценить из таблиц приливов, выбрав из них за год самой высокой полной воды для ближайшего пункта. Тогда, например, для возвышения скалы над мгновенным уровнем моря

$$h_R = (h_V + h_K) - h,$$

где  $h_K$  – возвышение скалы над нулём высот, приведённое на карте или в пособии “Огни ...”.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Каждое очередное повышение точности и частоты определения места судна вызывает к жизни совершенно новые технологии судовождения. Повсеместное внедрение приемопередатчиков СРНС Глонасс и Навстар GPS коренным образом изменили работу штурманов. С одной стороны, значительно упростился процесс получения обсервованного места судна. С другой стороны, высокая точность создала необходимость учета геодезической основы карты и решения задачи преобразования координат. Чтобы преодолеть трудности решения задачи перехода от одной геодезической системы к другой, проще всего отказаться от существующего многообразия геодезических систем и перейти к одной. Так поступили ведущие морские державы и с середины 1998 года стали изготавливать традиционные бумажные навигационные карты на основе системы WGS 84. С точки зрения работы на бумажной карте переход на единую геодезическую систему порождает ряд преимуществ. Среди них прежде всего надо отметить устранение необходимости решения задачи преобразования координат и опасности посадки судна на мель. Заметно упрощается эксплуатация судовых приемопередатчиков СРНС Навстар GPS. Переход на единую геодезическую систему заметно снижает сложность обмена гидрографической информацией между государствами, что открывает новые перспективы для создания международной системы автоматической корректуры навигационных карт и пособий. Использование морских карт, составленных на основе геодезической системы WGS 84, открывает всем надежный доступ к высокой точности определения обсервованных координат судов в зонах действия морских дифференциальных систем.

В последние годы окончательно сформировался иной подход к использованию СРНС Глонасс и Навстар GPS. Он определился, во-первых, внедрением фазовых методов измерений, что уже дает точность определения обсервованных координат судна  $\pm 3 - \pm 5$  см в масштабе реального времени. Во-вторых, на суда стали поступать ECDIS с векторными электронными картами, масштаб которых изменяется в очень широких пределах, а традиционные рамки карт уже отсутствуют. Понятно, что обсервованное место судна на такие карты переносится автоматически, что полностью освобождает штурмана от ведения исполнительной прокладки пути судна. Уже изготавливаются экспериментальные спутниковые компасы, точность

которых доходит до десятых долей угловой минуты. Все это свидетельствует о возникновении более прогрессивных навигационных технологий, которые начинают сдерживаться существующими традиционными технологиями, базирующимися на понятии геодезической системы. Дело в том, что у всех традиционных геодезических систем существует предел точности определения абсолютных координат. Точность определения абсолютных координат падает при переходе от одной геодезической системы к другой. Следовательно, необходима единая международная геодезическая система. В качестве такой системы в последнее время рассматривается ITRS. Важным свидетельством тому служит факт принятия этой ГС в качестве геодезической основы новой глобальной радионавигационной системы Галилео, которая в ближайшее время составит весомую конкуренцию американской СРНС Навстар GPS.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рекомендации по организации штурманской службы на судах Минморфлота СССР (РШС-89) М.: В/О «Мортехинформреклама», 1990. – 64 с.
2. Космонавтика: Энциклопедия/Гл. ред. В.П. Глушко; Редколлегия: В.П. Бармин, К.Д. Бушуев, В.С. Верещетин и др. – М.: Сов. Энциклопедия, 1985. – 528 с.
3. Булгаков Н.П., Рывина Е.М., Федотов Г.А. Прикладная геодезия: Учеб. для вузов. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
4. Глумов В.П. Основы морской геодезии: Учеб. пособие для вузов. – М.: Недра, 1983. – 184 с.
5. Коугия В.А., Сорокин А.И. Геодезические сети на море. – М.: Недра, 1979. – 272 с.
6. Гордин В.М., Розе Е.Н., Углов Б.Д. Морская магнитометрия. – М.: Недра, 1986. – 232 с.
7. Белов К.П., Бочкарев Н.Г. Магнетизм на Земле и в космосе. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 192 с.
8. Нечаев П.А., Григорьев В.В. Магнитно-компасное дело: Учебник для мореходных училищ. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1983. – 239 с.
9. Магниторазведка. Справочник геофизика/ Под ред. В.Е. Никитского, Ю.С. Глебовского. – М.: Недра, 1980. – 367 с.
10. Белоглазов И.Н., Джанджгава Г.И., Чигин Г.П. Основы навигации по геофизическим полям. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 328 с.
11. Демин В.М. Теория и практика применения карт в авиации. – М.: Машиностроение, 1969. – 203 с.
12. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
13. GPS: Surveyor's Field Guide. A Field Guidebook for State Surveying. Trimble Navigation Limited, 1992. – 72 p.
14. Geodetic Glossary. National Geodetic Survey, Rockville, MD, Library of Congress Catalog Card Number: 86-61105, 1986. – 274 p.
15. Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн. 1/Под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1985. – 455 с.
16. Хиврич И.Г., Миронов Н.Ф., Белкин А.М. Воздушная навигация:

- Учеб. пособие для вузов. – М.: Транспорт, 1984. – 328 с.
17. Воробьев Л. М. Воздушная навигация. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.
  18. Инерциальные навигационные системы морских объектов/Д.П. Лукьянов, А. В. Мочалов, А. А. Одинцов, И. Б. Вайсгант. – Л.: Судостроение, 1989. – 184 с.
  19. Методика обработки навигационных измерений с оценкой точности. Л.: ГУНиО МО, 1985. – 52 с.
  20. Ольховский В.Е. Определение места судна при помощи радиотехнических средств. – М.: Морской транспорт, 1956. – 120 с.
  21. Лесков М.М., Баранов Ю.К., Гаврюк М.И. Навигация: Учебник для вузов мор. трансп. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1986. – 360 с.
  22. Гравиразведка: Справочник геофизика/Под ред. Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с.
  23. Воздушная навигация: справочник/А.М. Белкин, Н.Ф. Миронов, Ю.И. Рублев, Ю.Н. Сарайский. М.: Транспорт, 1988. – 303 с.
  24. Хауз Д. Гринвичское время и открытие долготы/Перд с англ. Малышева М.И.; Под ред. и с предисл. В.В. Нестерова. – М.: Мир, 1982. – 240 с.
  25. Методические рекомендации по спутниковому навигационно-геодезическому обеспечению геологоразведочных работ// Сибирский научно-исследовательский институт геологии, геофизики и минерального сырья. – Новосибирск, 1995. – 86 с.
  26. Галазин В.Ф., Базлов Ю.А., Каплан Б.Л., Максимов В.Г. Совместное использование GPS и Глонасс: оценка точности различных способов установления связи между ПЗ 90 и WGS 84. Сб. тр. Второй Междунар. конф. «Планирование глобальной радионавигации». Том II. – М.: 24-26 июня 1997. С. 299-310.
  27. Bowditch N. American Practical Navigator. Vol 1. U.S. Gov. Printing Office. DMA Stock No. NVPUB9V1, 1984 Edition. – 1414 p.
  28. Попеко Г.П., Соломатин Е.П. Навигация: Курс кораблевождения, том 1. – Л.: Управление гидрографической службы военно-морского флота, 1961. – 679 с.
  29. Берлянт А.М., Гедымин А.В., Кельнер Ю.Г. и др. Справочник по картографии. – М.: Недра, 1988. – 428 с.
  30. Груздев Н.М., Колтуненко В.В., Гладков Г.Е. Морская навигация/ Под ред. проф. Н.М. Груздева. – М.: Военное изд-во, 1992. – 468 с.

31. Агафонников А.М., Котяшкин С.И. О математическом обеспечении бортовых радионавигационных вычислительных устройств. – Геленджик, Институт океанологии им. П.П. Ширшова, Южное отделение, 1989. – 18 с.// ВИНТИ, деп. № 1939 –889.
32. Практическое кораблевождение. Кн. 1/Под ред. А.П. Михайловского. – Л.: ГУНиО, 1988. – 896 с.
33. Паластров В.Ф., Николаев А.В., Цибиногин А.Т. и др. Навигация. – М.: Воениздат, 1967. – 792 с.
34. Bowdich N. American Practical Navigator. Vol. II. U.S. Gov. Printing Office. DMA Stock № NV PUB9V1, 1984 Edition. – 961 p.
35. Department of Defense World System 1984. DMA Technical Report. U.S. Geological Survey, October, 1993. – 179 p.
36. North American Datum of 1983/Charles R. Schwarz, editor – (NOAA professional paper; pos. 2). Rockville, MD 20852, December 1989. – 256 p.
37. International Association of Geodesy; «The Geodesist's Handbook 1984». Bulletin Geodesique, Vol. 58, № 3; Paris, France, 1984.
38. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС// Под ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. – М.: ИПРЖР, 1998. – 400 с.
39. Gregory A. Robinson, David E. Miller. The Influence of Reference System Disparity on Navigation and Positioning. «Navigation» (USA), Vol. 30, № 3, 1983, p.p. 252 – 260.
40. George B. Korte. The GIS Book. Onword Press. Third Edition, 1994, – 220 p.
41. M. Kennedy. The Global. Positioning System and GIS: An Introduction. Ann Arbor Press, Inc., 1997. – 268 p.
42. Appelbaum L.T. «Geodetic Datum Transformation By Multiple Regression Equations» Proceedings of the Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning; New Mexico State University; Physical Sciegcce Laboratory, Las Guces, New Mexico, 8 – 12 February 1982.
43. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 DMA Technical Report: Part 1 Methods, Techniques and Data Used in WGS 84 Development; DMA TR 8350.2-A; Headquarters, Defense Mapping Agency, Washington, DC, 1 December 1987. – 42 p.
44. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. –

- Труды ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. – 251 с.
45. Resolution IMO A. 815 (19) «World-Wide Radionavigation System».
  46. Баранов А.Ю., Лукин А.Н. Особенности навигационных пособий США. – М.: Транспорт, 1990. – 112 с. (Б-чка судоводителя).
  47. Admiralty List of Radio Signals. Volume 8 1998/99. Satellite Navigation Systems. Published by the Hydrographer of the NAVY. Crown Copyright, 1998. – 94 p.
  48. Галазин В.Ф., Базлов Ю.А., Каплан Б.Л., Максимов В.Г. Совместное использование GPS и ГЛОНАСС: Оценка точности способов установления связи между ПЗ-90 и WGS 84//Сб. тр. Второй Междунар. конф. «Планирование глобальной радионавигации», Том II, – М., 1997, с. 299 – 310.
  49. Митрикас В.В., Ревнивых С.Г. Определение параметров перехода из системы координат ПЗ 90 в WGS 84 для совместного использования систем ГЛОНАСС и GPS//Сб. тр. Второй Междунар. конф. «Планирование глобальной радионавигации», Том II, – М., 1997, с. 311 – 322.
  50. Панюшин А.Н., Лебедев М.Г., Бутенко В.В., Коробкин В.А., Куропятников А.Д. Использование результатов лазерной дальнометрии космических аппаратов ГЛОНАСС и «Эталон» для решения геодезических и геодинамических задач//Сб. тр. Второй Междунар. конф. «Планирование глобальной радионавигации», Том II, – М., 1997, с. 448 – 453.
  51. Бойков В.В., Галазин В.Ф., Каплан Б.Л., Максимов В.Г., Базлов Ю.А. Опыт создания геоцентрической системы координат ПЗ-90 //Геодезия и картография, 1993, № 11, с. 17 – 21.
  52. Misra P., Abbot R., Bayliss E. SGS 85 WGS 85 Transformation. MIT Lincoln Laboratory. 16 p. <http://Satnav.Atc.ll.Mit.edu/papers/Sgs 85>.
  53. Misra P.N., Abbot R.I., Gaposchkin E.M. Integrated Use of GPS and GLONASS: Transformation Between WGS 84 and PZ 90. 12 p. <http://Satnav.Atc.ll.Mit.Edu/papers/PZ 90>.
  54. Pretap N. Misra. Integrated Use of GPS and GLONASS in Civil Aviation. MIT Lincoln Laboratory. 19 p. <http://Satnav.Atc.ll.Mit.Edu/papers/LL>.
  55. Базлов Ю.А., Герасимов А.П., Ефимов Г.Н., Насретдинов К.К. Параметры связи систем координат//Геодезия и картография, 1996, № 8, с. 6 – 7.
  56. M. Pearse, C. Crook “Recommended transformation parameters



- from WGS 84 to NZGD 49” Geodetic System Technical Report GS 1997/11. Land Information of New Zealand, 1977. – 15 p.
57. Кашин Л. А. Построение классической астрономо-геодезической сети России и СССР (1816 – 1991 гг). Научно-технический и исторический обзор. – М.: Картоцентр – Геодезиздат, – 1999. – 192 с.
  58. Единая государственная система геодезических координат 1995 года (СК-95). Справочный документ. – Под общ. ред. Дращнюка А.А. – М.: ЦНИИГАиК, 2000. – 32 с.
  59. Введение новой государственной референцной системы геодезических координат 1995 года (СК-95). Технико-экономический доклад. – М.: ЦНИИГАиК, 1977. – 72 с.
  60. Галазин В. Ф., Каплан Б. Л., Лебедев М. Г. и др. Система геодезических параметров Земли “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90). Справочный документ. – М.: Координационный научно-информационный центр, 1998. – 37 с.
  61. Кашин Л. А. Пулковская астрономическая обсерватория и её роль в развитии астрономо-геодезии //Геодезия и картография, 1992, № 7, с 58 – 63.
  62. Сорокин А. И. Кронштадтский футшток и начало отсчёта высот и глубин //Записки по гидрографии, 1990, № 222, с. 55 – 62.
  63. Буланже Ю. Д., Богданов В. И., Лазаренко Н. Н. Проблема Кронштадтского футштока //Записки по гидрографии, 1990, № 222, с. 50 – 55.
  64. Коломейчук Н. Д. Гидрография: Учеб. для курсантов высших военно-морских училищ. – Л.: Изд. ГУНиО МО СССР, 1988. – 363 с.
  65. Топографо-геодезические термины: Справочник / Б. С. Кузьмин, Ф. Я. Герасимов, В. М. Молоканов и др. – М.: Наука, 1989. – 261 с.
  66. Ермолаев Г. Г., Захаров В. К. Морская лоция. – М.: Транспорт, 1969. – 368 с.
  67. Захаров В. К. Морская лоция. – М.: Морской транспорт, 1962. – 415 с.
  68. Картографические таблицы. Эллипсоид Ф. Н. Красовского. – Издательство Управления Начальника Гидрографической Службы ВМФ СССР, 1957. – 314 с.
  69. Руководство по обработке наблюдений над уровнем моря. Издательство Управления Начальника Гидрографической Службы ВМФ СССР, 1957. – 307 с.

70. Таблица высот геоида. – ГУНиО МО СССР, 1983. – 8 с.
71. The Mariner's Handbook (NP 100). Published by the Hydrographer of the Navy (UK), Seven edition, 1999. – 235 p.
72. Symbols and Abbreviations Used on Admiralty Charts. Chart 5011 (INT 1), Hydrographic Department Admiralty, Edition 2 – December 1998.
73. Admiralty Tidal Handbook No. 2. (NP 122(2)). Datums for Hydrographic Surveys (and other related subjects). Hydrographic Department Admiralty, 1975. – 43 p.
74. Стоцкий Л. Р. Физические величины и их единицы. – М.: Просвещение, 1984. – 239 с.
75. Каврайский В.В. Избранные труды. Том I. Астрономия и геодезия. Издание Управления начальника Гидрографической службы ВМФ СССР, 1956. – 354 с.
76. Мореходные Таблицы МТ-2000 (№ 9011). – С.-Петербург, Издательство ГУНиО МО РФ, 2002. – 575 с.
77. Астрономический ежегодник на 2004 год. – С.-Петербург, Издательство Института прикладной астрономии РАН, 2003. – 726 с.
78. Маслов А.В., Гордеев А.В., Батраков Ю.Г. Геодезия. Учеб. пособие для вузов. Изд. 4, переработ. и доп. – М.: Недра, 1980. – 616 с.
79. Каврайский В.В. Избранные труды. Том II. Математическая картография. Вып. I. Общая теория картографических проекций. Издание Управления начальника Гидрографической службы ВМФ СССР, 1958. – 319 с.
80. Admiralty Manual of Navigation. Vol. I. BR 45(1). London.: The Stationery Office, 1987. – 497 p.
81. Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodetics on the ellipsoid with application of nested equations. Survey Review (UK) Vol. XXII, No. 176, April 1975. pp. 88 – 93.
82. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. – М.: Физматгиз, 1963. – 446 с.
83. Бровар В.В., Магницкий В.А., Шимбаев Б.П. Теория фигуры Земли. – М.: Издательство геодезической литературы, 1961. – 256 с.
84. Комаровский Ю.А. Вычисление меридиональных частей на различных эллипсоидах. /Проблемы транспорта Дальнего Востока. Материалы пятой международной научно-практической конференции (FEBRAT-03). 1 – 3 октября 2003 г. – Владивосток: ДВО Российской Академии транспорта, 2003, с. 504 – 507.
85. Гараевская Л.С., Малюсова Н.В. Практическое пособие по картографии. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 294 с.

86. C.D. de-Jong, G. Lachapelle, S. Skone, I.A. Elema. Hydrography. Delft University Press (Netherlands), 2002. – 353 p.
87. Department of Defense World Geodetic System 1984. DMA TR8350.2. U.S. Geological Survey, October, 1993. – 152 p.
88. J. G. Morgan. The North American Datum of 1983. //Geophysics: The Leading Edge of Exploration, January 1987, pp. 27 – 33.
89. Department of Defense World Geodetic System 1984. NIMA TR 8350.2, Third Edition, 3 January 2000. NIMA Stock No. DMATR8350.2WGS84. – 175 p.
90. Audoin, C., Guinot, B. The Measurement of Time. Time, Frequency and The Atomic Clock. Cambridge University Press (UK), 2001. – 335 p.
91. Pratar Misra and Per Enge. Global Positioning System. Signals, Measurement and Performance. Lincoln, Massachusetts (USA), Ganga-Jamuna Press, 2001. – 390 p.
92. Addendum to NIMA TR 8350.2: Implementation of the World Geodetic System 1984 (WGS 84) Reference Frame G1150. – 8 p.  
<http://www.gis-lab.info/docs/nima-tr8350.2-addendum.pdf>
93. Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J. Global Positioning System. Theory and Practice. Fifth, revised edition. New York, Springer Wien, 2001. – 382 p.
94. Kaplan, Elliot D. Understanding GPS. Principles and Applications. Boston (USA), Artech House, 1996. – 554 p.
95. Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Trimmer, R., Factor, J., Pavlis, N.K., Klosco, S.M., Chinn, D.S., “EGM96 The NASA GSFS and NOMA Joint Geopotential Model”, NASA Technical Memorandum, 1997.
96. <http://solar.tsu.ru/chrest/book02.htm>
97. <http://www.astronet.ru/db/msg.html> Жаров В. Е. Сферическая астрономия.
98. [http://www.gps.oma.be/gb/refsys\\_gb\\_ok\\_css.htm](http://www.gps.oma.be/gb/refsys_gb_ok_css.htm) Global and European Reference Systems: Theory and Practice. Royal Observatory of Belgium.
99. EM 1110-1-1003, GPS Reference System, Chapter 3, 1 Jul 03.  
<http://www.usace.army.mil/usace-docs/eng-manuals/em1110-1-1003/c-3.pdf>
100. User’s Handbook on Datum Transformations Involving WGS 84. Special Publication No. 60. 2<sup>nd</sup> Edition, November 1999. Published by International Hydrographic Bureau, Monaco. – 100 p.
101. Coordinate Conversions and Transformations Including Formulas. Guidance Note Number 7, part 2. European Petroleum Survey Group,

October 2004. – 85 p.

102. Герасимов А.П., Ефимов Г.Н., Насретдинов К.К. Совместное уравнивание астрономо-геодезической и космических сетей // Геодезия и картография, 1993, № 11. – с. 23 – 24.
103. Серапинас Б.Б. Введение в Глонасс и GPS измерения. Учебное пособие. – Ижевск.: Удм. гос. ун-т, 1999. – 93 с.
104. Базлов Ю. А., Герасимов А. П., Ефремов Г. Н., Насретдинов К. К. Параметры связи систем координат // Геодезия и картография, 1996, № 8. – с. 6 – 7.
105. Кеннеди М., Копп С. Картографические проекции. – М.: Изд-во “Дата +”, 2002. – 114 с.
106. GPS Navigator Model GP-37. Operator’s Manual. Furuno Electric Co., LTD, 2004. – 86 p.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### ПАРАМЕТРЫ НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫХ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ [27]

В таблице используются следующие обозначения:

$a$  – большая полуось, т. е. экваториальный радиус (метры);

$b$  – меньшая полуось, т. е. полярный радиус (метры);

$R$  – средний радиус референц-эллипсоида (метры), вычисленный

по формуле:  $R = \frac{2a + b}{3}$ ;

$f$  – полярное сжатие, представленное в виде дроби; в отечественной литературе сжатие чаще обозначается буквой  $\alpha$ ,

$$f = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a};$$

$e$  – первый эксцентриситет эллипсоида, рассчитанный по формуле

$$e = \sqrt{2f - f^2};$$

$e^2$  – квадрат первого эксцентриситета.

Названия референц-эллипсоидов приведены в таблице на английском языке для удобства работы с иностранными картами и навигационными пособиями.

Следует заметить, что Международный референц-эллипсоид 1924 года (International 1924) является эллипсоидом Хейфорда 1909 (Hayford 1909).

Референц-эллипсоид Фишера 1968 года (Fisher 1968) был получен в результате модификации эллипсоида Fisher 1960 впервые исключительно для обеспечения космических полетов в США.



**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**  
**ПАРАМЕТРЫ ЭЛЛИПСОИДА WGS 84 [35]**

Параметры	Обозначение	Величина параметра
Большая полуось	$a$	6378137 м
Нормализованный второй степени зональный гармонический коэффициент гравитационного потенциала	$\bar{C}_{2,0}$	$-484,16685 \cdot 10^{-6}$
	$\bar{C}_{2,2}$	$2,4395796 \cdot 10^{-6}$
Средняя угловая скорость вращения Земли	$\omega$	$7292115 \cdot 10^{-11}$ рад/с
Гравитационная постоянная Земли (с учетом атмосферы)	GM	$3986005 \cdot 10^8$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная Земли (без учета массы земной атмосферы)	GM'	$3986001,5 \cdot 10^8$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная атмосферы	GM <sub>A</sub>	$3,5 \cdot 10^8$ м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
Универсальная гравитационная постоянная	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /кгс <sup>2</sup>
Угловая скорость вращения Земли с учетом прецессии	$\omega^*$	$(7292115,8553 \cdot 10^{-11} + 4,3 \cdot 10^{-15} \text{ Ту})$ рад/с
Динамический коэффициент формы	$J_2$	$1,081874 \cdot 10^{-3}$
Полярное сжатие	$f$	1/298,257223563 (0,00335281066474)
Малая полуось	$b$	6356752,3142 м
Первый эксцентриситет	$e$	0,0818191908426
Квадрат первого эксцентриситета	$e^2$	0,00669437999013
	$1 - e^2$	0,99330562001
	$\sqrt{1 - e^2}$	0,996647189335
Второй эксцентриситет	$e'$	0,0820944379496
Квадрат второго эксцентриситета	$e'^2$	0,00673949674227
Линейный эксцентриситет	E	521854,0084 м
Полярный радиус кривизны	C	6399593,6258 м
Радиус кривизны меридиана на		6335439,3273 м

экваторе		
Разность между max и min радиусами кривизны меридиана		64154,2985 м
Отношение полуосей	$b/a$	0,996647189335
Разность полуосей	$a - b$	21384,6858 м
Четверть меридиана	$Q$	10001965,7293 м
Широта середины четверти меридиана		$\varphi = 45^{\circ}08'39,5''$
Расстояние между полюсами по меридиану	$2Q$	20003931,4586 м
Длина меридианного эллипса	$4Q$	40007862,9173 м
Длина экватора	$C$	40075016,6856 м
Разность длин экватора и меридианного эллипса		67153,7683 м
Средний квадратический радиус		6371016,7469 м
Гармонический средний радиус	$R_g$	6370992,8027 м
Радиус сферы равной длины меридианного эллипса		6367449,1458 м
Средний радиус $(2a + b)/3$	$R_1$	6371008,7714 м
Радиус сферы равной площади	$R_2$	6372007,1809 м
Радиус сферы равного объема	$R_3$	6371000,79 м
Площадь поверхности эллипсоида	$S$	$5,10065621724 \cdot 10^{14}$ м
Объем эллипсоида	$V$	$1,0832073198 \cdot 10^{21}$ м
	$m'$	0,00335843130272
	$n'$	0,00167922038638
	$q_0$	0,0000733462578707
	$q_0'$	0,00268804130046
Теоретический (нормальный) гравитационный потенциал	$U_0$	$62636860,8497 \text{ м}^2/\text{с}^2$
Теоретическая (нормальная) гравитация на экваторе	$\gamma_e$	$9,7803267714 \text{ м}/\text{с}^2$
Теоретическая (нормальная) гравитация на полюсах	$\gamma_p$	$9,8321863685 \text{ м}/\text{с}^2$
Средняя величина теоретической (нормальной) гравитации	$\bar{\gamma}$	$9,7976446561 \text{ м}/\text{с}^2$
Коэффициент формулы теоретической (нормальной) гравитации	$k$	0,00193185138639
Масса Земли с учетом атмосферы	$M$	$5,9733328 \cdot 10^{24}$ кг



Масса атмосферы	$M_A$	$5,136 \cdot 10^{18}$ кг
$m = \omega^2 a^2 b / GM$	$m$	0,00344978600313
	$Ma^2$	$2,4299895 \cdot 10^{38}$ кг м <sup>2</sup>
Скорость света в вакууме	$c$	299792458 м/с
Динамическая эллиптичность (сжатие)	$H$	1/305,4413
Гравитационная постоянная	$G$	$6,673 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> кг <sup>-1</sup>
Главные моменты инерции относительно оси $X$ относительно оси $Y$ относительно оси $Z$	$A$	$8,0091029 \cdot 10^{37}$ кг м <sup>2</sup>
	$B$	$8,0092559 \cdot 10^{37}$ кг м <sup>2</sup>
	$C$	$8,0354872 \cdot 10^{37}$ кг м <sup>2</sup>
	$C - A$	$2,6384327 \cdot 10^{35}$ кг м <sup>2</sup>
	$C - B$	$2,6231263 \cdot 10^{35}$ кг м <sup>2</sup>
	$B - A$	$1,5306425 \cdot 10^{33}$ кг м <sup>2</sup>
	$C/Ma^2$	0,33057991
	$A/Ma^2$	0,32959413
	$B/Ma^2$	0,32960043
	$(C-A)Ma^2$	0,0010857795
	$(C-B)Ma^2$	0,0010794805
	$(B-A)Ma^2$	0,0000062989674

#### Дополнительные величины эллипсоида WGS 84:

1 метр = 3,28083333333 геодезических футов США,

1 метр = 3,28083989501 международных футов,

1 международный фут = 0,3048 метра,

1 геодезический фут США = 1200/3937 метра =

= 0,30480060960 метра,

1 международная статутная миля = 1609,344 метров =

= 5280 международных футов,

1 морская миля = 6076,10333333 геодезических футов США

= 6076,11548556 международных футов,

1 экваториальная (географическая) миля эллипсоида WGS 84 =

= 1855,324846554559 метров,

Большая полуось WGS 84 = 3437,74677078494 экв. миль.

Средняя длина 1 минуты меридиана = 1852,216 м.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### КАТАЛОГ ВОЗВЫШЕНИЙ ГЕОИДА WGS 84 НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА WGS 84

Каталог рассчитан до  $n = m = 180$ , [35]. Размерность возвышений – метры. Отрицательное значение возвышения свидетельствует о том, что в данной точке поверхности Земли поверхность геоида находится ниже поверхности референц-эллипсоида.

Широта	Долгота восточная								
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
90°	13	13	13	13	13	13	13	13	13
80°	33	34	28	23	17	13	9	4	4
70°	51	43	29	20	12	5	-2	-10	-14
60°	47	41	21	18	14	7	-3	-22	-29
50°	47	48	42	28	12	-10	-19	-33	-43
40°	52	48	35	40	33	-9	-28	-39	-48
30°	36	28	29	17	12	-20	-15	-40	-33
20°	31	26	15	6	1	-29	-44	-61	-67
10°	22	23	2	-3	-7	-36	-59	-90	-95
0°	18	1	-13	-9	-25	-49	-62	-89	-102
-10°	12	13	-2	-14	-25	-32	-38	-60	-75
-20°	17	23	21	8	-9	-10	-11	20	-40
-30°	22	27	34	29	14	15	15	7	-9
-40°	18	26	31	33	39	41	30	24	13
-50°	25	26	34	39	45	45	38	39	28
-60°	16	19	25	30	35	35	33	30	27
-70°	16	16	17	21	20	26	26	22	16
-80°	-4	-1	1	4	4	6	5	4	2
-90°	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30

Широта	Долгота восточная								
	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
90°	13	13	13	13	13	13	13	13	13
80°	1	-2	-2	0	2	3	2	1	1
70°	-12	-10	-14	-12	-6	-2	3	6	4
60°	-32	-32	-26	-15	-2	13	17	19	6
50°	-42	-43	-29	-2	17	23	22	6	2

40°	-59	-50	-28	3	23	37	18	-1	-11
30°	-34	-34	-28	7	29	43	20	4	-6
20°	-59	-36	-11	21	39	49	39	22	10
10°	-63	-24	12	53	60	58	46	36	26
0°	-63	-9	33	58	73	74	63	50	32
-10°	-63	-26	0	35	52	68	76	64	52
-20°	-47	-45	-25	5	23	45	58	57	63
-30°	-25	-37	-39	-23	-14	15	33	34	45
-40°	-2	-20	-32	-33	-27	-14	-2	5	20
-50°	13	-1	-15	-22	-22	-18	-15	-14	-10
-60°	10	-2	-14	-23	-30	-33	-29	-35	-43
-70°	10	-1	-16	-29	-36	-46	-55	-54	-59
-80°	-6	-15	-24	-33	-40	-48	-50	-53	-52
-90°	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30

Широта	Долгота западная								
	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°
90°	13	13	13	13	13	13	13	13	13
80°	3	1	-2	-3	-3	-3	-1	3	1
70°	2	2	1	-1	-3	-7	-14	-24	-27
60°	2	9	17	10	13	1	-14	-30	-39
50°	-8	8	8	1	-11	-19	-16	-18	-22
40°	-12	-10	-13	-20	-31	-34	-21	-16	-26
30°	-7	-5	-8	-15	-28	-40	-42	-29	-22
20°	5	10	7	-7	-23	-39	-47	-34	-9
10°	13	12	11	2	-11	-28	-38	-29	-10
0°	22	16	17	13	1	-12	-23	-20	-14
-10°	36	22	11	6	-1	-8	-10	-8	-11
-20°	51	27	10	0	-9	-11	-5	-2	-3
-30°	46	22	5	-2	-8	-13	-10	-7	-4
-40°	21	6	1	-7	-12	-12	-12	-10	-7
-50°	-15	-18	-18	-16	-17	-15	-10	-10	-8
-60°	-45	-43	-37	-32	-30	-26	-23	-22	-16
-70°	-61	-60	-61	-55	-49	-44	-38	-31	-25
-80°	-53	-54	-55	-52	-48	-42	-38	-38	-29
-90°	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30

Широта	Долгота западная								
	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°
90°	13	13	13	13	13	13	13	13	13

80°	5	9	11	19	27	31	34	33	34
70°	-25	-19	3	24	37	47	60	61	58
60°	-46	-42	-21	6	29	49	65	60	57
50°	-35	-40	-26	-12	24	45	63	62	59
40°	-34	-33	-35	-26	2	33	59	52	51
30°	-26	-32	-51	-40	-17	17	31	34	44
20°	-10	-20	-45	-48	-32	-9	17	25	31
10°	3	1	-11	-41	-42	-16	3	17	33
0°	-3	14	10	-15	-27	-18	3	12	20
-10°	-9	1	32	4	-18	-13	-9	4	14
-20°	-1	9	35	20	-5	-6	-5	0	13
-30°	1	9	32	16	4	-8	4	12	15
-40°	-1	8	23	15	-2	-6	6	21	24
-50°	-2	6	14	13	3	3	10	20	27
-60°	-10	-2	10	20	20	21	24	22	17
-70°	-16	-6	1	4	5	4	2	6	12
-80°	-26	-26	-24	-23	-21	-19	-16	-12	-8
-90°	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### ПАРАМЕТРЫ СОВРЕМЕННЫХ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ

Эти параметры приняты официальными организациями США [35] для геодезических расчетов и преобразования координат в приемниках системы Навстар GPS. Названия референц-эллипсоидов даны на английском языке для удобства работы с иностранными картами, пособиями и описаниями навигационной аппаратуры.

Здесь используются следующие обозначения:  $a$  – большая полуось эллипсоида,  $f^{-1}$  – знаменатель сжатия.

Эллипсоид	$a$ (метры)	$f^{-1}$	Величина сжатия ( $f$ )
Airy 1830	6377563,396	299,3249646	0,003840850641497
Australian National Spheroid (ANS)	6378160	298,25	0,003852891869237
Bessel 1841 Ephioia, Indonesia, Japan, Korea	6377397,155	299,1528128	0,003342773182175

Namibia	6377483,865	299,1528128	0,003342773182175
Clarke 1866	6378206,4	294,9786982	0,003390075304088
Clarke 1880	6378249,145	293,465	0,003407561378699
Everest Brunei, E.Malaysia (Sabah and Sarawak)	6377298,556	300,8017	0,003324449296663
India 1830	6377276,345	300,8017	0,003324449296663
India 1956	6377301,243	300,8017	0,003324449296663
Pakistan	6377309,613	300,8017	0,003324449296663
W.Malaysia and Singapore 1948	6377304,063	300,8017	0,003324449296663
W.Malaysia 1969	6377295,664	300,8017	0,003324449296663
GRS 80	6378137	298,257222101	0,003352810681182
Helmert 1906	6378200	298,3	0,003352329869259
Hough 1960	6378270	297	0,003367003367003
Indonesian 1974	6378160	298,247	0,003352925595228
International 1924	6378388	297	0,003367003367003
Krassovsky 1940	6378245	298,3	0,003352329869259
Modified Airy	6377340,189	299,3249646	0,003340850641497
Modified Fisher	6378155	298,3	0,003352329869259
South American 1969	6378160	298,25	0,003352891869237
WGS 1972	6378135	298,26	0,003352779454167
WGS 1984	6378137	298,257223563	0,003352810664747

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### НАЗВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоИДОВ

Названия геодезических систем и референц-эллипсоидов даны на английском языке для удобства работы с иностранными картами и литературой. Параметры референц-эллипсоидов даны в приложении 4.

Геодезическая система	Референц-эллипсоид
Adindan	Clarke 1880
Afgooye (AFG)	Krassovsky 1940
AGD66 (Australian Geodetic Datum 1966)	AN Spheroid

AGD 84	AN Spheroid
Ain el Abd 1970	International 1924
American Samoa 1962	Clarke 1866
Amersfoort	Bessel 1841
Anna 1 Astro 1965	Australian National
ANS84	Australian National
Antigua Island Astro 1943	Clarke 1880
Arc 1950	Clarke 1880
Arc 1960	Clarke 1880
Ascension Island 1958	International 1924
Astro Beacon "E" 1945	International 1924
Astro Pos 71/4	International 1924
Astro Tern Island (FRIG) 1961	International 1924
Astronomical Station 1952	International 1924
ATS 77 (Average Terrestrial System) Canada	Bessel 1841
Australian Geodetic 1966 (AGD 66)	Australian National
Australian Geodetic 1984 (AGD 84)	Australian National
Ayabelle Lighthouse	Clarke 1880
Bellevue (IGN)	International 1924
Beijing 1982 (Peking 1982) после 31 дек. 1980	GRS 80 Chine
Bermuda 1957	Clarke 1866
BIH Terrestrial System	GRS 80
Bissau	International 1924
BJZ 54 (China)	Krassovsky 1940
Bogota Observatory	International 1924
BT68 (Kertau)	Mod. Everest (Timbalai)
Bukit Rimpah	Bessel 1841
Camp Area Astro	International 1924
Campo Inchauspe	International 1924
Canton Astro 1966	International 1924
Cape	Clarke 1880
Cape Canaverel	Clarke 1866
Carthage	Clarke 1880
Chatham Island Astro 1971	International 1924
CH1903 (Switzerland)	Bessel 1841
Chua Astro	International 1924
Corrego Alegre	International 1924
Dabola	Clarke 1880
Deception Island	Clarke 1880
DHDN-1	Bessel 1841

DHDN	Bessel 1841
Djakarta (Batavia)	Bessel 1841
DOS 1968	International 1924
Easter Island 1967	International 1924
Estonia Coordinate System 1937	Bessel 1841
EST 92 (Estonia)	GRS 80
ETRS89	GRS 80
EUREF (Estonia)	GRS 80
European Datum 1950 (ED 50)	International 1924
European Datum 1979 (ED 79)	International 1924
European Datum 1987 (ED 87)	International 1924
Fort Thomas 1955	Clarke 1880
Gan 1970 (Gandajika Base)	International 1924
GDA94 (Geocentric Datum of Australia 1994)	GRS 80
Geodetic Datum 1949 (NZGD49)	International 1924
GGRS87 (Greece)	GRS 80
Graciosa Base SW 1948 (Azores)	International 1924
Guam 1963	Clarke 1880
Gunung Segara	Bessel 1841
GUX 1 Astro	International 1924
HD-72	IUGG 67
Herat North (Afganistan)	International 1924
Hermannskogel (Croatia, Serbia)	Bessel 1841
Hjorsey 1955	International 1924
Hong Kong 1963	International 1924
Hu-Tzu-Shan (Taiwan)	International 1924
Indian (India, Nepal)	Everest 1956
Indian 1954	Everest 1830
Indian 1960	Everest 1830
Indian 1975	Everest 1830
Indonesian 1974	Indonesian 1974
Ireland 1965	Modified Airy 1830
Ireland 1975 (OSI)	Modified Airy 1830
ISTS 061 Astro 1968	International 1924
ISTS 073 Astro 1969	International 1924
ITRF 94	GRS 80
Johnston Island 1961	International 1924
Kandawala	Everest
Kerguelen Island 1949	International 1924
Kertau 1948	Everest 1948

KKJ (Finland)	International 1924
Korean Datum 1985 (Mod. Tokyo Datum)	Bessel 1841
Korean Geodetic System (S. Korea)	GRS 80
Kusaie Astro 1951	International 1924
L.C. 5 Astro 1961	Clarke 1866
Leigon	Clarke 1880
Liberia 1964	Clarke 1880
Luzon	Clarke 1866
Mahe 1971	Clarke 1880
Massawa	Bessel 1841
Merchich	Clarke 1880
MGI	Bessel 1841
MGI–Austria	Bessel 1841
Midway Astro 1961	International 1924
Minna	Clarke 1880
Montserrat Island Astro 1958	Clarke 1880
M’Poraloko	Clarke 1880
MRT (Kertau)	Mod. Everest 1948
MSK-42 (Mongolia)	Krassovsky 1940
Nahrwan	Clarke 1880
Naparima, BWI	International 1924
North American 1927 (NAD 27)	Clarke 1866
North American 1983 (NAD 83)	GRS 80
North Sahara 1959	Clarke 1880
Observatorio Meteorologico 1939	International 1924
Old Egyptian 1907	Helmert 1906
Old Hawaiian	Clarke 1866
Oman	Clarke 1880
Ordnance Survey of Great Britain 1936 (OSGB 36)	Airy 1830
Peking 1954	Krassovsky 1940
Pico de las Nieves	International 1924
Pitcairn Astro 1967	International 1924
Point 58	Clarke 1880
Pointe Noire 1948	Clarke 1880
Porto Santo 1936	International 1924
Potsdam (Germany)	Bessel 1841
Provisional South American 1956 (PSAD 56)	International 1924
Provisional South Chilean 1963 (Hito XVIII 1963)	International 1924
Puerto Rico	Clarke 1866
Pulkovo 1942 (Hungary)	Krassovsky 1940



Qatar National 1995	International 1924
Qornoq	International 1924
RD/NAP (Netherland)	Bessel 1841
Reunion	International 1924
Rome 1940	International 1924
RT90 (Sweedeen)	Bessel RT90
S-42 (Pulkovo 1942, SK-42)	Krassovsky 1940
Santo (DOS) 1965	International 1924
Sao Braz	International 1924
Sapper Hill 1943	International 1924
Schwarzeck	Bessel 1841
Selvagem Grande 1938	International 1924
SGS 1985	PZ 90
SIRGAS	GRS 80
S-JTSK	Bessel 1841
South American Datum 1969 (SAD 69)	South American 1969
South Asia	Modified Fischer 1960
Southeast Base	International 1924
Southwest Base	International 1924
SURGAS	GRS 80
SWEREF99 (Sweedeen)	GRS 80
System 42/83	Krassovsky 1940
System 42/83 Germany	Krassovsky 1940
Tananarive Observatory 1925	International 1924
Timbalai 1948	Everest
Tokyo (TD)	Bessel 1841
Tristan Astro 1968	International 1924
TWD67 (Taiwan)	GRS 67
TWD97 (Taiwan)	GRS 80
Viti Levu 1916	Clarke 1880
Voirol 1960	Clarke 1880
Wake-Eniwetok 1960	Hough 1960
Wake Island Astro 1952	International 1924
Zanderij	International 1924
Yacare	International 1924

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

### ПАРАМЕТРЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данном приложении собраны основные данные по всем геодезическим системам и их модификациям, которые используются для составления карт. Приводимые параметры необходимы для решения задачи преобразования координат при переходе от геодезической системы карты к геодезической системе WGS 84 стандартным способом Молоденского (способом 5 параметров).

Названия геодезической системы в данном приложении записаны заглавными буквами. Ниже с отступом приводятся модификации этой геодезической системы и область ее применения. Названия геодезических систем и их модификаций приводятся на английском языке для удобства работы с иностранными картами и пособиями.

Через  $\Delta a$  обозначена разность между большей полуосью референц-эллипсоида WGS 84 и большей полуосью референц-эллипсоида, лежащего в основе местной геодезической системы. Размерность  $\Delta a$  – метры.

Через  $\Delta f \times 10^4$  обозначена разность между сжатием референц-эллипсоида местной геодезической системы. В приложении величина разности между сжатиями приводится умноженной на 10000 для экономии места. Чтобы воспользоваться разностью между сжатиями для расчетов, выбранную из приложения величину следует предварительно умножить на  $10^{-4}$ .

Через  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  обозначены линейные элементы взаимного ориентирования центра референц-эллипсоида локальной геодезической системы относительно центра референц-эллипсоида WGS 84. Величины  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  представлены в метрах.

Для удобства работы с данным приложением все геодезические системы распределены по континентам и океанам в алфавитном порядке. Информация для данного приложения взята из официальных документов Картографического предприятия Министерства обороны США и Международной Гидрографической Организации.

#### Австралия

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
AUSTRALIAN GEODETIC 1966 Австралия и Тасмания	-23	-0,00081204			
			-133	-48	148

AUSTRALIAN GEODETIC 1984 Австралия и Тасмания	-23	-0,00081204			
			-134	-48	149

### Антарктида

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
CAMP AREA ASTRO Camp McMurdo Area, Antarctica	-251	-0,14192702	-104	-129	239

### Азия

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
AIN EL ABD 1970 Bahrain Island Saudi Arabia	-251	-0,14192702	-150 -143	-250 -236	-1 7
BEJING 1982 (PEKING)	-3	-0,000025			
BUKIT RIMPAH Bangka and Belitung Island	739,845	0,10037483	-384	664	-48
DJAKARTA (BATAVIA) Sumatra	739,845	0,10037483	-377	681	-50
EUROPEAN 1950 Iran Irag, Israel, Jordan, Kuwait, Lebanon, Saudi Arabia, Syria	-251	-0,14192702	-117 -103	-132 -106	-164 -141
GUNLING SEGARA Kalimantan (Индонезия)	739,845	0,10037483	-403	684	41
HERAT NORTH Afghanistan	-251	-0,14192702	-333	-222	114
HONG KONG 1963 Hong Kong	-251	-0,14192702	-156	-271	-189
HU-TZU-SHAN Taiwan	-251	-0,14192702	-637	-549	-203
INDIAN Bangladesh India and Nepal Pakistan	860,655 835,757 827,387	0,28361368 0,28361368 0,28361368	282 295 283	726 736 682	254 257 231

INDIAN 1954 Thailand	860,655	0,28361368	217	823	299
INDIAN 1960 Vietnam (near 16°N) Con Son Island (Vietnam)	860,655	0,28361368	198 182	881 915	317 344
INDIAN 1975 Thailand	860,655	0,28361368	209	818	290
INDONESIAN 1974 Indonesia	-23	-0,00114930	-24	-15	5
KANDAWALA Sri Lanka	860,655	0,28361368	-97	787	86
KERTAU 1948 West Malaysia and Singapore	832,937	0,28361368	-11	851	5
MSK-42 (Mongolia)	-108	0,00480795	13	-139	-74
NAHRWAN Masirah Island (Oman) United Arab Emirates Saudi Arabia	-112,145	-0,54750714	-247 -249 -243	-148 -156 -192	369 381 477
OMAN Oman	-112,145	-0,54750714	-346	-1	224
PEKING 1954	-108	0,00480795	-12	-113	-41
QATAR NATIONAL Qatar	-251	-0,14192702	-128	-283	22
SOUTH ASIA Singapore	-18	0,00480795	7	-10	-26
SGS 1985	1	-0,000025	3	9	-9
TIMDALAI 1948 Brunei and East Malaysia (Sarawak and Sabah)	838,444	0,28361368	-679	669	-48
TOKYO Среднее значение для Японии, Окинавы и Республики Кореи Japan Okinawa South Korea	739,845	0,10037483	-147 -148 -158 -147	506 507 507 506	687 685 676 687

## Африка

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
ADINDAN Среднее значение для Эфиопии и Судана	-112,145	-0,54750714	-116	-15	204
Burkina Faso			-118	-14	218
Cameroon			-134	-2	210
Ethiopia			-165	-11	206
Mali			-123	-20	220
Senegal			-128	-18	224
Sudan			-161	-14	205
AFGOOYE (AGF) Somalia			-108	0,00480795	-43
ARC 1950 Среднее значение (Botswana, Lesotho, Malawi, Swaziland, Zaire, Zambia, Zimbabwe)	-112,145	-0,54750714	-143	-90	-294
Botswana			-138	-105	-289
Burundi			-153	-5	-292
Lesotho			-125	-108	-295
Malawi			-161	-73	-317
Swaziland			-134	-105	-295
Zaire			-169	-19	-278
Zambia			-147	-74	-283
Zimbabwe			-142	-96	-293
ARC 1960 Среднее значение (Kenya, Tanzania)			-112,145	-0,54750714	-160
AYABELE LIGHTHOUSE Djibouti	-112,145	-0,54750714	-79	-129	145
BISSAU Guinea-Bissau	-251	-0,14192702	-173	253	27
CAPE South Africa	-112,145	-0,54750714	-136	-108	-292
CARTHAGE Tunisia	-112,145	-0,54750714	-263	6	431
DABOLA Guinea	-112,145	-0,54750714	-83	37	124

EUROPEAN 1950 Egypt Tunisia	-251	-0,14192702	-130 -112	-117 -77	-151 -145
LEIGON Ghana	-112,145	-0,54750714	-130	29	364
LIBERIA 1964 Liberia	-112,145	-0,54750714	-90	40	88
MASSAWA Eritrea (Ethiopia)	739,845	0,10037483	639	405	60
MERCHICH Morocco	-112,145	-0,54750714	31	146	47
MINNA Cameroon Nigeria	-112,145	-0,54750714	-81 -92	-84 -93	115 122
M'PORALOKO Gabon	-112,145	-0,54750714	-74	-130	42
NORTH SAHARA 1959 Algeria	-112,145	-0,54750714	-186	-93	310
OLD EGYPTIAN 1907 Egypt	-63	0,00480795	-130	110	-13
POINT 58 Среднее значение (Burkina Faso, Niger)	-112,145	-0,54750714	-106	-129	165
POINTE NOIRE 1948 Congo	-112,145	-0,54750714	-148	51	-291
SCHWARZECK Namibia	653,135	0,10037483	616	97	-251
VOIROL 1960 Algeria	-112,145	-0,54750714	-123	-206	219

### Европа

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
EUROPEAN 1950 (ED 50) Среднее значение для Австрии, Бельгии, Дании, Финляндии, Франции, Германии, Гибралтара, Греции, Италии, Люксембурга,	-251	-0,14192702	-87	-98	-121

Нидерландов, Норвегии, Португалии, Испании, Швеции и Швейцарии					
Западная Европа (Австрия, Дания, Франция, Германия, Нидерланды и Швейцария)			-87	-96	-120
Cyprus			-104	-101	-140
Egypt			-130	-117	-151
England, Channel, Islands, Shetland Islands			-86	-96	-120
England, Ireland, Scotland, Shetland Islands			-86	-96	-120
Greece			-84	-95	-130
Iran			-117	-132	-164
Italy					
Sardinia			-97	-103	-120
Sicily			-97	-88	-135
Malta			-107	-88	-149
Norway and Finland			-87	-95	-120
Portugal and Spain			-84	-107	-120
Tunisia			-112	-77	-145
EUROPEAN 1979 (ED 79) Среднее значение для Австрии, Финляндии, Нидерландов, Норвегии, Испании, Швеции и Швейцарии	-251	-0,14192702			
			-86	-98	-119
HJORSEY 1955 Iceland	-251	-0,14192702			
			-73	46	-86
GGRS87 Greece	0	0			
			-199,8	74,79	246,62
IRELAN 1965 Ireland	796,811	0,11960023			
			506	-122	611
KKJ	-252	-0,141927			
			-75	-230	-89
ORDNANCE SURVEY OF GREAT BRITAIN 1936	573,604	0,11960023			

Среднее значение (England, Isle of Man, Scotland, Shetland Islands, Wales)			375	-111	431
England			371	-112	434
England, Isle of Man, Wales			371	-111	434
Scotland and Shetland Islands			384	-111	425
Wales			370	-108	434
ROME 1940 Sardinia	-251	-0,14192702	-225	-65	9
SGS 1985	1	-0,000025	3	9	-9
S-42 (SK-42, PULKOVO 1942)	-108	0,00480795			
Hungary			28	-121	-77
Russia (Европейская часть)			28	-130	-95
S-JTSK Czechoslovakia (до 1993 года)	739,845	0,10037483	589	76	480
Hermannskogel Югославия	739,845	0,10037483	682	-201	480

### Северная Америка

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
CAPE CANAVERAL Среднее значение (Florida and Bahamas)	-64	-0,37264639	-2	151	181
NORTH AMERICAN 1927 (NAD 27) Среднее значение для континентальных штатов США (без Аляски и Гавайев)	-69	-0,37264639	-8	160	176
Западные штаты США (Arizona, Arkansas, California, Colorado, Idaho, Iowa, Kansas, Montana, Nebraska, Nevada, New Mexico, North Dakota, Oklahoma, Oregon, South			-8	159	175



Dakota, Texas, Utah, Washington, Wyoming) Восточные штаты США (Alabama, Connecticut, Dela- were, District of Columbia, Florida, Georgia, Illinois, Indiana, Kentucky, Louisiana, Maine, Maryland, Massachusetts, Michigan, Minnesota, Mississippi, Mis- souri, New Hampshire, New Jersey, New York, North Caroline, Ohio, Pennsylvania, Rhode Island, South Carolane, Tennessee, Vermont, Virginia, West Virginia, Wisconsin) Alaska (без Алеутских островов)			-9	161	179
			-5	135	172

Aleutian Island Восточнее 180 °W Западнее 180 °W			-2	152	149
Bahames (без San Salvador Island)			-4	154	178
San Salvador Island			1	140	165
Canada Среднее значение (вместе с Ньюфаундлендом)			-10	158	187
Alberta and British Columbia			-7	162	188
Восточная Канада (Newfoundkand, New Brunswick, Nova Scotia, Quebec)			-22	160	190
Manitoba and Ontario			-9	157	184
Северо-западные территории и Saskatchewan			4	159	188
Yukon			-7	139	181

Canal Zone			0	125	201
Caribbean (Antigua Island, Barbados, Barbuda, Caicos Island, Cuba, Dominican Republic, Grand Cayman, Jamaica, Turks Island)			-3	142	183
Central America (Belise, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Nicaragua)			0	125	194
Cuba			-9	152	178
Greenland (Hayes Peninsula)			11	114	195
Mexico			-12	130	190
NORTH AMERICAN 1983 (NAD 83)	0	-0,00000016			
Alaska (без Алеутских островов)			0	0	0
Aleutian Islands			-2	0	4
Canada			0	0	0
Континентальные штаты США (CONUS)			0	0	0
Hawaii			1	1	-1
Мексика и Центральная Америка			0	0	0

### Южная Америка

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
BOGOTA OBSERVATORY Colombia	-251	-0,14192702	307	304	-318
CAMPO INCHAUSPE 1969 Argentina	-251	-0,14192702	-148	136	90
CHUA ASTRO Paraguay	-251	-0,14192702	-134	229	-29
CORREGO ALEGRE Brazil	-251	-0,14192702	-206	172	-6
PROVISIONAL SOUTH AMERICAN 1956 Среднее значение (Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador,	-251	-0,14192702	-288	175	-376

Guyana, Peru, Venezuela)					
Bolivia			-270	188	-388
Chile					
Northern Chile (до 19 °S)			-270	183	-390
Southern Chile (до 43 °S)			-305	243	-442
Colombia			-282	169	-371
Ecuador			-278	171	-367
Peru			-279	175	-379
Venezuela			-295	173	-371
PROVISIONAL					
SOUTH CHILEAN 1963					
Southern Chile (до 53 °S)	-251	-0,14192702			
			16	196	93
SOUTH AMERICAN 1969					
Среднее значение	-23	-0,00081204			
(Argentina, Bolivia, Brazil, Chile, Colombia, Ecuador, Guyana, Paraguay, Peru, Trinidad and Tobago, Venezuela)			-57	1	-41
Argentina			-62	-1	-37
Bolivia			-61	2	-48
Brazil			-60	-2	-41
Chile			-75	-1	-44
Colombia			-44	6	-36
Ecuador			-48	3	-44
(без Галапагосских островов)					
Baltra			-47	26	-42
Galapagos Island			-47	26	-42
Guyana			-53	3	-47
Paraguay			-61	2	-33
Peru			-58	0	-44
Trinidad and Tobago			-45	12	-33
Venezuela			-45	8	-33
YACARE					
Uruguay	-251	-0,14192702	-155	171	37
ZANDERIJ					
Suriname	-251	-0,14192702	-265	120	-358

### Атлантический океан

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
ANTIGUA ISLAND ASTRO 1943 Antigua, Leewarg Island	-112,145	-0,54750714	-270	13	62
ASCENSION ISLAND 1958 Ascension Island	-251	-0,14192702	-205	107	53
ASTRO DOS 71/4 St. Helena Island	-251	-0,14192702	-320	550	-494
BERMUDA 1957 Bermuda Islands	-69,4	-0,37264639	-73	213	296
CAPE CANAVERAL Bahams and Florida	-69,4	-0,37264639	-2	151	181
DECEPTION ISLAND Deception Island, Antarctica	-112,145	-0,54750714	260	12	-147
FORT THOMAS 1955 Nevis, St.Kitts, Leeward Islands	-112,145	-0,54750714	-7	215	225
GRACIOSA BASE SW 1948 Faial, Graciosa, Pico, Sao Jorge and Terceira Islands (Azores)	-251	-0,14192702	-104	167	-38
HJORSEY 1955 Iseland	-251	-0,14192702	-73	46	-86
ISTS 061 ASTRO 1968 South Georgia Islands	-251	-0,14192702	-794	119	-298
L.C. 5 ASTRO 1961 Cayman Brac Island	-69,4	-0,37264639	42	124	147
MONTSERRAT ISLAND ASTRO 1958 Montserrat, Leeward Islands	-112,145	-0,54750714	174	359	365
NAPARIMA, BWI Trinidad and Tobago	-251	-0,14192702	-10	375	165
OBSERVATORIO METEOROLOGICO 1939 Cervo and Flores Islands (Azores)	-251	-0,14192702	-425	-169	81
PICO DE LAS NIEVES Canary Islands	-251	-0,14192702	-307	-92	127

PORTO SANTO 1936 Porto Santo and Madeira Islands	-251	-0,14192702	-499	-249	314
PUERTO RICO Puerto Rico and Virgin Islands	-69,4	-0,37264639	11	72	-101
QORNOQ South Greenland	-251	-0,14192702	164	138	-189
SAO BRAZ Sao Miguel, Santa Maria Island (Azores)	-251	-0,14192702	-203	141	53
SAPPER HILL 1943 East Falkland Island	-251	-0,14192702	-355	21	72
SELVAGEM GRANDE 1938 Salvage Islands	-251	-0,14192702	-289	-124	60
SOUTHEAST BASE Porto Santo and Madeira Islands	-251	-0,14192702	-499	-249	314
SOUTHWEST BASE Azores (Pico and Terceira Islands)	-251	-0,14192702	-104	167	-38
TRISTAN ASTRO 1968 Tristan da Cunha	-251	-0,14192702	632	438	609

### Индийский океан

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
ANNA 1 ASTRO 1965 Cocos Islands	-23	-0,00081204	-491	-22	435
GAN 1970 (GANDAJIKA BASE) Republic of Maldives	-251	-0,14192702	-133	-321	50
ISTS 073 ASTRO 1969 Diego Garcia	-251	-0,14192702	208	-435	-229
KERGUELEN ISLAND 1949 Kerguelen Iskand	-251	-0,14192702	145	-187	103
MAHE 1971 Mahe Island	-112,145	-0,54750714	41	-220	-134
REUNION Mascarene Islands	-251	-0,14192702	94	-948	-1262

TANANARAVE OBSERVATORY 1925 Madagascar	-251	-0,14192702			
			-189	-242	-91

**Тихий океан**

Геодезическая система	$\Delta a$	$\Delta f \times 10^4$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
AMERICAN SAMOA 1962 American Samoa Islands	-69,4	-0,37264639	-115	118	426
ASTRO BEACON «E» 1945 Iwo Jima	-251	-0,14192702	145	75	-272
ASTRO TERN ISLAND (FRIG) 1961 Tern Island	-251	-0,14192702	114	-116	-333
ASTRONOMICAL STATION 1952 Marcus Island	-251	-0,14192702	124	-234	-25
BELLEVUE (IGN) Efate and Erromango Islands	-251	-0,14192702	-127	-769	472
CANTON ASTRO 1966 Phoenix Islands	-251	-0,14192702	298	-304	-375
CHATHAM ISLAND ASTRO 1971 Chatham Island (New Zealand)	-251	-0,14192702	175	-38	113
DOS 1968 Gizo Island (New Georgia Islands)	-251	-0,14192702	230	-199	-752
EASTER ISLAND 1967 Easter Island	-251	-0,14192702	211	147	111
GEODETTIC DATUM 1949 (NZGD49) New Zealand	-251	-0,14192702	84	-22	209
GUAM 1963 Guam	-69,4	-0,37262639	-100	-248	259
GUX 1 ASTRO Guadalcanal Island	-251	-0,14192702	252	-209	-751
JOHNSTON ISLAND 1961 Johnston Island	-251	-0,14192702	189	-79	-202

KUSAIE ASTRO 1951 Carolane Island, Fed. States of Micronesia	-251	-0,14192702	647	1777	-1124
LUZON Philippines (без Mindanao Island)	-69,4	-0,37264639	-133	-77	-51
Mindanao Island			-133	-79	-72
MIDWAY ASTRO 1961 Midway Islands	-251	-0,14192702	403	-81	277

OLD HAWAIIAN Среднее значение	-69,4	-0,37264639	61	-285	-181
Hawaii			89	-279	-183
Kauai			45	-290	-172
Maui			65	-290	-190
Oahu			58	-283	-182
PITCAIRN ASTRO 1967 Pitcairn Island	-251	-0,14192702	185	165	42
SANTO (DOS) 1965 Espirito Santo Island	-251	-0,14192702	170	42	84
VITI LEVU 1916 Viti Levu Island (Fuji Islands)	-112,145	-0,54750714	51	391	-36
WAKE-ENIWETOK 1960 Marshall Islands	-133	-0,14192702	102	52	-38
WAKE ISLAND ASTRO 1952 Wake Atoll	-251	-0,14192702	276	-57	149

### ДОПОЛНЕНИЕ К ПРИЛОЖЕНИЮ 6

Данные взяты из различных официальных источников. Под названием геодезической системы в скобках указан лежащий в ее основе референц-эллипсоид.

Название геодезической системы и референц-эллипсоид	Область применения	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
Estonia Coordinate System 1937 (Bessel 1841)	Эстония	374	150	588

Korean Geodetic System (GRS 80)	Республика Корея	0	0	0
Hermannskogel Datum (Bessel 1841)	Хорватия, Босния, Сербия, Герцеговина	653	-212	449
Pulkovo 1942, S-42 (Красовский 1940)	Польша	23	-124	-82
	Чехословакия	26	-121	-78
	Латвия	24	-124	-82
	Казахстан	15	-130	-84
	Албания	24	-130	-92
	Румыния	28	-121	-77

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

$$\pi = 3,14159265358979323846164338$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ радиан} &= 57,2957795130823208767981548^\circ \\ &= 57^\circ 17' 44,80625'' \\ &= 3437,746770784939252607889' (\rho') \\ &= 206264,80624709635515647'' (\rho'') \end{aligned}$$

$$1^\circ = 0,0174532925199432957666 \text{ радиан (arc } 1^\circ)$$

$$1' = 0,000290888208665721596 \text{ радиан (arc } 1')$$

$$1'' = 0,000004848136811095359933 \text{ радиан (arc } 1'')$$

$$\sin 1' = 0,0002908882045634246$$

$$\sin 1'' = 0,00000484813681107637$$

$$\text{Основание натурального логарифма (e)} = 2,71828182845904523536$$

$$\lg e = 0,4342944819032518276511$$

$$\ln 10 = 2,30258509299404568401799$$



## ПРИЛОЖЕНИЕ 8

### КАТАЛОГ ВОЗВЫШЕНИЙ ГЕОИДА НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоИДА КРАСОВСКОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СК-42

Возвышения даны в метрах. Отрицательное значение возвышения подразумевает, что в данной точке поверхность геоида располагается ниже поверхности референц-эллипсоида. Южная широта имеет знак минус. Данные взяты из [70].

Ши- рота	Долгота восточная								
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
80°	31,8	28,6	25,0	21,6	18,6	16,0	13,7	11,5	9,5
70°	43,3	33,1	23,3	16,1	11,9	9,3	5,8	0,3	-6,4
60°	47,3	35,0	22,6	12,8	7,8	4,4	-2,9	-15,2	-27,0
50°	44,5	40,3	31,2	18,7	8,7	-1,0	-16,6	-35,5	-45,6
40°	52,0	46,3	34,0	22,4	14,3	2,5	-17,4	-38,5	-47,3
30°	45,7	36,7	21,8	13,5	10,0	0	-17,7	-37,4	-49,5
20°	32,3	24,5	9,9	3,5	-0,4	-16,2	-38,0	-56,5	-67,4
10°	33,8	14,6	-7,2	-6,7	-2,6	-24,9	-60,9	-84,7	-88,5
0°	27,6	6,8	-16,3	-17,6	-14,2	-32,2	-66,6	-94,7	-97,1
-10°	12,9	5,7	-5,1	-13,0	-20,0	-28,5	-42,5	-61,4	-70,1
-20°	11,6	15,9	17,9	13,2	5,8	-0,1	-9,0	-19,7	-31,5
-30°	13,8	26,2	37,0	36,2	31,6	22,5	6,4	-3,5	-10,3
-40°	2,6	17,5	39,7	51,6	52,9	43,3	27,5	21,6	21,2
-50°	9,7	22,5	44,5	58,4	56,5	42,8	30,8	32,2	37,9
-60°	21,2	31,3	41,7	43,7	34,3	19,5	10,1	110,2	16,9
-70°	8,2	18,1	27,1	31,4	29,8	24,0	16,9	10,5	4,8
-80°	-0,8	4,1	8,5	110,5	12,5	11,0	7,3	-1,7	-5,3

Ши- рота	Долгота восточная								
	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
80°	7,6	6,2	5,1	4,3	3,7	3,0	2,1	0,8	-0,7
70°	-12,4	-16,1	-16,4	-13,2	-7,3	-0,9	3,5	4,5	2,7
60°	-33,1	-33,6	-29,9	-20,8	-6,1	9,0	18,0	18,7	14,2
50°	-42,1	-33,2	-23,9	-7,8	14,4	27,2	22,3	11,0	4,1
40°	-41,6	-33,8	-26,0	-3,2	28,7	38,5	18,3	-4,4	-10,8
30°	-47,7	-40,6	-30,9	-5,1	28,0	40,3	29,6	13,1	1,1
20°	-61,5	-41,0	-14,2	18,8	42,7	42,3	31,7	23,2	13,7
10°	-66,0	-22,4	22,1	56,1	70,6	59,1	36,9	23,6	21,5
0°	-64,2	-10,8	31,5	53,8	67,7	72,6	62,2	43,9	31,7
-10°	-57,4	-28,9	0,6	25,4	51,0	71,4	73,9	62,8	49,3
-20°	-46,7	-50,2	-30,7	-1,4	26,9	49,0	56,4	58,3	62,6
-30°	-30,8	-48,9	-43,6	-26,9	-8,3	12,5	24,4	29,0	39,1
-40°	3,0	-26,0	-39,8	-35,3	-23,8	-12,3	-4,9	2,4	15,8
-50°	27,4	1,3	-19,2	-25,0	-26,2	-31,3	-34,3	-25,6	-9,1
-60°	16,5	7,7	-3,4	-12,9	-23,3	-36,4	-46,9	-49,0	-44,3
-70°	-1,4	-8,7	-16,5	-24,4	-32,6	-40,8	-47,9	-52,7	-54,6
-80°	-13,0	-20,8	-28,2	-34,8	-40,4	-44,9	-48,2	-50,3	-51,5

Ши- рота	Долгота западная								
	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°
80°	-2,1	-3,2	-3,7	-3,5	-2,7	-1,4	0,6	3,2	6,5
70°	0,3	-0,8	-0,5	-0,3	-2,0	-5,8	-10,7	-14,9	-16,5
60°	9,4	8,7	11,8	12,7	6,0	-6,1	-18,1	-28,2	-35,8
50°	-0,3	-2,9	-0,1	1,2	-9,1	-22,7	-26,5	-26,2	-32,6
40°	-11,3	-15,2	-16,1	-16,0	-26,2	-39,0	-36,4	-25,3	-24,1
30°	-3,0	-3,9	-9,5	-19,5	-33,2	-47,0	-47,5	-32,5	-16,9
20°	10,3	10,6	1,8	-10,6	-24,7	-44,6	-50,1	-30,4	-6,1
10°	23,8	17,6	4,5	0,7	-6,7	-34,0	-48,9	-29,8	-3,7
0°	28,8	24,3	12,7	6,1	2,5	-16,9	-37,8	-29,9	-6,9
-10°	38,0	28,5	13,9	-0,9	-2,5	-5,7	-20,4	-19,2	-2,9
-20°	56,2	35,5	12,2	-6,3	-11,4	-6,5	-6,3	-6,6	-1,6
-30°	44,2	33,6	16,4	-2,6	-15,3	-9,1	0,3	-7,6	-15,7

-40°	24,8	20,4	8,1	-6,9	-17,8	-14,1	-7,9	-15,8	-21,5
-50°	0,4	-2,5	-8,9	-12,0	-12,5	-11,6	-12,3	-15,5	-14,4
-60°	-38,7	-35,0	-30,6	-24,9	-21,2	-22,1	-25,7	-27,3	-23,5
-70°	-54,1	-52,0	-49,1	-46,5	-45,3	-45,0	-44,4	-41,0	-33,4
-80°	-51,7	-51,3	-50,2	-48,8	-46,8	-44,4	-41,2	-37,3	-32,7

Ши- рота	Долгота западная								
	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°
80°	10,5	15,0	19,0	24,7	29,1	32,5	34,7	35,2	34,2
70°	-14,2	-7,5	2,8	15,3	28,6	40,9	50,0	53,6	50,9
60°	-36,4	-26,6	-9,5	9,4	28,9	48,0	61,6	64,7	58,2
50°	-37,2	-27,7	-10,3	5,5	23,1	45,1	60,0	59,3	50,4
40°	-28,5	-27,8	-25,1	-18,4	1,7	29,8	48,5	53,2	52,5
30°	-11,5	-21,4	-40,2	-42,2	-17,8	9,9	24,8	33,9	42,7
20°	4,7	97,7	-39,9	-57,3	-39,5	-12,2	4,4	16,1	27,2
10°	11,6	11,1	-16,3	-46,9	-42,6	-15,0	5,1	17,6	31,0
0°	7,4	16,3	12,1	-12,2	-25,9	-12,2	2,6	10,2	23,2
-10°	0,1	6,2	24,0	14,4	-15,2	-17,9	-2,5	3,8	8,9
-20°	0,5	9,7	27,0	20,5	-6,6	-14,6	-2,3	5,9	8,3
-30°	-2,1	21,2	30,2	20,0	3,4	-4,4	0,6	8,8	10,7
-40°	-3,8	20,4	26,1	16,4	4,6	-1,0	3,9	10,6	6,1
-50°	-4,3	7,4	12,2	10,6	7,4	7,3	12,4	16,2	12,0
-60°	-14,0	-1,8	9,0	17,7	20,9	20,3	18,5	16,8	16,7
-70°	-22,2	-9,6	1,2	7,8	8,8	5,6	1,1	-1,3	1,0
-80°	-27,7	-23,0	-18,9	-15,9	-13,9	-12,5	-10,9	-8,6	-5,2

## ПРИЛОЖЕНИЕ 9

### ВЕЛИЧИНЫ ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ И РАДИУСОВ ПАРАЛЛЕЛЕЙ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА КРАСОВСКОГО

В таблице буквой  $B$  обозначена геодезическая широта в градусах. Буквами  $N$  и  $M$  обозначены радиусы кривизны в первом вертикале и меридианного сечения в метрах соответственно. Столбец, озаглавленный буквой  $R$ , содержит величины средних радиусов кривизны в метрах, рассчитанные как  $R = \sqrt{MN}$ . Буквой  $r$  обозначены радиусы параллелей в метрах, рассчитанные по формуле  $r = N \cos B$ . Данные для таблицы взяты из источника [85].

$B^\circ$	$N$	$M$	$R$	$r$
0	6378245	6335553	6356863	6378245
1	6378252	6335572	6356876	6377280
2	6378271	6335630	6356915	6374358
3	6378304	6335727	6356980	6369562
4	6378349	6335862	6357070	6362812
5	6378407	6336036	6357186	6354135
6	6378478	6336248	6357328	6343536
7	6378562	6336498	6357495	6331017
8	6378658	6336785	6357687	6316582
9	6378767	6337110	6357904	6300234
10	6378889	6337471	6358146	6281979
11	6379022	6337869	6358412	6261822
12	6379168	6338303	6358703	6239768
13	6379325	6338773	6359017	6215824
14	6379495	6339277	6359354	6189996
15	6379675	6339816	6359714	6162293
16	6379867	6340388	6360097	6132722
17	6380070	6340994	6360502	6101292
18	6380282	6341632	6360929	6068011
19	6380509	6342301	6361376	6032890
20	6380743	6343001	6361844	5995938
21	6380988	6343731	6362332	5957166
22	6381242	6344490	6362840	5916585

23	6381506	6345276	6363366	5874208
24	6381779	6346090	6363910	5830046
25	6382061	6346931	6364472	5784112
26	6382351	6347796	6365050	5736419
27	6382649	6348686	6365645	5686982
28	6382955	6349598	6366255	5635815
29	6383268	6350533	6366879	5582932
30	6383588	6351488	6367518	5528349
31	6383915	6352464	6368170	5472083
32	6384248	6353457	6368834	5414149
33	6384586	6354468	6369510	5354565
34	6384930	6355495	6370196	5293347
35	6385279	6356537	6370892	5230514
36	6385633	6357593	6371597	5166085
37	6385990	6358661	6372311	5100079
38	6386351	6359740	6373032	5032514
39	6386716	6360829	6373759	4963410
40	6387083	6361926	6374492	4892790
41	6387452	6363030	6375230	4820671
42	6387824	6364140	6375971	4747078
43	6388197	6365254	6376715	4672031
44	6388571	6366372	6377462	4595553
45	6388945	6367491	6378209	4517666
46	6389319	6368611	6378957	4438394
47	6389693	6369729	6379703	4357760
48	6390066	6370845	6380449	4275789
49	6390438	6371957	6381191	4192505
50	6390808	6373065	6381930	4107933
51	6391176	6374165	6382665	4022098
52	6391542	6375258	6383395	3935026
53	6391904	6376342	6384118	3846744
54	6392262	6377415	6384834	3757278
55	6392617	6378476	6385543	3666654
56	6392967	6379525	6386242	3574902
57	6393312	6380559	6386932	3482047
58	6393652	6381577	6387612	3388120
59	6393987	6382578	6388280	3293147

60	6394315	6383561	6388936	3197158
61	6394637	6384525	6389579	3100182
62	6394952	6385468	6390208	3002248
63	6395259	6386389	6390823	2903387
64	6395559	6387288	6391422	2803629
65	6395851	6388163	6392006	2703003
66	6396135	6389012	6392572	2601542
67	6396410	6389836	6393122	2499276
68	6396675	6390632	6393653	2396237
69	6396932	6391400	6394165	2292455
70	6397178	6392139	6394658	2187964
71	6397415	6392848	6395131	2082794
72	6397641	6393527	6395584	1976980
73	6397865	6394173	6396014	1870552
74	6398061	6394787	6396424	1763545
75	6398255	6395368	6396811	1655990
76	6398437	6395915	6397176	1547922
77	6398608	6396427	6397518	1439374
78	6398767	6396904	6397835	1330378
79	6398914	6397344	6398129	1220970
80	6399049	6397749	6398399	1111183
81	6399171	6398116	6398644	1001051
82	6399281	6398446	6398864	890608
83	6399379	6398738	6399058	779888
84	6399463	6398992	6399228	668926
85	6399535	6399208	6399371	557756
86	6399594	6399384	6399489	446413
87	6399640	6399522	6399581	334931
88	6399673	6399620	6399646	223345
89	6399692	6399679	6399686	111690
90	6399699	6399699	6399699	0

## ПРИЛОЖЕНИЕ 10

### ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕЛЬМЕРТА

Приведённые в данном Приложении параметры предназначены для преобразования координат модифицированным способом Гельмерта (способом 7 параметров) из данной геодезической системы в геодезическую систему WGS 84.

В приводимой ниже таблице А  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  являются параметры линейного отстояния, выраженного в метрах, центра референц-эллипсоида данной геодезической системы от центра референц-эллипсоида WGS 84.

Величины  $\omega_X$ ,  $\omega_Y$ ,  $\omega_Z$ , помещённые в таблице В, представляют собой углы вращения вокруг осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно. Угол вращения считается положительным, когда вращение усматривается по часовой стрелке, если смотреть по соответствующей оси из начала координат в сторону положительного направления оси. В приводимой ниже таблице эти углы даны в угловых секундах.

Величина  $\Delta m$  – это масштабный множитель, учитывающий изменение линейного масштаба при переходе от данного референц-эллипсоида к референц-эллипсоиду WGS 84. Приводимые в таблице В величины  $\Delta m$  следует умножить на  $10^{-6}$  перед подстановкой в формулу (3.2.2).

Необходимо помнить, что модифицированный способ Гельмерта предназначен для преобразования декартовых координат. Приводимые в таблицах параметры можно применять только для вычисления координат при переходе к геодезической системе WGS 84.

Таблица А

Геодезическая система	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
AGD66	-137,882	-50,47	137,19
AGD84	-116	-50,47	141,69
AMERSFOORT	593,16	26,15	478,54
ANS84	-116	-50,47	141,69
BIH Terrestrial System	0,071	-0,509	-0,166
CH 1903	660,077	13,551	369,344
DHDN	852	105	414
DHDN-1	591	73	410
Common Offshore ED50	-89,5	-93,8	-123,1

ED87	-82,981	-99,719	-110,709
ETRS89	0	0	0
EUREF	0,055	-0,541	-0,185
GDA 94	0	0	0
HD-72	-56	75,77	15,31
Ireland 1975	498,5	-106,1	571,3
ITRF 94	0,9738	-1,9453	-0,5486
ITRS 2000	0,054	0,051	-0,048
KKJ (Finland)	-96,0617	-82,4278	-121,7535
Luzon	-127,622	-67,2448	47,0431
MGI	-678	-179	-586
MGI-Austria	575	93	466
MRT (Kertau)	379,776	-775,3837	86,6093
MSK-42	-78,042	-204,519	-77,45
OSGB 36	446,448	-125,157	542,06
Potsdam	582	105	414
Pulkovo-42 (Estonia)	21,58719	-97,54127	-60,92546
Pulkovo-42 (Hungary)	24	-123	-94
Pulkovo-42 (W. Russia)	21,58719	-97,54127	-60,92546
Qatar National 1995	-119,4248	-303,6587	-11,0006
RD/NAP	565,04	49,91	465,84
RT90	419,3836	99,3335	591,3451
System 42/83	24	-123	-94
System 42/83 (Germany)	24	-123	-94
Tokyo Datum (Korea)	-325,89	324,13	664,51
WGS 72	0	0	4,5

Таблица В

Геодезическая система	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$	$\Delta m$
AGD66	0,015	0,591	-0,298	-1,017
AGD84	0,23	0,39	0,344	0,098
AMERSFOORT	-6,3239	-0,5008	-5,5487	4,0775
ANS84	0,23	0,39	0,344	0,0983
BIH Terrestrial System	-0,0179	0,0005	0,0067	-0,017
CH 1903	-0,804816	-0,577692	-0,952236	5,66
DHDN	1,04	0,35	-3,08	8,3
DHDN-1	0,26	0,05	-2,43	8,5



ED87	-0,5076	-0,1503	-0,3898	-0,3143
Common Offshore ED50	0	0	-0,156	1,2
ETRS89	-2,764	-2,764	-2,764	0
EUREF	-0,0183	0,0003	0,007	-0,014
GDA 94	-2,764	-2,764	-2,764	0
HD-72	-0,21	-0,2	-0,251	0
Ireland 1975	-0,654	-0,481	-1,549	5,837
ITRF 94	0,0275	0,01	0,0114	0
ITRS 2000	0,000081	0,00049	-0,000792	0
KKJ (Finland)	-4,80107	-0,34543	1,37646	1,4964
Luzon	3,06762	-4,90291	-1,5779	1,06
MGI	-14,4	-0,4	-18	-2,5
MGI-Austria	-5,1	-1,6	-5,2	2,5
MRT (Kertau)	2,59671	2,10214	-12,11379	0
MSK-42	-1,774	3,32	-1,043	-4,95105
OSGB 36	0,152	0,247	0,8421	-20,4894
Potsdam	3,08	-0,35	-1,04	8,3
Pulkovo-42 (Estonia)	-1,01378	-0,58117	-0,2348	-4,6124
Pulkovo-42 (Hungary)	0,02	-0,25	0,13	1,1
Pulkovo-42 (W. Russia)	-1,01378	-0,58117	-0,2348	-4,6124
Qatar National 1995	1,164298	0,174458	1,096259	-3,657065
RD/NAP	0,4094	-0,3597	1,8685	4,0772
RT90	0,850389	1,817277	-7,862238	-0,994959
System 42/83	-0,02	0,25	0,13	1
System 42/83 (Germany)	-0,13	0,25	-0,02	1,1
Tokyo Datum (Korea)	1,75	-9,2	-7,39	-7,6
WGS 72	0	0	0,554	0,219

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	7
1.1. Структура, динамика, форма и размеры Земли .....	7
1.2. Геоид .....	23
<i>Элементы теории гравитации</i> .....	24
<i>Гравитационное поле Земли</i> .....	26
<i>Геоид</i> .....	30
<i>Нормальный потенциал Земли</i> .....	35
<i>Модель гравитационного поля Земли</i> .....	38
<i>Модель поверхности геоида</i> .....	39
1.3. Земной эллипсоид .....	40
<i>Элементы земного эллипсоида</i> .....	41
<i>Координаты</i> .....	45
<i>Связь геодезических и астрономических координат</i> .....	50
<i>Связь геодезических и сферических координат</i> .....	54
<i>Приведённая широта</i> .....	56
<i>Объём и площадь поверхности эллипсоида</i> .....	61
<i>Главные радиусы кривизны</i> .....	62
<i>Уравнение поверхности эллипсоида в функции геодезических координат</i> .....	68
<i>Длины дуг меридиана и параллели</i> .....	69
<i>Геодезическая линия</i> .....	75
<i>Решение геодезических задач способом Бесселя</i> .....	79
<i>Решение геодезических задач приближёнными способами...</i>	83
<i>Способ ГУНиО</i> .....	85
<i>Способы В.Е. Ольховского</i> .....	87
<i>Способы Винсента</i> .....	90
<i>Упрощённые способы вычисления геодезических расстояний</i> .....	92
1.4. Референц-эллипсоид .....	96
<i>Понятие общеземного эллипсоида</i> .....	96
<i>Референц-эллипсоид</i> .....	101
<i>Референц-эллипсоид Красовского</i> .....	109
<i>Геодезическая система</i> .....	113

2. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА WGS 84 .....	122
2.1. Предварительные замечания .....	122
2.2. Геодезическая система GRS 80 .....	125
<i>Эквипотенциальный эллипсоид GRS 80</i> .....	126
<i>Геодезическая система NAD 83</i> .....	128
2.3. Система координат WGS 84 .....	129
<i>Переход от прямоугольных координат к геодезическим</i> .....	140
2.4. Эллипсоид WGS 84 .....	143
<i>Определение фундаментальных констант</i> .....	145
<i>Вторичные геометрические параметры</i> .....	149
<i>Физические константы</i> .....	152
2.5. Формула гравитации WGS 84 .....	156
2.6. Модель гравитационного поля WGS 84 .....	158
2.7. Геоид WGS 84 .....	164
2.8. Система координат ITRS .....	170
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ .....	180
3.1. Предпосылки преобразования координат .....	180
3.2. Высокоточные способы преобразования .....	185
<i>Способ Раппа</i> .....	185
<i>Модифицированный способ Гельмерта</i> .....	187
<i>Регрессионный способ</i> .....	193
<i>Способ 10 параметров (Молоденский-Бадекас)</i> .....	197
<i>Способ 14 параметров</i> .....	198
<i>Переход от WGS 72 к WGS 84</i> .....	199
3.3. Точные способы преобразования .....	199
<i>Способ Молоденского</i> .....	199
<i>Дифференциальные формулы преобразования</i> .....	203
3.4. Способы преобразования средней точности .....	205
<i>Стандартный способ Молоденского</i> .....	205
<i>Специальный способ преобразования</i> .....	208
<i>Табличный способ перехода от WGS 84 к WGS 72</i> .....	209
3.5. Приближенные способы преобразования .....	210
<i>Приближённый способ Молоденского</i> .....	210
<i>Способ Слудского</i> .....	211
<i>Преобразования координат с помощью МТ-2000</i> .....	211
<i>Упрощенные способы Молоденского</i> .....	213
<i>Картографические способы</i> .....	215
<i>Способ трёх параметров Молоденского</i> .....	217
3.6. Использование информации карты .....	218
	339

3.7. Преобразование координат в приёмниках и программами ...	222
<i>Особенности работы с приёмниками GPS</i> .....	222
<i>Преобразование с помощью программных продуктов</i> ....	227
3.8. Преобразование координат отечественных ГС .....	229
<i>Преобразование координат WGS 84 и ПЗ 90</i> .....	229
<i>Преобразование координат ПЗ 90 и СК 42</i> .....	232
<i>Преобразование координат СК-42 и СК-95</i> .....	234
<i>Преобразование координат СК-95 и ПЗ 90</i> .....	234
<i>Преобразование координат СК-42 и WGS 84</i> .....	234
4. ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ .....	236
4.1. Краткий исторический очерк .....	236
4.2. Система координат 1942 года (СК-42) .....	243
4.3. Спутниковые геодезические системы .....	251
<i>Доплеровская геодезическая сеть (ДГС)</i> .....	252
<i>Космическая геодезическая сеть (КГС)</i> .....	253
<i>Система координат ПЗ-90</i> .....	254
4.4. Геодезическая система координат 1995 года (СК-95) ....	259
4.5. Балтийская система высот 1977 года .....	269
4.6. Отсчёт высот и глубин в судоководении .....	279
<i>Абсолютные высоты</i> .....	279
<i>Относительные высоты</i> .....	280
<i>Средний уровень моря</i> .....	281
<i>Нуль глубин</i> .....	283
<i>Нуль высот</i> .....	289
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	291
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	293
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	
Параметры наиболее распространённых референц-эллипсоидов..	301
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	
Параметры эллипсоида WGS 84 .....	303
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	
Каталог возвышений геоида WGS 84 над поверхностью референц-эллипсоида WGS 84 .....	306
ПРИЛОЖЕНИЕ 4	
Параметры современных референц-эллипсоидов .....	308
ПРИЛОЖЕНИЕ 5	
Названия геодезических систем и связанных с ними референц-эллипсоидов .....	309
ПРИЛОЖЕНИЕ 6	
Параметры геодезических систем .....	314

Австралия .....	314
Антарктида .....	315
Азия .....	315
Африка .....	317
Европа .....	318
Северная Америка .....	320
Южная Америка .....	322
Атлантический океан .....	324
Индийский океан .....	325
Тихий океан .....	326
ДОПОЛНЕНИЕ К ПРИЛОЖЕНИЮ 6 .....	327
ПРИЛОЖЕНИЕ 7	
Математические константы .....	328
ПРИЛОЖЕНИЕ 8	
Каталог возвышений геоида над поверхностью референц-эллипсоида Красовского геодезической системы СК-42 .....	329
ПРИЛОЖЕНИЕ 9	
Величины главных радиусов кривизны и радиусов параллелей референц-эллипсоида Красовского .....	332
ПРИЛОЖЕНИЕ 10	
Параметры для преобразования Гельмерта .....	335
ОГЛАВЛЕНИЕ .....	338

Юрий Александрович Комаровский

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ В  
СУДОВОЖДЕНИИ

Учебное пособие

Издание второе, переработанное и дополненное

Компьютерная вёрстка и графика – С.В. Коркишко и Ю.А. Комаровский

Лицензия ИД № 05693 от 19.06.96

---

19,8 уч.-изд. л.

Формат 60x80

Тираж 100 экз.

Заказ №

---

Отпечатано в типографии ИПК МГУ им. адм. Г.И. Невельского  
690059, Владивосток, ул. Верхнепортовая, 50а

