JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

BARBIER, E.

Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 273-286.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A18_0>

NOTE

SUR

LE PROBLÈME DE L'AIGUILLE ET LE JEU DU JOINT COUVERT;

PAR M. E. BARBIER,

Élève de l'École Normale.

§ I. — *Généralisation du problème de l'aiguille. — Disques de différentes formes.*

1. Le problème devenu classique sous le nom de *Problème de l'Aiguille*, a été indiqué pour la première fois par Laplace.

Voici comment il est exposé dans la *Théorie analytique des Probabilités* : « On pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour » rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute les géomè- » tres n'emploieront pas ce moyen; mais comme il me donne lieu de » parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais » l'exposer en peu de mots. Imaginons un plan divisé par des lignes » parallèles, équidistantes de la quantité a; concevons de plus un cy- » lindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou » moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il » rencontrera une des divisions du plan. »

Un calcul assez simple conduit Laplace au résultat suivant :

« Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport » du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du » plan, au nombre total des projections, sera par le n° 16, à très-peu » près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonfé- » rence 2π. »

Au n° 16, Laplace explique le théorème qui fut si longtemps l'objet des méditations de Jacques Bernoulli, et qui est un des principes généraux du calcul des probabilités.

« A mesure que les événements se multiplient, leurs probabilités

» respectives se développent de plus en plus : leurs résultats moyens
» et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent, convergent vers des
» limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes.
» La détermination de ces accroissements et de ces limites est une des
» parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des
» hasards. »

2. On peut, dans la question imaginée par Laplace, supposer qu'on projette des disques elliptiques, polygonaux réguliers ou de forme quelconque, au lieu du cylindre très-étroit.

M. Lamé a traité cette année, dans son cours de la Faculté des Sciences, le cas d'une pièce ronde, celui d'un disque elliptique et enfin celui de jetons polygonaux réguliers, dans la supposition que le diamètre de la pièce, le grand axe de l'ellipse et le diamètre du cercle circonscrit à la base du jeton sont plus petits que la largeur des bandes du plan sur lequel on les jette au hasard.

Les théorèmes élégants auxquels est arrivé M. Lamé sont remarquables en ce qu'ils se résument dans le seul énoncé suivant :

La probabilité de la rencontre d'un disque elliptique ou d'un jeton polygonal régulier, dont le contour a une longueur l, avec une des lignes de division d'un plan distantes d'une quantité a, est $\frac{l}{\pi a}$.

Le cas d'un cylindre très-étroit peut être considéré comme le cas limite d'un disque elliptique qui s'allonge de plus en plus [*].

L'expression $\frac{l}{\pi a}$ étant indépendante de la forme des ellipses et du nombre des côtés du polygone régulier qui servent de base aux disques ou aux jetons, ce fait m'a conduit à penser que les théorèmes considérés par M. Lamé pouvaient n'être que des théorèmes particuliers compris dans un seul théorème général qui résout la question suivante :

Soit un disque convexe de forme quelconque qui ne puisse, dans

[*] On trouve dans le *Calcul intégral* de Todhunter publié en 1855 le problème du disque elliptique. Le résultat $\frac{l}{\pi a}$ est indiqué par l'auteur anglais.

aucune de ses positions sur le plan, rencontrer à la fois plusieurs lignes de division. Qu'elle sera la probabilité de la rencontre?

On peut prouver qu'elle est $\frac{l}{\pi a}$, *l étant la longueur du contour du disque, en s'appuyant sur diverses considérations.* Celle de l'espérance mathématique m'a été obligeamment indiquée par M. Bertrand. Je la préférerai ici, parce qu'elle est plus habituelle dans l'analyse des hasards.

3. Afin de rendre la démonstration plus nette, nous considérerons d'abord un jeton dont la base est un polygone convexe formé par m cotés égaux de longueur c. Il est évident que tous les côtés du disque ont la même chance de rencontre; par conséquent, si le premier côté appartient à un premier joueur, le second côté à un second joueur, etc., et si un côté, coupé par une ligne du plan, amène un gain fixe au joueur qui le possède, tous les joueurs ont la même espérance mathématique E avant chaque coup.

L'espérance mathématique d'une personne A qui aurait acheté toutes ces espérances en nombre m, serait égale à mE.

Un individu B qui aurait acheté l'espérance mathématique que donne une ligne convexe composée de n côtés c, posséderait une espérance mathématique nE.

L'espérance mathématique que donne un contour formé de côtés c est donc proportionnelle au nombre de ces côtés.

Il résulte de là que l'espérance mathématique ne changerait pas, si l'on déformait le polygone en conservant les mêmes côtés.

Je dis de plus que si le disque est convexe la probabilité de la rencontre est dans le même cas, en supposant toujours que le disque ne puisse rencontrer plusieurs parallèles à la fois.

En effet, de deux choses l'une, ou on ne gagnera rien, ou on gagnera deux fois la prime, puisqu'une ligne convexe est rencontrée nécessairement en deux points par une droite qui la rencontre.

Or on sait que l'espérance mathématique s'obtient en faisant la somme des produits de la prime par la probabilité d'un événement heureux, du double de la prime par la probabilité de deux événements heureux, du triple de la prime par la probabilité de trois événements heureux, etc.

Comme le second terme de cette somme existe seul dans le cas particulier qui nous occupe, la probabilité de la rencontre est comme l'espérance mathématique proportionnelle au nombre des côtés c.

Par suite le théorème de M. Lamé sur les contours polygonaux réguliers s'étend à tous les polygones à côtés égaux.

Une induction ordinaire en mathématiques nous permet d'étendre à une ligne quelconque ce théorème démontré dans le cas de polygones à côtés égaux aussi petits que l'on veut.

4. Nous venons de voir qu'un disque convexe, ne pouvant rencontrer à la fois plusieurs lignes du plan sur lequel on le jette, la probabilité de sa rencontre avec les lignes du plan est donnée par l'expression $\frac{l}{\pi a}$.

Je vais ramener à ce cas celui d'un disque non convexe. Pour cela nous imaginerons un fil qui le serre et donne la longueur l de la ligne la plus courte qui l'entoure, et en étendant le disque, nous comblerons les vides compris entre le disque primitif et le fil; la probabilité de la rencontre du disque convexe ainsi obtenu ne sera évidemment ni plus grande ni plus petite que celle du disque proposé.

5. Pour avoir considéré tous les cas possibles, il nous reste à supposer un disque qui puisse rencontrer à la fois plusieurs lignes du plan sur lequel on joue au joint couvert.

Nous pouvons, d'après le numéro précédent, nous borner à examiner le cas d'un disque convexe; c'est ce que nous ferons.

Nous pourrons calculer la chance de la rencontre au moyen de l'intégrale $\frac{1}{\pi a}\int_0^\pi \frac{A}{2}\,dp$, dans laquelle il faut supposer que $\frac{A}{2}$ désigne la projection du contour du disque, sur une droite faisant l'angle p avec une droite fixe, seulement toutes les valeurs de A supérieures à a doivent être comptées comme égales à a. Le calcul se ferait par l'application de la méthode de Lejeune-Dirichlet.

Cauchy a fait remarquer que l'intégrale $\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{+\pi} A\,dp$ dans laquelle A désigne la somme arithmétique des projections d'une ligne sur une direction qui fait l'angle p avec une direction fixe, donne la longueur de la courbe.

Cette intégrale représente aussi le produit par $\frac{\pi}{2}$ de la moyenne des valeurs de A. Or il est facile de voir que cette moyenne est proportionnelle à la probabilité de la rencontre, toutes les fois que $\frac{A}{2}$ ne dépasse jamais a; donc les théorèmes de M. Lamé et le théorème général que j'ai donné se déduisent très-simplement de cette proposition de Cauchy.

Cette proposition a été d'abord insérée en 1832 dans un cahier lithographié, puis imprimée dans les *Comptes rendus* de 1841; Cauchy, dans un autre volume des *Comptes rendus*, en a démontré d'autres non moins simples, et il en a tiré plusieurs conséquences auxquelles j'étais moi-même arrivé au moyen des probabilités. Cette identité de résultats me conduisit au rapprochement qu'on vient de lire entre le théorème du n° **2** et une proposition de Cauchy.

6. Avant de passer à une nouvelle généralisation du problème de l'aiguille, je crois devoir dire quelques mots de la marche qu'on pourrait suivre pour présenter de la manière la plus élémentaire la solution du *problème du disque* dans tous les cas.

Il suffit de traiter d'abord le cas si simple de la pièce ronde, puis de faire les remarques qui permettent de déformer un contour, et l'on aura, sans même avoir une seule intégration à effectuer, la solution dans le cas de disques qui ne peuvent rencontrer qu'une seule ligne du plan sur lequel on les jette.

La solution complète du problème du jeu du joint couvert est plus élémentaire que la solution du problème de l'aiguille, puisque nous n'avons besoin à la rigueur que du cas le plus simple de tous, celui de la pièce ronde et de raisonnements d'une extrême facilité, même pour les personnes les plus étrangères aux mathématiques.

§ II. — *Généralisation du problème de l'aiguille. — Divisions quelconques du plan. — Problèmes analogues au problème de l'aiguille.*

1. Dans le paragraphe précédent nous avons toujours supposé qu'un disque était jeté sur un parquet, formé de bandes égales indéfinies;

on pourrait se proposer le cas où le disque serait remplacé par un fil flexible de longueur l; le seul théorème simple auquel on puisse arriver sans aucune hypothèse sur la manière de jeter le fil est celui-ci :

Le nombre des intersections qu'on peut mathématiquement espérer entre le fil et les joints du parquet est $\frac{l}{\pi a}$, *ce qui veut dire que d'après le théorème de Jacques Bernoulli la moyenne du nombre d'intersections a pour limite* $\frac{l}{\pi a}$ *quand le nombre des coups augmente indéfiniment, ou encore, la moyenne oscille indéfiniment autour de cette quantité* $\frac{l}{\pi a}$.

Ce résultat moyen $\frac{l}{\pi a}$ s'obtient par des raisonnements que je n'ai pas besoin de reproduire, ils ont été donnés au nº 3 du § I.

Je vais supposer que sur le plan où le fil est jeté, on considère non plus des lignes droites, mais un fil réparti sur la surface, de manière que chaque mètre carré en contienne L mètres, ce fil affectant une forme quelconque d'ailleurs et variable avant chaque coup.

Pour faire voir que la forme du fil, compris dans chaque mètre carré, n'influe pas sur la limite de la moyenne du nombre d'intersections d'un fil de longueur l qu'on jette sur le plan, nous irons du simple au composé comme nous l'avons fait au nº 3 du § I.

Nous supposerons d'abord qu'on jette une aiguille sur le plan, et qu'un dessin que nous tracerons dans un mètre carré pris sur le plan se répète fidèlement dans tous les mètres carrés juxtaposés pour former un plan indéfini.

1°. Mettons dans un mètre carré une ligne droite de longueur d, supposons la limite de la moyenne du nombre d'intersections de l'aiguille avec ces lignes d égale à m.

Changeons de place la ligne d, toutes les autres sont supposées se déplacer en même temps, la moyenne m reste constante.

2°. Considérons n droites égales à d dans un mètre carré, la moyenne sera évidemment mn, si on compte les intersections de l'aiguille qu'on jette avec toutes ces droites, etc.; bref, des raisonnements simples comme ceux du nº 3 du § I nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

2. Théorème I. — *Un plan contient par mètre carré un fil flexible de longueur* L *mètres, affectant une forme variable, on y jette au hasard un fil flexible de longueur* l *mètres, la moyenne du nombre des points d'intersection oscille indéfiniment, quel que soit le nombre des épreuves, autour de* $\frac{2Ll}{\pi}$.

Nous dirons toujours, dans ce qui va suivre, *moyenne* au lieu de *limite de moyenne*, ou de *nombre autour duquel la moyenne oscille indéfiniment*. Avant de donner quelques énoncés de théorèmes de moyennes, il est utile de fixer le sens de deux expressions.

1°. Une direction quelconque dans un plan est celle du rayon d'un cercle situé dans ce plan, qui prend indifféremment toutes les orientations possibles.

2°. Une direction quelconque dans l'espace est celle du rayon mené à un point de la surface d'une sphère, qui prend indifféremment toutes les positions possibles sur cette surface [*].

La moyenne des projections d'une ligne plane l sur une direction quelconque du plan est $\frac{2l}{\pi}$, comme pour le cercle.

---

[*] Une aiguille H horizontale, mobile autour d'un axe vertical qui la traverse en son centre de gravité, lancée de manière à faire un assez grand nombre de tours, s'arrête dans une direction, justement réputée *quelconque* dans le plan horizontal.

Il est bien entendu que l'aiguille n'est pas magnétique.

Au moyen de conventions faciles à imaginer, la même aiguille H nous déterminera un méridien *quelconque* d'une surface de révolution, un point *quelconque* d'un cercle ou d'une ligne de longueur donnée.

Un point d'une sphère, situé en un point quelconque d'un méridien quelconque, peut occuper *toutes les positions possibles* sur la sphère ; mais il n'y est pas *quelconque*, il se portera de préférence vers les pôles.

Mais un point d'un méridien *quelconque* projeté en un point *quelconque* de la ligne des pôles d'une sphère peut être censé *quelconque* sur la sphère. L'aiguille H peut donc servir à déterminer un point quelconque d'une sphère par suite une direction quelconque dans l'espace.

Remarque. L'équivalence des zones de même hauteur dans la sphère fait voir qu'une surface plane prenant *indifféremment* toutes les directions possibles, se projette sur un plan fixe de manière que sa projection ait *indifféremment* toutes ses valeurs possibles.

Il s'agit de la *somme arithmétique* des projections, la même remarque s'applique aux théorèmes suivants.

La moyenne des projections d'une surface, sur un plan dont l'axe a une direction quelconque, est $\frac{1}{2}$ comme pour la sphère.

La moyenne des projections d'une ligne l sur une direction quelconque est $\frac{l}{2}$.

La moyenne des projections d'une ligne l sur un plan dont l'axe est une direction quelconque, est $\frac{\pi l}{4}$.

3. Théorème II. — *Supposons un espace indéfini, divisé par la pensée en cubes de 1 mètre de côté, et chacun de ces mètres cubes contenant s mètres carrés d'une étoffe (qui peut n'être pas développable sur un plan); un fil de longueur l, passé au hasard dans cet espace, traverse moyennement l'étoffe en* $\frac{Sl}{2}$ *points.*

Ce théorème donne à peu près la moyenne du nombre de feuilles traversées par une flèche très-fine qui parcourt une distance connue à travers un feuillage.

Théorème III. — *Chaque mètre cube d'un espace indéfini est traversé par un fil de* L *mètres de longueur; une étoffe de s mètres carrés est traversée moyennement en* $\frac{Ls}{2}$ *points par le fil.*

Ce théorème résout à peu près cette question : Un bassin renferme un acide qui peut altérer une étoffe; le liquide distille par un certain nombre de trous. Combien de points d'une surface connue de cette étoffe ont été altérés par des gouttes d'acide?

Théorème IV. — *Supposons enfin que chaque mètre cube de l'espace renferme* S *mètres carrés de surfaces, la longueur moyenne de la courbe d'intersection de ces surfaces, par une surface de s mètres carrés, est* $\frac{3\pi Ss}{2}$.

Nous allons faire une remarque générale sur tous les résultats moyens d'un nombre infini de résultats également possibles. Soit A le résultat moyen, B le résultat obtenu à un coup donné : deux joueurs peuvent convenir que lorsque B est plus grand que A, le premier joueur gagne une somme proportionnelle à la différence; quand A est au contraire plus grand que B, le second joueur gagne une quantité proportionnelle à la différence. Ces deux joueurs joueraient un jeu équitable. La fortune de ces deux joueurs étant extrêmement grande, il est très-probable que toutes les péripéties du jeu se borneront à des oscillations de fortune. On pourrait dans un cours de probabilités faire cette remarque à la suite du théorème de Bernoulli, en ajoutant immédiatement que par suite des alternatives inévitables de gain et de perte, une très-grande fortune englobera très-probablement une fortune médiocre, ce qui conduit aux remarques connues sur les risques des joueurs de profession.

Dans le paragraphe suivant, je rassemblerai des remarques de diverses natures sur les théorèmes de moyennes énoncés précédemment.

§ III. — *Remarques diverses sur les théorèmes précédents.*

1. Une ligne convexe est moindre que toute ligne qui l'enveloppe.

Cette proposition de géométrie plane revient à cette remarque évidente : Toute ligne droite qui rencontre la ligne concave la coupe en deux points au plus, et coupe en deux points au moins la ligne enveloppante. La moyenne du nombre d'intersections de ces deux courbes tracées sur un même disque, qu'on jette sur un même plan, dans lequel sont tracées des droites indéfinies, est plus élevée pour la ligne enveloppante que pour la ligne convexe enveloppée; d'où l'inégalité des deux lignes.

2. Si une ligne E et une ligne I étaient tracées sur le disque, et si on était certain : 1° qu'une droite ne peut rencontrer la ligne I qu'en *n points au plus*, 2° que toute droite qui rencontre I rencontre *nécessairement* E en m points au moins, le rapport des longueurs $\frac{E}{I}$ serait plus grand que $\frac{m}{n}$.

On justifierait cette assertion $\frac{E}{I} > \frac{m}{n}$ comme on a justifié (par une singulière méthode, je l'avoue) l'inégalité de la ligne enveloppante et de la ligne enveloppée.

L'inégalité $\frac{E}{I} > \frac{m}{n}$ a été remarquée par Cauchy, dans une des Notes que j'ai signalées précédemment.

3. Si une ligne droite ne pouvait rencontrer *en plus de n points* une surface I, et si toute ligne qui rencontre I rencontrait *forcément* E en m points ou plus, le rapport des surfaces $\frac{E}{I}$ serait plus grand que $\frac{m}{n}$.

Je crois que ce théorème n'a pas été remarqué. Les théorèmes de moyennes permettent d'énoncer les propositions suivantes, dont ils donnent les démonstrations les plus simples.

4. Je suppose que, des deux surfaces S_1 et S_2, la première S_1 soit coupée par un plan quelconque suivant une courbe plus longue que la courbe suivant laquelle le même plan coupe S_2. S_1 est la plus grande des deux surfaces.

Legendre (p. 247, 14^e édition), dans sa *Géométrie*, admet, il me semble, cette notion pour démontrer que « la surface convexe du » cylindre est plus grande que la surface convexe de tout prisme » inscrit, et plus petite que celle de tout prisme circonscrit. »

5. Le théorème suivant, un des plus évidents théorèmes de moyennes qu'on puisse imaginer, justifie une notion commune qui n'est pas évidente dans tous les cas. Je suppose que chaque mètre cube de l'espace renferme S^{mq} de surface; cette surface laissera en moyenne, dans un volume v, Sv^{mq}.

Ce théorème justifie la notion de l'inégalité $V_1 > V_2$ de deux volumes V_1 et V_2 tels, que tout plan coupe V_1 suivant une section plus grande que la section de V_2 par le même plan.

6. Nous n'avons donné que des théorèmes d'inégalité; mais nous aurions aussi bien pu faire des remarques sur les rapports approximatifs des volumes et des surfaces, d'après le rapport des sections et des dimensions obtenues en les coupant par une infinité de plans ou en les perçant par une infinité de droites.

On peut se demander s'il n'y a pas une espèce de section moyenne, de dimension moyenne, correspondante à une surface ou à un volume donné; c'est ce que nous allons examiner.

7. Soit un volume V et un nombre infini de points P distribués d'une manière homogène dans ce volume ; si par chacun de ces points P on mène des droites orientées de toutes les manières, la moyenne de toutes les portions de ces droites interceptées dans le volume V peut être prise comme une espèce de dimension moyenne. Cette moyenne ne dépend-elle que du volume? Si par chaque point P on considérait des plans ayant toutes les orientations possibles, la moyenne de ces sections sera-t-elle indépendante de la forme du volume V?

Cette dimension moyenne, cette section moyenne dépendent de la forme du volume, et c'est pour la sphère qu'elles sont maximum.

Nous allons, en étudiant des courbes et des surfaces convexes, dont la propriété caractéristique peut se rendre en langage ordinaire par ces mots : *égalité de largeur en tous sens*, trouver une propriété de maximum de la sphère plus digne que la précédente d'être remarquée.

8. *Courbes planes ayant la même largeur en tous sens.* — J'entends par là les courbes convexes telles, que deux tangentes parallèles sont à une distance constante l'une de l'autre, quelle que soit leur direction.

Pour vérifier que le soleil est un disque circulaire à nos yeux, le procédé qu'on emploie est une vérification de cette égalité de largeur en tous sens. Ce procédé, complétement satisfaisant pour la question d'astronomie, est-il aussi satisfaisant pour la question de mathématiques qui s'y rattache? En un mot, toute courbe convexe, de même largeur en tous sens, est-elle une circonférence de cercle? Telle est la question qu'on se pose naturellement.

M. Puiseux met en évidence qu'il y a d'autres courbes que le cercle ayant cette propriété, que la distance de deux tangentes est indépendante de leur direction commune, en citant l'exemple suivant :

Le grand axe partage une ellipse en deux parties superposables; considérons l'une des moitiés, et sur toutes ses normales portons une longueur égale au grand axe de l'ellipse : le lieu des points ainsi déterminés se raccorde toujours avec la demi-ellipse, et l'ensemble donne *souvent* une ligne convexe d'une largeur égale au grand axe de l'ellipse dans tous les sens.

Nous pouvons, sur les courbes convexes C telles, que deux tangentes soient à une même distance c, quelle que soit leur direction commune, faire les remarques importantes suivantes :

1°. Toutes ces lignes ont même longueur, puisque au jeu du joint couvert, sur un parquet à bandes parallèles, elles auraient la même chance.

2°. Toute ligne C se compose de deux arcs ayant une développée commune.

En effet, quand un système de droites parallèles se meut, les points de contact de ces droites avec leur enveloppe sont sur une même perpendiculaire à leur direction commune. La considération du centre instantané de rotation du système met ce fait en évidence; il suffit de considérer le système des deux tangentes à la courbe C pour voir qu'elle se compose de deux arcs ayant même développée, puisque leurs normales sont communes.

3°. La développée commune est une courbe telle, qu'on peut lui mener une tangente parallèle à une direction quelconque, et qu'on ne peut lui en mener qu'une. L'enveloppe d'une droite D, qui est à égale distance de deux tangentes parallèles, jouit de la même propriété.

La développée des courbes C peut renfermer des portions de droite; alors le rayon de courbure des courbes C ne varie pas d'une manière continue. L'enveloppe des droites D ne peut contenir de partie droite, sinon la courbe C se composerait de deux droites parallèles indéfinies.

Voyons comment nous pourrons trouver des développées de courbes ayant même longueur en tous sens; la construction des courbes C sera ensuite facile à concevoir. Considérons un arc convexe dont la flexion totale soit de 180 degrés; on peut décomposer cet arc en parties qu'on réunira par des points de rebroussement de première espèce, de manière à avoir une courbe fermée composée d'arcs convexes séparés par des rebroussements de première espèce. On obtiendra ainsi une développée de courbes C, par exemple l'ensemble de la demi-ellipse et d'une autre courbe parallèle que nous avons considérée plus haut aura pour développée la moitié de celle d'une ellipse fermée par une droite.

Si l'on réunissait trois arcs de courbe par des points de rebroussement, les courbes C qui auraient l'ensemble de ces trois arcs pour développées, auraient un rayon de courbure variant d'une manière continue. On peut imaginer les formes les plus bizarres pour cette développée, chacune donnera toujours un ensemble de courbes C; il n'est pas une seule courbe C dont la développée ne puisse être ainsi obtenue, de sorte que nous venons de faire une théorie assez complète de ces courbes de même largeur en tous sens.

La première propriété que nous en avions donnée, savoir que leur *longueur* ne dépend que de leur *largeur*, se démontre facilement après qu'on a remarqué qu'une courbe C se compose de deux arcs parallèles. Mais nous avions prévu cette propriété avant de rien connaître sur ces courbes, si ce n'est leur définition même.

Nous allons considérer maintenant les surfaces ayant même largeur en tous sens : nous aurons quelques nouvelles remarques à faire, qui ne sont pas, je crois, dépourvues d'intérêt.

9. *Surfaces ayant même largeur en tous sens.* — J'entends par là les surfaces convexes qui, comme la sphère, ont deux plans tangents parallèles quelconques à une distance constante.

On peut, en faisant tourner certaines courbes C qui ont un axe de symétrie autour de cet axe, engendrer de pareilles surfaces.

A la vérité, ces surfaces que nous venons d'engendrer sont de révolution; mais on en conçoit d'autres en nombre infini.

En effet, imaginons, ce qui ne coûte aucun effort, une surface dont une courbe C soit une ligne géodésique; considérons la portion de cette surface qui se trouve d'un côté de la ligne C, et portons sur toutes ses normales une distance égale à la largeur de la ligne C; nous compléterons cette portion de surface par une autre portion qui se raccordera avec elle : l'ensemble sera souvent une surface convexe, et alors ce sera une des surfaces S, que nous caractérisons en disant qu'elles ont même largeur en tous sens.

On pourrait penser, par analogie avec la première propriété des courbes C, que les surfaces S ont une égale étendue si elles ont même largeur; il n'en est rien.

En effet, *la projection d'une surface* S est une courbe C aussi longue que le cercle, mais moins grande en surface; donc *la surface des vo-*

lumes convexes de même largeur en tous sens dépend de leur forme. La sphère a la plus grande surface parmi ces volumes.

Il me paraît difficile de démontrer cette proposition par d'autres principes que ceux que j'ai employés.

Voici encore une propriété des courbes C qui ont un axe de symétrie qu'on aurait probablement une certaine peine à démontrer, indépendamment de ces mêmes principes.

De toutes les courbes C, la circonférence de cercle est celle dont la moitié a le centre de gravité le plus éloigné de l'axe.

La même proposition peut se dire aussi des centres de gravité des demi-surfaces.

Ces deux propositions se démontrent par le théorème dit de *Guldin*, en les ramenant à la comparaison des surfaces et des volumes engendrés par la révolution des courbes C.

10. Je terminerai cette Note en indiquant l'usage de ces courbes de même largeur en tous sens pour la solution du problème traité au n° 5 du § I.

Quand un disque est dans certains sens plus large que les bandes du plan sur lequel on le jette, *il peut arriver* qu'en le faisant tourner de 180°, en le laissant tangent à une limite d'une bande, l'autre limite de la bande enveloppe une courbe située tout entière sur le disque; si alors le disque, réduit de toute la portion touchée par la seconde limite, reste convexe, il a la même chance de rencontre que le disque primitif. Dans ce cas, l mesurant le contour du disque obtenu, la probabilité de la rencontre sera $\frac{l}{\pi a}$.