預測與驗證平面凸多邊形面積公式(I)

李輝濱

嘉義縣私立同濟高級中學

壹、前言：一個以對照歸納演繹出來的思維與預測

觀察同一系列之各種已知相異樣本數據集合，再採取其對映位置的數據現象來相互比較對照後，整理出這所有樣本集合之間具有某類一貫性共同規律秩序特質的方法，在邏輯上即稱為同類歸納推理法！

再重新審視本篇之參考文獻 1.所刊載出平面凸五邊形面積公式內容時，覺察到此公式的內涵形態並沒有符合一貫性共同規律秩序特質；此因公式中的 6 個 cosine 項裡每一單項的邊長乘積分佈明顯地露出不整齊一致！為了使這每一個 cosine 項皆能呈現一系列的完整規則性，作者精心思考，實際演算出一套角度修正參數法，終使平面凸多邊形面積公式內所有 cosine 項都能展現出完整規律秩序！

又參考已知文獻中的平面凸多邊形面積公式都是寫成各邊長與內角的 sine 函數關係式,。現在將平面凸多邊形面積公式改寫成各邊長與內角的 cosine 函數組合表示式；完成後，當著手進行全面比對平面凸四邊形，平面凸五邊形及平面凸六邊形等三種不同面積公式的內涵時，竟如作者所期望地發現這三組公式在推證過程中的相對映部分內容可被完美地歸納出具有連貫性共同規律秩序特質的！依循著這特定規律秩序研究細則即能清楚逐項地排列出正確完整的面積公式。也因為關注覺察到這個隱藏的規律特性，不禁興起無比信心，本能地欲藉此歸納出來的特徵嘗試直觀的先來預測出平面凸多邊形面積公式，再輔以實際理論運算來驗證檢視這些已由歸納領先臆測出的結果。

以下正文的敘述導證過程中，將詳盡地列舉闡述出預測多邊形面積公式的綜合規則，並逐步解說各種不同面積公式推證時，在規則下見證出他們相互之間的一致共同規律秩序關係！

貳、本文

在下列撰文推理演繹的運算過程中，須應用或對照到下述已知的數個基本數學性質：

一、數學基本性質--引理

引理 1　平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$ ，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的向量為 $\vec{V_1}$ ， $\overline{A_2A_3}=V_2$ 的

向量為 $\vec{V_2}$,⋯, $\overline{A_nA_1}=V_n$ 的向量為 $\vec{V_n}$ ，則此平面凸 n 邊形即為此 n 個向量按順序箭頭接箭尾 相加而成的封閉凸 n 邊形。

依向量加法性質知： $\sum_{m=1}^{n}\vec{V_m}=0=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}=0$

此處 θ_m 為 V_m 在直角座標平面上的方位角。 $\vec{i}$ 為正 X 軸方向的單位向量， $\vec{j}$ 為正 Y 軸方向的單位向量，再由平面正交座標系性質知：

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \quad 且 \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

現在，將頂點 A_1 置於直角座標平面上的原點 O，如下圖(1)，使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸，以使此 n 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內(含 X 軸)，則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \tag{1}$$

且

$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \tag{2}$$

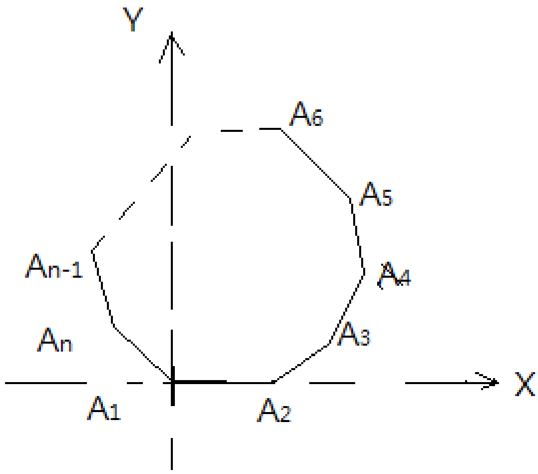

圖 1　凸 n 邊形

證明：由圖 1 知凸 n 邊形的內角依次為 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ ，而 V_1 的方位角 θ_1 為零， V_2 的方位角 θ_2 為 $\pi-A_2$ ， V_3 的方位角 θ_3 為 $(\pi-A_2)+(\pi-A_3)$ ， V_4 的方位角 θ_4 為 $(\pi-A_2)+(\pi-A_3)+(\pi-A_4),\ldots,V_n$ 的方位角 θ_n 為 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\ldots+A_n)$ 。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中： $\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$ 且 $\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$ ，則

$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$

$$=V_1+V_2\cos(\pi-A_2)+V_3\cos(2\pi-A_2-A_3)+\ldots+V_n\cos[(n-1)\pi-\sum_{k=2}^{n}A_k]=0$$

將上列等式改寫成下式：

得 $$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad (1)$$

同理，再得 $$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k]=0 \quad (2)$$

證明完成。

引理 1 的一組方程式(1)與(2)是因以線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 為底，疊置在 X 軸所求得的結果，若換成以 $\overline{A_2A_3}=V_2$ 為底，將求得類似的另一組方程式；以此類推，總共會得出 n 組。這 n 組方程式是非常好應用的，尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的關係式時至為有效！

引理 2 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 2

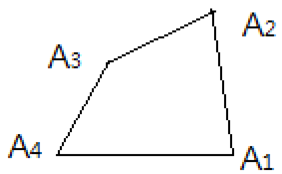

圖 2

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

$$V_4^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 1)

引理 3 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 2。令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，令此凸四邊形面積為 S(4)，則此凸四邊形的面積與各邊長及角度關係為

$$2\,S(4)=V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin(A_2+A_3)$$

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 1)

引理 4 在平面上給定一個**圓內接偶數邊多邊形** $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，n 為偶數，則此多邊形內角總和為 $A_1+A_2+A_3+A_4+....+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$

且 $$A_1+A_3+A_5+....+A_{n-3}+A_{n-1}=\frac{(n-2)}{2}\pi=A_2+A_4+A_6+....+A_{n-2}+A_n$$

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 1)

引理 5 在平面上給定一個凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$，如圖 3。

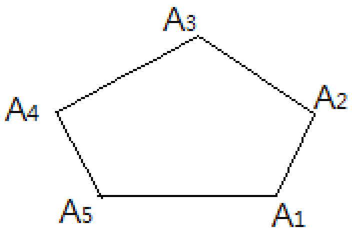

圖 3

則此凸五邊形的面積型餘弦公式為

$$V_5^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4 + 2V_1V_3\cos(A_2+A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3+A_4) - 2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)$$

證明：應用引理 1. 取 n=5 代入一組方程式(1)與(2), 並化簡可得

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_2+A_3+A_4) + V_5\cos A_1 \quad (1-1)$$

$$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_2+A_3+A_4) - V_5\sin A_1 = 0 \quad (2-1)$$

仿效這組方程式，令將方程式(1−1)及(2−1)換成 V_5 為底，可得下列兩；

$$V_5 = V_1\cos A_1 - V_2\cos(A_1+A_2) + V_3\cos(A_1+A_2+A_3) + V_4\cos A_5 \quad (1-5)$$

$$V_1\sin A_1 - V_2\sin(A_1+A_2) + V_3\sin(A_1+A_2+A_3) - V_4\sin A_5 = 0 \quad (2-5)$$

將方程式(1−5)等號兩側完全平方再加上(2−5)等號兩側完全平方,經化簡，

得 $V_5^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 - 2V_3V_4\cos A_4 + 2V_1V_3\cos(A_2+A_3) + 2V_2V_4\cos(A_3+A_4) - 2V_1V_4\cos(A_2+A_3+A_4)$

證明完成。

引理 6　在平面上給定一個凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，如圖 3.令線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$，$\overline{A_2A_3} = V_2$，$\overline{A_3A_4} = V_3$，$\overline{A_4A_5} = V_4$，$\overline{A_5A_1} = V_5$，令此凸五邊形面積為 **S(5)**，則此凸五邊形的面積與各邊長及角度關係為

$$\mathbf{2\ S(5)} = V_1V_2\sin A_2 + V_2V_3\sin A_3 + V_3V_4\sin A_4 - V_1V_3\sin(A_2+A_3) - V_2V_4\sin(A_3+A_4) + V_1V_4\sin(A_2+A_3+A_4)$$

證明：應用引理 3.將五邊形分割成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 和三角形 $A_1A_4A_5$,如圖 4.

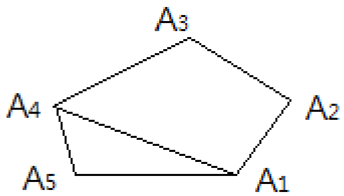

圖 4

則 **2 S(5) =** $[V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin(A_2+A_3)]+V_4V_5\sin A_5$

接下來仿效方程式(2−1) ,但要換成以 V_4 為底，可得下式；

$$V_5\sin A_5-V_1\sin(A_5+A_1)+V_2\sin(A_5+A_1+A_2)-V_3\sin A_4=0 \qquad (2-4)$$

將(2−4)式移項,得 $V_5\sin A_5=V_1\sin(A_5+A_1)-V_2\sin(A_5+A_1+A_2)+V_3\sin A_4$

代入 **2 S(5)**中，得 **2 S(5) =** $V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin(A_2+A_3)+$

$$V_4[V_1\sin(A_5+A_1)-V_2\sin(A_5+A_1+A_2)+V_3\sin A_4]$$

而 $\sin(A_5+A_1)=\sin(A_2+A_3+A_4)$， $\sin(A_5+A_1+A_2)=\sin(A_3+A_4)$

轉換內角，整理後得

$$\mathbf{2\,S(5)}=V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3+V_3V_4\sin A_4-V_1V_3\sin(A_2+A_3)-V_2V_4\sin(A_3+A_4)+V_1V_4\sin(A_2+A_3+A_4)$$

證明完成。

二、預測平面凸多邊形面積公式的綜合規則

計算平面凸多邊形面積公式時，因得到的公式內文很長,在文稿書寫上以面積的平方式公式表示較為方便適當。面積在數學運算上的量綱是長度的平方，而面積平方的量綱則是邊長的四次方！因此面積平方式公式裡的每一項都必須以邊長的四次方為基本量再乘上某些無量綱的實數係數或三角函數。

理論上計算面積時採取將多邊形分割成兩個相等邊數的小多邊形或只差一個邊數的兩個小多邊形，再利用 A.引理中的餘弦定理及面積關係式聯立解出；如此推演出的面積公式即能展現出最精簡的一貫性共同規律秩序特質！

以下為作者比對研究歸納出的 5 個綜合規則，用來預測多邊形面積的平方式公式，這些被預測出的每一個原型凸多邊形面積平方式公式的內容恰好共分成三部份；任給一平面凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_{m-2}A_{m-1}A_mA_{m+1}\cdots A_{n-1}A_n$，令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2,\cdots,\overline{A_{m-2}A_{m-1}}=V_{m-2}$，$\overline{A_{m-1}A_m}=V_{m-1}$，$\overline{A_mA_{m+1}}=V_m$，$\overline{A_{m+1}A_{m+2}}=V_{m+1}$，⋯，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，$4\le n$，$n$ 為正整數，且令 $m=\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1+(-1)^n}{4}$，現在連接 A_1 和 A_m 兩頂點，形成一對角線 $\overline{A_mA_1}$ 將此凸 n 邊形分割成兩個小多邊形。

(一) 此平面凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_{m-1}A_mA_{m+1}\cdots A_{n-1}A_n$ 被分割成兩個小多邊形，分別為多邊形 $A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m$ 和多邊形 $A_mA_{m+1}\cdots A_nA_1$，兩個小多邊形的共同邊長在公式中是不存在的，而其餘還各自有 m−1 和 n−m＋1 個邊長分別為 $V_1,V_2,V_3,\dots,V_{m-1}$ 和 $V_m,V_{m+1},\dots,V_{n-1},V_n$ 形成兩組不同的邊長集合，現在先從每一組邊長集合內各自任取 2 相異邊長相乘，之後使每一乘積再各自完全平方，最後再將所有兩組的平方項相加，這樣就構成了被預

測出的公式中第一部份[ ]內的平方項的和。此[ ]內共有 [(m−1)(m−2)+(n−m＋1)(n−m)]/2 項，這完整的第一部份應記為下列型式；

$$\frac{1}{4}[(V_1V_2)^2+(V_1V_3)^2+\ldots+(V_1V_{m-1})^2+(V_2V_3)^2+(V_2V_4)^2+\ldots+(V_2V_{m-1})^2+(V_3V_4)^2+\ldots+$$
$$(V_{m-2}V_{m-1})^2+(V_mV_{m+1})^2+(V_mV_{m+2})^2+\ldots+(V_mV_n)^2+(V_{m+1}V_{m+2})^2+(V_{m+1}V_{m+3})^2+\ldots+$$
$$(V_{m+1}V_n)^2+(V_{m+2}V_{m+3})^2+\ldots+(V_{m+2}V_n)^2+(V_{m+3}V_{m+4})^2+\ldots+(V_{n-1}V_n)^2]$$

第一部份[ ]前的係數 1/4 則是計算過程中獲得之必然常數。

詳細檢視，可注意到上列中每一項的量綱都圓滿地呈現出邊長的四次方！

(二) 由第一組邊長集合 $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{m-1}$ 中依序取出各個邊長各自平方和 $V_1^2+V_2^2+V_3^2+\cdots+V_{m-2}{}^2+V_{m-1}{}^2$，再減去第二組邊長集合 $V_m, V_{m+1}, \ldots, V_{n-1}, V_n$ 的各個邊長各自平方和 $V_m{}^2+V_{m+1}{}^2+\ldots+V_{n-1}{}^2+V_n{}^2$，如此就構成了公式中第二部份( )之平方內的 n 個項。這完整的第二部份應記為下列型式；

$$-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2+V_3^2+\ldots+V_{m-2}{}^2+V_{m-1}{}^2-V_m{}^2-V_{m+1}{}^2-\ldots-V_{n-1}{}^2-V_n{}^2)^2$$

而係數 −1/16 也是演算時獲得之必然常數。又再度見到這第二部份展開式後其內容的每一項量綱都是邊長的四次方！

(三) 公式中組成第三部分的每一項是由此多邊形 4 個不同邊長乘積再乘上 cosine 函數所構成的。所有 cosine 項前的係數 1/2 也是運算出的必然常數，在第三部分裡呈現出所有 cosine 項的總項數恰好等於由 n 邊形中任取 4 個不同邊長的選法數目，即共有 $C(n,4)=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$ 項，每項都由 4 個不同邊長乘積組成；這麼多項須按邊長右下標數字的順序循環排列，形成以下各循環組；

第 1 循環組：1234, 2345, 3456, 4567, 5678,…,$(n-2)(n-1)n1$, $(n-1)n12$, $n123$

第 2 循環組：1235, 2346, 3457, 4568, 5679,…,$(n-2)(n-1)n2$, $(n-1)n13$, $n124$

第 3 循環組：1236, 2347, 3458, 4569,…,$(n-2)(n-1)n3$, $(n-1)n14$, $n125$

…

一直排列到所有的 C(n, 4)項都出現為止，而且每一項都不得重複！

例 1：六邊形循環組如下；

第 1 循環組：$V_1V_2V_3V_4$，$V_2V_3V_4V_5$，$V_3V_4V_5V_6$，$V_4V_5V_6V_1$，$V_5V_6V_1V_2$，$V_6V_1V_2V_3$

第 2 循環組：$V_1V_2V_3V_5$，$V_2V_3V_4V_6$，$V_3V_4V_5V_1$，$V_4V_5V_6V_2$，$V_5V_6V_1V_3$，$V_6V_1V_2V_4$

第 3 循環組：$V_1V_2V_4V_5$，$V_2V_3V_5V_6$，$V_3V_4V_6V_1$，總共有 C(6, 4) = 15 個不同項。

(四) 第三部份每一 cosine 項( )裡呈現的角度組合則以下述之內角排列法則來規範；內角排列法則是根據每一個 cosine 項前的 4 個邊長係數右下標數字來決定，請看第一個 cosine

項係數為 $V_1V_2V_3V_4$ ，將其分成前後兩對，前一對是 V_1V_2 這 V_1 與 V_2 的兩個邊長在多邊形圖形上所夾的角度是 A_2。而後一對 V_3 與 V_4 在多邊形圖形上所夾的角度是 A_4。這 A_2+A_4 就是出現於第一個 cosine 項( )內的角度排列，組合起來就成為 $V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)$！

再看九邊形某一個 cosine 項係數為 $V_6V_7V_8V_2$，將其分成前後兩對，前一對是 V_6V_7，這 V_6 與 V_7 的兩個邊長在多邊形圖形上所夾的角度是 A_7。而後一對 V_8 與 V_2 在九邊形圖形上依由 V_8 到 V_2 順序所夾的角度是 $A_9+A_1+A_2$。這 $A_7+A_9+A_1+A_2$ 就是出現於這 cosine 項( )內的角度排列，組合起來成為 $V_6V_7V_8V_2\cos(A_7+A_9+A_1+A_2)$！面積平方式公式任一 cosine 項( )裡的角度組合都以上述之內角排列法則來操作。像這個 $V_6V_7V_8V_2$ 的 cosine 項在面積公式推導過程中是不會直接出現的，而是需要透過引理 1.與應用角度修正參數法間接轉換得到的。多數的 cosine 項皆能直接求出，而不少部分項需要經由間接轉換而得,這在驗證篇幅裡就可讀到。

(五) 第三部份各 cosine 項循環組自然出現的正負符號則按下列規律形成；詳盡比對所有 cosine 項各對映位置的內容,發現任一 cosine 項的( )內所出現角度組合之內角個數與其本身的正負符號之間存在著特定的關聯性！這個被歸納出的相關性特徵如下;令任給一 cosine 項的四個邊長係數為 $V_aV_xV_bV_y$ ，將此係數分成前後兩對；前一對是 V_aV_x，這兩個邊長 V_a 與 V_x 依順序由 a 至 x 在多邊形上所夾的內角數目有 k_1 個。而後一對是 V_bV_y ，這兩個邊長 V_b 與 V_y 依順序由 b 至 y 在多邊形上所夾的內角數目有 k_2 個。令 $k_1+k_2=k$ ， k 即為 cosine 項( )內的角度總數目，因為面積公式中 cosine 項的係數結構都是由此前後兩對邊長相乘運算得來，故這被歸納出的正負符號關係式為$(-1)^{k+1}$，意即由 cosine 項( )內的角度總數目來決定正負符號。當 cosine 項( )內的角度總數目為奇數時，此 cosine 項係數為正。當 cosine 項( )內的角度總數目為偶數時，此 cosine 項係數為負。因此第三部分每一個 cosine 項的完整敘述應記為下列型式；

$$(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}V_aV_xV_bV_y\cos(A_{x-(k_1-1)}+\cdots+A_{x-1}+A_x+A_{y-(k_2-1)}+\cdots+A_{y-1}+A_y)。$$

若 $x-1, x-2, \ldots, x-(k_1-1)$中任一個出現負數或零,那麼這個負數或零必須加上原凸多邊形的總邊數使其為正。同樣地，$y-1, y-2, \ldots, y-(k_2-1)$亦是如此。

例 2：平面凸九邊形由邊長係數為 $V_5V_6V_7V_2$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^{5+1}\cdot\frac{1}{2}V_5V_6V_7V_2\cos(A_6+A_8+A_9+A_1+A_2)=\frac{1}{2}V_5V_6V_7V_2\cos(A_6+A_8+A_9+A_1+A_2)$$

例 3：平面凸九邊形由邊長係數為 $V_4V_5V_7V_1$ 所帶領的一個完整 cosine 項為

$$(-1)^{4+1}\cdot\frac{1}{2}V_4V_5V_7V_1\cos(A_5+A_8+A_9+A_1)=-\frac{1}{2}V_4V_5V_7V_1\cos(A_5+A_8+A_9+A_1)$$

由遵循上述的 5 個綜合規則即可用來預測原型平面凸多邊形面積平方式公式。

三、預測平面凸多邊形面積平方式公式與驗證

(一) 平面凸四邊形

a. 預測原型面積平方式公式

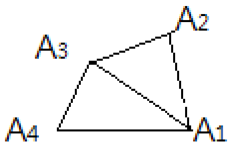

圖 5

如圖 5. $n=4$，則 $m=3$, 故連接兩個頂角 A_3 與 A_1 使形成一對角線 $\overline{A_3A_1}$ ，將此凸四邊形分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 和另一個三角形 $A_3A_4A_1$ ，再參照 B.的 5 個綜合規則，先預測出這平面凸四邊形面積平方式公式如下；

$$[S(4)]^2=\frac{1}{4}[\,(V_1V_2)^2+(V_3V_4)^2\,]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2\,)^2-\frac{1}{2}V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \tag{4−1}$$

此方程式**(4−1)**式就是 **原型的平面凸四邊形面積平方式公式！** 繼續運算，得

$$[S(4)]^2=\frac{1}{16}[\,(2V_1V_2)^2+(2V_3V_4)^2-(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2\,)^2+8V_1V_2V_3V_4\,]-\frac{1}{2}V_1V_2V_3V_4[\cos(A_2+A_4)+1]$$

$$=\frac{1}{16}[\,(2V_1V_2+2V_3V_4)^2-(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2\,)^2\,]-V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})$$

$$=\frac{1}{16}[(V_1+V_2)^2-(V_3-V_4)^2]\,[(V_3+V_4)^2-(V_1-V_2)^2]-V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})$$

再因式分解，即得

$$[S(4)]^2=\frac{1}{16}(V_1+V_2+V_3-V_4)\,(V_2+V_3+V_4-V_1)\,(V_3+V_4+V_1-V_2)\times$$

$$(V_4+V_1+V_2-V_3)-V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2}) \tag{4−2}$$

方程式(4−2)式即為著名的 Bretschneider 平面凸四邊形面積平方式公式！這立即驗證出原型平面凸四邊形面積平方式公式的(4−1)式是完全正確！

b. 令 $S(4)_{circle}$ 為圓內接四邊形的面積，因 $A_2+A_4=\pi$ ，則(4−2)式化簡變成下式；

$$[S(4)_{circle}]^2=\frac{1}{16}(V_1+V_2+V_3-V_4)\,(V_2+V_3+V_4-V_1)\,(V_3+V_4+V_1-V_2)\times(V_4+V_1+V_2-V_3) \tag{4−3}$$

(4−3)式即為著名的 Brahmagupta 圓內接四邊形面積平方式公式！

（二）平面凸五邊形

a. 預測原型面積平方式公式

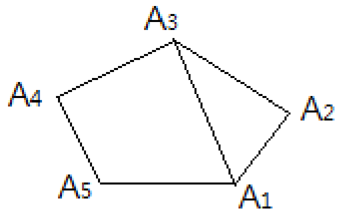

圖 6

見圖 6. $n=5$，則 $m=3$，故連接兩個頂角 A_3 與 A_1 使形成一對角線 $\overline{A_3A_1}$，將此凸五邊形分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 和另一個四邊形 $A_3A_4A_5A_1$，再參照 B.的 5 個綜合規則，先預測出平面凸五邊形面積平方式公式如下；

$$[S(5)]^2=\frac{1}{4}[\,(V_1V_2)^2+(V_3V_4)^2+(V_4V_5)^2+(V_3V_5)^2\,]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2\,)^2-$$
$$\frac{1}{2}[\,V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)+V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)+V_3V_4V_5V_1\cos(A_4+A_1)+$$
$$V_4V_5V_1V_2\cos(A_5+A_2)+V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)\,] \qquad (5-1)$$

此方程式 **(5-1)**式就是 **原型的平面凸五邊形面積平方式公式！**

若令 $V_5=0$，使頂點 A_5 趨近於 A_1，則平面凸五邊形即退化成平面凸四邊形，而方程式(5−1)式即退化成(4−1)式！

令圓內接五邊形的面積為 $S(5)_{circle}$，由圓內接奇數邊形的性質知圓內接五邊形 5 個內角之間任 2 個內角和無任何其它特殊關係, 故此**方程式 (5−1) 式也是原型的圓內接五邊形面積平方式公式！**則 $[S(5)_{circle}]^2=[S(5)]^2 \qquad (5-1)$

b. **驗證**

如圖 6. 將五邊形分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 和四邊形 $A_1A_3A_4A_5$，則由餘弦定理及引理 2，

得 $V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2=2\,V_1V_2\cos A_2-2\,V_3V_4\cos A_4-2\,V_4V_5\cos A_5+2\,V_3V_5\cos\left(A_4+A_5\right) \qquad (5-2)$

而應用引理 3. 得五邊形面積關係式為

$$\mathbf{2\ S(5)}=V_1V_2\sin A_2+V_3V_4\sin A_4+V_4V_5\sin A_5-V_3V_5\sin\left(A_4+A_5\right) \qquad (5-3)$$

則由(5−2)式的平方加上(5−3)式的平方，再經化簡，得

$$4\left[S(5)\right]^2+\frac{1}{4}(\,V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2\,)^2$$
$$=(V_1V_2)^2+(V_3V_4)^2+(V_4V_5)^2+(V_3V_5)^2-2\,V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)-2\,V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)+$$
$$2\,V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)-2\,V_3V_4V_5^2\cos A_4-2\,V_3^2V_4V_5\cos A_5+2$$

$V_3V_4^2V_5\cos(A_4-A_5)$　(5−4)

現在首先要注意的是那些帶有 cosine 的六個項，由觀察(5−4)式最後 3 項，發覺每一項都出現一個邊長的平方。依據思考的理解; 每一 cos 項都只能出現 4 個完全相異邊長的乘積，而對照歸納也顯示凸五邊形每一 cosine 項都需僅出現 4 個不同邊長乘積，由組合原理知；總共只能有 5 個 cosine 項數，故這最後 3 個有邊長平方的項必須被修正成只有 4 個不同邊長乘積的 2 項！令這最後 3 個有邊長平方的項為 R，則

$$\begin{aligned} R &= -2V_3V_4V_5^2\cos A_4 - 2V_3^2V_4V_5\cos A_5 + 2V_3V_4^2V_5\cos(A_4-A_5) \\ &= -2V_3V_4V_5\cdot[V_3\cos A_5 - V_4\cos(A_4-A_5) + V_5\cos A_4] \end{aligned} \tag{5−4a}$$

(5−4a)式的[ ]內 3 個項要修正變換成 $V_1\cos X$ 和 $V_2\cos Y$ 的組合！

即　$$V_3\cos A_5 - V_4\cos(A_4-A_5) + V_5\cos A_4 = V_1\cos X + V_2\cos Y \tag{5−4b}$$

(5−4b)式的內涵呈現出五個邊長的各項組合，要尋找到這樣的型式就必須回到引理 1. 的方程式(1−1)及(2−1)，仔細比對方程式(1−1)及(5−4b)式發覺此五邊形的內角須分成兩組； A_1, A_4 為一組，而 A_2, A_3, A_5 為另一組！將多邊形所有內角分成兩組的組合情形有很多種，需要詳盡比對才能找到最適合的兩組組合。

角度修正參數法：

角度修正參數法 是作者獨自精心研究思考所發現到既有理論又能正確的找出(5−4b)式的方法！以下即為角度修正參數法的應用；

平面凸五邊形內角總和為 3π，令 φ 為角度修正參數，並設定 $A_1+A_4=\frac{3}{2}\pi-\varphi$ 且 $A_2+A_3+A_5=\frac{3}{2}\pi+\varphi$ ，將這 2 個組合代入方程式(1−1)及(2−1)中；得

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_2+A_3+A_4) + V_5\cos A_1 \tag{1−1}$$

$$V_1 = V_2\cos(\frac{3\pi}{2}+\varphi-A_3-A_5) - V_3\cos(\frac{3\pi}{2}+\varphi-A_5) + V_4\cos(\frac{3\pi}{2}+\varphi+A_4-A_5) + V_5\cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi-A_4)$$

$$\begin{aligned} &= V_2\sin(\varphi-A_3-A_5) - V_3\sin(\varphi-A_5) + V_4\sin(\varphi+A_4-A_5) - V_5\sin(\varphi+A_4) \\ &= \sin\phi\cdot[V_2\cos(A_3+A_5) - V_3\cos A_5 + V_4\cos(A_4-A_5) - V_5\cos A_4] \\ &\quad + \cos\phi\cdot[-V_2\sin(A_3+A_5) + V_3\sin A_5 + V_4\sin(A_4-A_5) - V_5\sin A_4] \end{aligned} \tag{5−5a}$$

另 $$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_2+A_3+A_4) - V_5\sin A_1 = 0 \tag{2−1}$$

$$V_2\sin(\frac{3\pi}{2}+\varphi-A_3-A_5) - V_3\sin(\frac{3\pi}{2}+\varphi-A_5) + V_4\sin(\frac{3\pi}{2}+\varphi+A_4-A_5) - V_5\sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi-A_4) = 0,$$

展開此等式，得

$$\begin{aligned} 0 &= -V_2\cos(\varphi-A_3-A_5) + V_3\cos(\varphi-A_5) - V_4\cos(\varphi+A_4-A_5) + V_5\cos(\varphi+A_4) \\ &= \cos\varphi\cdot[-V_2\cos(A_3+A_5) + V_3\cos A_5 - V_4\cos(A_4-A_5) + V_5\cos A_4] \end{aligned}$$

$+\ \sin\varphi\cdot[-V_2\sin(A_3+A_5)+V_3\sin A_5+V_4\sin(A_4-A_5)-V_5\sin A_4]$ (5−5b)

現在令 $P_5=V_2\cos(A_3+A_5)-V_3\cos A_5+V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4$

$Q_5=-V_2\sin(A_3+A_5)+V_3\sin A_5+V_4\sin(A_4-A_5)-V_5\sin A_4$

則 (5−5a)式 變成 $V_1=\sin\varphi\cdot P_5+\cos\varphi\cdot Q_5$ (5−6a)

(5−5b)式 變成 $0=\cos\varphi\cdot(-P_5)+\sin\varphi\cdot Q_5$ (5−6b)

聯立解(5−6a)式與(5−6b)式，得 $V_1\cos\varphi=Q_5$ 且 $V_1\sin\varphi=P_5$

而 $\cos(A_1+A_4)=\cos(\frac{3}{2}\pi-\varphi)=-\sin\varphi$，代入 $V_1\sin\varphi=P_5$ 中，得

$-V_1\cos(A_1+A_4)=V_2\cos(A_3+A_5)-V_3\cos A_5+V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4$

移項整理後即找到(5−4b)式的下述修正型式(5−4c)了；

$$V_3\cos A_5-V_4\cos(A_4-A_5)+V_5\cos A_4=V_1\cos(A_1+A_4)+V_2\cos(A_3+A_5) \quad (5-4c)$$

將(5−4c)式代回(5−4a)式，再一起代回(5−4)式，再將 $\cos(A_2+A_4+A_5)$ 轉換成 $-\cos(A_1+A_3)$，即得下列(5−7)式；

$$4[S(5)]^2+\frac{1}{4}(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2)^2$$

$$=(V_1V_2)^2+(V_3V_4)^2+(V_4V_5)^2+(V_3V_5)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)-2V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)$$

$$-2V_3V_4V_5V_1\cos(A_4+A_1)-2V_4V_5V_1V_2\cos(A_5+A_2)-2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3) \quad (5-7)$$

將 (5−7)式再移項，化簡，最後整理得到所期待的下式；

$$[S(5)]^2=\frac{1}{4}[(V_1V_2)^2+(V_3V_4)^2+(V_4V_5)^2+(V_3V_5)^2]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2)^2-$$

$$\frac{1}{2}[V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)+V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)+V_3V_4V_5V_1\cos(A_4+A_1)+$$

$$V_4V_5V_1V_2\cos(A_5+A_2)+V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)] \quad (5-1)$$

驗證完成。驗證過程中可看到 $V_2V_3V_4V_5$ 及 $V_3V_4V_5V_1$ 兩項是需要經由轉換而間接獲得的。角度修正參數法在演算過程中必扮演重要且決定性的任務。

***c.* 將(5−1)式前兩項組合後再分解，則持續運算如下；**

$$[S(5)]^2=\frac{1}{16}[(2V_1V_2)^2+(2V_3V_4)^2+(2V_4V_5)^2+(2V_3V_5)^2+8V_1V_2V_3V_4+8V_4V_5V_1V_2+$$

$$8V_5V_1V_2V_3+8V_3^2V_4V_5+8V_3V_4^2V_5+8V_3V_4V_5^2]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2)^2-$$

$$\frac{1}{2}\{V_1V_2V_3V_4[\cos(A_2+A_4)+1]+V_2V_3V_4V_5[\cos(A_3+A_5)+1]+V_3V_4V_5V_1[\cos(A_4+A_1)+1]+$$

$$V_4V_5V_1V_2[\cos(A_5+A_2)+1]+V_5V_1V_2V_3[\cos(A_1+A_3)+1]\}+\frac{1}{2}V_3V_4V_5(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5)$$

$$=\frac{1}{16}[(2V_1V_2+2V_3V_4+2V_4V_5+2V_3V_5)^2-(V_1^2+V_2^2-V_3^2-V_4^2-V_5^2)^2]-$$

$$\frac{1}{2}\{V_1V_2V_3V_4[\cos(A_2+A_4)+1]+V_2V_3V_4V_5[\cos(A_3+A_5)+1]+V_3V_4V_5V_1[\cos(A_4+A_1)+1]$$

$$+V_4V_5V_1V_2[\cos(A_5+A_2)+1]+V_5V_1V_2V_3[\cos(A_1+A_3)+1]\}+\frac{1}{2}V_3V_4V_5(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5)$$

將第 1 項作因式分解並將 cosine 化成半角，則得

$$[S(5)]^2=\frac{1}{16}(V_2+V_3+V_4+V_5-V_1)\times(V_3+V_4+V_5+V_1-V_2)\times$$

$$[(V_1+V_2)^2-(V_3-V_4)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_3)^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2]+$$

$$\frac{1}{2}V_3V_4V_5(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5)-[V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})+V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})+$$

$$V_3V_4V_5V_1\cos^2(\frac{A_4+A_1}{2})+V_4V_5V_1V_2\cos^2(\frac{A_5+A_2}{2})+V_5V_1V_2V_3\cos^2(\frac{A_1+A_3}{2})]$$

$$=[S(5)_{circle}]^2 \qquad (5-8)$$

(5−8)式 即為半角型平面凸五邊形與圓內接五邊形面積平方式公式！

若令 $V_5=0$，使頂點 A_5 趨近至 A_1，則(5−8)式退化成(4−2)式的 Bretschneider 公式！

(待續)