

УДК 519

Малых Алла Ефимовна

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики

Данилова Вера Ильинична

кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики

ФГБОУ ВПО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», Пермь, Россия

614990, Пермь, Сибирская, 24, (342) 238-63-75,

e-mail: malych@pspu.ru; vi-dan@mail.ru

ОБ ОСНОВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ РАЗВИТИЯ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА В XIX – XX СТОЛЕТИЯХ

Alla E. Malykh,

Doctor of physics-mathematical sciences,
Professor of the chair of Higher mathematics

Vera I. Danilova

Candidate of pedagogical sciences,
lecturer of the chair of Higher mathematics

*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education
«Perm State Humanitarian Pedagogical University»*

24, Sibirskaja, 614990, Perm, Russia,

e-mail: malych@pspu.ru; vi-dan@mail.ru

ABOUT MAIN DIRECTIONS OF DEVELOPMENT OF COMBINATORIAL ANALYSIS IN XIX – XX CENTURIES

Аннотация: рассмотрены основные направления развития комбинаторного анализа. Описан исторический процесс накопления и формирования комбинаторных методов. Отмечен научный вклад в создание новых направлений комбинаторной теории XIX – XX вв. (К.-Ф. Гинденбург, Г.А. Роте, П.А. МакМагон, Дж. Сильвестр, Д. Пойа, Дж.-К. Рота и др.). Установлена структура комбинаторного анализа, сложившаяся к концу XX столетия. Представлено развитие конечных геометрий, показаны их виды.

Ключевые слова: комбинаторный анализ, комбинаторные соединения, аддитивная теория разбиений, теория перечисления; классические

комбинаторные задачи, теория подстановок, производящие функции, пентагональная теорема, графы Ферре; общие и асимптотические методы.

Abstract: main directions of development of combinatorial analysis were examined. Historical process of accumulation and formation of combinatorial methods was described. Scientific contribution in creation of new directions of combinatorial analysis in XIX – XX centuries was indicated (K.-F. Hindenburg, G.A. Rothe, P.A. MacMahon, A. Cayley, J. Sylvester, D. Polja, Dj.-K. Rota and ets.). Structure of combinatorial analysis to the end of XX century was determined. Development of finite geometries was presented, their kinds were shown.

Key words: combinatorial analysis, combinatorial combinations; additive theory of partitions; theory of enumeration; classical combinatorial problems, theory of substitutions; generating functions; pentagonal theorem, Ferre-graphs; general and asymptotical methods.

Специфика и сложность возникающих задач развития науки, техники и экономики оказывают влияние на изменение места и роли многих математических дисциплин. С конца XIX в. опережающими темпами стала развиваться *дискретная математика*, важной составной частью которой является *комбинаторный анализ*. В нем решаются задачи выбора и упорядочения, в том числе частичного, элементов некоторого дискретного множества в соответствии с определенными правилами. Каждое из последних задает способ построения конструкции из элементов рассматриваемого множества – *комбинаторного комплекса*. Поэтому в комбинаторном анализе изучаются проблемы их существования, установления числа, отыскания классов изоморфизма; создаются алгоритмы построения комбинаторных конфигураций и оптимизация последних.

Со второй половины XIX в. теория комбинаторного анализа развивается особенно интенсивно. Результаты многочисленных исследований изучаются, обобщаются, публикуются в монографиях, специальных выпусках и переводятся на русский язык [1–8].

Методы комбинаторного анализа получили широкое применение во многих разделах математики: теории чисел, теории вероятностей, алгебре, геометрии, большом круге задач теории планирования экспериментов, теории рядов, логике и других.

К названиям некоторых дисциплин в конце XIX – начале XX столетий, добавилось слово *комбинаторная* в качестве прилагательного: комбинаторная геометрия, комбинаторная топология, комбинаторная логика, комбинаторная теория групп, прикладная комбинаторная математика, комбинаторная информатика, комбинаторная теория инвариантов и др.

В последние десятилетия появились книги по комбинаторному анализу, предназначенные для конкретных областей научной деятельности [9–11]. Ежегодно проводятся международные конференции, семинары, симпозиумы.



Усиление роли и значимости комбинаторного анализа стимулирует проявление интереса к его истории. Заметим, что еще на II Международном конгрессе математиков в Париже (1920) М. Кантор указал, что одним из важнейших направлений исследований является история отдельных математических дисциплин, так как именно они представляют основополагающие структурные части математики, и в их развитии и взаимодействии находит свое выражение ее жизнь как единого целого.

Отдельные вопросы истории комбинаторики стали рассматриваться с самого начала XIX столетия [12–15].

Справки и замечания комбинаторного характера содержатся в объемной статье Е. Нетто [16], помещенной в энциклопедии математических наук, а также его учебнике [17] 1901 г., дополненном двумя главами в 1927 г.

За последнее время появилось множество статей, посвященных комбинаторной тематике. Однако к настоящему времени отсутствуют историко-математические исследования обобщающего характера, в которых достаточно глубоко и всесторонне было бы рассмотрено его формирование и развитие. Следовательно, остаются невыясненными структура теории, связи между отдельными частями как внутри нее, так и с другими дисциплинами дискретной математики. А без этого невозможно понять и оценить современное состояние, роль, место и тенденции дальнейшего развития комбинаторного анализа.

Поэтому при выяснении структуры комбинаторного анализа в XIX – первой половине XX столетий предшествующие результаты оценивались с позиций современной комбинаторной теории. Это позволило выявлять в формирующейся комбинаторике те направления, развитие которых привело к ее современному состоянию. Однако при таком подходе хотя и раскрываются наиболее существенные стороны изучаемой проблемы, тем не менее ряд факторов не получает исчерпывающего объяснения. В связи с этим результаты прошлых лет оценивались в динамике идей, содержания, сферы применения, а также системных взаимосвязей как между различными ее направлениями, так и с другими частями математики. Основное внимание было направлено на выяснение закономерностей развития комбинаторного анализа.

Предыстория, зарождение, формирование и развитие комбинаторного анализа, а также некоторых его составных частей, вылившихся впоследствии в самостоятельные научные дисциплины, раскрыты нами в работах [18–22]. Цель статьи – дать краткий обзор важнейших направлений развития комбинаторной науки, которая сформировалась к концу XX столетия.

В первые десятилетия XIX в. были заложены основы ведущих разделов комбинаторного анализа. Центральной его частью является *теория перечисления*. Она – самая ранняя и наиболее оформленная в научном плане, по-прежнему сохраняет лидирующее положение. Ее развитие и расширение многочисленных приложений происходило на протяжении всего рассматриваемого периода. Заметное место при этом занимали проблемы исследования комбинаторных комплексов. Важный вклад в качественном

и количественном направлениях был внесен комбинаторной школой немецких математиков под руководством К.Ф. Гинденбурга. Геометрическая интерпретация комбинаторных видов соединений, полученная Ф.А. Дистервегом (1820), позволила упрощать решение геометрических задач. Обобщенное свойство числа сочетаний было доказано А. Курно (1829) и Хр. Рапе (1834):

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^{kq+r} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{q} \right)^n \cdot \cos \frac{k(n-2r)\pi}{q}, \text{ где } r = \overline{0; (q-1)}, \quad r < n.$$

К тому же времени было решено большое число комбинаторных задач, в которых на элементы рассматриваемых множеств накладывались ограничения как на их повторение, порядок, так и частоту появления. Тогда же появились первые учебники по комбинаторному анализу, например, Л. Оттингера в 1837 г. Он был признан одним из лучших изданий [23].

С самого начала XIX в. представитель школы К.Ф. Гинденбурга Г.А. Роте заложил основы комбинаторной теории перестановок [24]. Результаты исследований в этом направлении практически привели к формированию отдельной дисциплины – *теории перестановок и подстановок*. Были выделены отдельные их виды (родственные, обратные, самосопряженные и др.), изучены свойства, найдены приложения (К.Г. Якоби, 1841; Т. Мьюир, 1889; П.А. МакМагон, 1895). Исследования способствовали созданию теоретических основ инверсий в перестановках и сочетаниях (М. Штерн, 1838; О. Терквем, 1838; В.Г. Метцлер, 1900, и др.). Введение понятия *последовательностей в перестановках* и их графической интерпретации привело к появлению альтернированных и квазиальтернированных перестановок, изучению их свойств (Д. Бьенеме, 1875; Д. Андре, посвятивший им с 1870 г. почти два десятка статей, и др.).

На протяжении всего XIX столетия не ослабевал интерес к решению так называемых *классических комбинаторных задач*. В частности, продолжались поиски общего решения одной из них – «задачи о встречах». Заметим, что оно было получено уже в 1710 г. и находилось в письме И. Бернулли к П.Р. де Монмору, однако по неизвестным причинам осталось незамеченным. В конце концов независимое решение было вновь дано, причем в разных дисциплинах. При этом ученые использовали различные комбинаторные методы: И. Вейраух (1872) в теории определителей на основе метода включения – исключения; С. Кантор (1883) при изучении комбинаторных видов соединений; А. Кэли (1890) при подсчете $(2, n)$ -латинских прямоугольников:

$$P_n^{(0)} = n! \sum_{r=2}^n \frac{(-1)^r}{r!}, \text{ где } P_n^{(0)} \text{ – число перестановок из } n \text{ элементов, в которых ни}$$

один не сохраняет своей первоначальной позиции.

Значительное внимание уделялось частным случаям, разновидностям и обобщениям этой задачи. Родственными ей были задачи о «супружеских



парах» и «о гостях». Поиски общего решения продолжались до 1934 г. (Т. Мьюир, А. Кэли, П.Г. Тэйт, Д. Тушар и др.). Были установлены связи между последней задачей и 2-строчными нормализованными латинскими прямоугольниками порядка n : $K(2, n) = P_n^{(0)}$. Связь же между 3-строчными латинскими прямоугольниками являлась более сложной:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^m C_n^k P_{n-1}^{(0)} P_k^{(0)} u_{n-2k}, \text{ где } m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ и } u_0 = 1.$$

В конце XIX в. стали разрабатываться общие подходы к решению класса перечислительных задач путем изучения соответствующих им схем ограничений (диагональных, прямоугольных и треугольных). Актуальности подсчета различных видов комбинаторных комплексов способствовали прикладные задачи (А. Вейсс, 1847; М. Кантор, 1857; К.В. Бауэр и др.).

Методы решения комбинаторных задач в XIX столетии многочисленны и разнообразны. Они опирались на алгебраические средства исследования, технику оперирования со степенными рядами, общие постановки биномиальной и полиномиальной теорем. Особое место среди них занимали рекуррентные последовательности. Однако эти подходы были оттеснены введением *метода производящих функций*. Его развитый символический и аналитический аппарат позволяет оперировать классами последовательностей менее громоздкими аналитическими средствами. Применение метода характерно для всего XIX в. (О. Коши, 1821; Н.Г. Абель, работы – 1823–1825 гг.; А. Лежандр, 1830; А. Кэли, 1856; Дж. Сильвестр – статьи с 1857 г. и др.). Имея продолжительную и богатую историю, метод производящих функций и в настоящее время интенсивно развивается и обогащается.

Вместе с тем, заметим, что наряду с ним на протяжении XIX в. активно использовались и существовавшие прежде методы перечисления: непосредственного подсчета с использованием комбинаторных формул; с середины столетия большое распространение получили графические методы – на основе точечных графов Ферре.

Метод производящих функций широко применяется и в других математических дисциплинах. Однако для комбинаторного анализа характерно идущее от него понимание и применение производящих функций и как формальных, и как сходящихся рядов. В нем возможен гибкий переход от формального к аналитическому толкованию производящих функций.

Приемы и методы комбинаторного анализа нашли приложение в *теории графов* с того времени, как была выяснена внутренняя структура последних, выделены их классы, прежде всего «деревья» (Г. Штаудт, 1847; А. Кэли, 1857). Параллельно решались вопросы их перечисления.

Теорию деревьев А. Кэли создавал и развивал независимо от идей, приведших впоследствии к теории графов, и оказал на нее огромное влияние. При нахождении числа корневых деревьев с n ребрами он широко использовал

производящие функции и процесс, названный им «унификацией». Кэли нашел производящие тождества для корневых непомеченных деревьев с n главными ветвями и для числа концевых вершин гомеоморфно несводимых деревьев с висячими вершинами, а также формулы подсчета m -деревьев, корневых деревьев с i висячими вершинами, помеченных графов с n вершинами [25].

К. Жордан ввел в теорию деревьев понятия *центра* и *бицентра*, изучая вопросы изоморфизмов и автоморфизмов графов, определил порядок симметрии графа и нашел такие порядки для частных случаев графов с большим количеством вершин. Однако он не оценил важности того, что множество всех автоморфизмов графа образует группу, хотя был в числе первых, кто занимался теоретико-групповыми вопросами.

Независимо от Жордана существование центра и бицентра открыл Дж. Сильвестр, подметив связи между изучением деревьев и некоторыми исследованиями в органической химии. Различные подходы к рассмотрению неукорененных помеченных деревьев осуществляли А. Кэли (1889), К. Борхард (1860), Дж. Сильвестр (1857), Хр. Прюфер (1916) и др. Одним из стимулов формирования и дальнейшего развития теории графов послужили исследования по электричеству (Г. Кирхгоф).

Тесные связи комбинаторного анализа установились с *теорией определителей*. Успехи последней стали основой для развития линейной алгебры, матричного исчисления, алгебраической теории форм и их инвариантов. Исследования по теории определителей все чаще пополнялись результатами в *теории матриц*, получившей продвижение с середины XIX в.

На протяжении всего XIX в. сохранялся интерес к построению и исследованию *числовых таблиц*, обладающих определенными свойствами (магические и латинские квадраты, латинские прямоугольники). Таинственность названия, простота формулировки задач и трудности решения неизменно привлекали к ним внимание как первоклассных ученых, так и любителей математики. Некоторые авторы расширили идею магических и латинских квадратов, перенесли ее из плоскости в пространство. Определенный вклад в теорию внесли и наши соотечественники: М. Фролов, В. Ермаков, Е. Орлов, И. Износков и др.

В теории латинских квадратов важной составляющей является *проблема их ортогональности*, изучение частных видов, выяснение структуры. Так, Гастон Тэрри ввел понятие комбинаторных инвариантов. Получив все 9408 приведенных латинских квадратов порядка 6, он объединил их в 22 неизоморфных между собой класса, однако не смог построить из них ни одной ортогональной пары (1901). Тем самым Тэрри доказал, что гипотеза Л. Эйлера о несуществовании пары ортогональных латинских квадратов порядка $n = 2(2k + 1)$, $k \in N$ для случая $n = 6$ остается справедливой. Однако для больших значений n вопрос оставался открытым. Группа известных американских ученых Р.Ч. Боуз, С.С. Шрикхэнд и Е.Т. Паркер с использованием мощных для конца 60-х гг. XX в. ЭВМ опровергла гипотезу Эйлера для всех остальных порядков $n = 2(2k + 1)$.



Числовые таблицы нашли применение в широком круге задач теории планирования экспериментов. Их использование приобрело актуальность и с середины XX в. при создании комбинаторных помехоустойчивых кодов.

Обобщением числовых таблиц являются *комбинаторные наборы*. Внимание к ним возникло с середины XIX в. в связи с исследованиями в алгебраической геометрии. Я. Штейнер (1853) сформулировал проблему для $t = 3$ существования $S(t, k, v)$ систем, ставшую исходной в возникновении целого направления теории. Однако впоследствии оказалось, что приоритет в постановке такого типа задач принадлежит У. Вулхаузу (1844). Долгое время оставалась незамеченной работа Т.П. Киркмана (1847), где проблема была не только поставлена, но и решена: система троек $S(2, 3, n)$ существует тогда и только тогда, когда $n \equiv 1; 3 \pmod{6}$. Более того, он построил системы четверок $S(3, 4, 2^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Уже к 1850 г. поднятый Вулхаузом и Киркманом вопрос привлек внимание ученых и вызвал многочисленные исследования, касавшиеся главным образом троек, которые нашли приложения (А. Кэли, Р. Энтайс, У. Пирс, У. Вулхауз, Е. Карпмаэль, А. Фрост, А. Брэй, Р. Болл и др.). Были разработаны методы их построения (У. Пирс, Дж. Сильвестр и др.), получены значительные обобщения (Э.Г. Мур [14]).

С середины XIX в. получила дальнейшее развитие теория *геометрических и комбинаторных конфигураций*. Некоторые из них, как выяснилось впоследствии, оказались конечными геометриями, более общими комбинаторными структурами или вкладывались в них. С другой стороны, сами конфигурации были удобными моделями для реализации различных видов групп подстановок, теория которых на протяжении столетия получила мощное развитие. Значительно продвинулась и теория графов как удобное средство для изучения конфигураций. При их исследовании актуальны вопросы существования, нахождения числа, определения групп автоморфизмов и др.

Дж. Сильвестр и А. Кэли, рассуждая о проблемах, касающихся соединений элементов, считали, что все они относятся к обширному разделу математики, названному Сильвестром «тактикой». Он изучил различные виды тактических систем; исследовал их в количественном направлении, выполнил обзор конкретных классов, а также дал математический анализ карточной игры в вист, сформулированной и решенной в терминах тактических расположений; разработал методы решения задач такого типа, доказал ряд композиционных теорем; исследовал группы подстановок ряда тактических конфигураций, указал многочисленные задачи из алгебры, геометрии, теории групп, приводящие либо к изучению таких конфигураций, либо к использованию их при решении других проблем [25, 26].

Удобным способом представления конфигураций являются их схемы и таблицы инцидентностей, упрощающие нахождение автоморфизмов. Такое положение стимулировало изучение их в XIX–XX вв. Заметим, что конфигурации являются ярким примером взаимного проникновения геометрических, теоретико-групповых и комбинаторных идей.

Интенсивное развитие в XIX столетии получила комбинаторная теория разбиений. Установлено, что она развивалась по следующим направлениям:

1. Выяснение комбинаторных свойств разбиений и вывод формул для:

а) подсчета размещений и сочетаний с определенными суммами. Так, натуральное число n можно представить в виде m положительных слагаемых с учетом их порядка C_{n-1}^{m-1} способами (П. Паоли); если же каждое из слагаемых не меньше p , то число таких способов $C_{n+m-1-mp}^{m-1}$, а общее их количество – 2^{n-1} (Дж. Гермес). Э. Каталан доказал, что система алгебраических уравнений $\sum_{i=1}^n x_i = m$ имеет C_{n+m-1}^n множеств неотрицательных решений.

б) получения рекуррентных формул для количественной оценки разбиений. Было доказано большое число таких соотношений, причем многие неоднократно переоткрывались;

в) доказательства независимых формул для $I^{(h)}(\int n)$; $C^{(g)}(\int n)$; $\hat{O}^{(h+1)}(\int h+k)$ и др. Они нашли применение в теории цепных дробей (М. Штерн), распределении связей между атомами (Ф. Франклин) и др.;

г) доказательства большого числа теорем и среди них *пентагональной*, сформулированной еще Л. Эйлером в 1742 г.:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3m^2 \pm m}{2}}.$$

Впоследствии он доказал ее:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}} \right).$$

Это равенство представляет интерес, так как в процессе поиска его доказательства ученый получил рекуррентную формулу для подсчета количества разбиений натурального числа n на слагаемые:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots \\ \dots + (-1)^k \left(p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n + \frac{3k^2+k}{2}\right) \right).$$

Эйлер пытался получить и независимую формулу для нахождения числа разбиений, о чем свидетельствуют материалы его «записных книжек».



Относительно пентагональной теоремы А. Лежандр (1838) заметил, что если $P_e(D, n)$, соответственно $P_o(D, n)$ – количество разбиений n на четное (нечетное) число различных частей, то

$$P_e(D, n) - P_o(D, n) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{if } n = \frac{3m^2 \pm m}{2}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Заметим, что эта теорема во второй половине столетия была легко доказана с использованием точечных графов Ферре.

Независимая формула для нахождения числа разбиений натурального n на слагаемые была получена лишь в 1918 г. С. Рамануджаном и Г. Харди. Они установили, что это число $p(n)$ является ближайшим целым к

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{\nu} \sqrt{q} \cdot A_q(n) \cdot \psi_q(n), \text{ где } A_q(n) = \sum_p \omega_{p,q} \cdot e^{\frac{2np\pi i}{q}},$$

причем сумма распространяется на все p , взаимно простые с q и меньшие его, $\omega_{p,q}$ – некоторые корни степени $24q$ из единицы, а

$$\psi_q(n) = \frac{d}{dn} \left(e^{\frac{\pi \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)}}{q}} \right).$$

Число ν зависит от n и имеет порядок \sqrt{n} . Более того, считается, что

$$p(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{q} \cdot A_q(n) \cdot \psi_q(n).$$

Поскольку $p(n)$ – целое, то можно ограничиться частичной суммой этого ряда, отличающейся от суммы всего ряда меньше чем на $\frac{1}{2}$, и взять целое число, ближайшее к значению этой частичной суммы [27].

2. Изучение различных видов разбиений, установление их свойств, зависимостей между разбиениями, поиски приложений. С середины XIX в. их было найдено немало: циклические, сопряженные, совершенные, субсовершенные, типа магических квадратов, расчлененные, двудольные, модульные, многомерные, векторные и др. Вклад в разработку, изучение их и дальнейшее развитие теории внесли А. Кэли, Дж. Сильвестр, П.А. МакМагон, М. Матье, Е. Нетто и др.

3. Использование точечных графов, явившихся эффективным средством изучения разбиений, где каждому из них поставлен в соответствие граф Ферре.

С середины XIX столетия введены нормализованные точечные графы и прямоугольные диаграммы, зигзагообразные графы МакМагона. Возможность разложения нормализованного точечного графа на максимальный квадрат и две остаточные диаграммы (В.П. Дарфи) заметно упростила многие доказательства.

4. Приложение теории разбиений наблюдается всюду, где производят либо подсчет, либо классификацию дискретных систем. Например, специалисты по непараметрической статистике изучают ограниченные разбиения, т.е. такие, в которых наибольшая часть не превосходит n , а общее число частей не превышает m . В теории вероятностей и математической статистике рассматривается проблема С. Ньюкомба, приводящая к задачам на перестановки. В физике частиц нашли применения асимптотики разбиений, комбинаторные тождества и др. Некоторые исследования в теории групп связаны через графические диаграммы Юнга с векторными разбиениями.

Как видим, XIX столетие – особый период в развитии комбинаторного анализа. В это время были созданы многие его современные разделы, разработан и усовершенствован комплекс методов: перечислительных, логических, экстремальных (асимптотических).

В истории отдельных частей комбинаторного анализа XIX в. можно выделить периоды их относительно независимого развития (учение о комбинаторных комплексах, теория соединений, инверсии и последовательности в перестановках, магические и латинские квадраты, тройки Штейнера и системы Киркмана). Ряд комбинаторных проблем получил при этом настолько развитую форму, большой объем и далеко идущие результаты, что появилась возможность рассматривать их как самостоятельные научные дисциплины (теория графов, тактические конфигурации, блочно-схемный аппарат, конечные геометрии, теория разбиений и др.). Внутри же самой комбинаторной теории зарождались те абстрактные математические структуры, идеи и методы которых подняли ее в XX столетии на более высокий качественный уровень, позволили найти новые приложения.

С другой стороны, своими успехами в XIX в. комбинаторный анализ обязан использованию методов, заимствованных из других разделов математики (теории вероятностей, теории инвариантов, симметрических функций, определителей и матриц). Некоторые проблемы, ставшие ключевыми в комбинаторной теории, первоначально возникли в иных областях естественнонаучных знаний.

Мощным стимулом к развитию метода производящих функций (ниже м.п.ф.) и комбинаторного анализа послужило развитие *теории инвариантов алгебраических форм*. Она заняла одно из центральных мест в математике второй половины XIX столетия. Ряд важных задач теории инвариантов сводился к вычислению количества разбиения чисел на слагаемые, а потому требовал использования м.п.ф.

Значительный вклад в создание и формирование теории инвариантов внес Артур Кэли [25]. Многие его работы посвящены перечислению инвариантов



и разбиений с использованием м.п.ф. Ученый применял этот метод к решению и других задач теории перечислений. Именно на систематическом использовании м.п.ф. основана его *теория деревьев*, носящая перечислительный характер. В работах ученого обнаруживается неявное сочетание «аналитического» и «формального» подходов к использованию м.п.ф. (производящие функции как ряды, сходящиеся в действительной и комплексной областях, так и формальные).

Перечислительный аспект преобладает и в комбинаторных работах Дж. Сильвестра [26]. Заметна близость их тематики с исследованиями А. Кэли (известны тесные научные связи этих ученых).

Непосредственным продолжением комбинаторных исследований Кэли и Сильвестра явилась обширная *комбинаторная доктрина* Перси Александера МакМагона, последовательно изложенная им в многочисленных статьях конца XIX – начала XX столетий, а также в большом двухтомном трактате «Комбинаторный анализ» 1915–1916 гг. [28]. Доктрина ученого носила перечислительный характер и основывалась на систематическом использовании *симметрических производящих функций*, а также *симметрических дифференциальных операторов Хаммонда*. Значительное место в исследованиях МакМагона занимала аддитивная теория разбиения натуральных чисел.

Теорию двухполюсных сетей МакМагон изложил еще в 1891 г. Она являлась непосредственным продолжением теории деревьев Кэли. Ему удалось установить соответствие между сетями и деревьями. В дальнейшем это привело к исследованию в области двоичного кодирования и декодирования деревьев. В 1942 г. на это обратили внимание Дж. Риордан и С.Е. Шеннок, продвинув результаты МакМагона.

Комбинаторными перечислительными задачами занимались и другие ученые, в частности: Е. Шредер (в логике), А. Андре (в теории подстановок), Т. Мьюир (определители).

Перечислительный аспект имеет и известный «Учебник комбинаторики» [17] – это своеобразная краткая энциклопедия комбинаторного анализа до начала XX в. Задачи относились к алгебре (определители, инварианты, расстановка скобок), теории чисел (мультипликативная и аддитивная теории разбиений), химии (изомеры), физике (электрические цепи), а также к комбинаторным наборам (тройки Штейнера и системы Киркмана).

Продолжением комбинаторной доктрины МакМагона явились исследования Дж. Редфилда [29]. Заметим, что эта единственная работа ученого оставалась незамеченной более 30 лет, на что был ряд объективных причин.

Исследования А. Кэли привлекли внимание химиков и математиков, положили начало целой серии публикаций конца XIX – середины XX столетий. К ним принадлежат и работы Д. Пойа тридцатых годов прошлого века, послужившие предпосылками для создания его *теории перечисления* [30]. Серия из пяти статей (1935–1936) его, уже известного математика, получила в 1937 г. завершение в виде необычно большой статьи. В русском переводе она

впервые опубликована в 1979 г. [2, с. 36–159]. Работа состоит из четырех разделов. Во введении указывается, что работа продолжает исследования Кэли, в ней расширяется круг комбинаторных проблем. Теория перечисления Пойа получила значительное продвижение и на современном этапе развития комбинаторного анализа.

Одним из наиболее примечательных явлений не только для комбинаторного анализа, но всей современной математики является цикл работ, выполненных под руководством профессора Джан-Карло Рота, его учеником Генри Крапо и коллегами. Речь идет о новой концепции построения единых теоретических основ для всего множества направлений комбинаторной части математики. С самого начала 60-х гг. XX в., когда была опубликована первая статья Рота [31], она вызвала живой интерес среди научного сообщества. Спустя год появилась первая работа из задуманного цикла [32]. Она многое прояснила в структуре комбинаторного анализа, но породила и множество вопросов. В дальнейшем на протяжении пяти лет были опубликованы под тем же, но частично общим заголовком, еще восемь статей [33–40].

Серия работ Д.-К. Рота и его соавторов сразу же обратила на себя внимание всего математического мира. По свидетельству ряда участников XVI Международного конгресса математиков (Ницца, 1970), когда Рота читал свой доклад «Combinatorial Theory: old and new», в котором шла речь о комбинаторных геометриях, все другие секции оказались немногочисленными, а некоторые даже отменили свое заседание.

Интерес к работам Рота, выходящим в объявленной им серии, был велик и в последующие годы. Появилось множество других работ Дж.-К. Рота и его учеников, развивавших или разъяснявших отдельные составляющие новых теоретических основ. В новейшей истории комбинаторного анализа его развитие происходило под заметным влиянием концепции Рота.

Комбинаторные методы, используемые в дискретной математике, обстоятельно представлены в книгах В.Н. Сачкова [11, 41, 42].

В процессе изучения истории комбинаторного анализа, его возникновения и развития, формирования отдельных частей, установления связей между ними и другими дисциплинами стало возможным авторам статьи представить его структуру, сложившуюся к 70-м годам прошлого века. Она не является исчерпывающей и приведена на схеме 1.

Многообразие плоских конечных геометрий представлено на рис. 2.

В области *конечных геометрий* – составной части комбинаторного анализа – научные исследования параллельно с ведущими иностранными учеными выполнялись сотрудниками Пермского государственного педагогического института под руководством профессора Евгения Григорьевича Гонина.

Применение различных видов таких комбинаторных конструкций помещено ниже. Широки их возможности в:



- **теории планирования экспериментов** (промышленность, сельское хозяйство, медицина);
 - **большом круге задач, связанных с проблемой экспертных оценок** (оценка знаний учащихся, качества машин, изделий и приборов, достоинств кинофильмов, установление эффективности лекарственных средств, ценности картин, дегустации пищевых продуктов, вин и т.д.);
 - **теории информации** (построение помехоустойчивых кодов. Проблема построения такого кода приобрела актуальность в связи с появлением ракет, космических станций, спутников Земли и т.д.);
- Оказались они востребованными и при:
- **проектировании сложных систем и устройств на ЭВМ** (сокращает перебор, уменьшает затраты машинного времени);
 - **решении ряда задач теории игр и теории графов** и др.

Исторический процесс развития формирования теории конечных геометрий и научные результаты отражены в работе [19].

Таким образом, авторы стремились показать, как появлялись первые построения общей комбинаторной теории (с начала XIX в.), как осуществлялись исследования в различных ее направлениях; выясняли структуру науки и ее приложения.

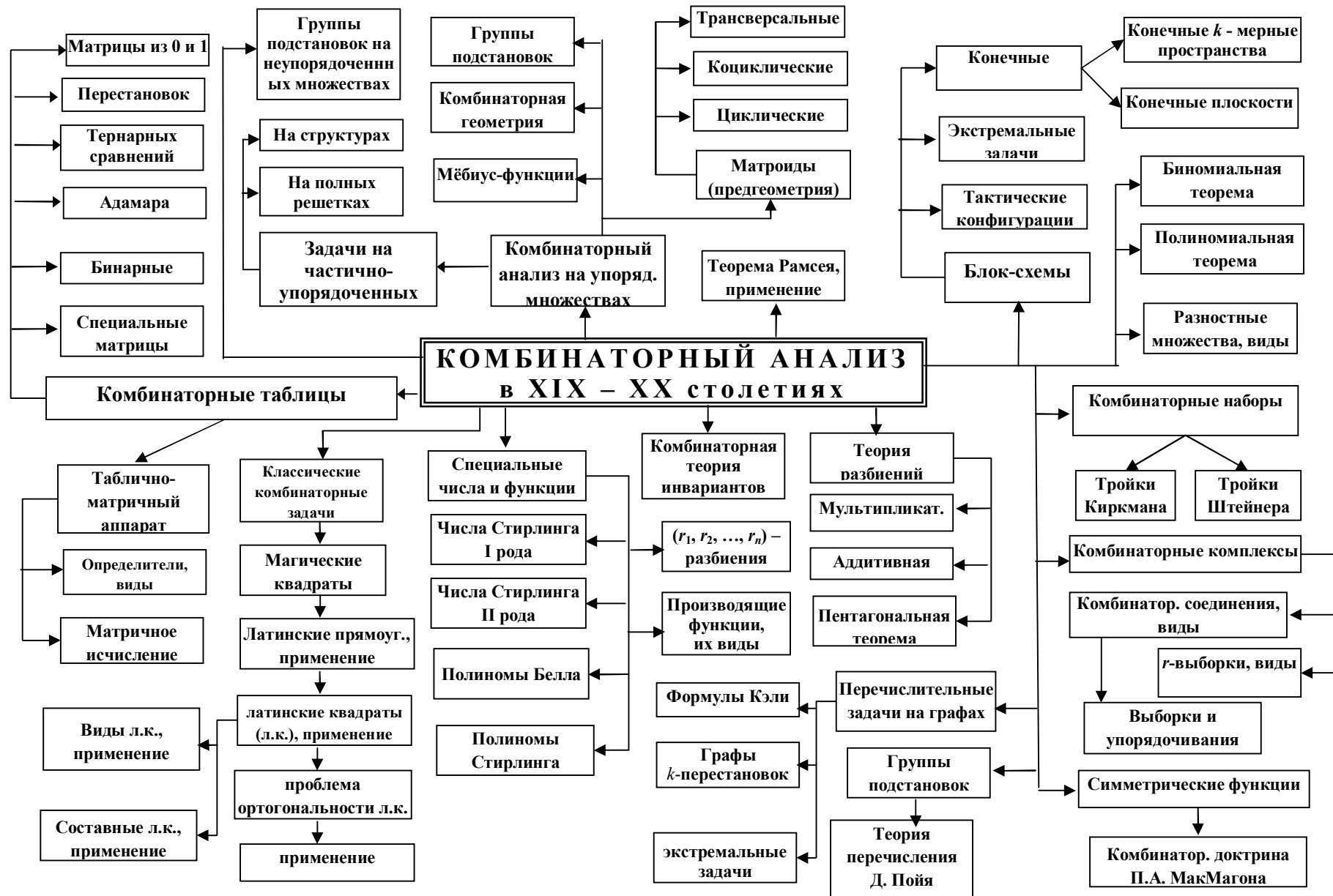


Рис. 1. Многообразие плоских конечных геометрий

Список литературы

1. Айгнер А. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982.
2. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику: пер. с франц. – М.: Наука, 1975.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов: пер. с польск. – М.: Мир, 1988.
4. Малых А.Е. Комбинаторные аспекты теории графов в XIX столетии. – М., 1992. – Деп. в ВИНТИ 24.03.92, № 1004 – В 92.
5. Малых А.Е. О некоторых перечислительных задачах в период становления и формирования комбинаторного анализа // Историко-математические исследования / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1984. – Вып. XXVIII. – С. 123–135.
6. Малых А.Е. О решение некоторых задач теории соединений // Историко-математические исследования / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1990. – Вып. XXXII–XXXIII. – С. 211–234.
7. Малых А.Е. Формирование комбинаторного анализа. – М., 1989. – 245 с. – Деп. в ВИНТИ 01.12.89, № 7166 – В 89.
8. Малых А.Е., Янкович Е.И. Применение комбинаторных идей и методов в математических исследованиях XVIII столетия // История науки и техники. – М.: Научтехлитиздат, 2013. – № 9. – С. 3–16 (входит в список изданий ВАК РФ).
9. Перечислительные задачи комбинаторного анализа / под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1979.
10. Проблемы комбинаторного анализа / под ред. К.А. Рыбникова. – Серия: Математика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1980.
11. Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. – М.: Мир, 1966.
12. Редфилд Дж.Г. Теория распределений, приведенных по группе / В сб. переводов «Перечислительные задачи комбинаторного анализа» / под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1979. – С. 9–35.
13. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: ИЛ, 1963.
14. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1969. – Вып. 1; 1985. – Вып. 2.
15. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982.
16. Сачков В.Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. – М.: Наука, 1978.
17. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1978.
18. Холл М. Комбинаторный анализ / Под ред. К.А. Рыбникова. – М.: ИЛ, 1963.
19. Холл М. Комбинаторика / Пер. С.А. Широковой. – М.: Мир, 1963.
20. Andrews G.E. On the foundations of combinatorial theory 5: Eulerian differential operators // Studies in applied mathematics. MIT. – 1971. – № 50. – V. 4. – P. 345–375.
21. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. – Leipzig, 1900–1908. – Bd. I–IV.
22. Cayley A. The collected mathematical papers. – Cambridge, 1889–1897. – Vol. 1–13.



23. *Crapo H., Rota G.C.* On the foundations of combinatorial theory **2**: Combinatorial geometries // Studies in applied mathematics. MIT. – 1970. – № 49. – P. 109–133.
24. *Doubilet P.* On the foundations of combinatorial theory **7**: Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy // Studies in applied mathematics. MIT, 1972. – Vol. 4., № 51. – P. 377–396.
25. *Doubilet P., Rota G.C., Stanley R.* On the foundations of combinatorial theory **6**: The idea of generating functions // Proc. 6-th Berkeley symposium on Math. Stat. and Probability. – Univ. California Press, 1972. – Vol. 2. – P. 267–318.
26. *Doubilet P., Rota G.C., Stein J.* On the foundations of combinatorial theory **9**: Combinatorial methods in invariant theory // Studies in applied mathematics. MIT. – 1974. – № 53. – P. 185–216.
27. *Goldman J., Rota G.C.* On the foundations of combinatorial theory **4**: Finite vector spaces and Eulerian generating functions // Studies in applied mathematics. MIT. – 1970. – № 49. – P. 239–258.
28. *Hardy G.N., Ramanujan S.* Asymptotic formula in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc., 1918. – Ser. 2. – Vol. 17. – P. 75–115.
29. *MacMahon P.A.* Combinatorial Analysis. – Cambridge Univ. Press. – 1915–1916. – Vol. 1–2.
30. *Montucla J.* Historié des Mathématiques. – Paris, 1799–1802. – Vol. I–IV.
31. *Moore E.H.* Tactical Memoranda I–III // Amer. J. Math. – 1896. – V.18. – P. 264–303.
32. *Muir Th.* The theory of Determinants in the Historical order of its development. – London, 1906. – Vol. I; 1912. – Vol. II.
33. *Netto E.* Kombinatorik / Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. – Leipzig, 1898. – Bd. 1. – S. 28–46.
34. *Netto E.* Lehrbuch der Combinatorik. – Berlin, 1927. – 2-nd ed.
35. *Oettinger L.* Die Lehre von den Combinationen. – Freiburg, 1837.
36. *Polya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen // Act. Math., 1937. – № 68. – P. 145–254.
37. *Rota G.C.* On the foundations of combinatorial theory. **1**. Theory of Möbius functions // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits theorie, 1964. – Bd. 2. – № 4. – S. 340–364.
38. *Rota G.C.* The number of partitions of set // Amer. Math. Monthly, 1963. – Vol. 71. – C. 498–504.
39. *Rota G.C., Kahaner D., Odlyzko A.J.* On the foundations of combinatorial theory **8**: Finite operator calculus // Math. Ann. and Appl., 1973. – Vol. 3., № 42. – P. 684–760.
40. *Rota G.G., Mulli R.* On the foundations of combinatorial theory **3**: Theory of binomial enumerations // Graf theory and its applications. – N.Y.: Academic Press, 1970. – P. 167–203.
41. *Rothe H.A.* Über Permutationen in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente. – Hindenburg C.F. / Zweite summlung combinatorich – analitisher Abhandlungen. – Leipzig, 1820. – S. 263–305.
42. *Sylvester J.J.* The collected mathematical papers. – Cambridge, 1904–1912. – Vol. 1–4.