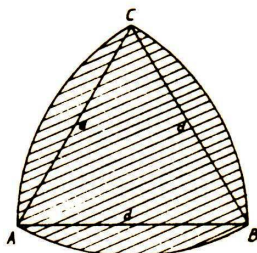
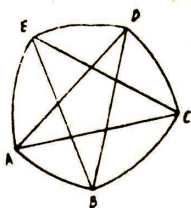


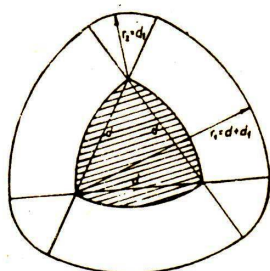
Zbiór nazywamy spójnym, gdy „składa się z jednego kawałka”. Zbiór nazywamy jednospójnym, gdy ponadto „nie zawiera dziur”.



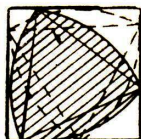
Rys. 2  
 Obwód trójkąta Reuleaux =  $\pi \cdot d$ .  
 Pole powierzchni trójkąta Reuleaux =  
 $= \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \cdot d^2 \approx 0.7048 \cdot d^2$ .



Rys. 3



Rys. 4

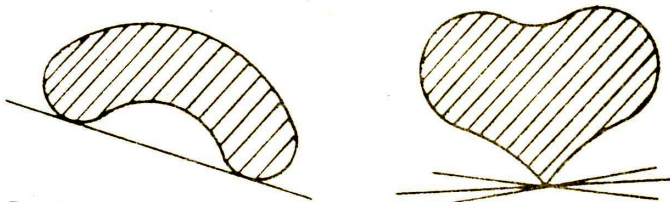


Rys. 5

## 1. Preliminaria

W prezentowanej pracy rozważamy figury jednospójne, domknięte i ograniczone na płaszczyźnie euklidesowej.

Przypomnijmy, że podpierającymi figury nazywamy proste, które z figurą mają co najmniej jeden punkt wspólny i pozostawiają figurę w jednej półpłaszczyźnie.



Rys. 1

Odległość pary równoległych podpierających daną figurę nazywamy szerokością figury w kierunku wyznaczonym przez te podpierające. Należy zauważyć, że każde dwie równoległe podpierające koła mają zawsze tę samą odległość. Mówimy więc, że koło jest figurą o stałej szerokości. Czy istnieją inne figury o takiej własności? Przykładem jest trójkąt Reuleaux (rys. 2), który otrzymujemy jako część wspólną trzech kół o równych promieniach  $d$  i środkach będących wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości  $d$ . Chcąc tworzyć inne figury o stałej szerokości możemy wykorzystać możliwość kreślenia łuków okręgów o jednakowym promieniu w ten sposób, aby każdy wierzchołek był przeciwległy łukowi. Rysunek 3 przedstawia „pięciokąt” tego typu. Tak utworzone figury wyróżniają się nieparzystą liczbą łuków oraz posiadaniem „ostrzy”. Od tych ostatnich można się uwolnić konstruując na bazie figury o stałej szerokości  $d$  nową figurę, której brzeg leży w odległości  $d_1$  od figury wyjściowej (rys. 4). Inne sposoby tworzenia figur o stałej szerokości są podane w [6].

Zauważmy, że figury o stałej szerokości możemy definiować na kilka równoważnych sposobów, np.:

- (już znany) są to figury mające we wszystkich kierunkach jednakową szerokość;
- są to figury, które można „bez luzu” obracać w kwadracie (rys. 5);
- są to figury, do których nie można dołączyć jakiegokolwiek nowego punktu bez zwiększenia średnicy figury.

### Twierdzenie 1.1. ([4])

Figura  $A$  ma stałą szerokość  $d$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest częścią wspólną wszystkich kół o promieniu  $d$ , których środki leżą w  $A$ .

Z powyższego faktu wynika, że każda figura o stałej szerokości jest wypukła!

## 2. Twierdzenie Barbiera

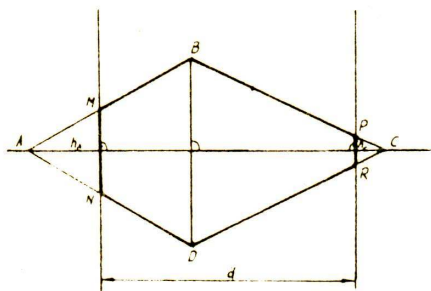
Rozpoczniemy od prostej obserwacji:

### Lemat 2.1.

Niech  $ABCD$  będzie rombem,  $MN$  i  $PR$  dwiema prostymi prostopadłymi do przekątnej  $AC$  odległymi o  $d$ , gdzie  $|AC| > d > \frac{1}{2}|AC|$ .

(i) Jeżeli proste  $MN$  i  $PR$  mają punkty wspólne z odcinkiem  $AC$  (bez końców), to wtedy obwód sześciokąta  $MBPRDN$  jest stały i nie zależy od położenia prostych  $MN$  i  $PR$ .

(ii) Gdy prosta  $MN$  przechodzi przez wierzchołek  $A$  albo prosta  $PR$  przez wierzchołek  $C$ , to tak otrzymany „zdegenerowany sześciokąt” ma najmniejsze pole powierzchni spośród wszystkich sześciokątów wycinanych z rombu  $ABCD$  przez proste  $MN$  i  $PR$ .



Rys. 6

**Dowód.** (i) Obwód rombu  $ABCD$  oznaczmy przez  $p$ , długość przekątnej  $|AC| = a$ , a wysokości trójkątów  $\triangle AMN$ ,  $\triangle CRP$  leżące na przekątnej  $AC$  odpowiednio przez  $h_A$  i  $h_C$  (rys. 6). Wówczas obwód sześciokąta  $MBPRDN$  wynosi

$$s = p - (|AM| + |AN| - |NM|) - (|CP| + |CR| - |PR|).$$

Ponieważ trójkąty  $\triangle AMN$ ,  $\triangle CRP$  są podobne, więc

$$\frac{|AM| + |AN| - |NM|}{h_A} = \frac{|CP| + |CR| - |PR|}{h_C} = k = const.$$

Zatem

$$s = p - k(h_A + h_C) = p - k(a - d).$$

(ii) Pole sześciokąta  $MBPRDN$  różni się od pola rombu  $ABCD$  o sumę pól trójkątów  $\triangle AMN$  i  $\triangle CRP$ . Pola tych trójkątów są proporcjonalne do kwadratów wysokości  $h_A$  i  $h_C$ . Zatem suma pól trójkątów jest proporcjonalna do wielkości  $h_A^2 + h_C^2$ . Pozostaje zbadać, przy jakim położeniu prostych  $MN$  i  $PR$  wielkość  $h_A^2 + h_C^2$  osiąga największą wartość. Ponieważ

$$h_A^2 + h_C^2 = \frac{1}{2}[(h_A + h_C)^2 + (h_A - h_C)^2] = \frac{1}{2}[(a - d)^2 + (h_A - h_C)^2],$$

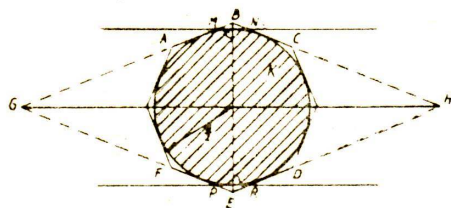
więc suma  $h_A^2 + h_C^2$  ma największą wartość, gdy  $|h_A - h_C| = a - d$ , tzn.  $h_A = 0$  albo  $h_C = 0$ .

**Twierdzenie 2.2.** (E. Barbier, 1860)

Wszystkie figury o stałej szerokości  $d$  mają obwód  $\pi \cdot d$ .

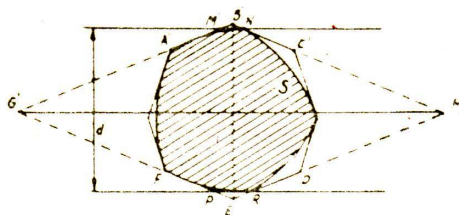
Inny dowód twierdzenia Barbiera zawiera praca [5].

**Dowód.** Gdy na figurze wypukłej będziemy opisywać równokątne  $2^n$ -kąty, to granica obwodów tych wielokątów, gdy  $n \rightarrow \infty$ , jest równa długości brzegu figury. Ten geometrycznie oczywisty fakt przyjmijmy bez dowodu. Indukcyjnie wykażemy, że obwody równokątnych  $2^n$ -kątów ( $n \geq 2$ ) opisanych na kole  $K$  o promieniu  $\frac{d}{2}$  i figurze  $S$  o stałej szerokości  $d$  są równe.



Rys. 7

Zauważmy, że kwadraty opisane na figurze  $S$  i kole  $K$  mają równe obwody. Załóżmy, że dla pewnego  $n > 2$  obwody opisanych na figurze  $S$  i kole  $K$  równokątnych  $2^n$ -kątów są równe. Rozpatrzmy sąsiednie boki, np.  $AB$  i  $BC$  oraz boki im przeciwległe  $ED$  i  $EF$  (rys. 7) równokątnego  $2^n$ -kąta opisanego na kole  $K$ . Przedłużenia tych boków tworzą równoległobok  $GBHE$  o równych wysokościach, czyli romb! Analogicznie (oznaczenia z primami - rys. 8) otrzymujemy opisany na figurze  $S$  romb  $G'B'H'E'$ . Romby te są przystające (mają równe kąty i wysokości). Prowadzimy podpierające  $MN$  i  $PR$  koła, które są prostopadłe do przekątnej  $BE$ , oraz podpierające  $M'N'$ ,  $P'R'$  do figury  $S$ , prostopadłe do  $B'E'$ . W obu przypadkach odległość pomiędzy tymi podpierającymi wynosi  $d$  i na podstawie Lematu 2.1.(i), sześciokąty  $GMNHRP$  i  $G'M'N'H'R'P'$  mają równe obwody. Stąd wynika, że wielokąty otrzymane z równokątnych  $2^n$ -kątów przez zastąpienie boków  $AB$ ,  $BC$ ,  $FE$ ,  $ED$  bokami  $AM$ ,  $MN$ ,  $NC$ ,  $FP$ ,  $PR$ ,  $RD$  (analogicznie z primami) mają równe obwody.



Rys. 8

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \text{obwód nowego wielokąta} = \\ & = \text{obwód } 2^n\text{-kąta} - (|MB| + |BN| - |MN| + |PE| + |ER| - |PR|), \end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned} & \text{obwód sześciokąta } GMNHRD + |MB| + |BN| - |MN| + |PE| + |ER| - |RP| = \\ & = \text{obwód rombu } GBHE. \end{aligned}$$

Stąd

$$|MB| + |BN| - |MN| + |PE| + |ER| - |RP| = \text{const.}$$

Kontynuując tę procedurę tworzymy równokątne  $2^{n+1}$ -kąty opisane na kole  $K$  i figurze  $S$ , które mają równe obwody. Korzystając z twierdzenia o indukcji matematycznej, z uwagi uczynionej na początku dowodu i faktu, że obwód rozpatrywanego koła wynosi  $\pi \cdot d$ , widzimy, że również obwód figury  $S$  o stałej szerokości  $d$  wynosi  $\pi \cdot d$ .

### Uwaga 2.3.

Bryła o stałej szerokości  $d$  nazywamy taką bryłą wypukłą, dla której odległość między każdą parą równoległych płaszczyzn podpierających wynosi  $d$ . Istnieje nieskończenie wiele brył o stałej szerokości różnych od kuli. Najprostszym przykładem jest bryła otrzymana przez obrót trójkąta Reuleaux dokoła jednej z jego osi symetrii (rys. 9). Pole powierzchni tak otrzymanej bryły wynosi

$$\pi \cdot \left(2 - \frac{\pi}{3}\right) d^2 \approx \pi \cdot 0,9528 \cdot d^2 < \pi \cdot d^2 \quad (= \text{powierzchnia kuli o szerokości } d).$$

Oznacza to, że dla brył o stałej szerokości odpowiednik twierdzenia Barbiera jest fałszywy!

Z twierdzenia Barbiera wynika, że obwód figury wypukłej o średnicy  $d$  jest  $\leq \pi \cdot d$ . Z tą obserwacją wiąże się następujące twierdzenie:

### Twierdzenie 2.4. (L. Bieberbach, 1915)

Spośród figur wypukłych o średnicy  $d$  największe pole ma koło.

**Dowód** (J.E. Littlewood). Niech  $\Phi$  będzie figurą wypukłą o średnicy  $d$ , a  $t$  prostą podpierającą przechodzącą przez punkt  $O \in \partial\Phi$  (rys. 10). Przyjmijmy, że  $O$  jest biegunem, a normalna do prostej  $t$  przechodząca przez punkt  $O$  jest osią biegunową. Jeżeli równanie krzywej  $\partial\Phi$  ma postać  $r = r(\varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , to pole powierzchni figury  $\Phi$  jest określone wzorem

$$|\Phi| = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] d\varphi.$$

Ponieważ

$$r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = |OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2 \leq d^2,$$

więc

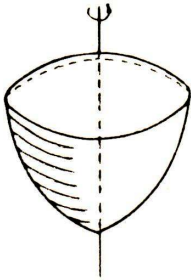
$$|\Phi| \leq \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2.$$

Stąd wynika, że  $|\Phi| = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy każda cięciwa  $AB$ , która z punktu brzegowego widać pod kątem  $\frac{\pi}{2}$  ma długość  $d$ , czyli gdy  $\Phi$  jest kołem o promieniu  $\frac{d}{2}$ .

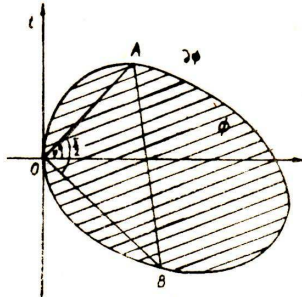
### Wniosek 2.5.

Wśród wszystkich figur o stałej szerokości  $d$  największe pole ma koło.

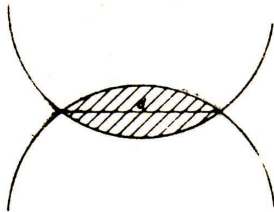
Można wykazać ogólniejszy fakt ([3]): ze wszystkich figur wypukłych o średnicy  $d$  i obwodzie  $L \leq \pi \cdot d$  największe pole ma figura złożona z dwóch różnych odcinków koła ograniczonych cięciwą o długości  $d$  i łukiem o długości  $\frac{L}{2}$  (rys. 11).



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Fakt ten jest również konsekwencją twierdzenia izoperymetrycznego:

wśród wszystkich figur płaskich o ustalonym obwodzie największe pole ma koło ([1]).

### 3. Twierdzenie Lebesgue'a

Omówienie tego zagadnienia rozpoczniemy od następującego faktu:

**Lemat 3.1.** ([3])

Każdą figurę płaską o średnicy  $d$  można pokryć sześciokątem foremnym, którego bok ma długość  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ .

**Twierdzenie 3.2.** (H. Lebesgue, 1914)

Wśród wszystkich figur o stałej szerokości  $d$  najmniejsze pole ma trójkąt Reuleaux.

**Dowód.** Opiszmy sześciokąty foremne na trójkącie Reuleaux  $T$  o szerokości  $d$  i na dowolnej innej figurze  $S$  o stałej szerokości  $d$ .

Z lematem 3.1. wiąże się następujący

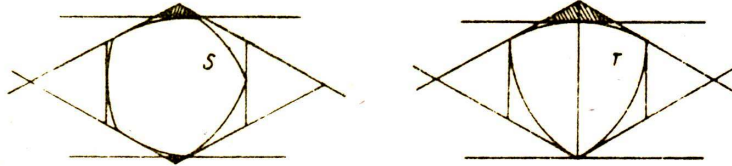
**Problem** (H. Lebesgue). Znaleźć figurę płaską o najmniejszym polu, która zawiera każdą figurę płaską o średnicy  $d$ .

J. Pál wykazał w 1920 roku, że pole figury będącej rozwiązaniem tego problemu zawiera się pomiędzy liczbami

$$\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot d^2 \approx 0,8257 \cdot d^2$$

oraz

$$\frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) \cdot d^2 \approx 0,8452 \cdot d^2.$$



Rys. 12

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia Barbiera będziemy podwajać liczbę boków wielokątów opisanych na figurach  $T$  i  $S$  w ten sposób, by tworzyć  $3 \cdot 2^n$ -kąty o równych kątach wewnętrznych. Udowodnimy, że dla każdego  $n \geq 1$  pole równokątnego  $3 \cdot 2^n$ -kąta opisanego na  $T$  jest nie większe niż pole równokątnego  $3 \cdot 2^n$ -kąta opisanego na  $S$ . Dla  $n = 1$  jest to prawda. Załóżmy, że jest to również prawdą dla pewnego  $n \geq 1$ . Równokątne  $3 \cdot 2^{n+1}$ -kąty otrzymujemy z  $3 \cdot 2^n$ -kąta, gdy pary równoległych podpierających do figur odcinają trójkąty. W czasie tworzenia równokątnego  $3 \cdot 2^{n+1}$ -kąta opisanego na trójkącie Reuleaux  $T$  jedna prosta z pary równoległych podpierających zawsze przechodzi przez wierzchołek trójkąta! Oznacza to, że w rzeczywistości (w czasie wykonywania konstrukcji opisanej w dowodzie twierdzenia Barbiera) otrzymujemy wielokąt opisany na figurze  $T$  o liczbie boków mniejszej niż  $3 \cdot 2^{n+1}$  i nie wszystkich kątach wewnętrznych równych – trzy kąty wielokąta, które zawierają wierzchołki trójkąta  $T$  mają zawsze miarę  $\frac{2}{3}\pi$ . Przypatrzmy się jednemu etapowi konstrukcji, weźmy pod uwagę romby utworzone przez dwa sąsiednie boki wielokątów opisanych na figurach  $T$  i  $S$  oraz przez boki do nich równoległe. W myśl Lematu 2.1.(ii) suma pól powierzchni trójkątów odciętych od rozważanego rombu przez parę równoległych podpierających, prostopadłych do odpowiedniej przekątnej rombu, jest w przypadku figury  $T$  nie mniejsza niż w przypadku figury  $S$ . Zatem pole wielokąta tak opisanego na trójkącie Reuleaux  $T$  jest nie większe niż pole powierzchni  $3 \cdot 2^{n+1}$ -kąta opisanego na figurze  $S$ . Ponieważ pola powierzchni tych wielokątów aproksymują pola figur  $T$  i  $S$ , więc w konsekwencji pole trójkąta Reuleaux jest nie większe niż pole figury  $S$ . Dokładniejsza analiza przeprowadzonego rozumowania pozwala stwierdzić, że figura  $S$  odmienna od trójkąta Reuleaux ma większe pole powierzchni, a to kończy dowód.

Inny dowód podał A.S. Besicovitch w pracy *Minimum area of a set of constant width*, Proc. of Symp. Pure Math. 7, 1963, 13–14.

Korzystając z twierdzeń Barbiera i Lebesgue'a widzimy, że pole figury  $S$  o stałej szerokości  $d$  spełnia nierówność

$$0,7047 \cdot d^2 \approx \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cdot d^2 \leq |S| \leq \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \approx 0,7853 \cdot d^2.$$

**Problem 3.3.**

Jaka figura wypukła o średnicy  $d$  i obwodzie  $L$ , gdzie  $3 \cdot d < L < \pi \cdot d$  ma najmniejsze pole?

(W przypadku  $L = \pi \cdot d$  rozwiązaniem jest trójkąt Reuleaux o szerokości  $d$ , a w przypadku  $L \leq 3 \cdot d$  najmniejsze pole ma trójkąt równoramienny o ramieniu długości  $d$  ([3]).)

#### 4. Zagadnienia pokrewne

Mówiliśmy już o tym, że figury o stałej szerokości można określić jako figury wypukłe, które mogą się obracać w kwadracie dotykając przez cały czas wszystkich jego boków. Nasuwa się pytanie, jakie figury wypukłe mogą obracać się w trójkącie równobocznym o wysokości  $h$  dotykając stale wszystkich jego boków? Jakie są własności takich figur?

Rozpocznijmy od przykładów figur mogących obracać się w trójkącie równobocznym w wyżej opisanym sensie.

##### Przykłady 4.1.

1) Najprostszym jest koło o promieniu  $\frac{h}{3}$ .

2) Okrąg o promieniu  $h$  toczy się po boku trójkąta równobocznego o wysokości  $h$ . „Soczewka” otrzymana z łuku okręgu, zawartego we wnętrzu trójkąta, przez odbicie względem cięciwy łączącej jego końce (rys. 13) zadość czyni wymaganiom. Obwód takiej figury wynosi  $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h$ , a pole  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \cdot h^2 \approx 0,1812 \cdot h^2$ .

3) Z czterech wierzchołków kwadratu o boku długości  $h$  zbudujemy koła o promieniach równych  $h$ . Figura otrzymana w przecięciu tych kół (rys. 14) też zadość czyni wymaganiom. Obwód tej figury wynosi  $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h$ , a pole  $(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}) \cdot h^2$ .

Można udowodnić, że te figury mają analogiczne własności jak figury o stałej szerokości. Własności te sformulujemy w postaci twierdzeń, których dowody zawiera praca [3].

##### Twierdzenie 4.2.

Wszystkie figury wypukłe, które mogą obracać się w trójkącie równobocznym o wysokości  $h$  stale dotykając wszystkich jego boków mają obwód równy  $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h$ . Wśród wszystkich takich figur najmniejszą powierzchnię ma „soczewka” opisana w Przykładzie 4.1., 2).

Dualnym do omawianego zagadnienia jest problem określenia krzywych, wewnątrz których może się obracać trójkąt równoboczny w taki sposób, że wszystkie jego wierzchołki ślizgają się po krzywej. Własność tę ma np. krzywa złożona z dwóch jednakowych łuków okręgów o kącie środkowym  $\frac{2}{3} \cdot \pi$  (rys. 15), no i, oczywiście, okrąg.

##### Problem 4.3.

Czy istnieją inne krzywe wypukłe, „wewnątrz” których może się obracać trójkąt równoboczny tak, że wszystkie jego wierzchołki ślizgają się po krzywej? (Niewypukłych krzywych tego rodzaju jest nieskończenie wiele.)

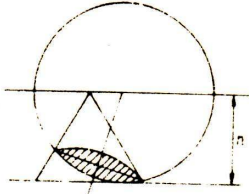
O krzywych, różnych od okręgu, wewnątrz których mógłby obracać się jakiś trójkąt różny od równobocznego, jak również o krzywych, wewnątrz których mógłby się obracać jakiś  $n$ -kąt ( $n > 3$ ) prawie nic nie wiadomo!

Istnieje kilka uogólnień rozważanych zagadnień i wiążących się z nimi problemów. Można na przykład rozpatrywać klasę figur wypukłych, które mogą się obracać „bez luzu” wewnątrz  $n$ -kąta foremnego ( $n > 4$ ). W tej klasie nie rozwiązany jest następujący problem:

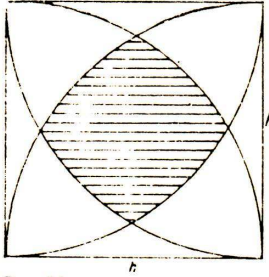
##### Problem 4.4.

Która z figur wypukłych mogących „bez luzu” obracać się wewnątrz danego  $n$ -kąta foremnego, gdzie  $n > 4$ , ma najmniejsze pole?

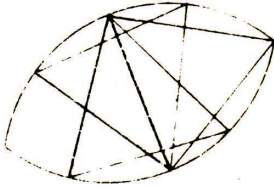
Inną klasę stanowią figury wypukłe mające tę własność, że wszystkie opisane na nich prostokąty mają ten sam obwód. Oczywiście wszystkie figury o stałej szerokości należą do tej klasy, ale nie tylko one – inny przykład przedstawia figura z rysunku 16. W klasach tych figur można uzyskać rezultaty analogiczne do wyżej zaprezentowanych, ale to całkiem inna historia...



Rys. 13

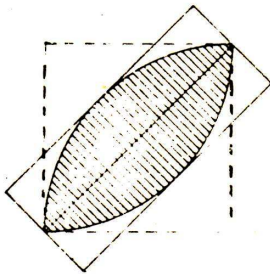


Rys. 14



Rys. 15

Krzywa płaska zniknięta, bez samoprzecięć nazywamy wypukłą, gdy stanowi brzeg figury wypukłej.



Rys. 16

Uogólnienie twierdzenia Barbiera: Jeżeli obwody wszystkich prostokątów opisanych na figurze wypukłej są stale równe  $4d$ , to obwód tej figury wynosi  $\pi \cdot d$ .

#### Literatura

- [1] Górnicki, J., *Mitologia i twierdzenie izoperymetryczne*, Delta 11/1984.
- [2] Górnicki, J., *Jak zakryć płamę na obrusie*, Delta 3/1985.
- [3] Jaglom, I.M., Bołtiański, W.G., *Figury wypukłe*, PWN, Warszawa 1955.
- [4] Lassak, M., *Figury o stałej szerokości*, Delta 12/1980.
- [5] Люстерник, Л.А., *Выпуклые фигуры и многогранники*, Москва 1956.
- [6] Rademacher, H., Toeplitz, O., *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956.