

**Materialtheorie / Dr. Schargott / Vorlesung 10.**

Bruchkriterium nach Griffith, Sprödbbruch. plastische Deformation: effektive Oberflächenenergie, Bruchzähigkeit. Spannungskonzentration an Risspitze, Anwendung des Griffith-Kriteriums.

**4. Riss, Bruch und Ermüdung****4.1. Das Griffith-Bruchkriterium.**

Dem Bruch einer metallischen Probe geht in der Regel eine erhebliche plastische Deformation mit mehrmaligen Änderungen von Versetzungsstruktur und anschließender Speicherung von Mikrorissen voraus. Der **Bruch** selbst ist bei einem zähen Material lediglich das letzte Stadium, in dem einzelne Mikrorisse zu einem Riss zusammenfließen. Der Bruchprozess ist daher ein komplizierter Prozess mit mehreren Stadien.

**4.1.1. Sprödbbruch**

Der Bruch eines spröden Materials ist aus theoretischer Sicht einfacher, und wir beginnen mit diesem Fall. Der Zugang wird aber formal auch auf zähe Werkstoffe angewandt.

Betrachten wir einen elastischen Körper mit einem Riss mit dem Durchmesser  $L$  und berechnen die Spannung, die erforderlich ist, um diesen Riss im „geöffneten“ Zustand halten zu können. Wir berechnen Energie des Systems verglichen mit dem Zustand, in dem der Riss geschlossen ist. Beim Trennen der Rissufer wird eine Arbeit geleistet, denn es muss eine freie Oberfläche geschaffen werden. Diese hat jedoch eine höhere Energie, da atomare Bindungen an der Oberfläche im Gegensatz zum Inneren des Körpers gestört sind. Durch die Oberflächenenergie (Energie pro Fläche  $\gamma$ ) wird somit die Energie des



Systems erhöht, und zwar für den Riss im Beispiel um  $2\gamma\pi(L/2)^2$ . Dabei fällt aber die Normalspannung an den Rissufern von  $\sigma_0$  auf Null ab. Damit ist eine Verkleinerung der elastischen Energie verbunden. Wenn wir annehmen, dass die elastische Energiedichte  $w = \frac{\sigma_0^2}{2E}$  nun in einem Volumen (Kugel) von der Größenordnung  $L^3$  fehlt, so ist die gesamte

Energie nun:  $W = 2\gamma\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{\sigma_0^2}{2E} \frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3$ . Eine Änderung der Risslänge bewirkt nun eine Kraft

$F(L) = -\frac{dW}{dL}$  auf den Riss – eine Kraft, die den Riss entweder schließt (stabil) oder weiter öffnet (instabil). Die kritische Rissgröße erhalten wir, wenn die Kraft (Ableitung der Energie) zu null wird. Einem Gleichgewicht entspricht also das Minimum der Energie:

$$F(L) = -\frac{dW}{dL} = -\pi\gamma L + \frac{\sigma_0^2}{4E}\pi L^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{\frac{\gamma E}{L}}$$

Daraus folgt für die *Größenordnung* der kritischen Spannung (bis auf einen Geometriefaktor):

$\sigma_0 \approx \sqrt{\frac{\gamma E}{L}}$ . Das ist das berühmte **Griffith-Kriterium**. Durch genauere Rechnung bzw. andere Rissgeometrien können sich verschiedene Vorfaktoren ergeben, das qualitative Verhalten bleibt jedoch.

**4.1.2. Effektive Oberflächenenergie, Bruchzähigkeit**

Diese Energie-Überlegung ist aber nur dann gültig, wenn die Energie nicht anderswo verschwindet. Bei einem Metall gibt es bei Trennung von Rissufern große plastische Deformation, bei der viel Energie dissipiert wird. Es stellt sich heraus, dass man das Griffith-Kriterium auch in solchen Fällen an-

wenden kann, wobei man aber eine *effektive Oberflächenenergie*  $\gamma^*$  benutzen muss:  $\sigma_0 \approx \sqrt{\frac{\gamma^* E}{L}}$ .

Die *Bruchzähigkeit* wird meist über den *Spannungskonzentrationsfaktor* angegeben:  $K = g\sigma\sqrt{\pi L}$ , mit einem Geometriefaktor  $g$  der Größenordnung 1. Der Zusammenhang zwischen  $\gamma^*$  und  $K$  ist daher:

$K \approx \sqrt{\pi\gamma^* E}$ . Bei ungefähr gleicher Härte von Stahl und Glass ist die effektive Oberflächenenergie des Stahls ungefähr um den Faktor 50 größer als seine wirkliche Oberflächenenergie, was die Ursache für sehr unterschiedliche mechanische Eigenschaften dieser Werkstoffe ist.

### 4.1.3. Spannungskonzentration an einer Rissspitze

Die Gleichgewichtsgleichung für ein elastisches Kontinuum kann vereinfacht als  $\Delta u_i = 0$ , ( $i = 1..3$ ) geschrieben werden.

Für die Bruchmode III (siehe rechts) ist das sogar eine exakte Gleichung, die wir hier lösen wollen.

In zylindrischen Koordinaten nimmt diese Gleichung die

Form  $\Delta u_i = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \phi^2} = 0$  an. Es ist leicht zu sehen, dass jede Funktion der Form

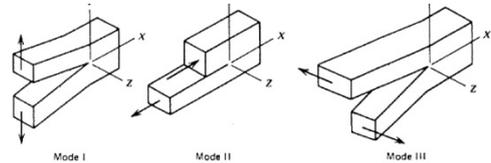
$u_i = r^\alpha \cos(\alpha\phi)$  Lösung dieser Gleichung ist. Sie muss allerdings noch die Randbedingung

$u_i(r, \phi = 0) = -u_i(r, \phi = 2\pi)$  erfüllen. Daraus folgt  $\alpha = 1/2$ ,  $u_i \propto r^{1/2}$  und  $\sigma \propto \frac{\partial u}{\partial r} \propto r^{-1/2}$ . Dieser Verlauf erklärt sich physikalisch durch die Vergrößerung der Spannungskonzentration an der Rissspitze.

Die Spannung im Abstand  $r$  von der Rissspitze hat die Größenordnung  $\sigma(r) \approx \sigma_0 \sqrt{l/r}$ . Beim brüchigen Material erreicht sie ihr Maximum für  $r = b$ , wobei  $b$  ein atomarer Abstand ist. Ist diese Spannung gleich der theoretischen Festigkeitsgrenze auf Zug  $\sigma_{th}$ , so öffnet sich der Riss weiter. Daraus

folgt  $\sigma_{th} \approx \sigma_0 \sqrt{l/b}$  und damit  $\sigma_0 \approx \sigma_{th} \sqrt{\frac{b}{l}}$ .

Ein Vergleich mit dem Griffith-Kriterium ergibt für die theoretische Grenze:  $\sigma_{th} \approx \sqrt{\frac{\gamma E}{b}}$ .



### 4.1.4. Anwendungen des Griffith-Kriteriums

Mit der Gleichung  $\sigma_0 \approx \sqrt{\frac{\gamma^* E}{L}}$  kann man viele mit Bruch zusammenhängende Effekte verstehen:

- Einfluss von oberflächenaktiven Substanzen auf die Bruchfestigkeit. Oberflächenaktive Stoffe werden z.B. beim Bohren von harten Gesteinen eingesetzt und senken die Oberflächenspannung.
- Verzögerter Bruch (auch statische Ermüdung genannt): Bruch nach langer Wirkungszeit einer Zugspannung, die zum schnellen Bruch alleine nicht ausreicht. Der Mechanismus besteht in der Absorption von Gasen oder anderen Substanzen an der Oberfläche und ihre Migration in Mikrorisse. Die Geschwindigkeit des Risswachstums ist dabei beschränkt durch die Geschwindigkeit der Diffusionsprozesse. Nachdem der Riss die kritische Länge erreicht, bricht das Stück "plötzlich".
- Rebinder-Effekt: Zinkblech wird brüchig, wenn es durch Quecksilber benetzt wird (Änderung der Oberflächenenergie). Zum Teil hängt damit auch die Wasserstoffversprödung zusammen.
- Der Riss öffnet sich nur unter Einwirkung einer Zugspannung. Wird in der Oberflächenschicht eine Druckvorspannung erzeugt, so verhindert dies das Öffnen von Oberflächenrissen (z.B. Beschichtung mit einem Material mit kleinerem thermischen Dehnungskoeffizienten bei erhöhter Temperatur oder Sandbestrahlung).
- Die Festigkeit von massiven Glas-Proben wird durch Mikrorisse (an der Oberfläche) von ungefähr 1µm Tiefe bestimmt. Durch sorgfältiges Ätzen kann man Festigkeit von massivem Glass bis zu der von Fasern erhöhen.
- Sehr dünne Fasern (kleine  $L$ ) sind fester als dicke und können theoretische Festigkeit erreichen.
- Ioffe-Effekt: Kochsalz wird plastisch, wenn es in warmem Wasser deformiert wird. Mikrorisse an der Oberfläche lösen sich, die Bruchfestigkeit (Sprödbbruch) wird größer als die Fließgrenze.