ПРОТОКОЛЫ

С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО

МАТЕМАТИЧЕСКАГО

ОБЩЕСТВА.

1890—1899.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія В. Киршбаума, Дворц. пл., д. М-ва Финансовъ.
1899.

Протоколъ засѣданія 20 октября 1890 года.

Среди лицъ, интересующихся математическими науками, созрѣла мысль устроить въ С.-Петербургѣ Математическое Общество. Съ этою цѣлью 20 октября 1890 года, по приглашенію В. І. Шиффъ, на ея квартирѣ собрались слѣдующія лица: В. Г. Имшенецкій, О. А. Баклундъ, Ю. В. Сохоцкій, А. А. Марковъ, П. Е. Рощинъ, Д. А. Граве, В. В. Витковскій, П. М. Новиковъ, И. Л. Пташицкій, Д. Ф. Селивановъ, Н. А. Забудскій, И. В. Мещерскій, І. А. Клейберъ, В. И. Станевичъ, И. И. Ивановъ, Н. П. Коломійцевъ, В. І. Шиффъ и П. А. Шиффъ. Сверхъ того получена телеграмма отъ Н. Я. Цингера съ выраженіемъ сочувствія зарождающемуся обществу и сожалѣнія, что онъ не можетъ присутствовать на этомъ засѣданіи; К. А. Поссе, А. Н. Коркинъ, Д. К. Бобылевъ и А. М. Ждановъ увѣдомили, что они не могутъ присутствовать на этомъ засѣданіи, причемъ Д. К. Бобылевъ просилъ включить въ число отдѣловъ математики, которые будутъ подлежать занятіямъ общества, — математическую физику.

Въ этомъ засѣданіи происходило слѣдующее:

1) Присутствовавшіе просили В. Г. Имшенецкаго руководить занятіями въ этомъ засѣданіи и сообщить собранію, какимъ образомъ возникло, при его содѣйствіи, математическое общество въ Харьковѣ. В. Г. Имшенецкій исполнилъ желаніе присутствовавшихъ.

2) Происходили выборы членовъ бюро, причемъ выбраны: предсѣдателемъ В. Г. Имшенецкій, товарищемъ предсѣдателя — Ю. В. Сохоцкій и секретаремъ — П. А. Шиффъ.

3) Обсуждался вопросъ о цѣляхъ общества и о желательности вообще учрежденія его. Относительно послѣдняго вопроса были высказаны мнѣнія за и противъ учрежденія общества.

4) Обсуждался вопросъ, гдѣ собираться для слѣдующихъ засѣданій общества.

При этомъ предсѣдатель заявилъ, что, имѣя въ виду удобство большинства членовъ, и желая поэтому, чтобы засѣданія происходили въ центральномъ по возможности мѣстѣ, онъ обратился къ Директору Физическаго Кабинета Академіи Наукъ Генриху Ивановичу Вильду съ просьбою разрѣшить обществу собираться въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ. На эту просьбу Г. И. Вильдъ не только изъявилъ согласіе, но обѣщалъ заботиться о нѣкоторыхъ удобствахъ, необходимыхъ для занятій общества, для чего нужно только его заблаговременно увѣдомлять о днѣ засѣданія. Кромѣ того необходимо на это испросить разрѣшеніе Его Императорскаго Высочества Президента Академіи Наукъ. Испросить это разрѣшеніе у Его Императорскаго Высочества взялъ на себя предсѣдатель общества.

Заявленіе предсѣдателя было встрѣчено весьма сочувственно присутствовавшими и рѣшено выразить Г. И. Вильду признательность общества за его согласіе устроить его засѣданія въ физическомъ кабинетѣ Академіи Наукъ.

5) Для засѣданія рѣшено собираться одинъ разъ въ мѣсяцъ, въ день, по возможности, однообразный, если возможно, послѣ 15-го числа.

6) Рефераты допускаются по слѣдующимъ отдѣламъ математики:

1) по чистой математикѣ,
2) по теоретической механикѣ,
3) по теоретической астрономіи,
4) по математической физикѣ.

Рефераты должны быть направлены къ секретарю, который по указанію предсѣдателя и его товарища, устанавливаетъ имъ очередь и сообщаетъ членамъ, какіе рефераты будутъ доложены въ данномъ засѣданіи.

7) Въ новые члены общества избираются лица по предложенію членовъ общества.

8) О днѣ и часѣ засѣданія секретарь извѣщаетъ членовъ повѣстками. Слѣдующее засѣданіе назначено 20 ноября.

Протоколъ засѣданія 20 ноября 1890 года.

1) Секретарь прочелъ протоколъ прежняго засѣданія и списокъ членовъ общества; всѣхъ членовъ оказалось 36.

2) Предсѣдатель сообщилъ собранію: 1) что Его Императорское Высочество Президентъ Академіи Наукъ разрѣшилъ обществу имѣть свои засѣданія въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ, и 2) что объ основаніи С.-Петербургскаго математическаго общества имъ пресѣдателемъ доложено Господину Министру народнаго просвѣщенія, причемъ Его Сіятельство Господинъ Министръ, выразивъ сочувствіе обществу, сказалъ, что общество, если желаетъ, можетъ не торопиться представленіемъ на утвержденіе устава, и что до утвержденія устава общества—никакихъ препятствій его занятіямъ не предвидится.

3) Обсуждался вопросъ слѣдуетъ ли назначить для засѣданій общества, имѣющихъ быть одинъ разъ въ мѣсяцъ, какой нибудь опредѣленный день недѣли, или же слѣдуетъ фиксировать число мѣсяца.

Имѣя въ виду, что при назначеніи для засѣданій какого нибудь дня недѣли, многіе члены, вслѣдствіе своихъ занятій, не въ состояніи будутъ вовсе посѣщать засѣданія общества, собраніе постановило назначить засѣданія общества на каждое 15-е число мѣсяца, если къ тому не встрѣтится препятствій.

4) Для покрытія нѣкоторыхъ мелкихъ расходовъ собраніе постановило сдѣлать складчину по одному рублю, предоставивъ секретарю, если сумма окажется недостаточною, доложить объ этомъ обществу.

5) В. Г. Имшенецкій сообщилъ собранію содержаніе законченной имъ работы: «Объ интегрированіи общихъ линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій и о способѣ нахожденій вспомогательныхъ уравненій, изъ которыхъ одно есть извѣстное союзное уравненіе Лагранжа, другія же аналогичны уравненію Лагранжа».

6) Слѣдующее засѣданіе назначено на 15-е декабря.

Протоколъ засѣданія 15 декабря 1890 г.

Въ этомъ засѣданіи были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ. «Объ интегрированіи системы совокупныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ втораго порядка вида:

$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\Delta_2 U_1=\frac{\partial^2 U_1}{\partial t_2}+X_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\Delta_2 U_2=\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}+X_2(x_1, \ldots x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_n}+\Delta_2 U_n=\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}+X_n(x_1, x_2 \ldots\ x_n),$$

гдѣ: $\theta=\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\ldots+\frac{\partial U_n}{\partial x_n}$; $\Delta_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}$;

a — постоянное».

2) И. И. Ивановъ. «О нѣкоторыхъ суммахъ, зависящихъ отъ простыхъ чиселъ».

3) Г. Ѳ. Вороной, по поводу сообщенія И. И. Иванова, привелъ нѣкоторыя библіографическія справки.

4) Д. Ф. Селивановъ. «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ». Были изложены новыя доказательства теоремъ, относящихся къ вопросу о разложеніи корня уравненія 2-й степени въ непрерывную дробь.

5) Были предложены и приняты въ члены общества: Аксель Робертовичъ Бонсдорфъ, Вѣра Владиміровна Щиглева и Николай Николаевичъ Пироговъ.

6) Слѣдующее засѣданіе назначено на 15 января.

Протоколъ засѣданія 15 января 1891 г.

1) Были предложены и приняты въ члены общества: Николай Юльевичъ Старынкевичъ, Сергѣй Евгеньевичъ Савичъ, Александръ Ивановичъ Гольденбергъ и Александръ Васильевичъ Муромцевъ.

2) Присланы въ даръ обществу слѣдующія сочиненія: 1) Бугаевъ. Одна общая теорема теоріи алгебраическихъ кривыхъ высшаго порядка, 2) Бугаевъ и Лахтинъ. Объ уравненіяхъ пятой степени, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ.

3) Д. Ф. Селивановъ, возвратясь изъ Москвы, заявилъ, что Московское Математическое Общество просило его передать привѣтствіе и выразить сочувствіе С.-Петербургскому Математическому Обществу.

4) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) А. Д. Путята. «Замѣчаніе относительно формулъ, выражающихъ соотношеніе между радіусами кривизнъ нормальныхъ сѣченій поверхности». Была выведена мнемоническая формула для суммы и произведенія кривизнъ нормальныхъ сѣченій.

б) Г. Ѳ. Вороной. «Объ опредѣленіи суммы квадратичныхъ вычетовъ простаго числа p—вида: $4m+3$ при помощи чиселъ Бернулли». Было показано, что соотвѣтствующая сумма R можетъ быть опредѣлена изъ слѣдующаго сравненія первой степени по простому модулю p:

$$\left(4\frac{R}{p}+1\right)\equiv(-1)^{\frac{p-3}{4}}4B_{\frac{p+1}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$$

$B_{\frac{p+1}{4}}$ — обозначаетъ $\left(\frac{p+1}{4}\right)^{e}$ Бернулліево число

Такъ какъ $\frac{R}{p}$ положительно и всегда меньше $\frac{p}{2}$, то наименьшее положительное рѣшеніе указаннаго сравненія вполнѣ опредѣляетъ величину $\frac{R}{p}$.

в) Н. Н. Пироговъ. «О примѣненіяхъ счисленія вѣроятностей къ аналитической механикѣ». Заявлено о слѣдующихъ теоремахъ:

1) Безконечно малое измѣненіе начальнаго состоянія системы N тѣлъ (или N частицъ), если $N>2$, производитъ конечное измѣненіе траэкторій ея частицъ;

2) Дифференціальныя уравненія движенія системы изъ N частицъ, въ общемъ случаѣ, кромѣ извѣстныхъ десяти, уже больше не имѣютъ *аналитическихъ* интеграловъ;

3) Траэкторіи частицъ такой системы, въ общемъ случаѣ, имѣютъ характеръ случайно начертанныхъ кривыхъ и потому къ изслѣдованію ихъ свойствъ приложимо счисленіе вѣроятностей.

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1891 г.

1) Предсѣдатель сообщилъ собранію о потерѣ, которую наука понесла въ лицѣ члена корреспондента Академіи Наукъ, профессора стокгольмскаго университета С. В. Ковалевской, и предложилъ собранію почтить память усопшей.

Собраніе почтило память С. В. Ковалевской вставаніемъ съ мѣстъ.

2) Были предложены и приняты въ члены общества: Викторъ Николаевичъ Стрекаловъ и Иванъ Францевичъ Сипайлло.

3) Въ письмѣ на имя предсѣдателя проф. С. П. фонъ Глазенапъ сообщилъ, что Францъ Рейнгольдовичъ Бенкенъ желаетъ принести въ даръ обществу книги. Предсѣдатель поручилъ секретарю общества снестись съ г. Бенкеномъ по этому поводу; при этомъ г. Бенкенъ прислалъ въ даръ обществу слѣдующія книги:

Lacroix. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1818.

Sawitsch. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen. 1863.

Minding. Handbuch der Differential — und Integral-Rechnung 1836.

Minding. Anfangsgründe der höheren Arithmetik.

Fort und Schlömilch. Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Auflage 1863.

Schlömilch. Handbuch der algebraischen Analysis. 3-e Auflage 1862.

Dienger. Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 2-e Auflage 1861.

Dienger. Die Differential — und Integralrechnung. 2-e Auflage 1862.

Schnuse. Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen. 1850.

Magnus. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analitischen Geometrie. I und II Theil. 1833.

Schlömilch. Grundzüge der Geometrie des Maasses. 3-e Auflage 1859.

Durège. Theorie der elliptischen Functionen. 1861.

Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. 2-e Auflage. 1864.

Baltzer. Die Elemente der Mathematik. 2-e Auf. 1865.

Helmling. Studien zur Integralrechung. 1866.

Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. 1832.

Brioschi. Theorie der Determinanten. 1856.

Собраніе рѣшило выразить Ф. Р. Бенкену признательность общества за его даръ.

Д. Ф. Селивановъ доставилъ отдѣльный оттискъ его статьи: «О функціяхъ разностей корней даннаго уравненія».

4) Предсѣдатель прочелъ письмо, адресованное на его имя Харьковскимъ Математическимъ Обществомъ, въ которомъ сообщается, что Харьковское Математическое Общество, будучи увѣдомлено объ открытіи дѣятельности С.-Петербургскаго Математическаго Общества, постановило выразить послѣднему его живое сочувствіе и искреннія пожеланія быстрыхъ и блестящихъ успѣховъ въ достиженіи научныхъ цѣлей; а также надежду, что единство цѣлей и взаимность интересовъ будутъ всегда служить прочною основою для связи и сношеній обоихъ обществъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ оно прислало для библіотеки С.-Петербургскаго Общества одинъ экземпляръ II-ой серіи сообщеній харковскаго математическаго общества.

Собраніе просило предсѣдателя письменно поблагодарить Харьковское Математическое Общество отъ имени С.-Петербургскаго Общества за выраженныя сочувствіе и пожеланія, а также за высланныя сообщенія.

5) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

a) I. А. Клейберъ. «Объ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ». Гауссъ высказалъ ту мысль, что для опредѣленія вѣковыхъ возмущеній въ движеніи какой-нибудь планеты подъ вліяніемъ притяженія, оказываемаго на нее другою планетою, можно замѣнить возмущающую планету эллиптическимъ кольцомъ, распредѣляя массу притягивающей планеты вдоль ея орбиты пропорціонально времени, употребляемому планетою на прохожденіе каждаго элемента. Однако никто не пробовалъ примѣнить этотъ принципъ къ дѣйствительному вычисленію вѣковыхъ возмущеній.

Если возмущающая планета описываетъ круговую орбиту, то ее можетъ замѣнить равномѣрное круговое кольцо, притяженіе котораго имѣетъ характеръ центральной силы. Такимъ образомъ можетъ быть найдено въ конечной формѣ, въ квадратурахъ, уравненіе промежуточной орбиты тѣла весьма малой массы, движущагося подъ вліяніемъ двухъ тѣлъ произвольныхъ массъ, описывающихъ около общаго центра тяжести окружности круговъ, если взятое тѣло движется въ плоскости этихъ круговъ.

Притяженіе круговаго кольца радіуса R на внутреннюю точку, отстоящую на разстояніе r отъ центра кольца,—есть:

$$F = \frac{m}{\pi R^2} \; \frac{(1+k')^2}{2k'(1-k')} \; (E - k'K) \quad . \; . \; . \quad . \; (1),$$

гдѣ: m—масса кольца, E и K—эллиптическіе интегралы, модуль которыхъ k и дополнительный модуль k' зависятъ отъ отношенія $r:R$, а именно:

$$k' = \frac{R-r}{R+r}\,.$$

Вѣковыя возмущенія въ движеніи массы M сводятся къ перемѣщенію линіи апсидъ. Для этого перемѣщенія изъ написанной формулы получается слѣдующее выраженіе:

$$\Delta\theta = m\,\frac{1-k'}{2}\left(E\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k'^2}\right) - K\right) \quad . \; . \; . \quad (2),$$

вѣрное, если орбита M—близка къ кругу.

Прилагая эту формулу къ опредѣленію перемѣщенія перигелія земли подъ вліяніемъ Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, получены числа, весьма близкія, во всѣхъ случаяхъ, кромѣ Сатурна, къ тѣмъ, которыя найдены Leverrier обыкновеннымъ разложеніемъ пертурбаціонной функціи въ рядъ, а именно:

Перемѣщеніе перигелія земли подъ вліяніемъ:

	По формулѣ (2).	*у Leverrier.*
Марса	$0'',0187$	$0'',0189$
Юпитера	$0'',1182$	$0'',1166$
Сатурна	$0'',0055$	$0'',0031$
Урана	0,000098	0,00009
Нептуна .	0,000042	0,00004

б) Д. К. Бобылевъ. «О движеніи по шероховатой горизонтальной плоскости полаго шара, заключающаго въ себѣ вращающійся волчокъ, ось котораго неподвижна по отношенію къ шару».

Предполагая, что катаніе шара совершается безъ скольженія, будемъ въ этомъ случаѣ имѣть шесть связей обыкновенныхъ и два условія катанія безъ скольженія, такъ что число интегрированій, которыя придется выполнить для рѣшенія вопроса, будетъ равно десяти. Всѣ эти интегрированія можно выполнить. Движеніе системы выразится помощью эллиптическихъ Вейерштрассовыхъ функцій p и σ.

в) А. А. Марковъ. «О доказательствѣ Сильвестера трансцендентности числа π». Въ CXI томѣ Comptes Rendus (№ 23, 8 Décembre 1890) Сильвестеръ, основываясь на формулахъ Ламберта для числителя и знаменателя приближеній непрерывной дроби вида:

$$\tau(\theta) = \cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta^2}{3 - \cfrac{\theta^2}{5 - \dots}}},$$

именно:

$$\cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta^2}{3 - \cfrac{\theta^2}{5 - \dots - \cfrac{\theta^2}{2r-1}}}} = \frac{B_{r+1}(\theta)}{A_{r+1}(\theta)},$$

гдѣ:

$$A_{r+1} = 3.5.7 \dots (2r-1)\left[1 - \frac{\theta^2}{2}\,\frac{2r-2}{2r-1} + \frac{\theta^4}{2.3.4}\,\frac{(2r-4)(2r-6)}{(2r-1)(2r-3)} - \dots\right]$$

$$B_{r+1} = 3.5.7 \dots (2r-1)\left[\theta - \frac{\theta^3}{1.2.3}\,\frac{2r-4}{2r-1} + \dots\right].$$

старается доказать трансцендентность числа π; причемъ, пропустивъ, вѣроятно случайно, численный множитель у выраженія $A_{r+1}(\theta)$, основываетъ свое доказательство на утвержденіи, что высшій предѣлъ модуля отношенія $\frac{A_{r+1}(\theta i)}{A_r(\theta i)}$ при достаточно большомъ r зависитъ отъ θi, между тѣмъ совершенно ясно, что въ этомъ случаѣ отношеніе можетъ быть сдѣлано болѣе всякой данной величины.

Протоколъ засѣданія 16 марта 1891 г.

1) Были предложены и приняты въ члены общества: Антонина Дмитріевна Львова, Наталья Николаевна Акимова, Михаилъ Захарьевичъ Образцовъ и Евгеній Васильевичъ Борисовъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) Ю. В. Сохоцкій. «О геодезическихъ линіяхъ». Указавъ на условіе необходимое и достаточное, чтобы всѣ линіи въ системѣ:

$$\begin{aligned} x &= \varphi\ (t, c) \\ y &= \Psi\ (t, c) \\ z &= \theta\ (t, c), \end{aligned}$$

были геодезическими, и сдѣлавъ одно замѣчаніе относительно теоремы обратной теоремѣ Гаусса, выражающей дифференціалъ длины дуги геодезической линіи, докладчикъ указалъ на аналитическое выраженіе условія необходимаго и достаточнаго, чтобы всѣ линіи въ системѣ:

$$f(u, v, c) = 0,$$

были геодезическими, причемъ обратилъ вниманіе собранія на нѣкоторыя важнѣйшія слѣдствія. Затѣмъ докладчикъ далъ новый выводъ дифференціальныхъ уравненій Гаусса для геодезическихъ линій въ криволинейныхъ координатахъ. Эти уравненія представляются, какъ уравненія характеристикъ уравненія въ частныхъ производныхъ вида:

$$\frac{\partial \sqrt{A}\ \mathrm{Cos}\,\theta}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C}\ \mathrm{Cos}\ (\omega-\theta)}{\partial u} \quad \dots\dots \quad (1)$$

гдѣ: A и C означаютъ коэффиціенты извѣстнаго выраженія квадрата дифференціала дуги, θ изображаетъ величину угла, образуемаго въ данной точкѣ геодезическою кривою съ координатною кривою: $v = \text{const}$, а ω — уголъ между координатными линіями. Наконецъ, было указано, какъ при помощи уравненія (1) интегрировать дифференціальныя уравненія геодезическихъ кривыхъ на поверхности вращенія и на поверхности эллипсоида.

б) О. А. Баклундъ демонстрировалъ приборъ Репсольда для изученія фотографій частей неба.

в) I. А. Клейберъ — «о нѣкоторыхъ интегралахъ отъ полныхъ эллиптическихъ интеграловъ».

Протоколъ засѣданія 15 апрѣля 1891 г.

1) Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія брошюры: 1) В. Г. Имшенецкій — «Интегрированіе линейныхъ однородныхъ уравненій посредствомъ частныхъ рѣшеній другихъ уравненій того-же вида и порядка равнаго или меньшаго», 2) В. Г. Имшенецкій — «Замѣтка о геометрическомъ значеніи формулы Эйлера для приближеннаго вычисленія квадратуръ», 3) Н. В. Бугаевъ — «Прерывная геометрія», 4) П. М. Покровскій — «О преобразованіи Ультра — эллиптическихъ интеграловъ», 5) Д. А. Граве — «Аналитическая геометрія» (литографированный курсъ).

2) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) Ю. В. Сохоцкій предложилъ желающимъ рѣшить слѣдующую задачу: дано семейство кривыхъ, опредѣляемыхъ параметромъ a; изъ нѣкоторой точки плоскости проведена къ одной изъ кривыхъ касательная, длина которой, положимъ, есть S, длина же дуги, отсчитываемой отъ нѣкоторой точки кривой до точки касанія — есть σ; доказать, что: $\frac{\partial (S + \sigma)}{\partial a}$ не измѣняется вдоль касательной и измѣняется при переходѣ отъ одной касательной къ другой. Обобщить ту же теорему и для поверхности. Эта теорема имѣетъ большое значеніе при изученіи нѣкоторыхъ свойствъ геодезическихъ линій.

б) Д. Ф. Селивановъ. «О разложеніи чиселъ на множители». Разысканіе простыхъ дѣлителей чиселъ вида: $t^2—Du^2$—приводится къ рѣшенію уравненія:

$$\left(\frac{D}{x}\right) = 1,$$

лѣвая часть котораго есть символъ Якоби. Всѣ рѣшенія этого уравненія легко найти при помощи слѣдующихъ теоремъ, высказанныхъ Эйлеромъ (нѣсколько въ иной формѣ):

1) $\left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{x+4\Delta}\right)$, $(\Delta = |D|)$,

2) $\left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{4D-x}\right)$, $D > 0$

3) $\left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{4\Delta-x}\right)$, $D < 0$

4) $\left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right)$ при D — четномъ

5) $\left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{x+2\Delta}\right)$ при $D \equiv +1 \pmod{4}$

6) $\left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right)$ при $D \equiv -1 \pmod{4}$

Доказательство теоремъ 1) и 5) находимъ въ сочиненіяхъ Дирихле и Ю. В. Сохоцкаго. Докладчикомъ было показано, какъ доказываются всѣ названныя теоремы и какъ при помощи ихъ разложить данное число на множители.

в) П. А. Шиффъ показалъ, что уравненіе въ частныхъ производныхъ вида:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\,k}} + \frac{\partial^k u}{\partial x_2^{\,k}} + \ldots + \frac{\partial^k u}{\partial x_n^{\,k}} = a_0 u + a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \ldots + a_\rho \frac{\partial^\rho u}{\partial t^\rho} \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

допускаетъ интегралъ, удовлетворяющій уравненію:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + t \frac{\partial u}{\partial t} = b_0 u + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} + $$
$$+ \ldots + b_q \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

(въ частномъ случаѣ—однородный) только въ томъ случаѣ, когда всѣ постоянные коеффиціенты: a_0, $a_1 \ldots$; за исключеніемъ a_k, равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая лѣвую часть уравненія (1) черезъ: $\Delta_k u$ и правую — черезъ $P(u)$, будемъ имѣть:

$$\Delta_k u = P(u) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1');$$

Обозначая, далѣе, правую часть уравненія (2) черезъ $Q(u)$, будемъ имѣть:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_2} + t \frac{\partial u}{\partial t} = Q(u) . \; . \; . \quad (2');$$

Совершая надъ частями равенства (2′) операцію Δ_k, получаемъ:

$$x_1 \Delta_k \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \Delta_k \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \Delta \frac{\partial u}{\partial x_n} + t\Delta_k \frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta_k u =$$
$$= \Delta_k Q(u) = Q(\Delta k u) = Q[P(u)]$$

или:

$$x_1 P\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + x_2 P\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \ldots + kP(u) + tP\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = Q[P(u)]$$

иначе сказать:

$$P\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + tP\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + kP(u) = Q[P(u)]$$

принимая во вниманіе уравненіе (2′), будемъ имѣть:

$$P[Q(u)] - P\left(t \frac{\partial u}{\partial t}\right) + tP\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + KP(u) = Q[P(u)]$$

совершая на самомъ дѣлѣ дѣйствіе, обозначенное символомъ P и принимая во вниманіе, что $P[Q(u)] = Q[P(u)]$ (въ виду того, что коэффиціенты a_0, $a_1 \ldots b_0$, $b_1 \ldots$ предполагаются постоянными), мы получаемъ:

$$ka_0 u + (k-1)a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + (k-2)a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots + (k-p)\, a_p \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = 0 \; . \; . (3)$$

равенство (3) непремѣнно представляетъ собою тождество, т. е. всѣ коэффиціенты равны нулю, поэтому напр.: $a_0 = a_1 = a_2 \ldots a_{p-1} = 0$, $k = p$; въ противномъ случаѣ мы изъ уравненія (3) получили бы:

$$u = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \ldots + C_p e^{a_p t},$$

гдѣ C_1, $C_2 \ldots C_p$ — суть произвольныя функціи $x_1 \ldots x_n$, а это противорѣчитъ уравненію (2) въ чемъ легко убѣдиться непосредственною подстановкою.

Протоколъ засѣданія 16 сентября 1891 г.

1) Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія изданія:

1) Сообщенія харьковскаго математическаго общества, 2-я серія, томъ III № 1.

2) Д. Ф. Селивановъ. — «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ».

3) Д. Ф. Селивановъ. —«О разложеніи чиселъ на множители.

4) N. N. Pirogow. «Ueber das Gesetz Boltzmann's» (Separat-abdruck aus dem Repertorium der Physik).

5) П. А. Шиффъ. «Опытъ приложенія теоріи упругости къ изученію дѣйствія выстрѣла на лафетъ».

6) P. Schiff. «Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles d'ordre supérieur».

2) Были предложены и приняты въ члены общества: Федоръ Васильевичъ Корвинъ-Круковской и Николай Борисовичъ Делоне.

3) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

a) Н. Б. Делоне «По теоріи осей вращенія». Докладчикъ указалъ на слѣдующее: 1) Удары, нормальные къ плоской стѣнкѣ тѣла, ограниченнаго съ прочихъ сторонъ какою бы то ни было поверхностью и имѣющіе одинаковую приведенную массу, пересѣкаютъ плоскую стѣнку въ точкахъ, расположенныхъ по эллипсу.

2) Соотвѣтственные этимъ ударамъ радіусы эллипсоида инерціи, сопряженные съ плоскостями ударовъ, лежатъ въ нѣкоторой плоскости N.

3) Соотвѣтственныя тѣмъ же ударамъ винтовыя оси лежатъ на линейчатой поверхности S — десятаго порядка, образующія коей параллельны плоскости N и касательны къ нѣкоторому эллиптическому цилиндру C.

4) Поверхность S пересѣкается съ цилиндромъ C по кривой пересѣченія этого цилиндра съ поверхностью K— третьяго порядка, дающею въ пересѣченіяхъ съ плоскостями, параллельными плоскости N — эллипсы подобные, одинаково расположенные, проходящіе чрезъ нормаль къ плоскости N, проведенную черезъ центръ

тяжести тѣла, и имѣющіе оси, направленныя параллельно осямъ сѣченій тѣми же плоскостями цилиндра C.

б) П. А. Шиффъ. «О нѣкоторыхъ формулахъ для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ». Докладчикъ показалъ, какимъ образомъ изъ формулъ Грина для функцій съ двумя перемѣнными получаются формулы: Коши, Пуассона, Абеля, Фруллани, Фурье, Куммера, Парсиваля и Давидова.

в) Д. А. Граве. «Къ интегрированію системы дифференціальныхъ уравненій линейныхъ въ частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ».

Если дана система уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{11}(u_1)+\Delta_{12}(u_2)+\ldots+\Delta_{1n}(u_n)=0 \\ \Delta_{21}(u_1)+\Delta_{22}(u_2)+\ldots+\Delta_{2n}(u_u)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{n1}(u_1)+\Delta_{n2}(u_2)+\ldots+\Delta_{nn}(u_n)=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$\Delta_{ij}(u)=\Sigma A \frac{d^k u}{dx_1{}^p\, dx_2{}^q \ldots dx_n^r},$$

причемъ A — постоянныя, то обозначая символомъ D слѣдующую операцію:

$$D(u)=\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} (u)$$

и имѣя въ виду, что операціи Δ имѣютъ свойство перемѣстимости, т. е. что: $\Delta_{ik}\ \Delta_{lm}(u)=\Delta_{lm}\ \Delta_{ik}\ (u)$, легко убѣдиться, что система (1) приводится къ уравненіямъ слѣдующаго вида:

$$D(u_1)=0,\ D(u_2)=0,\ \ldots D(u_n)=0.$$

Протоколъ засѣданія 15 октября 1891 г.

I. Были предложены и приняты въ члены общества: Александръ Дмитріевичъ Дмитріевъ, Евгеній Петровичъ Рощинъ, Алексѣй Львовичъ Корольковъ и Константинъ Михайловичъ Семеновъ.

II. Секретарь общества доложилъ собранію слѣдующій краткій отчетъ о состояніи общества за истекшій годъ: 20 октября истекаетъ первый годъ существованія С.-Петербургскаго математическаго общества. Первое засѣданіе 20 октября 1890 г. исключительно посвящено было рѣшенію организаціонныхъ вопросовъ, касающихся общества и выбору членовъ бюро.

Благодаря милостивому разрѣшенію Его Императорскаго Высочества Президента Академіи Наукъ, общество получило возможность собираться въ центральномъ для большинства членовъ мѣстѣ, — именно: въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ. Въ теченіи этого года общество имѣло 8 засѣданій, во время которыхъ происходилъ обмѣнъ мнѣній по сдѣланнымъ 19 сообщеніямъ.

Въ настоящее время общество состоитъ изъ 55 членовъ.

Въ теченіи года въ библіотеку общества доставлено 30 книгъ и брошюръ (29 названій).

Въ засѣданіи 20 ноября 1890 г. собраніе постановило: для покрытія мелкихъ расходовъ—сдѣлать складчину по 1 рублю. Эта складчина дала въ суммѣ 41 рубль; израсходовано — 54 руб. 66 коп.; такъ что излишекъ расходовъ, сравнительно съ доходомъ, составляетъ 13 р. 66 к. Въ виду этого, а также для покрытія расходовъ въ текущемъ году, секретарь обратился къ собранію съ просьбою сдѣлать вторично складчину по два рубля, на что собраніе изъявило согласіе.

III. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) В. I. Шиффъ. «О кривыхъ четвертаго порядка».

Исходя изъ опредѣленій криволинейныхъ діаметровъ кривыхъ высшихъ порядковъ, данныхъ Сальмономъ, докладчица показала, какимъ образомъ, пользуясь уравненіями этихъ діаметровъ, найти оси симметріи кривыхъ четвертаго порядка и какъ, возможно просто, вычислить коэффиціенты преобразованнаго уравненія кривой четвертаго порядка, отнесенной къ осямъ симметріи.

б) Д. А. Граве. «Объ интегрированіи системы дифференціальныхъ уравненій линейныхъ въ частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ».

Докладчикъ, напомнивъ собранію способъ исключенія неизвѣстныхъ функцій изъ уравненій, изложенный имъ въ предъидущемъ засѣданіи, показалъ, какъ, пользуясь интеграломъ Фурье, освободиться отъ членовъ, стоящихъ во вторыхъ частяхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{11}(u_1) + \Delta_{12}(u_2) + \ldots + \Delta_{1n}(u_n) = X_1 \\ \Delta_{21}(u_1) + \Delta_{22}(u_2) + \ldots + \Delta_{2n}(u_n) = X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{n1}(u_1) + \Delta_{n2}(u_2) + \ldots + \Delta_{nn}(u_n) = X_n \end{array}\right\} \ldots (1)$$

гдѣ:

$$\Delta_{ij}(u) = \Sigma A \frac{d^k u}{dx_1^p\, dx_2^q \ldots dx_n^r},$$

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}$$

причемъ вопросъ объ интегрированіи системы (1) приводится къ интегрированію уравненія:

$$D(\sigma) = 0,$$

гдѣ

$$D(\sigma) = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} (\sigma).$$

Далѣе, показавъ, какимъ образомъ интегралъ составляется изъ частныхъ интеграловъ, докладчикъ обратилъ вниманіе собранія на интегрированіе уравненій вихреваго движенія, именно:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy} = X_1 \\ \dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz} = X_2 \\ \dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx} = X_3 \end{array}\right\} (2)$$

Такъ какъ символъ D, въ этомъ случаѣ, обращается тождественно въ нуль, то функціи X_1, X_2 и X_3 должны находиться между собою въ нѣкоторой зависимости, именно, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} = 0;$$

въ этомъ случаѣ функціи U, V и W изъ уравненій (2) всѣ неопредѣляются,—одна изъ нихъ остается произвольною.

в) В. Г. Имшенецкій. «О способахъ опредѣленія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій».

Протоколъ засѣданія 16 ноября 1891 г.

I. Былъ предложенъ и принятъ въ члены общества Захаръ Захарьевичъ Вулихъ.

II. Въ библіотеку общества доставлена слѣдующая книга: «Бобылевъ. Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. I Кинематика. СПБ. 1890 г.»

III. Обсуждался проектъ устава общества; при этомъ постановлено было, чтобы бюро общества, раньше внесенія на окончательное утвержденіе, дополнило и проредактировало разсмотрѣнный проектъ устава въ окончательной формѣ.

IV. А. А. Марковъ сдѣлалъ сообщеніе: «О разысканіи раціональныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій.

Протоколъ засѣданія 17 января 1892 г.

I. Предсѣдательствовавшій въ засѣданіи товарищъ предсѣдателя Ю. В. Сохоцкій сообщилъ собранію, что общество понесло утрату въ лицѣ скончавшихся его двухъ членовъ: Маріана Альбертовича Кросновскаго и Николая Николаевича Пирогова и предложилъ собранію почтить память скончавшихся вставаніемъ съ мѣстъ. Собраніе исполнило предложеніе предсѣдательствующаго.

II. Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Д. К. Бобылевъ. «Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. II Кинетика».

2) П. В. Преображенскій. «Теорія бинарныхъ квадратичныхъ формъ».

3) Н. В. Бугаевъ. «Начало наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Цѣлыя частныя рѣшенія».

4) Н. В. Бугаевъ. «Дробныя частныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій».

5) Н. Е. Жуковскій. «О пареніи птицъ».

III. Были предложены и приняты въ члены общества: Елизавета Федоровна Литвинова и Владиміръ Васильевичъ Преображенскій.

IV. Въ предшествовавшемъ засѣданіи общества, 16 ноября, при обсужденіи проекта устава, было постановлено, чтобы бюро общества, раньше внесенія на окончательное утвержденіе, дополнило и проредактировало разсмотрѣнный проектъ устава въ окончательной формѣ. Согласно съ этимъ постановленіемъ, для болѣе основательной выработки сказаннаго Устава, бюро обратилось съ просьбою о содѣйствіи къ нѣкоторымъ сочленамъ общества, которые, составивъ редакціонную комиссію, выработали проектъ устава.

Въ составъ комиссіи вошли слѣдующіе члены общества: А. В Гадолинъ (предсѣдатель комиссіи), Ю. В. Сохоцкій, К. А. Поссе, А. А. Марковъ, Д. Ф. Селивановъ и П. А. Шиффъ.

Выработанный комиссіею проектъ устава былъ налитографированъ и разосланъ всѣмъ членамъ общества съ просьбою, ознакомившись съ означеннымъ проектомъ устава, письменно высказать свои мнѣнія по этому поводу.

По поводу проекта устава получены были письменныя замѣчанія отъ слѣдующихъ членовъ общества: А. В. Муромцева, А. А. Маркова, Д. А. Граве, В. И. Станевича, А. Р. Бонсдорфа, В. В. Витковскаго, П. М. Новикова, А. Н. Крылова и Н. Ю. Старынкевича.

Собраніе, ознакомившись съ высказанными замѣчаніями и нѣсколько измѣнивъ, согласно съ этими замѣчаніями, редакцію нѣкоторыхъ параграфовъ проекта устава, утвердило таковой и упол-

*

номочило бюро представить проектъ устава на утвержденіе правительства.

IV. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) А. А. Марковъ, въ дополненіе къ его сообщенію, сдѣланному имъ въ прошломъ засѣданіи, указалъ на то, что сказанное имъ относительно способа Ліювиля, именно, что при употребленіи способа Ліювиля не требуется вовсе рѣшенія уравненій, высказано самимъ авторомъ въ его статьѣ, помѣщенной въ 22 тетради Journal de l'Ecole Polytechnique, на 175 страницѣ.

2) В. И. Станевичъ сдѣлалъ сообщеніе по поводу замѣтки Poincaré «О распредѣленіи простыхъ чиселъ вида: $4n+1$», напечатанной въ Comptes rendus 14 октября 1891 г.

Исходя изъ приближенныхъ выраженій нѣкоторыхъ суммъ, находящихся въ статьѣ Mertens'a (Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Crell's Journal, t. 78) и примѣняя къ нимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$-\int_{p_1}^{x} F(x)f'(x)dx = \sum_{p_1}^{x} f(p) - F(x)f(x)$$

и

$$F(x) = \frac{\sum\limits_{p_1}^{x} f(p)}{f(x)} + \int_{p_1}^{x} \frac{f'(x)}{f^2(x)} \sum_{p_1}^{x} f(p)dx,$$

докладчикъ доказалъ обѣ теоремы Poincaré, а также слѣдующія болѣе общія теоремы:

1) Число простыхъ чиселъ вида: $kn+l$, меньшихъ x, безчисленное множество разъ меньше: $\frac{ax}{\varphi(k)lgx}$, если $a>1$ и безчисленное множество разъ больше $\frac{ax}{\varphi(k)lgx}$ если $a<1$.

2) Сумма логариѳмовъ простыхъ чиселъ вида $kn+l$, меньшихъ x, безчисленное множество разъ меньше $\frac{ax}{\varphi(k)}$, если $a>1$ и безчисленное множество разъ больше $\frac{ax}{\varphi(k)}$, если $a<1$.

Здѣсь k и l — взаимнопростыя числа, а $\varphi(k)$ обозначаетъ число чиселъ простыхъ съ k и меньшихъ k.

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1892 г.

I. Предсѣдательствовавшій въ засѣданіи товарищъ предсѣдателя Ю. В. Сохоцкій сообщилъ собранію объ утратѣ, понесенной обществомъ въ лицѣ скончавшихся двухъ его членовъ: Іосифа Андреевича Клейбера и Николая Владиміровича Маіевскаго и предложилъ собранію почтить память скончавшихся вставаніемъ съ мѣстъ. Собраніе исполнило предложеніе предсѣдателя.

II. Въ библіотеку общества доставлена статья Д. К. Бобылева «Поляризующія призмы, устроенныя наивыгоднѣйшимъ образомъ».

III. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Е. С. Федоровъ. «О симметріи на плоскости». Докладчикъ началъ съ изложенія краткаго историческаго очерка этого предмета, изъ котораго видно, что два основные вопроса ученія о симметріи:—выводъ возможныхъ видовъ симметріи и выводъ правильныхъ системъ точекъ—получили, для случая пространства трехъ измѣреній, окончательное рѣшеніе.

Докладчикъ, кромѣ того, выразилъ эти выводы алгебраическими уравненіями и предложилъ особый простой способъ графическаго изображенія осей совмѣщенія правильныхъ системъ.

Для графическаго изображенія этихъ системъ онъ проектируетъ оси на одну изъ плоскостей, причемъ направленія осей условно выражаются буквами, а абсолютное наклоненіе въ пространствѣ дается точкою пересѣченія осей съ плоскостью проекціи.

Переходъ отъ этихъ выводовъ къ соотвѣтствующимъ выводамъ на плоскости есть переходъ отъ общаго къ частному и совершается, благодаря алгебраическому выраженію выводовъ, почти съ механическою простотою, такъ какъ остается только выбрать изъ уравненій, относящихся къ пространству, тѣ, которыя находятъ приложеніе и въ случаѣ плоскости, и приравнять нулю одну изъ координатъ.

Такимъ образомъ выведено 17 правильныхъ системъ точекъ вмѣсто 13, выведенныхъ L. Sohncke въ специальной статьѣ, напечатанной въ журналѣ Борхардта въ 1874 году.

2) А. А. Марковъ вывелъ соотношеніе между двумя послѣдовательными коэффиціентами A_i и A_{i-1} ряда:

$$y = \sum_i A_i x^{2i} F(\alpha + 2i, \ \beta + 2i, \ \gamma + i, \ \delta + 2i, \ \varepsilon + 2i, \ x), \quad (1)$$

удовлетворяющаго дифференціальному уравненію вида:

$$x^2(1-x^2)\, y''' + (ax+b)x(1-x)y'' + (cx^2+dx+e)y' + (fx+g)y = 0,$$

которому, въ частномъ случаѣ, удовлетворяетъ произведеніе двухъ интеграловъ уравненія, опредѣляющаго гипергеометрическій рядъ. Функція F въ выраженіи (1) выражается слѣдующимъ образомъ:

$$F(\lambda, \mu, \nu, \varsigma, \sigma, x) = 1 + \frac{\lambda.\mu.\nu}{1.\varsigma.\sigma} x + \frac{\lambda(\lambda+1)\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{1.2\varsigma(\varsigma+1)\sigma(\sigma+1)} x^2 + \ldots\ldots$$

Протоколъ засѣданія 29 февраля 1892 г.

I. Въ библіотеку общества доставлена статья В. І. Шиффъ. «Объ осяхъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка».

II. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Объ одномъ способѣ интегрированія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка».

Идея о пользѣ частныхъ рѣшеній для полученія въ замкнутомъ видѣ общаго интеграла обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка служитъ основаніемъ для многихъ методовъ интегрированія. Въ однихъ изъ этихъ методовъ требуемыя для интеграціи частныя рѣшенія могутъ быть какими угодно (напр. при интегрированіи уравненія типа: $\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$ при помощи подстановки: $y = y_0 + \frac{1}{u}$), въ другихъ—эти частныя рѣшенія должны удовлетворять еще нѣкоторымъ конечнымъ условіямъ. Напр. если уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+P}$$

допускаетъ интегралъ формы:

$$(y - y_1)^{m_1}(y - y_2)^{m_2} = \text{пост.},$$

то частныя рѣшенія: y_1 и y_2 должны удовлетворять условію: $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$.

Методы первой группы страдаютъ безплодностью, методы второй—трудностью указать конечныя условія для частныхъ рѣшеній. Докладчикъ предлагаетъ такой методъ интегрированія, въ которомъ эта послѣдняя трудность устранена.

Если искать условія, при которыхъ уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

имѣетъ интегралъ формы:

$$(y - \alpha_1)^{m_1}(y - \alpha_2)^{m_2} \quad . \; . \; (y - \alpha_n)^{m_n} = \text{пост.} \; . \; . \; . \; (2).$$

гдѣ: α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — суть нѣкоторыя функціи отъ x,

то:

1) α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — суть частныя рѣшенія уравненія (1)

2) они удовлетворяютъ условію:

$$m_1 \; \alpha_1 + m_2 \; \alpha_2 + \ldots + m_n \, \alpha_n = \text{пост.} \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Причина, почему условіе получилось такъ просто, лежитъ въ томъ, что производная функціи $\log \; (y - \alpha_i)$ $(i = 1, \; 2 \ldots n)$ разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ не зависитъ отъ y, а другой отъ α_i, такъ какъ

$$\frac{d}{dx} \log . \, (y - \alpha_i) = - \frac{1}{y+P} \cdot \frac{1}{\alpha_i + P} \cdot \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Обобщеніе этого замѣчанія и приводитъ къ методу, которому можно присвоить названіе *метода частныхъ рѣшеній*.

Пусть будетъ дано какое угодно обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое мы предположимъ заданнымъ въ формѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, \; y) \; . \; . \; . \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Пусть будетъ:

$$\frac{dz}{dx} = \chi(x, \; z) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

другое дифференціальное уравненіе, которое мы назовемъ вспомогательнымъ. Назовемъ черезъ: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ n частныхъ рѣшеній уравненія (6), пока не опредѣляя ихъ.

Пусть будетъ f такая функція отъ x, y и α_i $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$, полная производная которой распадается на произведеніе функцій отъ x и y на функцію отъ x и α_i, т. е. пусть f удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\varphi(x, y) + \frac{df}{d\alpha_i}\chi(x,\alpha_i) = \Psi(x,y)\omega(x,\alpha_i) \ldots \quad (7).$$

Разсмотримъ сумму:

$$W = m_1 f(x, y, \alpha_1) + m_2 f(x, y, \alpha_2) + \ldots + m_n f(x, y, \alpha_n) \,. \quad (8),$$

гдѣ: m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$ — постоянныя.

Полная производная $\frac{dW}{dx}$ будетъ, на основаніи уравненія (7):

$$\frac{dW}{dx} = \Psi(x, y)\left\{ m_1\omega(x, \alpha_1) + m_2\omega(x, \alpha_2) + \ldots + m_n\,\omega(x, \alpha_n) \right\} . \quad (9)$$

Если

$$m_1\omega(x, \alpha_1) + m_2\omega(x, \alpha_2) + \ldots + m_n\,\omega(x, \alpha_n) = 0; \ldots \quad (10)$$

то уравненіе:

$$W = \text{пост.} \ldots \ldots \quad (11)$$

будетъ общимъ интеграломъ уравненія (5).

Такимъ образомъ нужно сначала удовлетворить уравненію (7) соотвѣтственнымъ выборомъ функцій: f, χ, Ψ и ω, а затѣмъ искать для уравненія (6) такихъ частныхъ рѣшеній, которыя удовлетворили бы условію (10).

Если извѣстно число n частныхъ рѣшеній α_i; удовлетворяющихъ условію (10), то всѣ они могутъ быть найдены изъ новыхъ интеграцій.

Методъ сохраняетъ свою пригодность и тогда, когда во второй части уравненія (7) стоитъ сумма нѣсколькихъ произведеній такихъ, какъ: $\Psi(x, y)\,\omega(x, \alpha_i)$.

Всякая функція f, удовлетворяющая уравненію (7), называется интегрирующей функціею для уравненія (5).

Методъ частныхъ рѣшеній есть обобщеніе метода множителей, потому что интегрирующій множитель Эйлера есть частная производная по y отъ интегрирующей функціи, взятой въ томъ частномъ предположеніи, что она не зависитъ отъ α_i и вторая часть уравненія (7) равна нулю.

Одна изъ интегрирующихъ функцій для уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P + y}$$

есть, какъ было видно выше, $ly\ (y - \alpha_i)$; другая имѣетъ форму:

$$f = \int^{y - \alpha_i} e^z \frac{dz}{z} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12),$$

причемъ для частныхъ рѣшеній получается условіе:

$$m_1\, e^{-\alpha_1} + m_2\, e^{-\alpha_2} + \ldots + m_n\, e^{-\alpha_n} = \text{пост.} \quad . \ . \ . \quad (13)$$

Примѣръ. Уравненіе.

$$gydy + dy\left[ke^{-t} \log.\,(g - ke^{-t})\right] =$$
$$= ke^{-t}\left[t - lg\,(g - ke^{-t})\right] dt \ . \quad . \ . \ (14)$$

допускаетъ два частныхъ рѣшенія:

$$\alpha_1 = -\log\ \left[g - ke^{-t}\right]$$
$$\alpha_2 = t,$$

удовлетворяющихъ условію (13) при $n_2 = km_1$ и потому общій интегралъ уравненія (14) есть:

$$\int^{y-\alpha_1} \frac{e^z}{z}\, dz + k \int^{y-\alpha_2} \frac{e^z}{z}\, dz = \text{пост.}$$

2) Н. Б. Делоне. «О движеніи твердаго тѣла, опредѣляемомъ интегралами С. В. Ковалевской». Докладчикъ показалъ, что:

1) Интегралы Ковалевской могутъ быть представлены въ видѣ:

$$2p^2 + 2q^2 + r^2 = 2c_0\gamma + bl'$$
$$2p\gamma + 2q\gamma' + r\gamma'' = 2l$$
$$(p^2 - q^2 + c_0\gamma)^2 + (2pq + c_0\gamma')^2 = k^2$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

2) Въ случаѣ $k = 0$, уравненія подвижнаго годографа суть:

$$4p^2 + r^2 = 6l'$$
$$6l'(p^2 + q^2)^2 + 8c_0lp(p^2 + q^2) + 4c_0^2l^2 = c_0^2r^2$$

а неподвижный годографъ лежитъ на поверхности вращенія (около вертикали) 8-го порядка.

3) Когда не только $k = 0$, но и $6l' = 4l^2$ — подвижный годографъ есть пересѣченіе цилиндровъ круговаго и эллиптическаго, а неподвижный годографъ лежитъ на поверхности вращенія 4-го порядка.

4) Параллелепипедъ съ ребрами $2a < 2b < 2c$, подвѣшенный, напр. помощью шарнира Гука за точку, лежащую на спицѣ, пропущенной черезъ его центръ параллельно ребру $2a$, причемъ разстояніе точки привѣса отъ центра $=$ $= \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}}$ и между b и c существуетъ зависимость: $c^2 = 3b^2$, — движется по законамъ Ковалевской.

5) Придавъ параллелепипеду такое положеніе, чтобы b и a были горизонтальны и сообщивъ ему начальную скорость около вертикали, получимъ движеніе, указанное въ положеніи 3-мъ.

6) Придавъ параллелепипеду опредѣленное начальное положеніе и опредѣленную начальную скорость, получимъ движеніе, указанное въ положеніи 2-мъ.

3) В. А. Марковъ доказалъ слѣдующую теорему: если двѣ алгебраическія функціи степени n имѣютъ всѣ корни вещественные и перемежающіеся, то ихъ производныя одного и того же порядка имѣютъ корни тоже перемежающіеся.

Протоколъ засѣданія 16 марта 1892 г.

I. Былъ предложенъ и принятъ въ члены общества Илья Семеновичъ Аладовъ.

II. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Приложеніе метода частныхъ рѣшеній къ одному уравненію перваго порядка».

Въ дополненіе къ предыдущему сообщенію докладчикъ указалъ на то, что опредѣленіе интегрирующей функціи не требуетъ интегрированія уравненій съ частными производными, и что, поэтому, является возможность построить интегрирующую функцію для такихъ уравненій, для которыхъ не можемъ найти интегрирующаго множителя. Въ подтвержденіе этого докладчикъ доказалъ, что для уравненія:

$$y'\left[L_0 y^k + L_1 y^{k-1} + \ldots + L_k\right] = M_0 y^h + M_1 y^{h-1} + \ldots + M_h \quad . \, (1),$$

гдѣ L_0, $L_1 \ldots L_k$, M_0, $M_1 \ldots M_h$ — какія угодно функціи отъ x, а h и k — какія угодно цѣлыя положительныя числа, одна изъ интегрирующихъ функцій есть: $lg\,(y - \alpha_i)$, гдѣ α_i — есть рѣшеніе уравненія (1).

Выводя условія для частныхъ рѣшеній, докладчикъ показалъ, что для существованія интеграла уравненія (1) въ видѣ:

$$(y - \alpha_1)^{m_1} (y - \alpha_2)^{m_2} \ldots (y - \alpha_n)^{m_n} = \text{пост.} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

необходимо, если только

$$h \geqq k + 2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

существованіе слѣдующаго уравненія:

$$m_1 \alpha_1{}^r + m_2 \alpha_2{}^r + \ldots + m_n \alpha_n{}^r = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

гдѣ r — какое угодно цѣлое положительное число.

Исходя изъ уравненія (4), докладчикъ доказалъ слѣдующую теорему:

Если въ уравненіи (1) число h больше или равно числу $k+2$, то уравненіе (1) не допускаетъ интеграла формы (2) ни при какомъ значеніи числа n.

Въ заключенiи было показано приложенiе той же интегрирующей функцiи: $lg\,(y-\alpha_i)$ къ уравненiю риккатiевскаго типа:

$$y' = y^2 + Q$$

и былъ предложенъ весьма легкiй путь къ выводу извѣстнаго соотношенiя между четырьмя рѣшенiями: y_0, y_1, y_2, y_3 этого уравненiя, именно:

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0 - g_2} \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{пост.}$$

2) П. М. Новиковъ. «О наивыгоднѣйшемъ числѣ пробъ при рѣшенiи трансцендентныхъ уравненiй и уравненiй высшихъ степеней».

Если приходится отдѣлить корни уравненiя пробами, то пробы ведутся такимъ образомъ: промежутокъ между предѣлами, между которыми заключены корни, дѣлится на m равныхъ частей и пробуютъ границы этихъ частей; такимъ образомъ корни окажутся заключенными между двумя крайними числами двухъ послѣдовательныхъ частей. Далѣе, промежутокъ между новыми границами дѣлится на n равныхъ частей и пробуютъ границы этихъ частей и т. д.

Обозначая черезъ A—разницу первоначальныхъ границъ корня и черезъ S — сумму наибольшаго числа пробъ, которыя могутъ потребоваться для достаточнаго сближенiя границъ, имѣемъ:

$$A = m.n.p\ldots$$
$$S = m - 1 + n - 1 + p - 1 + \ldots$$

Легко убѣдиться, что S будетъ наименьшимъ для опредѣленнаго числа подраздѣленiй на группы при $m = n = p = \ldots$

Обозначая число подраздѣленiй черезъ y, число пробъ въ каждомъ подраздѣленiи черезъ x, имѣемъ:

$$A = x^y$$

$$S = y\,(x - 1) = lgA \left(1 + \frac{lya}{1.2} + \frac{ly^2x}{1.2.3} + \ldots\right);$$

откуда видно: 1) что для того, чтобы наибольшее число пробъ было наименьшимъ, нужно взять: $x = 2$, и 2) что при возрастанiи

x, S непрерывно возрастаетъ. Другими словами — удобнѣе всего, въ этомъ смыслѣ, вести вычисленіе по двоичной системѣ.

Для сравненія отношенія выгоды десятичной и двоичной системъ, находимъ:

$$\frac{S_{10}}{S_2} = \frac{9 . lg_{10} A}{lg_2 A} = 9 lg_{10} 2 = 2,7 \ldots,$$

но, принимая во вниманіе, что въ десятичной системѣ число цифръ, вводимыхъ въ вычисленіе, сначала незначительно и постепенно возрастаетъ, между тѣмъ какъ при двоичной системѣ испытаній, если мы числа выражаемъ въ десятичной системѣ, число цифръ сразу будетъ наибольшее, и, принимая во вниманіе, что трудность вычисленія пропорціональна числу цифръ, вводимыхъ въ вычисленіе, находимъ отношеніе трудности вычисленій пробами по десятичной и двоичной системамъ, въ этомъ смыслѣ, для A — m — значнаго числа, въ такомъ видѣ:

$$\frac{S'_{10}}{S'_2} = \frac{\frac{m(m+1)}{2} \cdot 9}{m \, lg_2 A} = \frac{(m+1) \, 9 \, lg_{10} 2}{2 \, lg \, A} = \frac{m+1}{m-\theta} \, 9 \, \frac{lg_{10} 2}{2},$$

гдѣ $\theta > 0$ и $\theta < 1$.

При m безпредѣльно возрастающемъ это отношеніе, уменьшаясь, стремится къ $\frac{9 lg_{10} 2}{2}$, т. е. къ половинѣ прежняго отношенія. Наконецъ, можно еще различныя системы пробъ сравнить между собою въ смыслѣ средняго математическаго ожиданія трудности при испытаніи по той или другой системѣ. Это сравненіе подобно сравненію выгоды различныхъ лотерей, въ которыхъ всѣ билеты съ выигрышами, но выигрыши раздѣлены по различнымъ системамъ и различной стоимости. Легко убѣдиться, что среднее математическое ожиданіе равняется суммѣ испытаній, нужныхъ для заключенія искомаго корня между двумя изъ A отдѣльныхъ чиселъ, содержащихся въ предѣлахъ корней, раздѣленной на A^2, и что, вообще, отношеніе ожиданій трудности различныхъ системъ прямо пропорціонально суммамъ всѣхъ испытаній, нужныхъ, чтобы перебрать всѣ A чиселъ.

Поэтому нужно найти эту сумму.

Полагая число отдѣльныхъ чиселъ, заключающихся въ предѣлахъ, въ которыхъ мы производимъ испытанія, равнымъ A, обозначая основаніе системы, по которой производимъ пробы, черезъ x, черезъ y — число опредѣляемое равенствомъ:

$$x^y = A$$

и, наконецъ, черезъ S_x — сумму всѣхъ испытаній, нужныхъ для заключенія искомаго числа между всѣми парами послѣдовательныхъ отдѣльныхъ A — чиселъ, получимъ:

$$S_x = yA\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{A lg A}{lg x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right).$$

Легко убѣдиться, что S_x имѣетъ наименьшее практическое значеніе при $x = 2$, и возрастаетъ съ возрастаніемъ x. Сравнимъ значенія S_x для $x = 10$ и $x = 2$. Имѣемъ:

$$\frac{S_{10}}{S_2} = \frac{lg 2}{lg 10} \cdot 5{,}4 = lg_{10} 2 \,.\, 5{,}4 = 1{,}62.$$

Изъ этого видно, что двоичная система испытаній приблизительно въ $^8/_5$ выгоднѣе десятичной.

Извѣстно, что двоичная система считалась дающею наивыгоднѣйшую систему разновѣсокъ для взвѣшиванія и эталонныхъ проволокъ въ реостатѣ, въ томъ смыслѣ, что она даетъ наименьшее число эталонныхъ проволокъ; но мы видимъ, что наивыгоднѣйшее и въ томъ смыслѣ, что она требуетъ наименьшаго труда, или наименьшаго количества времени для производства извѣстныхъ опредѣленій. Если число требуемыхъ опредѣленій и ихъ разнообразіе неопредѣленно увеличиваются, то, какъ мы видѣли, отношеніе времени или труда при двоичной системѣ ко времени или труду, расходуемому при десятичной, стремится къ $^8/_5$.

Протоколъ засѣданія 15 апрѣля 1892 г.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ изложилъ съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями изслѣдованія Люка (Lucas) о дѣлимости чиселъ вида:

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad v_n = a^n + b^n,$$

гдѣ a и b—корни квадратнаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами:

$$x^2 - Px + Q = 0.$$

Кромѣ того были перечислены случаи, указанные Эйлеромъ. Первушинымъ и Зельгофомъ (Seelhof), въ которыхъ число:

$$a_n = 2^{2^n} + 1$$

оказывается составнымъ, вопреки мнѣнію Фермата.

2) Люціанъ Юльяновичъ Маткевичъ показалъ нѣкоторыя слѣдствія тождества:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\varphi(x)\Psi(x)dx + \int_{f(x_0)}^{f(x)} f_{-1}(x)\varphi f_{-1}(x)\Psi f_{-1}(x)dx +$$

$$+ \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \varphi_{-1}(x)f\varphi_{-1}(x)\Psi\varphi_{-1}(x)dx + \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} \Psi_{-1}(x)f\Psi_{-1}(x)\varphi\Psi_{-1}(x)dx =$$

$$= xf(x)\varphi(x)\Psi(x) - x_0 f(x_0)\varphi(x_0)\Psi(x_0),$$

гдѣ:

$$y = f(x), \ z = \varphi(x), \ u = \Psi(x)$$

$$x = f_{-1}(y), \ z = \varphi f_{-1}(y), \ u = \Psi f_{-1}(y)$$

$$x = \varphi_{-1}(z), \ y = f\varphi_{-1}(z), \ u = \Psi\varphi_{-1}(z)$$

$$x = \Psi_{-1}(u), \ y = f\Psi_{-1}(u), \ z = \varphi\Psi_{-1}(u)$$

3) Е. С. Федоровъ представилъ собранію гоноэдрическіе демонстративные приборы, предназначенные для нагляднаго ознакомленія съ видами симметріи. Приборы эти двоякаго рода: шары и зеркала.

Виды симметріи совмѣщенія демонстрируются шарами съ намѣченными на нихъ полюсами осей симметріи. Около этихъ полюсовъ вращаются пластинки, вырѣзанныя подъ угломъ $\frac{2\pi}{p}$ (гдѣ p — наименованіе оси симметріи).

Для этого въ вершинахъ угловъ этихъ пластинокъ и перпендикулярно къ нимъ припаиваются иголочки. Кромѣ того, къ тѣмъ же вершинамъ, но въ плоскости пластинокъ, припаиваются еще проволочки, дѣлящія уголъ пополамъ. Пластинки съ проволоками изгибаются по поверхности шара.

Если теперь расположить эти пластинки такъ, чтобы ихъ вершины находились въ полюсахъ сосѣднихъ осей симметріи, а равнодѣлящія проволочки пересѣкались въ одной точкѣ, то сами пластинки очертятъ на сферѣ нѣкоторый сферическій многоугольникъ, и вся сфера разобьется на симметрически расположенные равные ему «элементарные» сферическіе многоугольники (а пространство около одной точки на соотвѣтствующіе гоноэдры).

Получается одинъ изъ возможныхъ случаевъ дѣленія сферы на равныя части; число частей равно величинѣ симметріи.

Очертанія элементарныхъ сферическихъ многоугольниковъ соотвѣтствуютъ очертаніямъ граней типическихъ изоэдровъ, а точки, въ которыхъ пересѣкаются проволки, ихъ точкамъ касанія или вершинамъ соотвѣтствующихъ подтипическихъ изогоновъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда данный видъ симметріи характеризуется постоянными (при всякомъ положеніи полюсовъ граней типическихъ изоэдровъ) очертаніями элементарныхъ сферическихъ многоугольниковъ по плоскостямъ симметріи, для демонстрированія вида симметріи употребляются трехгранные (и двухгранные) зеркала; у нихъ ребра также соотвѣтствуютъ тремъ ближайшимъ неравнымъ осямъ симметріи.

Плоскости и оси симметріи каждаго случая непосредственно наблюдаются въ зеркалѣ. Для демонстрированія типическихъ изоэдровъ въ нихъ наливается грязная ртуть съ плоскою матовою пленкою на поверхности. Въ этихъ зеркалахъ можно видѣть не только обыкновенные выпуклые типическіе изоэдры 1-й степени, но и типическіе изокойлоэдры, соотвѣтствующіе многогранникамъ высшихъ степеней.

Наконецъ, для демонстрированія сложной симметріи докладчикъ опять пользуется угловыми пластинками съ нѣкоторымъ усложненіемъ.

Приборы эти впервые были демонстрированы въ Императорскомъ Минералогическомъ Обществѣ въ началѣ 1883 года. Теорія, на которой они основаны, изложена въ сочиненіи докладчика «Начала ученія о фигурахъ», представленномъ для напечатанія въ томъ же году.

Описаніе и изображеніе этихъ приборовъ находится въ краткомъ руководствѣ по кристаллографіи докладчика.

Протоколъ засѣданія 15 сентября 1892 года.

Предсѣдательствующій сообщилъ собранію, что весною сего года Общество понесло чувствительную потерю въ лицѣ скончавшагося его предсѣдателя Василія Григорьевича Имшенецкаго. Покойный оказалъ Обществу громадныя услуги: онъ былъ однимъ изъ самыхъ дѣятельныхъ его учредителей, былъ первымъ его предсѣдателемъ, выхлопоталъ помѣщеніе для собраній Общества, въ которомъ оно засѣдало въ теченіи двухъ лѣтъ и всегда принималъ самое горячее участіе во всѣхъ дѣлахъ Общества.

По предложенію предсѣдательствовавшаго Собраніе почтило память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ. Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, Т. XVI вып. 1 и 2.

2) Д. Ф. Селивановъ. О разложеніи чиселъ на множители (замѣтка 2-я).

3) Е. С. Федоровъ. Краткое руководство по кристаллографіи, ч. I. 1891 г.

4) Д. К. Бобылевъ. Краткій историческій очеркъ открытія основныхъ принциповъ и общихъ законовъ теоретической механики.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ. Нѣкоторыя слѣдствія теоремы Ролля и приложеніе теоремы Ролля къ доказательству теоремы В. А. Маркова о распредѣленіи корней двухъ функцій и ихъ производныхъ.

2) И. И. Ивановъ въ дополненіе къ вышесказанному сообщенію, показалъ другое доказательство теоремы В. А. Маркова, именно:

Пусть корни алгебраическаго уравненія:

$$f(x) = 0 \quad . \ . \ . \ . \qquad . \ . \ . \qquad (1)$$

отдѣляются корнями уравненія:

$$F(x) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2);$$

причемъ всѣ корни предполагаются вещественными и показатель степени уравненія (1) равенъ или на единицу менѣе показателя степени уравн. (2). Пусть, далѣе, корни уравненія (2) будутъ:

$$x_1,\ x_2 \ldots x_n$$

Имѣемъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_1^n \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \frac{1}{x-x_k} + A \quad . \ . \ . \ . \quad (3),$$

гдѣ A—число постоянное.

Принимая во вниманіе вышесказанное о корняхъ и теорему Ролля, легко убѣждаемся, что всѣ коэффиціенты: $\frac{f(x_k)}{F'(x_k)}$ имѣютъ одинаковый знакъ.

Взявъ производныя по x отъ обѣихъ частей равенства (3), находимъ:

$$\frac{f'(x)F(x) - f(x)F'(x)}{[F(x)]^2} = -\sum_1^n \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \frac{1}{(x-x\ )^2} \quad . \ . \ . \quad (4),$$

Обозначимъ два смежныхъ корня уравненія: $F'(x) = 0$, черезъ y_m и y_{m+1} и подставимъ послѣдовательно эти значенія вмѣсто x въ равенство (4), тогда увидимъ, что $f'(y_m)$ и $f'(y_{m+1})$ будутъ имѣть разные знаки, что и доказываетъ теорему.

3) Н. Б. Делоне показалъ нѣсколько моделей новыхъ сочлененій.

Протоколъ засѣданія 15 октября 1892 г.

Секретарь Общества доложилъ собранію, что прежнее помѣщеніе, въ которомъ собиралось Общество, въ настоящее время понадобилось Академіи Наукъ для установки нѣкоторыхъ приборовъ и для производства опытовъ, поэтому Общество лишено возможности собираться въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ.

Въ виду этого, секретарь обратился къ члену Комитета Общества для доставленія средствъ Высшимъ Женскимъ курсамъ, Ольгѣ Константиновнѣ Нечаевой съ просьбою походатайствовать о разрѣшеніи собираться Обществу, по крайней мѣрѣ хоть 15 октября, въ зданіи Высшихъ Женскихъ курсовъ.

Въ письмѣ на имя В. І. Шиффъ, О. К. Нечаева увѣдомляетъ, что Комитетъ Общества для доставленія средствъ высшимъ женскимъ курсамъ выразилъ полную готовность оказать ежемѣсячное гостепріимство Математическому Обществу, начиная съ 15 октября, для чего уже сдѣланы соотвѣтствующія распоряженія.

Собраніе, выслушавъ заявленіе секретаря, постановило: поручить бюро Общества письменно выразить признательность Общества Комитету Общества для доставленія средствъ Высшимъ Женскимъ курсамъ за радушіе и готовность, съ которою Комитетъ отозвался на нужды Общества, предоставивъ ему такое прекрасное помѣщеніе, какъ домъ Высшихъ Женскихъ курсовъ.

При обсужденіи же вопроса, слѣдуетъ ли воспользоваться любезнымъ предложеніемъ Комитета, были высказаны нѣкоторыя принципіальныя причины, вслѣдствіе которыхъ неудобно Обществу собираться въ помѣщеніи Высшихъ Женскихъ курсовъ. Въ виду этого собраніе обратилось къ своимъ сочленамъ гг. профессорамъ университета съ просьбою походатайствовать о разрѣшеніи Обществу собираться въ зданіи университета, на что гг. профессора изъявили свое согласіе.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) К. А. Поссе. «Maxima и Minima функцій двухъ перемѣнныхъ».

2) Б. М. Кояловичъ. «О, такъ называемомъ, петербургскомъ парадоксѣ».

*

3) В. А. Марковъ — нѣкоторыя обобщенія найденной имъ теоремы о распредѣленіи корней двухъ функцій и ихъ производныхъ: Теорема 1. Пусть 1) для каждаго конечнаго значенія вещественной перемѣнной x, которая не можетъ получать значеній, меньшихъ нѣкотораго вещественнаго числа ς и получаетъ всѣ остальныя (случай $\varsigma = -\infty$ не исключается), вещественныя функціи: $f(x)$ и $F(x)$ отъ этой перемѣнной имѣютъ конечныя производныя и отношеніе:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = G(x),$$

гдѣ $G(z)$ — нѣкоторая дробная (méromorphe) функція отъ комплексной перемѣнной z на нѣкоторой части A плоскости, содержащей часть оси абсциссъ, лежащую справа отъ точки: $z = \varsigma$, и не имѣетъ на этой части плоскости другихъ безконечностей, кромѣ корней функціи $F(x)$; 2) между каждыми двумя послѣдовательными корнями (включая эти корни) любой изъ функцій: $f(x)$ и $F(x)$ заключается только одинъ корень ея производной, который мы будемъ называть соотвѣтствующимъ большему изъ этихъ двухъ корней самой функціи; 3) каково бы ни было значеніе перемѣнной x, модуль интеграла

$$\int\limits_{C_{x_1 t}} \frac{G(z)dz}{(z-x)^2},$$

взятаго по сомкнутой линіи $C_{x_1 t}$, не выходящей изъ части A плоскости, содержащей внутри себя точку x и зависящей отъ x и отъ нѣкотораго параметра t, который можно измѣнять такъ, что точки пересѣченія линіи $C_{x_1 t}$ съ осью абсциссъ, лежащія справа отъ точки $z = x$, будутъ удаляться въ безконечность, будетъ какъ угодно малъ, если линія $C_{x_1 t}$ — не проходитъ черезъ безконечности функціи $G(z)$ и точки пересѣченія ея съ осью абсциссъ, лежащія справа отъ точки $z = x$, достаточно далеки отъ начала координатъ; 4) корни функцій $f(x)$ и $F(x)$ перемежаются между собою.

Въ такомъ случаѣ корни производныхъ $f'(x)$ и $F'(x)$, соотвѣтствующіе корнямъ самыхъ функцій, также перемежаются между собою и притомъ если α—корень производной $f'(x)$, соотвѣтствующій корню a функціи $f(x)$, β—корень производной $F(x)$, соотвѣтствующій корню b функціи $F(x)$, то разности $\beta-\alpha$ и $b-a$— одного знака.

Замѣчаніе 1. Мы здѣсь предположили, что кратность каждаго корня любой изъ функцій $f(x)$ и $F(x)$ равна единицѣ, но распространивъ нѣкоторымъ образомъ понятіе о перемежаемости корней двухъ функцій отъ вещественной перемѣнной и понятіе о корнѣ производной, соотвѣтствующемъ корню самой функціи, высказанную теорему можно распространить и на тотъ случай, когда функціи $f(x)$ и $F(x)$ имѣютъ корни, кратность которыхъ отлична отъ единицы.

Замѣчаніе 2. Если функція $G(z)$ дробныя на всей плоскости и не имѣетъ другихъ безконечностей, кромѣ корней функціи $F(x)$ и около каждой безконечности функціи $G(z)$ можно описать нѣкоторый сомкнутый контуръ, такъ, что контуры, соотвѣтствующіе различнымъ безконечностямъ функціи $G(z)$, не будутъ пересѣкаться между собою и внѣ этихъ контуровъ модуль функціи $G(z)$ будетъ постоянно менѣе нѣкотораго положительнаго числа M, то условіе третье навѣрно выполнено. Второе условіе будетъ навѣрно выполнено, если для каждаго значенія перемѣнной x — функціи: $\frac{f'(x)}{F(x)}$ и $\frac{F'(x)}{F(x)}$ — не возрастающія.

Примѣръ. Пусть $g(x)$ какая угодно вещественная функція вещественной перемѣнной x, производная которой конечная и не возрастающая функція x для каждаго конечнаго значенія x, $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$—цѣлыя раціональныя функціи комплекснаго перемѣннаго z, неимѣющія мнимыхъ корней, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$—такія цѣлыя раціональныя функціи отъ z, что всѣ корни уравненій:

$$\omega(z) = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z)\,(z-1) = 0$$

$$\varsigma(z) = \Psi_1^2(z) + \Psi_2^2(z)\,(z-1) = 0$$

вещественные и заключаются между -1 и $+1$.

Пусть при томъ степень функціи $\varphi(z)$ не выше степени функціи $\Psi(z)$, а степень функціи $\varsigma(z)$ не выше степени $\omega(z)$.

Если корни функцій:

$$f(x) = e^{g(x)}\left[\varphi_1(\operatorname{Sin} x) + \varphi_2(\operatorname{Sin} x)\ \operatorname{Cos} x\right]\varphi(x)$$

$$F(x) = e^{g(x)}\left[\Psi_1(\operatorname{Sin} x) + \Psi_2(\operatorname{Sin} x)\ \operatorname{Cos} x\right]\Psi(x)$$

отъ вещественной перемѣнной x перемежаются между собою, то и корни ихъ производныхъ тоже перемежаются между собою.

Замѣчаніе 3. Если функціи $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяютъ условіямъ теоремы и второму условію, высказанному въ замѣчаніи 2-мъ (т. е. функціи: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ и $\frac{F'(x)}{F(x)}$ ни для какого значенія x не возрастаютъ), то и функціи:

$$e^{\int_\varsigma^x h(x)dx} f(x) \quad \text{и} \quad e^{\int_\varsigma^x h(x)dx} F(x),$$

гдѣ $h(x)$ — какая угодно возрастающая вещественная функція x, конечная для каждаго конечнаго значенія x, также удовлетворяютъ этимъ условіямъ.

Отсюда получаемъ слѣдующую теорему: если функціи $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяютъ условіямъ теоремы 1-й и второму условію замѣчанія 2-го, то корни функцій:

$$f'(x) + h(x)f(x) \ \text{ и } \ F'(x) + h(x)F(x),$$

гдѣ $h(x)$—какая угодно вещественная, невозрастающая функція x, конечная для конечныхъ значеній x, соотвѣтствующихъ корнямъ функцій $f(x)e^{\int_\varsigma^x h(x)dx}$ и $F(x)e^{\int_\varsigma^x h(x)dx}$ — перемежаются между собою.

Не трудно распространить эту теорему на всѣ корни функцій: $f'(x) + h(x)f(x)$ и $F'(x) + h(x)F(x)$, а также и на тотъ случай, когда функція $h(x)$ обращается въ безконечность для нѣкотораго значенія x, отличныхъ отъ корней функцій $f(x)$ и $F(x)$.

Теорема 2. Пусть:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}, \quad F(x) = \frac{\varsigma(x)}{\omega(x)}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1} \prod_{k=1}^{k=n} (x - a_k),\ \Psi(x) = \frac{1}{b_{n+m}} \prod_{k=n+1}^{k=n+m} (x - b_k)$$

$$\varsigma(x) = \prod_{k=1}^{k=n} (x - b_k),\ \omega(x) = \prod_{k=n+1}^{k=n+m} (x - a_k)$$

и вещественныя числа:

$$a_1,\ a_2 \ldots a_n,\ a_{n+1} \ldots a_{n+m};\ b_1,\ b_2 \ldots b_n,\ b_{n+1} \ldots b_{n+m}$$

удовлетворяютъ неравенствомъ:

$$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq b_2 \ldots \leqq a_n \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \ldots \leqq a_{n+m} \leqq b_{n+m}$$

(причемъ не исключаются случаи: $a_1 = -\infty$, $b_{n+m} = +\infty$).

Обозначимъ корни уравненія:

$$\varphi'(x)\Psi(x) - \Psi'(x)\varphi(x) = \Psi^2(x) \frac{df(x)}{dx} = \varphi^2(x) \frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{dx} = 0$$

буквами c съ различными значками, а корни уравненія:

$$\varsigma'(x)\omega(x) - \omega'(x)\varsigma(x(= \omega^2(x) \frac{dF(x)}{dx} = \varsigma^2(x) \frac{d\left(\frac{1}{F(x)}\right)}{dx} = 0 -$$

буквами d съ различными значками,

и предположимъ, что разности: $c_h - c_k$, $d_h - d_k$ и $h - k$ не противныхъ знаковъ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

1) при $n > m$

$$c_1 \leqq d_1 \leqq c_2 \leqq \ldots \leqq c_{n-1} \leqq d_{n-1} \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_n \leqq c_n \ldots \leqq d_{n+m-1}\ c_{n+m-1};$$

2) при $n = m$

$$c_1 \leqq d_1 \leqq c_2 \leqq d_2 \ldots \leqq c_{n-1} \leqq d_{n-1} \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_n \leqq c_n \ldots \leqq d_{n+m-2} \leqq c_{n+m-2};$$

3) при $n < m$

$$c_1 < d_1 \leqq c_2 \leqq d_2 \ldots \leqq c_n \leqq d_n \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_{n+1} \leqq c_{n+1} \ldots \leqq d_{n+m-1} \leqq c_{n+m-1}$$

и равенство: $c_k = d_k$ при $n \leqq m$ $k \leqq n-1$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда $a_k = a_{k+1} = b_k = b_{k+1}$; при $n \leqq m$, $n \leqq k < n+m-1$ только тогда, когда $a_{k+1} = a_{k+2} = b_{k+1} = b_{k+2}$; при $n < m$, $1 < k \leqq n$ только тогда, когда $a_{k-1} = a_k = b_{k-1} = b_k$, при $n < m$, $k > n$ только тогда, когда $a_k = a_{k+1} = b_k = b_{k+1}$ [мы предполагаемъ, что $f(x)$ не $=$ $= F(x)$]. Слѣдовательно корни уравненій (1) и (2), меньшіе b_n перемежаются между собою, а корни уравн. (1) и (2) большіе b_n перемежаются между собою.

Эта теорема можетъ быть распространена и на нераціональныя функціи, удовлетворяющія условіямъ, аналогичнымъ условіямъ теоремы 1-й.

Протоколъ засѣданія 13 ноября 1892 года.

Предсѣдатель, сообщивъ собранію, что, благодаря ходатайству профессоровъ К. А. Поссе и А. А. Маркова, Ректоръ Университета разрѣшилъ Обществу имѣть свои засѣданія въ зданіи Университета, — предложилъ собранію выразить признательность Общества К. А. Поссе и А. А. Маркову за ихъ хлопоты по устройству Общества.

Собраніе отозвалось на предложеніе Предсѣдателя весьма сочувственно и выразило благодарность К. А. Поссе и А. А. Маркову громкими рукоплесканіями. Вмѣстѣ съ тѣмъ было предложено поблагодарить Ректора Университета П. В. Никитина за гостепріимство и академика Вильда за разрѣшеніе Обществу собираться, до сего времени, въ физическомъ кабинетѣ Академіи Наукъ.

Собраніе постановило: поручить бюро Общества письменно выразить г. ректору Университета признательность Общества и поручить секретарю лично поблагодарить отъ имени Общества академика Вильда.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) А. А. Марковъ. «Случаи, когда интегралъ вида:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+B)\sqrt{x^3-1}}$$ выражается въ логариѳмахъ».

2) И. С. Аладовъ. «О наивысшемъ предѣлѣ числа рѣшеній сравненія: $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, меньшихъ p при p — простомъ».

Опредѣленіе наивысшаго предѣла числа рѣшеній сравненія

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 \text{ (мод. } p^2)$$

меньшихъ p *при* p*—простомъ.*

Рѣшеніе этой задачи основано на нѣкоторыхъ свойствахъ корней p сравненій

$$x-x^p \equiv hp \text{ (мод. } p^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $h = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Предположимъ что число $n > 1$, меньшее p, удовлетворяетъ сравненію:

$$x - x^p \equiv 0 \text{ (мод. } p^2)$$

и посмотримъ, какому изъ сравненій (1) будетъ удовлетворять число $p-n$; положивъ $p-n=n_1$ и вставивъ величину $n=p-n_1$ въ предъидущее сравненіе, находимъ:

$$n_1 - n_1^p \equiv p \text{ (мод. } p^2)$$

Возьмемъ теперь сравненіе:

$$\partial y \equiv 1 \text{ (мод. } p).$$

Каждой величины ∂, взятой изъ ряда: $1, 2, 3, \ldots, p-1$, соотвѣтствуетъ нѣкоторая величина для y изъ того же ряда. Положимъ $\partial = n$ и посмотримъ, какому изъ сравненій (1) удовлетворяетъ соотвѣтствующая величина y; сравненіе (1) $ny \equiv 1$ (мод. p) даетъ $ny = ap + 1$, гдѣ a меньше n и y; отсюда $y = \frac{ap+1}{n}$ полагая: $y - y^p \equiv rp$ (мод. p^2) и вставляя сюда $y = \frac{ap+1}{n}$, находимъ:

$$\frac{ap+1}{n} - \left(\frac{ap+1}{n}\right)^{p} \equiv rp \text{ (мод. } p^2),$$

или, принимая во вниманіе сравненіе: $n-n^p \equiv 0$ (мод. p^2),

$$ap \equiv nrp \text{ (мод. } p^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

т. е. $a \equiv nr$ (мод. p). Отсюда заключаемъ, что r не можетъ равняться ни нулю, ни единицѣ, такъ какъ $a < n$. Итакъ $r > 1$.

Посмотримъ, наконецъ, какому изъ сравненій (1) удовлетворяетъ величина $p-y=y_1$; имѣемъ

$$p - y_1 - (p - y_1)^p \equiv rp \text{ (мод. } p^2),$$

откуда

$$y_1 - y_1^p \equiv r_1 p \text{ (мод. } p^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ $r_1 \equiv 1 - r$ (мод. p), и такъ какъ $p > r > 1$, то и $r > 1$. Изъ этого видно, что каждой величинѣ $n \substack{<1 \\ >p}$, удовлетворяющей первому изъ сравненій (1), соотвѣтствуютъ три величины $p-n$, y и $p-y$, большія единицы и меньшія p, изъ которыхъ первая удовлетворяетъ второму изъ сравненій (1), а другія двѣ—какимъ-либо двумъ другимъ [въ частномъ случаѣ можетъ быть и одному и тому же, именно, если $r = \frac{p+1}{2}$]. Теперь легко уже рѣшить нашу задачу. Въ самомъ дѣлѣ, въ ряду $p-3$ сравненій:

$$\left.\begin{array}{r} 2y_2 \equiv 1 \\ 3y_3 \equiv 1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (p-2)y_{p-2} \equiv 1 \end{array}\right| \text{ мод. } p \Bigg|, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

лишь половина изъ нихъ, т. е. $\frac{p-3}{2}$, различны между собою, и если $\frac{p-3}{2}$ — число четное, то эти $\frac{p\ 3}{2}$ сравненій могутъ быть распредѣлены попарно такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{r} \partial_1 u_1 \equiv 1 \\ (p-\partial_1)(p-u_1) \equiv 1 \\ \partial_2 u_2 \equiv 1 \\ (p-\partial_2)(p-u_2) \equiv 1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \partial_{\frac{p-3}{4}} \cdot u_{\frac{p-3}{4}} \equiv 1 \\ \left(p-\partial_{\frac{p+3}{4}}\right)\left(p-u_{\frac{p-3}{4}}\right) \equiv 1 \end{array}\right| \text{ мод. } p \Bigg|,$$

гдѣ всѣ d, u, $p-d$ и $p-u$ (заключ. въ предѣлахъ отъ 2 до $p-1$ включит.) различны между собою.

Изъ доказаннаго выше слѣдуетъ, что неболѣе $\frac{p-3}{4}$ изъ этихъ величинъ могутъ удовлетворять первому изъ сравненій (1); прибавивъ сюда единицу, найдемъ, что всѣхъ величинъ меньшихъ p удовлетворяющихъ сравненію $x^{p-1}-1=0$ (мед. p^2) не можетъ быть болѣе $\frac{p+1}{4}$. Если $\frac{p-1}{2}$ — число четное, то въ числѣ $\frac{p-3}{2}$ различныхъ между собою сравненій (4) находится сравненіе: $\partial(p-\partial)\equiv 1$ (мод. p) и по доказанному выше (сравп. 2 и 3), ни это ∂, ни $p-\partial$ не могутъ удовлетворять сравненію $x-x^p\equiv 0$ (мод. p^2); остальныя $\frac{p-5}{2}$ сравненій можно распредѣлить попарно такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{r} \partial_1\, u_1 \equiv 1 \\ (p-\partial_1)(p-u_1)\equiv 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \partial_{\frac{p-5}{4}}\cdot u_{\frac{p-5}{4}}\equiv 1 \\ \left(p-\partial_{\frac{p-5}{4}}\right)\left(p-u_{\frac{p-5}{4}}\right)\equiv 1 \end{array}\right| \left(\text{мод. } p\right),$$

гдѣ всѣ ∂, u, $p-\partial$ и $p-u$ различны между собою. Отсюда заключаемъ, принимая во вниманіе доказанное выше, что не болѣе $\frac{p-5}{4}$ изъ этихъ величинъ могутъ быть корнями сравненія $x-x^p\equiv 0$ (мод. p^2), и прибавивъ сюда единицу, находимъ, что это сравненіе не можетъ имѣть болѣе $\frac{p-1}{4}$ рѣшеній, меньшихъ p. Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, въ которой и заключается рѣшеніе нашей задачи: *Если простое число p таково, что $\frac{p-1}{2}$ есть четное число, то сравненіе*:

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \text{ (мод. } p^2)$$

не можетъ имѣть болѣе $\frac{p-1}{4}$ рѣшеній, меньшихъ p; если же p — таково, что $\frac{p-1}{2}$ — число нечетное, то число рѣшеній предыдущаго сравненія, меньшихъ p, не можетъ превышать $\frac{p+1}{4}$.

Нужно замѣтить, что это есть самое общее рѣшеніе предложенной задачи, такъ можно указать два простыя числа, для которыхъ число рѣшеній сравненія $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (мод. p^2), меньшихъ p, достигаетъ найденнаго высшаго предѣла; числа эти суть: 5 и 11; сравненіе: $x^4 - 1 \equiv 0$ (мод. 5^2) имѣетъ лишь одно рѣшеніе < 5, именно единицу; сравненіе же $x^{10} - 1 \equiv 0$ (мод. 11^2) имѣетъ три рѣшенія < 11, именно: 1, 3 и 9, что соотвѣтствуетъ наивысшему предѣлу числа подобныхъ рѣшеній. Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, слѣдующее предложеніе: *если простое число p таково, что $\frac{p-1}{2}$ есть четное число, то не менѣе $\frac{3}{4}\,\varphi\,(p-1)$* *) *первообразныхъ корней числа p, меньшихъ p, суть также первообразные корни числа p^m. Если же $\frac{p-1}{2}$ число нечетное, то по меньшей мѣрѣ $\frac{1}{2}\,\varphi\,(p-1)$ первообразныхъ корней p, меньшихъ p, суть также первообразные корни числа p^m.*

Доказательство этого предложенія вытекаетъ изъ вышеизложенныхъ разсужденій, если примемъ во вниманіе, что числа связанныя отношеніемъ:

$$\partial y \equiv 1 \text{ (мод. } p)$$

суть одновременно первообразные или непервообразные корни числа p, и что при $\frac{p-1}{2}$ — четномъ, ∂ и $p - \partial$ — обладаютъ тѣмъ же свойствомъ.

Протоколъ экстреннаго засѣданія 16 Декабря 1892 года.

Товарищъ предсѣдателя предложилъ Собранію попросить П. Л. Чебышева предсѣдательствовать въ этомъ засѣданіи.

Предложеніе это было встрѣчено громкими рукоплесканіями и П. Л. Чебышевъ занялъ мѣсто предсѣдателя.

Предсѣдательствующій сообщилъ собранію о громадной потерѣ, которую понесла наука, Академія Наукъ, С.-Петербургское

---

*) φ (N) означаетъ число чиселъ простыхъ съ N и не превышающихъ его.

Математическое Общество и Артиллерія въ лицѣ скончавшагося члена нашего Общества академика Акселя Вильгельмовича Гадолина.

Собраніе почтило память скончавшагося вставаніемъ съ мѣстъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія (на французскомъ языкѣ).

1) Г. Миттагъ-Леффлеръ. «О неалгебраическихъ особенностяхъ дифференціальнаго уравненія, независящихъ отъ постоянной».

2) П. Л. Чебышевъ. «О приближенномъ вычисленіи одного опредѣленнаго интеграла».

Исходя изъ формулы, данной Пафнутіемъ Львовичемъ, для приближеннаго выраженія квадратнаго корня изъ единицы дѣленной на перемѣнную, черезъ простыя дроби (приложеніе къ LXI тому записокъ Имп. Академіи Наукъ № 1, 1889 г., стр. 10), именно:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{h}\, dn \dfrac{2mK}{2n+1}}{x sn^2 \dfrac{2mK}{2n+1} + h cn^2 \dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta} \sum dn \dfrac{2mK}{2n+1}}$$

можно, замѣняя перемѣнную x — другою перемѣнною, получить приближенныя выраженія для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Если напр. положить:

$$x = \frac{1+r^2-2r \operatorname{Cos} \varphi}{(1-r)^2},$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r \operatorname{Cos} \varphi}} = \sum_i \frac{A_i\,(1-r)}{C_i\,(1-r)^2+1+r^2-2r \operatorname{Cos}\varphi} \quad . \; . \; . \quad (1).$$

гдѣ:

$$A_i = \frac{2\sqrt{h}\, dn \dfrac{2iK}{2n+1}}{l sn^2 \dfrac{2iK}{2n+1} \sum dn \dfrac{2iK}{2n+1}},$$

$$C_i = h \frac{cn^2 \dfrac{2iK}{2n+1}}{sn^2 \dfrac{2iK}{2n+1}}$$

$$r < 1,\ h = \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2},\ K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \mathrm{Sin}^2\varphi}}$$

$$k = \sqrt{1-\frac{1}{h}} = \frac{2\sqrt{r}}{1+r}.$$

Разлагая въ рядъ по косинусамъ кратныхъ дугъ функцію:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\,\mathrm{Cos}\,\varphi}},$$

будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\,\mathrm{Cos}\,\varphi}} = B_0 + B_1\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \ldots + B_m\,\mathrm{Cos}\,m\varphi + \ldots \quad (2),$$

при этомъ коеффиціенты выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Cos}\,m\varphi}{\sqrt{1+r^2-2r\,\mathrm{Cos}\,\varphi}}\,d\varphi,$$

поэтому, принимая во вниманіе равенство (1), будемъ имѣть:

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum \frac{A_i\,(1-r)\,\mathrm{Cos}\,m\varphi d\varphi}{C_i\,(1-r)^2+1+r^2-2r\mathrm{Cos}\varphi} \quad \ldots \quad (3)$$

Съ другой стороны извѣстная формула Пуассона даетъ:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f\left(e^{\varphi i}\right)}{1-\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\,d\varphi = \frac{2\pi f\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\,\alpha},$$

поэтому, полагая въ равенствѣ (2)

$$\mathrm{Sin}\,\alpha_i = \frac{2r}{C_i\,(1-r)+1+r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

получимъ:

$$B_m = \sum \frac{2A_i\,(1-r)}{C_i(1-r)^2+1+r^2} \cdot \frac{tg\frac{m\alpha i}{2}}{\mathrm{Cos}\,\alpha_i}$$

или:

$$B_m = \sum \frac{A_i\,(1-r)}{r}\, tg\alpha_i\; tg\, \frac{m\alpha_i}{2} =$$

$$= \frac{\sum \frac{1+r}{r}\, dn\, \frac{2iK}{2n+1} \cdot tg\alpha_i tg\, \frac{m\alpha i}{2} : sn^2\, \frac{2iK}{2n+1}}{\frac{1}{2} + \sum dn\, \frac{2iK}{2n+1}}$$

$$\text{Sin}\, \alpha_i = \frac{2r}{r^2 + 1 + (r+1)^2 \dfrac{Cn^2\, \frac{2iK}{2n+1}}{Sn^2\, \frac{2iK}{2n+1}}}$$

Погрѣшность E при этомъ вычисленіи будетъ меньше:

$$\frac{32\,K}{\pi(r+1)\left[e^{(2n+1)\pi\frac{K_1}{K}} - 16\right]},$$

гдѣ:

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1{}^2\, \text{Sin}^2\, \varphi}}\,,\quad k_1 = \sqrt{1-k^2} = \frac{r-1}{r+1}\cdot$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ Пафнутій Львовичъ показалъ формулу, служащую для приближеннаго выраженія дроби:

$$\frac{1}{H-x}$$

въ предѣлахъ отъ $-h$ до $+h$, при помощи полинома $n-1$ степени; именно: обозначая:

$$F(H) = (H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n,$$

будемъ имѣть:

$$(5)\;.\;\;.\;\; \frac{1}{H-x} = \frac{E\left[\frac{F(H)}{H}\right]}{F(H)} + \frac{E\left[\frac{F(H)}{H^2}\right]}{F(H)}\, x + \frac{E\left[\frac{F(H)}{H^3}\right]}{F(H)}\, x^2 + \ldots$$

гдѣ черезъ $E\left(\frac{F(H)}{H^k}\right)$ обозначена цѣлая часть этой функціи.

Въ частномъ случаѣ, полагая $h = 0$ будемъ имѣть: $F(H) = 2^n H^n$ и тогда

$$\frac{1}{H-x} = \frac{1}{H} + \frac{x}{H^2} + \ldots -$$

— извѣстное разложеніе:

Помноживъ равенство (5) на $f(x)dx$ и интегрируя въ предѣлахъ между $-h$ и $+h$, будемъ имѣть:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{f(x)dx}{H-x} = \frac{E\left[\frac{F(H)}{H}\right]}{F(H)} \int_{-h}^{+h} f(x)dx + $$

$$+ \frac{E\left[\frac{F(H)}{H^2}\right]}{F(H)} \int_{-h}^{+h} xf(x)dx + \ldots$$

съ погрѣшностью, не превосходящею:

$$\pm \frac{2h^n}{F(H)}$$

Оба сообщенія: г. Миттага-Леффлера и П. Л. Чебышева встрѣчены были собраніемъ громкими и продолжительными рукоплесканіями.

Протоколъ засѣданія 21 декабря 1892 года.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «Принципъ общаго наибольшаго дѣлителя въ теоріи алгебраическихъ чиселъ. Очеркъ».

2) В. А. Марковъ. «О рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ уравненія: $x^n + y^n = z^n$ ».

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія книги:

1) Сборникъ Московскаго Математическаго Общества т. XVI вып. 3.

2) Соколовъ Н. П. Теорія симметрическихъ многогранниковъ.

Протоколъ засѣданія 15 Января 1893 года.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) С. Е. Савичъ. «О раціональныхъ интегралахъ одного нелинейнаго дифференціальнаго уравненія 3-го порядка (пріемъ Pepin)».

2) М. З. Образцовъ. «О приведеніи ультраэллиптическихъ дифференціаловъ къ эллиптическимъ».

3) И. В. Мещерскій. «Къ задачѣ *n* — тѣлъ». Природа и обыденная жизнь представляютъ намъ такіе случаи движенія, въ которыхъ массы движущихся тѣлъ измѣняются съ теченіемъ времени; поэтому разсмотрѣніе движеній тѣлъ съ измѣняющимися массами должно имѣть мѣсто въ теоретической механикѣ.

Принципы: возможныхъ перемѣщеній, д'Аламбера, Гаусса— сохраняютъ свое значеніе и въ этомъ случаѣ, но другіе принципы, вообще говоря, не имѣютъ мѣста; дифф. ур. движенія получаютъ такой видъ, какъ будто бы массы были постоянны. Простѣйшій случай представляется тогда, когда массы точекъ системы измѣняются по одному и тому же закону:

$$m_i = k_i f(t) \quad (k_i = const).$$

Въ этомъ случаѣ задача о движеніи *n* точекъ, взаимно притягивающихся или отталкивающихся, допускаетъ шесть интеграловъ центра инерціи и три интеграла, аналогичные интеграламъ площадей.

Теорема. Задача о движеніи системы точекъ, массы которыхъ измѣняются по закону:

$$m_i = k_i(a + \alpha t)^{-s-3} \ldots (a, \alpha \ldots const),$$

при дѣйствіи силъ притягательныхъ или отталкивательныхъ, пропорціональныхъ массамъ и 3-ей степени разстоянія, приводится къ задачѣ о движеніи системы точекъ съ постоянными массами при дѣйствіи тѣхъ же силъ.

Слѣдствія, вытекающія изъ этой теоремы для случая *трехъ* и *двухъ* тѣлъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Указанный при этомъ случай задачи двухъ тѣлъ есть частный случай задачи Гильдена (Astr. Nachr. 2593) замѣчательный тѣмъ, что допускаетъ точное рѣшеніе.

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1893 года.

I. По предложенію предсѣдателя единогласно избранъ въ почетные члены Общества Пафнутій Львовичъ Чебышевъ.

II. Производились выборы въ члены Совѣта, причемъ избранными оказались слѣдующія лица: К. А. Поссе, Ю. В. Сохоцкій, А. А. Марковъ, П. А. Шиффъ, Д. К. Бобылевъ, А. Н. Коркинъ, И. Л. Пташицкій, О. А. Баклундъ, Д. Ф. Селивановъ и В. I. Шиффъ.

III. Секретарь Общества представилъ Собранію отчетъ о состояніи суммъ Общества и просилъ обсудить вопросъ о назначеніи обязательнаго членскаго взноса. Собраніе постановило: отъ каждаго вступающаго въ Общество члена взимать по *пяти* рублей, и, затѣмъ, ежегодный членскій обязательный взносъ устанавливается въ *три* рубля. Что же касается до состоящихъ въ настоящее время членами Общества, то они въ этомъ году считаются какъ бы вступающими въ Общество и должны поэтому внести по 5 рублей.

IV. По предложенію предсѣдателя Собраніе постановило выразить благодарность Инспектору классовъ Михайловской Артиллерійской Академіи и училища полковнику Карлу Егоровичу Гуку за матеріальное содѣйствіе, которое онъ постоянно оказываетъ Обществу.

V. Предлагаются въ члены Общества.

1) Николай Александровичъ Булгаковъ; предлагаютъ: П. А. Шиффъ и Б. М. Кояловичъ;
2) Дмитрій Дмитріевичъ Ефремовъ; предлагаютъ К. А. Поссе и Ю. В. Сохоцкій.

VI. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Е. В. Борисовъ. «О критическихъ центрахъ кривыхъ 3-го порядка».
2) Д. К. Бобылевъ. «Объ одномъ частномъ рѣшеніи дифференціальныхъ уравненій вращенія твердаго тяжелаго тѣла вокругъ неподвижной точки, если центръ инерціи находится на наименьшей главной оси эллипсоида инерціи».

При этомъ частномъ рѣшеніи проэкція угловой скорости на направленіе средней оси эллипсоида равна нулю, но для этого надо, чтобы наибольшій главный моментъ инерціи былъ вдвое болѣе наименьшаго. Въ томъ случаѣ, когда вращеніе вокругъ наименьшей оси эллипсоида инерціи совершается безъ остановокъ, каждая точка этой оси описываетъ сферическую кривую съ точками возврата на одномъ изъ предѣльныхъ круговъ.

Протоколъ засѣданія 17 марта 1893 года.

I. Предсѣдатель Совѣта Ю. В. Сохоцкій предложилъ избрать предсѣдателемъ этого засѣданія Н. В. Бугаева. Предложеніе это встрѣчено громкими рукоплесканіями и Н. В. Бугаевъ занялъ мѣсто предсѣдателя.

II. Въ библіотеку Общества доставлены сочиненія:

1) Д. К. Бобылевъ. «О шарѣ съ гироскопомъ внутри, катящемся по горизонтальной плоскости безъ скольженія»,
2) Извѣстія СПБ. Технологическаго института за 1891 и 1892 г.
3) П. А. Шиффъ. «О нѣкоторыхъ слѣдствіяхъ теоремы Ролля».

III. Избраны въ члены Общества: Николай Александровичъ Булгаковъ и Дмитрій Дмитріевичъ Ефремовъ.

IV. Сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) А. С. Домогаровъ. «Объ одной теоремѣ Якоби».
2) Н. Б. Делоне. «О новомъ эллипсографѣ».
3) Е. С. Федоровъ. «О проблемѣ — minima въ области ученія о симметріи».

Протоколъ засѣданія 17 апрѣля 1893 года.

I. Въ библіотеку Общества доставлены сочиненія:

1) 4-й выпускъ XVI тома Математическаго сборника Московскаго Математическаго Общества.

2) С. Е. Савичъ. О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами.

II. Предлагаются въ члены Общества:

1) Павелъ Семеновичъ Селезневъ (предлагаютъ Д. Ф. Селивановъ и Б. М. Кояловичъ).

2) М. М. Филипповъ (предлагаютъ Ю. В. Сохоцкій и П. А. Шиффъ).

3) Николай Павловичъ Трынковскій (предлагаютъ В. И. Станевичъ и С. Е. Савичъ).

III. Читано письмо А. В. Васильева о чествованіи памяти Н. И. Лобачевскаго по случаю столѣтія годовщины его рожденія.

IV. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) О. А. Баклундъ. «Общія выраженія для возмущеній, производимыхъ внутренними планетами въ движеніи кометъ по верхнимъ частямъ ихъ орбитъ».

2) Н. Б. Делоне. «О механизмахъ съ рычагами, шарнирами и прорѣзями».

Засѣданіе 18 сентября 1893 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

а) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Е. С. Федоровъ. «Проблема — minimum въ ученіи о симметріи».

2) И. И. Ивановъ. «Къ теоріи цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ».

3) Н. Б. Делоне. «О нѣкоторыхъ новыхъ механизмахъ».

4) А. В. Васильевъ. «Переводъ мемуаровъ: Гельмгольца — счетъ и измѣреніе и Кронекера — понятіе о числѣ».

б) Избраны въ члены Общества: Павелъ Семеновичъ Селезневъ, Михаилъ Михайловичъ Филипповъ и Николай Павловичъ Трынковскій.

в) Предлагаются въ члены Общества:

1) Николай Платоновичъ Цытовичъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

2) Евгенія Александровна Максимова (предлагаютъ В. I. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

г) Предсѣдатель напомнилъ собранію о необходимости напечатать уставъ Общества и Протоколы Собраній; для этой цѣли нужно, чтобы гг. члены Общества поторопились доставкою членскихъ взносовъ за 1893 г.

И. И. Ивановъ, «Нѣкоторыя предложенія о простыхъ числахъ».

д) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

I) Простыхъ чиселъ формы $8m + 3$ — безконечное множество. Допустимъ, что всѣ числа этой формы будутъ:

$$3,\ 11, \ldots p$$

и пусть

$$(3 . 11 \ldots p) = P.$$

Составимъ число:

$$P^2 + 2.$$

Такъ какъ P^2 имѣетъ форму $8n + 1$,

то

$$P^2 + 2 = 8n + 3.$$

По крайней мѣрѣ одинъ изъ дѣлителей этого числа будетъ формы: $4s + 3$, т. е. или формы $8s + 3$ или $8z + 7$.

Но $P^2 + 2$ дѣлится только на тѣ простыя числа, для которыхъ (-2) квадратичный вычетъ и, слѣдовательно, ни одинъ изъ дѣлителей $P^2 + 2$ не можетъ имѣть форму $8m + 7$. Такимъ образомъ мы обнаруживаемъ существованіе простого дѣлителя $8s + 3$, не заключающагося въ рядѣ: $3,\ 11, \ldots p$ и теорема доказана.

2) Простыхъ чиселъ формы: $8m + 7$ — безконечное множество. Допустимъ, что всѣ числа этой формы будутъ:

$$7,\ 23, \ldots p,$$

и пусть

$$P = 7 . 23 \ldots p.$$

Составляемъ число:

$$P^2 + 2.$$

Дальнѣйшія разсужденія аналогичны съ предъидущимъ.

3) Простыхъ чиселъ формы $8m + 5$ — безконечное множество. Пусть всѣ числа этой формы будутъ:

$$5,\ 13, \ldots p.$$

Составляемъ число:

$$P^2 + 2^2,$$

которое будетъ имѣть форму: $8m + 5$; дѣлители его будутъ имѣть форму: $4n+1$, т. е. или форму $8m+5$ или $8m+1$; но, такъ какъ само число P^2+2^2 имѣетъ форму $8m+5$, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ дѣлителей будетъ формы $8m + 5$ и теорема доказана.

4) Простыхъ чиселъ формы $8m + 1$ — безконечное множество. Пусть всѣ числа этой формы будутъ:

$$17,\ 41, \ldots p.$$

Составляемъ число:

$$(2P)^4 + 1.$$

Такъ какъ (-1)—биквадратичный вычетъ только для чиселъ формы $8m + 1$, то, слѣдовательно, всѣ дѣлители этого числа имѣютъ форму: $8m + 1$ и теорема доказана.

II. Д. А. Граве. «О черченіи географическихъ картъ».

III. Н. Б. Делоне. 1) «О сферопланѣ и о черченіи географическихъ картъ». Соединяя инверсоръ Peaucellier съ пантографомъ, можно получить снарядъ для черченія стереографическихъ проэкцій кривыхъ, начерченныхъ на глобусѣ. 2) «О новомъ способѣ механическаго черченія трохоидъ». Если имѣются два кривошипа, вращающіеся около двухъ неподвижныхъ центровъ съ постояннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей, то середина разстоянія между концами этихъ кривошиповъ чертитъ трохоиду. Поэтому, если соединить шарнирами концы кривошиповъ съ концами равносторонняго пантографа, то средняя вершина пантографа опишетъ трохоиду.

Засѣданіе 20 октября 1893 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

I. Избраны въ члены Общества: Николай Платоновичъ Цытовичъ и Евгенія Александровна Максимова.

II. Предлагаются въ члены Общества: Марія Людовиковна Бронская (предлагаютъ В. I. Шиффъ и О. А. Баклундъ), Александра Іеронимовна Стебницкая, (предлагаютъ В. I. Шиффъ и О. А. Баклундъ), Александръ Николаевичъ Толмачевъ (предлагаютъ Д. Ф. Селивановъ, Е. В. Борисовъ и Д. А. Граве), Сергѣй Федоровичъ Влезковъ (предлагаютъ Д. Ф. Селивановъ и П. М. Новиковъ) и Федоръ Алексѣевичъ Покровскій (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

III. Предсѣдатель напомнилъ Собранію, что черезъ два дня исполнится сто лѣтъ со дня рожденія знаменитаго русскаго геометра Николая Ивановича Лобачевскаго и предложилъ посвятить засѣданіе памяти этого замѣчательнаго ученаго. Секретарь Общества прочелъ письмо Ректора Императорскаго Казанскаго Университета съ приглашеніемъ С.-Петербургскаго Математическаго Общества принять участіе въ празднованіи столѣтія дня рожденія Н. И. Лобачевскаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ былъ прочитанъ привѣтственный адресъ, посланный С.-Петербургскимъ Математическимъ Обществомъ Императорскому Казанскому Университету по случаю этого многознаменательнаго для русской науки дня. Затѣмъ С. Е. Савичъ, сообщивъ собранію нѣкоторыя біографическія свѣдѣнія о жизни Н. И. Лобачевскаго, изложилъ содержаніе работъ послѣдняго, преимущественно по геометріи, и указалъ на высокое ихъ научное и философское значеніе.

Послѣ взаимнаго обмѣна мнѣній между членами Общества о выдающихся научныхъ заслугахъ Н. И. Лобачевскаго, былъ сдѣланъ перерывъ засѣданія.

По возобновленіи засѣданія, послѣ перерыва были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) *И. И. Ивановъ*. «Нѣкоторыя предложенія о простыхъ числахъ» (продолженіе сообщенія, сдѣланнаго въ засѣданіи 18 сентября).

Докладчикъ доказалъ еще четыре предложенія, которыя могутъ быть формулированы такъ: *Простыхъ чиселъ, заключающихся въ каждой изъ линейныхъ формъ: $12m+5$, $12m+7$, $12m+11$ и $12m+1$, безконечное множество.*

Пріемъ, которымъ онъ пользовался, аналогиченъ съ тѣмъ, при помощи котораго онъ доказалъ четыре предложенія въ предъидущемъ засѣданіи 18 сентября, именно: предполагая всякій разъ, что число простыхъ чиселъ, заключающихся въ данной линейной формѣ, конечное и обозначая ихъ произведеніе черезъ P, онъ разсматриваетъ слѣдующія формы: 1) $(2P)^2+3$ — для чиселъ формы $12m+7$, 2) P^2-3 — для чиселъ формы $12m+11$, 3) P^2+2^2 — для чиселъ формы $12m+5$ и 4) $(2P)^6+1=$ $=\left[(2P)^2+1\right]\left[\{(2P)^2+1\}^2-3\,(2P)^2\right]$ — для чиселъ формы $12m+1$.

Пользуясь извѣстными предложеніями, заключающимися въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$\left(-\frac{3}{n}\right)=1$$

для простыхъ n формъ: $12m+7$ и $12+1$ и

$$\left(\frac{3}{n}\right)=1$$

для простыхъ n формъ: $12m+1$ и $12m+11$ и

$$\left(-\frac{1}{n}\right)=1$$

для простыхъ n формъ: $12m+1$ и $12m+5$,

онъ въ каждомъ случаѣ обнаруживаетъ существованіе простыхъ чиселъ данной линейной формы, на которыя P не дѣлится, что и доказывало предложеніе.

2) *К. А. Поссе* сдѣлалъ сообщеніе о доказательствѣ трансцендентности числа e, предложенномъ Горданомъ (Comptes rendus № 19 T. CXVI) и обобщеніе Гордановскихъ соображеній, ведущее къ доказательству трансцендентности числа π.

Равенство вида

$$A_0e^{\alpha_0}+A_1e^{\alpha_1}+\ldots+A_ke^{\alpha_k}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ — алгебраическія числа, различныя между собою, а $A_0, A_1, \ldots A_k$ — цѣлыя обыкновенныя числа, не равныя нулю, преобразовывается въ виду: (см. *А. А. Марковъ* «Доказательство трансцендентности чиселъ e и π» (по статьямъ Эрмита и Линдемана) С.-Петербургъ, 1883)

$$(2)\quad D_1\Sigma e^{\xi_{i_1}:\sigma} + D_2\Sigma e^{\xi_{i_2}:\sigma} + \ldots + D_n\Sigma e^{\xi_{in}:\sigma} = 0,$$

гдѣ $D_1, D_2, \ldots D_n$, и σ обыкновенныя цѣлыя числа, а ξ_{ik} — *цѣлыя* алгебраическія числа, корни неприводимыхъ уравненій

$$F_1(z) = 0,\ F_2(z) = 0, \ldots F_n(z) = 0.$$

Равенство (2) замѣняется равенствомъ:

$$(\mathrm{I})\quad D_0 + D_1\Sigma e^{x_i\,:\,\sigma} + D_2\Sigma e^{y_i\,:\,\sigma} + \ldots + D_n\Sigma e^{u_i\,:\,\sigma} = 0,$$

гдѣ $x_i, y_i, \ldots u_i$ — цѣлыя алгебраическія числа, между которыми нѣтъ чиселъ, равныхъ нулю; суммированія, обозначенныя знакомъ Σ, распространяются:

первое	на	всѣ	корни	уравненія	$X = 0$
второе	»	»	»	»	$Y = 0$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
послѣднее	»	»		»	$U = 0$

Полагая

$$\underline{\Omega}\,(z) = X.Y..\ U = z^N + p_1 z^{N-1} + \ldots + p_N = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-y_1)\ldots(z-u_g),$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_N$ — цѣлыя числа и p_N не $= 0$,

составляемъ функцію

$$\varphi(z) = \frac{\sigma^{p-1}\, z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\,[\underline{\Omega}(\sigma z)]^p,$$ гдѣ p есть простое число, большее наибольшаго изъ чиселъ p_N, D_0 и σ. Введя символъ Гордана, опредѣляемый равенствами

$h^k = 1.2\ldots k$, для всякаго цѣлаго и положительнаго k, такъ что, если

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

то

$$\varphi(h) = a_0 + a_1 . 1 + 1 . 2 \ a_2 + 1 . 2 . 3 \ a_3 + . . + . 1 . 2 . . . n . a_n;$$

находимъ, что $\varphi(h)$ есть цѣлое число не дѣлящееся на p,

$$\text{а } \Sigma\varphi\left(h + \frac{x_i}{\sigma}\right),\ \Sigma\varphi\left(h + \frac{y_i}{\sigma}\right),\ \ldots\ \Sigma\varphi\left(h + \frac{u_i}{\sigma}\right) \text{ числа}$$

кратныя отъ p.

При достаточно большомъ p, *Mod.* $\varphi(z)$ для конечнаго значенія z, можно сдѣлать менѣе всякаго заранѣе заданнаго положительнаго числа; то же самое справедливо для *Mod.* $\psi(z)$, гдѣ $\psi(z)$ есть цѣлая функція отъ z, въ которой коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z имѣютъ модули, меньшіе чѣмъ соотвѣтствующіе коэффиціенты въ $\varphi(z)$.

Изъ разложенія e^z въ рядъ выводится символическое равенство

$$\varphi(h)\, e^z = \varphi(h + z) + \psi(z) e^{Mod.\, z},$$

а отсюда, на основаніи равенства (1) слѣдующее:

$$D_0\varphi(h) + D_1\Sigma\varphi\left(h + \frac{x_i}{\sigma}\right) + \ldots + D_n\,\Sigma\varphi\left(h + \frac{u_i}{\sigma}\right) =$$

$$= - D_1\,\Sigma\psi\left(\frac{k_i}{\sigma}\right)e^{s_i} - D_e\,\Sigma\psi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)e^{s_i} - D_e\,\Sigma\psi\left(\frac{u_i}{\sigma}\right)e^{s_i}\ ,$$

невозможность котораго, на основаніи свойствъ функцій $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ очевидна.

3) К. А. Поссе сдѣлалъ сообщеніе по поводу статьи проф. П. А. Некрасова «Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія», содержащей въ себѣ, между прочимъ, ссылку на «Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева) Мат. Сб. т. XVII вып. 2; 1-е приложеніе къ протоколу засѣданія 20 апрѣля 1893 года, и различныя замѣчанія, касающіяся возраженій, содержащихся въ этомъ письмѣ.

Такъ какъ упомянутый здѣсь выпускъ Мат. Сб. еще не разосланъ въ настоящее время подписчикамъ, то, въ предупрежденіе возможныхъ недоразумѣній на счетъ содержанія вышеуказаннаго «Письма», К. А. Поссе счелъ нужнымъ прочитать по черновой рукописи извлеченіе изъ своего письма и обратить вниманіе членовъ С.-Петербургскаго Мат. Общ. на то, что справедливость возраженій, приведенныхъ въ этомъ письмѣ нетолько не опровергается, а напротивъ подтверждается статьею проф. Некрасова. Статья эта содержитъ въ себѣ: 1) дополненія и измѣненія способа В. Г. Имшенецкаго, на необходимость которыхъ обращено было вниманіе въ упомянутомъ письмѣ, 2) доказательство основъ способа Имшенецкаго, объ отсутствіи котораго въ первомъ изъ мемуаровъ автора и неубѣдительности во второмъ, говоритъ самъ проф. Некрасовъ на стр. 5 своей статьи; о недостаточности мотивировки способа Имшенецкаго въ его мемуарахъ также упоминается въ письмѣ К. А. Поссе.

На основаніи вышесказаннаго К. А. Поссе полагаетъ, что формулировка результата сообщенія В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Мат. Об. 19 мая 1892 года (см. протоколъ 19 мая 1892 года въ приложеніяхъ къ 1-му выпуску XVI тома Мат. Сб.), а именно: «Въ этомъ сообщеніи В. Г. Имшенецкій разъяснилъ, что возраженія К. А. Поссе противъ статьи Имшенецкаго основаны на недоразумѣніи проф. Поссе», должна считаться совершенно неправильною.

Относительно заключенія, къ которому пришелъ проф. П. А. Некрасовъ въ своей статьѣ, будто бы при указанномъ имъ развитіи способа Имшенецкаго, способъ Ліувилля безусловно долженъ уступить способу Имшенецкаго, К. А. Поссе высказалъ, что по его мнѣнію такое заключеніе слишкомъ абсолютно. Изъ статьи проф. П. А. Некрасова можно только заключить, что авторъ болѣе интересовался развитіемъ способа Имшенецкаго, чѣмъ подробнымъ изученіемъ способа Ліувилля, за которымъ, при правильномъ къ нему отношеніи, останется нѣчто большее, чѣмъ «историческое значеніе».

Засѣданіе 15 ноября 1893 г.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

а) Избраны въ члены Общества: Марія Людовиковна Бронская, Александра Іеронимовна Стебницкая, Александръ Николаевичъ Толмачевъ, Сергѣй Федоровичъ Влезковъ и Федоръ Алексѣевичъ Покровскій.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. А. Булгаковъ. «О распространеніи электрическихъ колебаній вдоль проволоки, окруженной кристаллическимъ діэлектрикомъ».

Авторъ изложилъ сначала коротко рѣшеніе I. I. Thomson'a *), относящееся къ случаю изотропнаго діэлектрика. При колебаніяхъ вдоль проволки дѣлается предположеніе, что всѣ функціи, опредѣляющія электрическое поле около проволки, суть такія функціи, въ которыя z и t (z — координата, взятая по оси проволки, t — время) входятъ только посредствомъ множителя $e^{i(pt+mz)}$, на который умножена функція отъ x и y. Томсонъ, исключивъ постоянныя изъ данныхъ имъ уравненій, получаетъ нѣкоторое уравненіе, изъ котораго можетъ вывести величину $\frac{p}{m}$ и находитъ, что она весьма мало разнится отъ величины скорости распространенія электродинамическаго дѣйствія, если трактовать задачу по теоріи Максуэлля.

Затѣмъ авторъ перешелъ къ вопросу о кристаллическомъ діэлектрикѣ. Трактуя, на основаніи теоріи Максуэлля, придется для случая, взятаго авторомъ, въ концѣ концовъ, интегрировать такую систему уравненій

$$\Delta F - \frac{dI}{dx} = -p^2KF \qquad \text{Здѣсь}$$

$$\Delta G - \frac{dI}{dy} = -p^2K'G \qquad I = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$$

$$\Delta H - \frac{dI}{dz} = -p^2KH \qquad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

Авторъ именно останавливается на случаѣ равенства двухъ постоянныхъ (случай одноосная кристалла) и проволка расположена въ плоскости, перпендикулярной къ оси симметріи (случай проволки, расположенной вдоль по оси симметріи весьма просто выводится изъ рѣшенія Томсона). Выписанныя уравненія

*) Статья Томсона помѣщена въ 17 томѣ Lond. Math. Soc. Proceed.

относятся къ діэлектрику, внутри же проводника F, G и H суть интегралы уравненія

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = n^2T, \text{ причемъ } I = 0.$$

Здѣсь n зависитъ отъ свойствъ проводника и растетъ съ величиной p.

Итакъ, для проводника нужно опредѣлить двѣ функціи F и G, а H опредѣлится изъ нихъ по условію $I = 0$. Равнымъ образомъ для діэлектрика F, G, H такъ могутъ быть опредѣлены по двумъ функціямъ ψ и χ: $F = \frac{d^2\chi}{dxdy} + Kp^2\psi$, $G = \frac{d^2\chi}{dy_2} + Kp^2\chi$, $H = im\frac{d\chi}{dy} + \frac{Kp^2i}{m} \frac{d\psi}{dx}$, гдѣ ψ и χ удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d^2x} + \frac{d^2\psi}{dy^2} &= k^2\psi \\ \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{K'}{K}\frac{d^2\chi}{dy^2} &= k'^2\chi \end{aligned}\right\}, \quad \begin{aligned} &\text{причемъ} \\ &k^2 = m^2 - Kp^2 \\ &k'^2 = m^2 - K'p^2 \end{aligned}$$

На поверхности цилиндра $\rho = a$ (a — радіусъ сѣченія проволки) должны сохранять непрерывность слѣдующія величины: H, $-F\sin\varphi + G\cos\varphi$, γ, $-\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi$: подъ φ тутъ разумѣется азимутъ, величины же α, β, γ опредѣляются такъ: $\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, $\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$, $\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$ (μ — постоянное, которое для діэлектрика $= 1$).

Составивъ эти четыре условія, авторъ могъ для случая na— очень большой величины свести эти условія къ двумъ, въ которыя входятъ производныя по x и y отъ функціи ψ и χ (первыя и вторыя) умноженныя на $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$.

Сначала разбирается случай среды изотропной. Въ этомъ случаѣ χ удовлетворятъ такому же уравненію, какъ и ψ, и обѣ эти функціи могутъ быть представлены въ видѣ рядовъ Фурье, въ которыхъ $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ умножены на Бесселевы функціи порядка l, т. е. $I_l\,(ika)$ (надо взять для внѣшняго пространства второй интегралъ, а въ выраженія F и G для проводника входили бы $I_l\,(ina)$, но эти величины исключены благодаря свойству (при очень большомъ na) $I_l\,(ina)$: $I'_l\,(ina) = i$) и еще на постоянныя. Назовемъ постоянныя при $cos l\varphi$ чрезъ A_l для ψ и a_l для χ, B_l для ψ, b_l для χ.

Затѣмъ авторъ показываетъ, какъ зная A_l и B_l опредѣлить постоянныя въ $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$ *etc.* (всѣ эти величины суть интегралы того же уравненія, которому удовлетворяетъ ψ) *). Подставивъ выраженія производныхъ отъ ψ и χ въ условныя уравненія, получаемъ первыя ихъ части въ видѣ рядовъ Фурье и останется только приравнять нулю отдѣльные коэффиціенты. Постоянныя оказываются разбитыми на 4 независимыхъ группы и одна изъ нихъ состоитъ изъ постоянныхъ A_{2l+1} и b_{2l+1}, которыя входятъ въ коэффиціэнты при cos'ахъ четной кратности въ одномъ условіи и при sin'ахъ четной кратности въ другомъ. Именно, при $\cos 2l\varphi$ и $\sin 2l\varphi$ входятъ 4 постоянныхъ A_{2l-1}, b_{2l-1}, A_{2l+1}, b_{2l+1}, такъ что 2 послѣднія могутъ быть опредѣлены чрезъ 2 первыя или въ концѣ-концовъ чрезъ A_1 и b_1, а эти послѣднія входятъ въ свободный членъ одного изъ условій, но такъ, что они вмѣстѣ выдѣляются въ одинъ множитель, а другой множитель, уравненный нулю, даетъ то самое условіе для опредѣленія k, по которому Томсонъ дѣлаетъ заключеніе о величинѣ $\frac{p}{m}$. 3 другія серіи постоянныхъ не играютъ роли при сравненіи съ рѣшеніемъ Томсона, а указанная серія даетъ какъ разъ его рѣшеніе.

Переходя къ случаю K' не равнаго K, авторъ обращаетъ вниманіе на выраженіе $\chi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x'k(\operatorname{Cos} in + \sqrt{\frac{K}{K^1}}\, y \operatorname{Sin} in)} . \Sigma . du,$

гдѣ Σ есть сумма $\cos lin$ и $\sin lin$, умноженныхъ на соотвѣтству-

---

*) Мало того, имѣя въ виду, что $\cos x$ есть интегралъ уравненія $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy} + T = o$ можно, выписавъ выраженіе для T, опредѣлить постоянныя изъ условія $\frac{d^2T}{dx^2} + T = o$ и этимъ путемъ разложить $\cos(r\cos\varphi)$ въ рядъ Фурье, изъ котораго легко вывести выраженія $In(r)$ въ видѣ опредѣленныхъ интеграловъ.

ющія постоянныя. Подъ интеграломъ можно выдѣлить множитель $e^{-k'\left(\sqrt{\frac{K}{K'}}-1\right)y\sin in}$ и разложить его въ рядъ. Можно разсматривать тогда χ какъ сумму функціи, получаемой изъ χ, если вычеркнуть $\sqrt{\frac{K}{K'}}$ (а такая функція разлагается въ рядъ Фурье, гдѣ $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ умножены, кромѣ постоянныхъ, на $I_l(ik'a)$) и разныхъ ея производныхъ по y, умноженныхъ на степени y, т. е. на $\sin\varphi$, и степени величинъ $\left(\sqrt{\frac{K'}{K}}-1\right)$ и x'. Всѣ производныя такой функціи можно выразить рядами Фурье, степени $\sin\varphi$ можно разложить на сумму sin'овъ или cos'овъ кратныхъ дугъ, и окончательно можно функцію χ представить въ видѣ ряда Фурье, а равно и $\frac{d\chi}{dx}$, $\frac{d\chi}{dn}$ etc. Вставляя эти выраженія въ условія для поверхности, первыя ихъ части можно опять представить въ видѣ рядовъ Фурье, но множители при $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ уже будутъ содержать не 4 только смежные коэффиціента, но и всѣ остальные, только эти послѣдніе войдутъ умноженными на степени $\sqrt{\frac{K}{K'}}-1$ съ показателемъ тѣмъ большимъ, чѣмъ дальше они находятся въ первоначальномъ разложеніи χ отъ 4 коэффиціентовъ, входящихъ не умноженными на степень $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}}-1\right)$. Замѣтимъ, что раздѣленіе всѣхъ постоянныхъ на 4 независимыя группы и здѣсь имѣетъ мѣсто. Далѣе въ частяхъ зависящихъ отъ χ и ея производныхъ фигурируютъ Бесселевы функціи $I_l(ik'a)$ и степени k'. Такъ какъ $k'^2 = k^2 + (K - K')p^2$, то мы можемъ разложить эти функціи въ рядъ Тайлора по степенямъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}}-1\right)$, а затѣмъ представимъ коэффиціенты A_3, A_5 . . . b_3, b_5 etc. въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ того же количества, т. е. положимъ

$$A_{2l+1} = A_{2l+1,0} + \left\{\sqrt{\frac{K}{K'}}-1\right\} A_{2l+1,1} +$$
$$+ \left\{\sqrt{\frac{K}{K'}}-1\right\}^2 A_{2l+1,2} + \text{etc.}$$

$$b_{2l+1} = b_{2l+1,0} + \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right) b_{2l+1,1} +$$
$$+ \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right)^2 b^{2l+1,2} + \text{etc.}$$

Вставляя эти выраженія въ условныя уравненія, можно последовательно (т. е. сначала во всѣхъ уравненіяхъ, отбирая члены не зависящіе отъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right)$, потомъ отбирая члены съ 1 степенью этой величины, потомъ съ 2 и т. д.) опредѣлить $A_{3,0}$, $A_{5,0} \ldots b_{3,0}$, $b_{5,0}$ и т. д. чрезъ A_1 и b_1 (они будутъ выражены совершенно также, какъ выражали A_3, $A_5 \ldots b_3$, $b_5 \ldots$ при $K=K'$), затѣмъ $A_{3,1}$, $A_{5,1} \ldots$ ирезъ A_1 и b_1 и уже найденныя величины $A_{3,0}$, $A_{5,0}$ etc.; слѣд. $A_{3,1}$, $A_{5,1}$ можно выразить линейно чрезъ A_1 и b_1. Точно также выразятся чрезъ A_1 и b_1 и дальнѣйшіе коэффиціенты.

Если всѣ эти значенія подставить въ свободный членъ одного изъ условій, по которому при $K = K'$ можно опредѣлять k, а отсюда величину $\frac{p}{m}$, то здѣсь A_1 и b_1 не будутъ входить уже за разъ умноженными на одну величину, но A_1 будетъ умножено на одинъ рядъ расположенный по степенямъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right)$ съ коэффиціентами, представляющими функціи отъ k, ab_1 — на другой подобный рядъ. Если взять рѣшеніе, при которомъ $b_1 = 0$, A_1 — произвольно, то k опредѣлится, если уравнять нулю рядъ, умноженный на A_1; при $A_1 = 0$, k опредѣлится, если уравнять нулю другой рядъ. Могутъ быть, такимъ образомъ, двѣ разныя величины k,a слѣд. и скорости распространенія колебаній вдоль проволоки, т. е. $\frac{p}{m}$.

2) П. А. Шиффъ. «Объ одной формулѣ въ теоріи опредѣлителей».

Засѣданіе 20 декабря 1893 года.

Предсѣдательствовалъ К. А. Поссе.

а) Въ библіотеку Общества доставлено изданіе: Schouté Revue seméstrielle des publications Mathématiques. T. 1, 1 et 2 pp. Amsterdam. 1893.

б) Предлагается въ члены Общества Валеріанъ Дмитріевичъ фонъ-Дервизъ (предлагаютъ В. А. Марковъ и А. Н. Толмачевъ).

в) Предсѣдатель предложилъ Собранію послать привѣтствіе Московскому Математическому Обществу по случаю исполнившагося 25-тилѣтія его дѣятельности. Былъ прочитанъ проектъ этого привѣтствія, который одобренъ собраніемъ.

г) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) И. С. Аладовъ «О распредѣленіи квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ простого числа p въ ряду: $1,2,\ldots p-1$».

Возьмемъ произвольное простое число p и рядъ $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Докажемъ, что по отношенію послѣдняго ряда имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема. Если простое число p вида: $4m+1$, то въ ряду $1, 2, 3, \ldots, p-1$ будетъ заключаться $x=\frac{p-1}{4}$ неквадратичныхъ вычетовъ числа p, за которыми слѣдуютъ невычеты, $x_1 = \frac{p-1}{4}$ невычетовъ, за которыми слѣдуютъ квадратичные вычеты, $y=\frac{p-1}{4}$ квад. вычетовъ, за которыми слѣдуютъ невычеты и $y=\frac{p-5}{4}$ квад. вычетовъ, за которыми слѣдуютъ квадратичные вычеты. — Если простое число p вида $4m+3$, то числа x, x_1, y и y_1 выразятся такъ:

$$x=\frac{p-3}{4},\ x_1=\frac{p-3}{4},\ y=\frac{p+1}{4},\ y_1=\frac{p-3}{4}.$$

Доказательство. Будемъ обозначать чрезъ r или R квадратичные вычеты, чрезъ n или N невычеты и чрезъ c — числа, о которыхъ намъ a priori неизвѣстно, къ какой изъ упомянутыхъ категорій они принадлежатъ. Положимъ $R = c + 1$; сравненіе:

$$1)\ R^{\frac{p-1}{2}} - 1 = (c+1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

имѣетъ, очевидно, за исключеніемъ $c = 0$, еще $\frac{p-3}{2}$ рѣшеній; обозначая черезъ x_1 число этихъ рѣшеній, которыя суть невычеты, а черезъ y_1 число тѣхъ, которыя суть квад. вычеты, найдемъ:

$$2)\ x_1 + y_1 = \frac{p-3}{2}.$$

Точно также, полагая: $N = c + 1$, изъ сравненія

$$3)\ N^{\frac{p-1}{2}} + 1 = (c+1)^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

которое, очевидно, имѣетъ $\frac{p-1}{2}$ рѣшеній, найдемъ:

$$4)\ x + y = \frac{p-1}{2},$$

гдѣ x означаетъ число рѣшеній сравненія (3), которыя суть невычеты, а y — число тѣхъ рѣшеній, которыя суть квадрат. вычеты.—Всякое рѣшеніе сравненія (1) изъ числа y_1, а также всякое рѣшеніе сравненія (3) изъ числа x удовлетворяетъ слѣдующему сравненію:

$$5)\ f(c) = \frac{p-1}{2} c^{\frac{p-3}{2}} + \frac{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-3}{2}}{1.2} c^{\frac{p-5}{2}} + \ldots + \\ + \frac{p-1}{2} c + 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

которое получается изъ (1) и (3) по раскрытіи скобокъ и по замѣнѣ въ первомъ изъ нихъ c чрезъ r, а во второмъ — чрезъ n. Всѣ рѣшенія сравн. (1) изъ числа x_1 удовлетворяютъ сравненію:

$$6)\ \frac{p-1}{2} c^{\frac{p-3}{2}} + \ldots + \frac{p-1}{2} c - 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

и всѣ рѣшенія сравненія (3) изъ числа y, удовлетворяютъ сравненію:

$$7)\ \frac{p-1}{2}\, c^{\frac{p-3}{2}} + \ldots + \frac{p-1}{2}\, c + 3 \equiv 0 \text{ (мод. } p).$$

Между всѣми числами, заключающнмися въ x, y, x_1 и y_1, нѣтъ, очевидно, лишь одного числа $= p - 1$. Такъ какъ сравненіе 5, 6 и 7, само собою разумѣется, не могутъ имѣть общихъ рѣшеній, то сравненіе (5) не можетъ имѣть другихъ рѣшеній, кромѣ тѣхъ, которыя заключаются въ числахъ, обозначенныхъ нами чрезъ x и y_1; поэтому, если мы докажемъ, что сравненіе (5) имѣетъ $\frac{p-3}{2}$ различныхъ рѣшеній, то будемъ въ состояніи заключить, что

$$8)\ x + y_1 = \frac{p-3}{2}.$$

Доказать это послѣднее предложеніе весьма легко; дѣйствительно, функція (5) $f(c)$ можетъ быть написана подъ видомъ:

$$f(c) = (c+1)^{\frac{p-1}{2}} - c^{\frac{p-1}{2}},$$

и это выраженіе алгебраически дѣлитъ разность

$$(c+1)^{p-1} - c^{p-1} = F(c);$$

сравненію же $(p-2)$-ой степени $F(c) \equiv 0$ (мод. p) удовлетворяютъ, очевидно, всѣ числа, за исключеніемъ $p-1$; отсюда и приходимъ къ заключенію, что сравненіе (5) имѣетъ $\frac{p-3}{2}$ различныхъ рѣшеній и убѣждаемся въ вѣрности уравненія (8). Дальнѣйшія разсужденія слѣдуетъ вести отдѣльно для чиселъ p вида $4m+1$ и для чиселъ вида $4m+3$.

I) $p \equiv 1$ (мод. 4). Такъ какъ въ этомъ случаѣ число $p-1$ есть квадрат. вычетъ, то, очевидно, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

$$9)\ \begin{cases} x + x_1 = \frac{p-1}{2}, \\ y + y_1 = \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Изъ уравненій (2), (4), (8) и (9), изъ которыхъ одно есть слѣдствіе другихъ, находимъ:

$$10)\ x = \frac{p-1}{4};\quad y = \frac{p-1}{4};\ x_1 = \frac{p-1}{4};\ y_1 = \frac{p-5}{4}.$$

II) $p \equiv 3$ (мод. 4). Такъ какъ въ этомъ случаѣ число $p-1$ есть неквадратичный вычетъ, то вмѣсто уравненій (9), будемъ имѣть:

$$11)\ \begin{cases} x + x_1 = \frac{p-3}{2}, \\ y + y_1 = \frac{p-1}{2}; \end{cases}$$

изъ (2), (4), (8) и (11) найдемъ:

$$12)\ x = \frac{p-3}{4};\quad y = \frac{p+1}{4};\ x_1 = \frac{p-3}{4};\ y_1 = \frac{p-3}{4}.$$

Формулы (10) и (12) и доказываютъ нашу теорему. Числа y_1 изъ (10) и y изъ (12), очевидно, могутъ служить для рѣшенія такой задачи: найти число рѣшеній сравненія:

$$u^2 + v^2 + 1 \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

возможность котораго была впервые доказана Лагранжемъ.

Дальнѣйшія изслѣдованія будутъ касаться лишь случая $p \equiv 3$ (мод. 4). Для простыхъ чиселъ этого вида имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема. Если простое число p вида $8m-1$, то 1) число z группъ квадрат. вычетовъ въ ряду $1, 2, 3, \ldots, p-1$ равно $\frac{p+1}{8}$; 2) число t изолированныхъ квадрат. вычетовъ равно $\frac{p+1}{8}$; 3) число v квадрат. вычетовъ, заключающихся въ группахъ, равно $\frac{3p-5}{8}$ и 4) число u тройныхъ группъ квадр. вычетовъ равно $\frac{p-7}{8}$, причемъ каждая группа изъ четырехъ чиселъ считается за двѣ тройныя, изъ пяти—за три тройныя и т. д. Если простое число p вида $8m+3$, то числа z, t, v, u выразятся такъ:

$$z = \frac{p-3}{8};\ t = \frac{p+5}{8};\ v = 3.\frac{p-3}{8};\ u = \frac{p-3}{8}.$$

Для неквадратичныхъ вычетовъ имѣетъ мѣсто та же теорема въ силу уравненія: $n = p - r$.

Доказательство. Каждому числу, за исключеніемъ единицы, начинающему или заканчивающему собою группу какъ квадратичныхъ, такъ и неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду 1, 2, 3,..., $\frac{p-1}{2}$, соотвѣтствуетъ въ ряду 1, 2,..., $p-1$ нѣкоторый невычетъ, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Эти невычеты различны какъ для различныхъ группъ, такъ и для начала и конца одной и той же группы. Дѣйствительно, пусть будетъ группа квадрат. вычетовъ, начинающаяся съ r и оканчивающаяся r_m: $r, r_1, \ldots r_m$: имѣемъ; $r^2 \equiv r^{(0)}$, откуда: $r^{(0)} - 1 \equiv r^2 - 1 \equiv (r-1)r_1$, и такъ какъ, по предположенію, $r - 1 = n$, то и $r^{(0)} - 1 = n^{(0)}$, т. е. $n^{(0)}$ есть нѣкоторый невычетъ, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Точно также $r^2_m \equiv r^{(m)}$ и $r^{(m)} - 1$ есть нѣкоторый невычетъ $n^{(m)}$, отличный отъ $r^{(0)} - 1$, такъ какъ r и $r_m \leq \frac{p-1}{2}$, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Невычеты, получаемые такимъ же способомъ изъ другихъ группъ, не могутъ, очевидно, совпасть ни между собою, ни съ найденными уже вычетами $r^{(0)} - 1$ и $r^{(m)} - 1$, такъ какъ разсматриваемыя нами группы состоятъ изъ чиселъ непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$. То же самое можно сказать и о группахъ неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$. Обратно, всякому невычету въ ряду 1, 2,..., $p-1$, за которымъ слѣдуетъ квадрат. вычетъ, соотвѣтствуетъ одно и только одно число, начинающее или заканчивающее собою нѣкоторую группу въ ряду: 1, 2, ... $\frac{p-1}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n^{(0)}$ будетъ такой невычетъ, т. е. $n^{(0)} + 1 = r^{(0)}$; имѣемъ $r^{(0)} \equiv c^2$, гдѣ $c \leq \frac{p-1}{2}$; отсюда: $c^2 - 1 = (c-1)(c+1) \equiv n^{(0)}$ и слѣдоват. одно изъ чиселъ $(c-1)$ и $(c+1)$ есть квад. вычетъ, а другое — невычетъ, поэтому число c въ ряду $c - 1$, $c, c+1$ представляетъ собою начало, или конецъ нѣкоторой группы чиселъ, превышающихъ $\frac{p-1}{2}$; по доказанному выше другому концу этой группы соотвѣтствуетъ другой невычетъ $n^{(m)}$, за которымъ слѣдуетъ квад. вычетъ. Оставивъ въ сторонѣ числа $n^{(0)}$ и $n^{(m)}$, возьмемъ новый такой невычетъ $n_1^{(0)}$, чтобы было $n_1^{(0)}+1=r_1^{(0)}$, и снова докажемъ, что ему соотвѣтствуетъ начальное, или конечное число нѣкоторой группы чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ и т. д. Теперь нужно будетъ разсматривать отдѣльно случаи, когда $p\equiv -1$ (мод. 8) и когда: $p\equiv 3$ (мод. 8). — I) $p\equiv -1$ (мод. 8). Въ этомъ случаѣ рядъ: $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ начинается группою квадратичныхъ вычетовъ: $1, 2, \ldots$; конечное число этой группы даетъ, по доказанному выше, нѣкоторый невычетъ $n^{(1)}$, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ; начальное же число — единица — не даетъ такого невычета; всѣ остальныя группы чиселъ, непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$, даютъ два различные вычета, за которыми слѣдуютъ квад. вычеты, и обратно, всѣ эти вычеты, за исключеніемъ $n^{(1)}$, могутъ быть распредѣлены попарно такимъ образомъ, что два числа каждой пары дадутъ начало и конецъ одной и той же группы чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$. Отсюда заключаемъ, что z' группъ чиселъ, непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$, должно удовлетворять уравненію:

$$2(z'-1)+1=x_1=\frac{p-3}{4},\ [x_1 \text{ опредѣлено въ форм. } (12)].$$

Откуда:

$$z'=\frac{p+1}{8}.$$

Такъ какъ каждой группѣ чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ соотвѣтствуетъ, въ силу уравненія: $n=p-r$, группа чиселъ, большихъ $\frac{p-1}{2}$ и обратно, то число всѣхъ группъ въ ряду $1, 2, \ldots, p-1$ равно $2z'=\frac{p-1}{4}$, а такъ какъ число группъ квадратичныхъ вычетовъ, очевидно, равно числу группъ неквадратичныхъ вычетовъ, то число какъ тѣхъ и другихъ въ отдѣльности равно $\frac{p+1}{8}$, т. е.

$$13)\ z=z'=\frac{p+1}{8}.$$

Число всѣхъ квадратичныхъ вычетовъ, за которыми слѣдуютъ невычеты, равно, очевидно, числу группъ квад. вычетовъ, сложенному съ числомъ изолированныхъ квад. вычетовъ, т. е., если обозначимъ это послѣднее чрезъ t, будемъ имѣть:

$y = z + t$, [y опредѣлено въ формулѣ (12)]

откуда

$$14)\ t = y - z = \frac{p+1}{4} - \frac{p+1}{8} = \frac{p+1}{8}.$$

Обозначая чрезъ v число квад. вычетовъ, заключающихся въ группахъ, найдемъ, очевидно,

$$15)\ v = \frac{p-1}{2} - t = \frac{3p-5}{8}.$$

Напишемъ рядъ сравненій:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha)\ n^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0,\ (\beta)\ r^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \\ (\gamma)\ (c+1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0,\ (\delta)\ (c+2)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \left(\text{мод. } p\right).$$

Число общихъ рѣшеній сравненія (α), (γ) и (δ) равно числу группъ квадрат. вычетовъ безъ единицы [первой группы]. т. е. $= \frac{p+1}{8} - 1$; число общихъ рѣшеній (γ) и (δ) равно, по доказанному выше, $\frac{p-3}{4}$, изъ нихъ одно равняется нулю, а остальныя частью удовлетворяютъ сравненію (α), частью сравненію (β), поэтому, число рѣшеній общихъ (β), (γ) и (δ), которое обозначимъ чрезъ u', равно $\frac{p-3}{4} - 1 - \left(\frac{p+1}{8} - 1\right) = \frac{p-7}{8}$. Это есть, очевидно, число тройныхъ группъ квад. вычетовъ, причемъ, конечно, каждая группа изъ четырехъ чиселъ считается за двѣ тройныя, изъ—5—за три тройныя и т. д. Число это обозначено нами чрезъ u; такъ:

$$16)\ u = u^1 = \frac{p-7}{8}.$$

II) $p \equiv 3$ (мод. 8). Въ этомъ случаѣ числа z, t, v и u выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$17)\ z = \frac{p-3}{8},$$

это равенство получается изъ уравненія $2z' = x_1 = \frac{p-3}{4}$, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ начальныя и конечныя числа всѣхъ группъ чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ даютъ по одному и только по одному невычету, за которыми слѣдуютъ квадратичные вычеты и обратно;

$$18)\ t = \frac{p+5}{8};$$

$$19)\ v = 3.\frac{p-3}{8};$$

$$20)\ u = \frac{p-3}{8}.$$

Формулы (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19) и (20) и доказываютъ нашу теорему.

2) В. А. Марковъ «Объ аксіомахъ, лежащихъ въ основаніи геометрическихъ системъ».

Засѣданіе 15 января 1894 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

а) Избранъ въ члены Общества Валеріанъ Дмитріевичъ фонъ-Дервизъ.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ «О теоремѣ Парсиваля».

2) П. А. Шиффъ «Приведеніе интегрированія линейнаго уравненія 2-го порядка къ интегрированію уравненія 2-го порядка однороднаго».

3) И. И. Ивановъ «Объ интегралѣ вида:

$$R = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{\left(x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(x - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\cdots\left(x - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)}}$$

Полагая:

$$x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right),$$

будемъ имѣть:

$$R = \int \frac{(y^2-1)dy}{y\sqrt[m]{\left(y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{2m} + 1\right)\cdots\left(y^2 - 2y\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} + 1\right)}};$$

но

$$\left(y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{2m} + 1\right)\cdots\left(y^2 - 2y\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} + 1\right) = y^{2m} + 1$$

поэтому

$$R = \int \frac{y\,dy}{\sqrt[m]{y^{2m}+1}} - \int \frac{dy}{y\sqrt[m]{y^{2\text{ш}}+1}}.$$

Каждый изъ этихъ интеграловъ берется въ конечномъ видѣ.

Засѣданіе 24 февраля 1894 года.

Предсѣдательствовала В. І. Шиффъ.

а) Въ библіотеку Общества поступили слѣдующія сочиненія:

1) Н. И. Гулакъ «О сферической тетраэдрометріи» (рукопись).

2) Н. И. Гулакъ «Аналитическія изслѣдованія» (рукопись).

3) Е. С. Федоровъ «Новые приборы для геометрическихъ и оптическихъ изслѣдованій кристаловъ.

4) П. В. Преображенскій «Къ вопросу объ искривленіи прямыхъ линій объективами».

5) П. В. Преображенскій «Объ одной ошибкѣ въ книгѣ Clebsch'a «Theorie der Elasticität fester Körper».

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) В. А. Марковъ «Объ аксіомахъ, лежащихъ въ основаніи геометрическихъ системъ» (продолженіе сообщенія 20 Декабря 1893 г.).

2) П. Х. Кадикъ «О кватерніонахъ».

Засѣданіе 21 марта 1894 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

а) По предложенію предсѣдателя единогласно избраны въ дѣйствительные члены Общества Ректоръ Стокгольмскаго университета Г. Миттагъ-Леффлеръ, Президентъ Московскаго Математическаго Общества Николай Васильевичъ Бугаевъ и Казначей того же Общества Петръ Васильевичъ Преображенскій.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «О соотношеніяхъ между частными рѣшеніями нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка».

Если дано какое-нибудь уравненіе перваго порядка, наприм.,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{L_0 y^h + L_1 y^{h-1} + \ldots + L_{h-1} y + L_h}{M_0 y^k + M_1 y^{k-1} + \ldots + M_{k-1} y + M_k}. \quad (1)$$

h и k цѣлыя положительныя числа, L и M функціи отъ x, то можно, взявъ достаточное число частныхъ рѣшеній $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s$ уравненія (1), исключить x и dx изъ получающихся уравненій

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dx} &= \frac{L_0 \alpha_1{}^h + \ldots + L_h}{M_0 \alpha_1{}^k + \ldots + M_k} \\
\frac{d\alpha_2}{dx} &= \frac{L_0 \alpha_2{}^h + \ldots + L_h}{M_0 \alpha_2{}^k + \ldots + M_k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\alpha_s}{dx} &= \frac{L_0 \alpha_s{}^h + \ldots + L_h}{M_0 \alpha_s{}^k + \ldots + M_k}
\end{aligned}\right\} (2)$$

Если всѣ функціи L_0, $L_1 \ldots M_0$, $M_1 \ldots$ заданы, то, вообще говоря, достаточно взять три рѣшенія α_1, α_2, α_3, если же нѣкоторыя изъ нихъ предполагаются произвольными, то понадобится большее число частныхъ рѣшеній α_1, $\alpha_2 \ldots$

Такимъ образомъ получится уравненіе вида:

$$\Omega\,(\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_s,\ d\alpha_1,\ d\alpha_2 \ldots d\alpha_s) = 0 \quad (3)$$

Въ этомъ уравненіи α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_s$ разсматриваются какъ функціи нѣкоторой независимой перемѣнной и $d\alpha_1$, $d\alpha \ldots d\alpha_s$ обозначаютъ ихъ полные дифференціалы по этой перемѣнной.

Ур. (3) можно пользоваться различнымъ образомъ. Можетъ случиться, напримѣръ, что общій интегралъ уравненія (3) можетъ быть выраженъ однимъ уравненіемъ такого вида

$$\Phi\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_s) = \text{пост.} \quad (4).$$

Это будетъ случай, размотрѣнный г. Eduard Weyr въ Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (6 серія, т. VIII. 1875 г.).

Такъ, напр., для линейнаго уравненія

$$dy + Py dx + Q dx = 0$$

уравненіе (3) таково

$$\frac{d\alpha_2 - d\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{d\alpha_3 - d\alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1}$$

откуда, интегрируя обѣ части, находимъ

$$\alpha_3 - \alpha_1 = C(\alpha_2 - \alpha_1) \quad C \text{ произв. пост.}$$

Отсюда видно, что эта метода, давая соотношенія между частными рѣшеніями, общаго интеграла въ общеупотребительной формѣ дать не можетъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда ур. (3) не допускаетъ интеграла въ видѣ одного уравненія формы (4), оно можетъ иногда служить весьма полезнымъ орудіемъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, какъ мы это сейчасъ и покажемъ.

Возьмемъ уравненіе вида

$$ydy + yPdx = Rdx \quad (5)$$

гдѣ P и R суть какія угодно функціи отъ x.

Составляя ур. (3) мы найдемъ

$$\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1)(d\alpha_2 - d\alpha_1) - \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(d\alpha_3 - d\alpha_1) = 0 \quad (6).$$

Это уравненіе не допускаетъ въ видѣ одного уравненія формы (4), но мы воспользуемся имъ иначе.

Мы положимъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= u \\ \alpha_3 - \alpha_1 &= v \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и тогда изъ ур. (6) найдемъ

$$\alpha_1 = \frac{vu(dv - du)}{vdu - udv} \quad \text{и по ур. (7) получимъ}$$

$$\alpha_2 = \frac{u(v - u)dv}{vdu - udv} \quad (8)$$

$$\alpha_3 = \frac{v(v - u)\,du}{vdu - udv}$$

Такимъ образомъ всякія три частныхъ рѣшенія α_1, α_2, α_3, уравненія (5) могутъ быть представлены формулами (8). Въ этихъ формулахъ u и v суть функціи одного и того-же независимаго перемѣннаго.

Не трудно показать, что и обратно, если мы будемъ считать u и v какими угодно функціями одной и той-же независимой перемѣнной, то формулы (8) дадутъ намъ три рѣшенія одного и того-же дифференціальнаго уравненія формы (5).

Авторъ получилъ формулы, подобныя (8) и для случая четырехъ частныхъ рѣшеній, но дальше ему идти не удалось.

Воспользуемся формулами (8) для рѣшенія слѣдующаго вопроса:

Найти всѣ уравненія формы (5), общій интегралъ которыхъ можетъ быть написанъ такъ:

$$(y-y_1)^{m_1}(y-y_2)^{m_2}(y-y_3)^{m_3} = \text{пост.} \quad (9).$$

гдѣ y_1, y_2, y_3 суть функціи отъ x, m_1, m_2, m_3 постоянныя

Вопросъ этотъ былъ поставленъ Эйлеромъ (Novi Commentarii Academiae Petropolitanae T. XVII Observationes circa aequationem $ydy + Maydx = Ndx$) и Лѣтниковымъ (Ueber die Bedingungen der Integrabilität einiger Differentialgleichungen), но и тотъ и другой рѣшили его только для самаго простого случая, соотвѣтсвующаго предположенію $m_1 + m_2 + m_3 = 0$.

Мы покажемъ, что при помощи формулъ (8) этотъ вопросъ можно сразу рѣшить въ самомъ общемъ видѣ.

Можно безъ труда показать, что если общій интегралъ ур. (5) имѣемъ формулу (9), то y_1, y_2, y_3 будутъ частныя рѣшенія ур. (5), которыя мы назовемъ α_1, α_2, α_3 и между ними будетъ существовать соотношеніе

$$\frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \frac{m_3}{\alpha_3} = 0 \quad (10).$$

Функціи α_1, α_2, α_3 могутъ быть выражены формулами (8) и тогда ур. (10) приметъ видъ (отбрасывая множитель $vdu - udv$):

$$\frac{m_1}{uv(dv-du)} + \frac{m_2}{u(v-u)dv} + \frac{m_3}{v(v-u)du} = 0 \quad (11).$$

Такимъ образомъ между величинами u и v получается однородное уравненіе перваго порядка. Чтобы удобнѣе проинтегрировать его, мы положимъ

$$v = \lambda u, \; dv = \mu du \quad (12).$$

гдѣ λ и μ новыя перемѣнныя. Ур. (11) приметъ видъ:

$$\frac{m_1}{\lambda(\mu-1)}+\frac{m_2}{\mu(\lambda-1)}+\frac{m_3}{\lambda(\lambda-1)}=0\cdot$$

откуда

$$\lambda=\frac{m_1\mu-m_3\mu(\mu-1)}{m_1\mu+m_2(\mu-1)}\ (13).$$

Но изъ ур. (12) находимъ

$$\frac{du}{u}=\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\ (14).$$

Подставляя вмѣсто λ и $d\lambda$ ихъ выраженія изъ ур. (13) и интегрируя найдемъ u. Зная u, найдемъ v по уравненію $v=\lambda u$. Зная выраженіе v и u черезъ μ выразимъ въ этой перемѣнной и функціи α_1, α_2, α_3 по ур. (8) и затѣмъ легко найдемъ Pdx и Rdx (въ ур. (5). Результатъ получается такой:

Всѣ искомыя уравненія заключаются въ формѣ:

$$ydy-y\frac{u}{(\lambda-\mu)^2}\left[(\lambda-1)\ d\mu+(\lambda-2\lambda\mu+2\mu-\mu^2)\,d\lambda\right]=$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)\lambda(\lambda-1)u^2d\lambda}{(\lambda-\mu)^3}\ (15).$$

причемъ λ дано уравненіемъ (13) а функція u такимъ:

$$u=h\left[(m_1+m_2)\mu-m_2\right]\mu^{\frac{m_2}{M}-1}(\mu-1)^{\frac{m_1}{M}-1}\ (16).$$

$$M=m_1+m_2+m_3;\ h\ \text{произв. пост.}$$

Общій интегралъ ур. 15 есть

$$(y-\alpha_1)^{m_1}(y-\alpha_2)^{m_2}(y-\alpha_3)^{m_3}=\text{пост.}$$
$$\alpha_1=\frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}u;\ \alpha_2=\frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda-\mu}u;\ \alpha_2=\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-\mu}u\ (17).$$

Форм. (16) становится неудобною при $M=0$. Этотъ случай, по ур. (13), соотвѣтствуетъ условію $\lambda=\mu$. Изслѣдованіе чрезвычайно упрощается при этомъ предположеніи, но мы не останавливаемся на немъ, потому что оно уже разобрано Эйлеромъ и Лѣтниковымъ.

2) П. Х. Кадикъ. «О кватерніонахъ». (Окончаніе сообщенія 28 февраля).

Засѣданіе 25 апрѣля 1894 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

а) Въ библіотеку Общества поступили слѣдующія сочиненія:

1) O. Backlund. «Ueber die Anwendung einer Formel von Tchebychew zur Entwickelung der Störungsfunction».

2) П. А. Некрасовъ. «Термодинамика и электричество. По поводу изслѣдованій кн. Б. Голицына по математической физикѣ».

3) Н. Б. Делоне. «Приборъ для черченія эллипсовъ и эллипсоидографъ».

4) Указатель статей, содержащихся въ первыхъ пятнадцати томахъ Математическаго Сборника, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ.

5) Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. 2-я серія. Т. IV. № 1.

7) Д. К. Бобылевъ. «О времени, потребномъ для введенія судна въ шлюзовый каналъ».

б) Было прочитано письмо Московскаго Математическаго Общества, въ которомъ выражается благодарность за привѣтствіе, принесенное С.-Петербургскимъ Математическимъ Обществомъ Московскому Обществу въ день празднованія его двадцатипятилѣтія.

в) Были прочитаны письма, полученныя отъ гг. Миттагъ-Лефлеръ, Н. В. Бугаева и П. В. Преображенскаго, въ которыхъ означенныя лица благодарятъ за избраніе ихъ дѣйствительными членами Общества.

г) Было прочитано письмо Е. С. Федорова, въ которомъ онъ увѣдомляетъ, что вслѣдствіе нѣкоторыхъ обстоятельствъ, онъ вынужденъ просить, хоть временно, не считать его членомъ Общества.

Собраніе постановило: 1) выразить Е. С. Федорову глубокое сожалѣніе о томъ, что обстоятельства временно лишаютъ его возможности принимать дѣятельное участіе въ дѣлахъ Общества 2) продолжать считать его членомъ С.-Петербургскаго Математическаго Общества.

д) Въ С.-Петербургское Математическое Общество получены отъ Редакціоннаго Комитета при IX съѣздѣ 10 экземпляровъ Проекта Устава Русской Ассоціаціи для обезпеченія и устройства естественнонаучныхъ съѣздовъ, съ просьбою распространить этотъ проектъ между членами Общества. Экземпляры розданы гг. членамъ.

е) По предложенію предсѣдателя единогласно избранъ дѣйствительнымъ членомъ Общества профессоръ С.-Петербургскаго Университета Сергѣй Павловичъ фонъ-Глазенапъ.

ж) Было сдѣлано слѣдующее сообщеніе: Д. А. Граве. «Объ ортогональныхъ траэкторіяхъ».

з) Предлагаются въ члены Общества:

1) Левъ Вильгельмовичъ Келлеръ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и А. С. Домогаровъ).

2) Петръ Христофоровичъ Кадикъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

Засѣданіе 24 сентября 1894 года.

По предложенію И. Л. Пташицкаго, собраніе единогласно избрало членомъ Общества и предсѣдателемъ собранія Н. Я. Сонина.

а) Избраны въ члены Общества: Левъ Вильгельмовичъ Келлеръ и Петръ Христофоровичъ Кадикъ.

б) Предлагаются въ члены Общества:

1) Федоръ Петровичъ Миллеръ (предлагаютъ В. В. Витковскій и И. С. Аладовъ);

2) Любовь Николаевна Запольская;

и 3) Марія Васильевна Жилова (предлагаютъ В. І. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

в) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. «Объ одномъ вопросѣ Чебышева»;

2) И. В. Мещерскій. «Задача о движеніи системы точекъ при дѣйствіи силъ, обратно-пропорціональныхъ кубу разстоянія и центральныхъ силъ, пропорціональныхъ разстоянію».

Имѣемъ систему, къ точкамъ которой приложены силы взаимодѣйствія, обратно пропорц. кубу разстоянія, и затѣмъ силы, исходящія изъ неподвижнаго центра, — однѣ обратно пропорц. кубу разстоянія, другія — пропорціональныя разстоянію.

Задача о движеніи этой системы приводится къ задачѣ болѣе простой, въ которой на точки системы дѣйствуютъ только вышеуказанныя силы, обратно пропорц. кубу разстоянія.

Это приведеніе будетъ сдѣлано, если въ диффер. уравненія движенія вмѣсто декартовыхъ координатъ x_i точекъ системы и времени t введемъ новыя перемѣнныя: ξ_i и τ, полагая:

$$(1) \quad \ldots \quad x_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{a\tau^2+2b\tau+c}}, \quad dt = \frac{d\tau}{a\tau^2+2b\tau+c},$$

гдѣ a, b, c суть постоянныя, связанныя уравненіемъ:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ac - b^2 = k,$$

если k обозначаетъ пропорціональное разстоянію притяженіе центромъ единицы массы на единицѣ разстоянія.

Задача *о движеніи по прямой трехъ точекъ*, которыя притягиваются — между собою силами, обратно пропорц. кубу разстоянія, и къ неподвижному центру на прямой силами, пропор. разстоянію, приводится, съ помощью преобразованія (1), къ извѣстной задачѣ *Якоби* (Jacobi. Ges. Werke. Bd. IV, p. 533 — 539) и, слѣдовательно, рѣшается въ квадратурахъ.

Засѣданіе 29 октября 1894 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

а) Предлагаются въ члены Общества: 1) Ольга Сергѣевна Ростовцева и 2) Елена Осиповна Бортксвичъ (предлагаютъ В. I. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

б) Избраны въ члены Общества Любовь Николаевна Запольская и Марія Васильевна Жилова.

в) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) О. А. Баклундъ. «О сопротивляющейся средѣ въ планетной системѣ».

2) М. М. Филипповъ. «О системѣ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ связи съ вопросами кинематики».

3) Н. Я. Сонинъ. I) «Объ одной символической формулѣ для n-ой производной функціи» и II) «Приложеніе символическаго исчисленія къ выводу формулы Эйлера для квадратуръ съ остаточнымъ членомъ и къ вычисленію нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ».

г) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) А. Д. Путята. Аналитическая механика.

2) И. В. Мещерскій. Sur un probleme de Jacobi.

3) Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, т. XVII вып. 3.

4) Е. В. Борисовъ. О критическихъ центрахъ кривыхъ 3-го порядка.

5) Б. М. Кояловичъ. Изслѣдованіе о дифференціальномъ уравненіи

$$ydy - ydx = Rdx$$

6) Н. П. Соколовъ. Основныя дѣйствія надъ періодическими десятичными дробями.

7) Н. П. Соколовъ. Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе.

8) В. I. Шиффъ. Методы рѣшеній вопросовъ элементарной геометріи.

Засѣданіе 19 ноября 1894 года.

а) Секретарь Общества доложилъ Собранію слѣдующій краткій отчетъ о состояніи Общества за истекшій 1893—1894 годъ.

Въ настоящемъ году С.-Петербургское Математическое Общество вступаетъ въ 5-й годъ своего существованія.

Начавъ свою дѣятельность 20 октября 1890 года при весьма небольшомъ числѣ членовъ (18 лицъ), оно въ настоящее время считаетъ въ своей средѣ 78 членовъ, причемъ въ истекшемъ году прибыло 13.

Въ теченіе 4-хъ лѣтъ Общество имѣло 34 засѣданія, во время которыхъ происходилъ обмѣнъ мнѣній по сдѣланнымъ 82 сообщеніямъ; на истекшій годъ приходится 8 засѣданій и 17 сообщеній.

Сообщенія сдѣлали слѣдующія лица:

В. Г. Имшенецкій, П. А. Шиффъ, И. И. Ивановъ, Г. Ѳ. Вороной, Д. Ф. Селивановъ, А. Д. Путята, Н. Н. Пироговъ, І. А. Клейберъ, Д. К. Бобылевъ, А. А. Марковъ, Ю. В. Сохоцкій, О. А. Баклундъ, Н. Б. Делоне, Д. А. Граве, В. І. Шиффъ, В. И. Станевичъ, Е. С. Федоровъ, Б. М. Кояловичъ, В. А. Марковъ, П. М. Новиковъ, И. Ю. Маткевичъ, К. А. Поссе, И. С. Аладовъ, П. Л. Чебышевъ, г-нъ Миттагъ-Леффлеръ, С. Е. Савичъ, М. З. Образцовъ, Е. В. Борисовъ, А. С. Домогаровъ, Н. А. Булгаковъ, П. Х. Кадикъ, М. М. Филипповъ и Н. Я. Сонинъ.

Библіотека Общества составилась изъ разновременно принесенныхъ въ даръ Обществу 54 наименованій сочиненій.

До 1893 года денежныя средства Общества составлялись изъ добровольныхъ взносовъ членовъ, съ 1893 г. установленъ обязательный членскій взносъ въ 3 рубля, при чемъ съ поступающихъ вновь членовъ взимается первый годъ 5 рублей. До настоящаго времени поступило всего 389 рублей, при чемъ за истекшій годъ поступило 110 рублей.

Израсходовано всего 342 р. 66 коп., при чемъ въ истекшемъ году израсходовано 55 рублей. Въ остаткѣ на текущіе расходы имѣется 46 руб. 34 коп.

Членъ Общества редакторъ журнала «Научное Обозрѣніе», М. М. Филипповъ — согласился безвозмездно отпечатать 250 отдѣльныхъ оттисковъ протоколовъ засѣданій Общества за истекшій годъ. По предложенію предсѣдателя, Собраніе выразило свою благодарность М. М. Филиппову рукоплесканіемъ.

б) Происходили выборы двухъ членовъ Совѣта, причемъ большинствомъ голосовъ оказались избранными: И. В. Мещерскій и Д. А. Граве.

в) Избраны въ члены Общества: Ольга Сергѣевна Ростовцева и Елена Осиповна Борткевичъ.

г) Предлагаются въ члены Общества Николай Максимовичъ Гюнтеръ (предлагаютъ А. Н. Толмачевъ и П. А. Шиффъ).

д) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Нѣкоторыя примѣненія теоріи каноническихъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій».

2) И. В. Мещерскій. «Замѣтка по поводу статьи профессора Appel'а относительно задачи о движеніи системы точекъ при дѣйствіи силъ, обратнопропорціональныхъ кубу разстоянія и центральныхъ силъ, пропорціональныхъ разстоянію».

3) Н. Я. Сонинъ. «О Бернулліевыхъ полиномахъ и Бернулліевыхъ числахъ».

Засѣданіе 17 декабря 1894 года.

Предсѣдательствовала В. І. Шиффъ.

а) По предложенію предсѣдательствовавшей Собраніе постановило посвятить особое засѣданіе Общества, спеціально предназначенное для обзора научныхъ трудовъ скончавшагося почетнаго члена Общества П. Л. Чебышева.

Въ краткомъ изложеніи работъ покойнаго согласились принять участіе: Ю. В. Сохоцкій, Д. А. Граве, И. И. Ивановъ, В. И. Станевичъ, Д. Ф. Селивановъ, И. Л. Пташицкій, В. І. Шиффъ, Н. Я. Сонинъ, В. А. Марковъ, Д. К. Бобылевъ, Н. Б. Делоне и О. А. Баклундъ.

Засѣданіе это назначено на 14 Января 1895 года.

б) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Н. Б. Делоне. Передача вращенія и механическое черченіе кривыхъ шарниро-рычажными механизмами.

2) Извѣстія Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ т. IV, № 3.
3) Н. Я. Сонинъ. «О производныхъ функціяхъ высшихъ порядковъ».
4) Н. Я. Сонинъ. Замѣтка по поводу письма П. Л. Чебышева къ С. В. Ковалевской.
5) Труды отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Общества любителей естествознанія, томъ 7-й, вып. 1-й.
6) П. А. Шиффъ. О нѣкоторыхъ соотношеніяхъ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.
7) Д. А. Граве. Замѣтка, написанная въ память послѣдняго въ жизни П. Л. Чебышева математическаго разговора.

в) Были избраны въ члены Общества: Николай Максимовичъ Гюнтеръ, Михаилъ Романовичъ Блюменфельдъ и Сергѣй Георгіевичъ Петровичъ.

г) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) М. М. Филипповъ. «Объ ариѳметическомъ дифференцированіи».

Разложимъ число 3 всѣми способами на слагаемыя:

$$3 = \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1+2 \\ 1+1+1 \end{array} \right.$$

Напишемъ 12 вмѣсто $1+2$, 1^3 вмѣсто $1+1+1$; будемъ разсматривать нижнія цифры какъ указатели при x, а верхнія, какъ показатели x; составимъ, слѣдовательно, комбинаціи:

$$x_3, \; x_1 x_2, \; x_1^{\,3}$$

т. е. комбинаціи вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$.

При каждой такой комбинаціи поставимъ коэффиціентъ вида

$$N = \frac{n!}{m_1! \, m_2! \ldots m_n! \, (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \ldots (n!)^{m_n}}$$

что въ нашемъ случаѣ дастъ, полагая $n=3$, коэффиціенты

$$\frac{3!}{3!} = 1; \; \frac{3!}{1! \, 2!} = 3; \; \frac{3!}{3! \, (1!)^3} = 1,$$

тогда въ результатѣ найдемъ выраженія

$$x_3,\ 3x_1x_2,\ x_1^3,$$

которые назовемъ «коэффиціентами сложнаго дифференцированія» или просто «коэффиціентами X_k».

Пусть теперь дана y функція отъ x и, въ свою очередь, x функція отъ z. Примемъ обозначенія

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)};\ \frac{d^n y}{dz^n} = y_n;\ \frac{d^n x}{dz^n} = x_n.$$

Непосредственное дифференцированіе дастъ безъ труда третью производную отъ y по z въ видѣ

$$y_3 = x_3 y' + 3x_1x_2y'' + x_1^3 y'''$$

или короче $y_3 = \sum\limits_{k=1}^{k=3} X_k y^{(k)}$,

т. е. коэффиціенты при $y^{(k)}$ и будутъ «коэффиціентами X_k», составленные, какъ указано выше.

Легко доказать, исходя изъ извѣстной формулы Бертрана, что то же справедливо и для y_n, т. е. имѣетъ вообще

$$y_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k y^{(k)},$$

гдѣ X_k составляется по предыдущему, причемъ при $y^{(k)}$ стоятъ всѣ комбинаціи вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, для которыхъ $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$, съ соотвѣтственными коэффиціентами N при каждой комбинаціи.

Показавъ, такимъ образомъ, связь *вопроса о разложеніи чиселъ на слагаемыя съ вопросомъ о высшихъ производныхъ функцій отъ функцій*, примемъ слѣдующія опредѣленія:
символъ вида

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^{m_1}\, 2^{m_2} \ldots n^{m_n}$$

назовемъ ариѳметическимъ символомъ. Сумма $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ есть его степень, сумма $m_1 + 2m_2 \ldots + nm_n$ его *вѣсъ*.

Мы будемъ разсматривать также суммы вида

$$\Sigma\, 1^{m_1}\, 2^{m_2} \ldots n^{m_n}$$

предполагая, что вѣсъ и степень каждаго члена одинаковы съ вѣсомъ и степенью всѣхъ другихъ членовъ.

Если въ болѣе частномъ символѣ k^m возьмемъ $m=0$, то опредѣлимъ $k^0=1$, по аналогіи съ нулевою степенью чиселъ.

Взявъ $k^m=k^{m-1}k$ и увеличивъ послѣднее k единицею назовемъ это дѣйствіе ариѳметическимъ дифференцированіемъ и обозначимъ такъ

$$2) \quad \ldots \quad (k^m)_1 = k^{m-1}\,(k+1)$$

причемъ будемъ считать условно «равными» выраженія, у которыхъ показатели и указатели при той же буквѣ одинаковы, тогда какъ численные коэффиціенты вполнѣ произвольны. Другими словами, здѣсь рѣчь идетъ о подобіи, а не о равенствѣ.

Символъ вида $(k^m)_n$ простымъ уменьшеніемъ указателя приводится къ $(1^m)_n$, а поэтому разсмотримъ лишь символы этого послѣдняго вида.

Легко найти, что

$$(1^k)_n = \Sigma\, 1^{m_1}\, 2^{m_2} \ldots (n+1)^{m_{n+1}}$$

гдѣ m_1 измѣняется отъ $k-n$ до $k-1$, а m_{n+1} отъ 0 до 1.

Примѣръ:

$$(1^3)_4 = 23^2 + 13^2 + 124 + 15^2.$$

Для вычисленія $(1^k)_n$ при $k > n$ полезна формула

$$3) \quad \ldots \quad (1^k)_n = 1^{k-n}(1^n)_n$$

Доказательство: полагая $(1^k)_n = 1^{k-n}\, P_n$, возьмемъ сначала $k=n$; тогда $(1^n)_n = P_n$, потому что 1^0 по опредѣленію$=1$. Стало быть $(1^k)_n = 1^{k-n}(1^n)_n$.

Примѣръ:

$$(1^5)_2 = 1^3(1^2)_2 = 1^3(2^2+13) = 1^3 2^2 + 1^4 3.$$

Итакъ, символы вида $(1^k)_n$ приводятся къ такимъ, у которыхъ показатель равенъ порядку дифференцированія.

Вѣсъ символа $(1^k)_n$ есть $k+n$ и вычисленіе его рѣшаетъ задачу: разложить число $n+k$ на k слагаемыхъ; взявъ $n=0, 1, 2. \ldots$

рѣшимъ задачу Эйлера о разложенiи цѣлаго положительнаго числа всѣми способами на цѣлыя положительныя слагаемыя.

Примѣръ. Разложить 7 всѣми способами на слагаемыя.

Задача сводится къ вычисленiю символовъ

$$(1^7)_0,\ (1^6)_1,\ (1^5)_2,\ (1^4)_3,\ (1^3)_4,\ (1^2)_5,\ (1)_6$$

откуда получимъ 1 разложенiе 7-й степени, 1 шестой, 2 пятой, 3 четвертой, 4 третьей, 3 второй, 1 первой—итого 15 разложенiй, а именно:

$$1^7;\ 1^5 2;\ 1^3 2^2 + 1^4 3;\ 1^2 23 + 1^2 3^2 + 1^3 4;\ 2^2 3 + 13^2 + 124 + 1^1 5;$$
$$25 + 34 + 16;\ 7.$$

Какъ ни проста эта задача, но переводчикъ Эйлера, Мозеръ, пропустилъ одну комбинацiю, именно $2+2+3=2^2 3$, что всегда возможно, если рѣшать ее интуитивно, какъ обыкновенно дѣлаютъ. Замѣчу, что число 50 можно разложить на 7 слагаемыхъ 8946 различными способами.

Степени отъ функцiй. Употребительныя формулы для $D^n y^k$, гдѣ $D = \frac{d}{dz}$ крайне неудобны. Такъ Шлемильхъ даетъ формулу

$$D^n y^k = k(n-k)_n \left[-\frac{(n)_1}{k-1} y^{k-1} D_n y + \frac{(n)_2}{k-2} y^{k-2} D y^2 + \ldots \right]$$

Это присутствiе минусовъ показываетъ, что въ формулу введены члены сокращающiеся въ конечномъ результатѣ; сверхъ того, формула неудобна тѣмъ, что въ каждомъ членѣ содержитъ производную высшаго допускаемаго задачею порядка.

Примѣняя символъ $(1^n)_k$, не трудно найти болѣе удобную формулу

$$4)\quad D^n y^k = \frac{k!}{k-n!} y^{k-n} (1^n)_0 + \frac{k!}{k-n+1!} y^{k-n+1} (1^{n-1})_1 + \ldots$$
$$+ \frac{k!}{k-1!} y^{k-1} (1)_{n-1}$$

въ которой, развернувъ символы, надо вмѣсто 1 написать x_1 и т. д. и ввести коэффицiенты N вида

$$\frac{n!}{m_1 \ldots m_n!\,(1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n}}$$

Примѣръ: Для $n=3$ коэффиціенты N намъ извѣстны, а именно 1, 3, 1. Найдемъ безъ труда

$$(1^3)_0 = y_1^3,\ (1^2)_1 = 3\ y_1 y_2,\ (1)_2 = y_3$$

стало быть имѣемъ

$$D^3 y^k = k(k-1)(k-2)y^{k-3}y_1^3 + 3k(k-1)y^{k-2}y_1 y_2 + ky^{k-1}y_3.$$

формулу (4) еще можно написать такъ

$$D^n y^k = \frac{d^n y^k}{dy^n}(1^n)_0 + \frac{d^{n-1}y^k}{dy^{n-1}}(1^{n-1})_1 + \ldots + \frac{dy^k}{dy}(1)_{n-1}$$

или еще такъ:

5) $D^n y^k = \sum\limits_{p=k-n}^{h=k-1} \frac{k!\,y^p}{p!} N y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}$, на этотъ разъ безъ всякихъ символовъ.

Формулу Бертрана

6) $y_n = \Sigma\, N x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} y^{(k)}$

мы замѣнимъ другою, пользуясь формулою (5)

Дифференцированіе функцій отъ функцій.

Вмѣсто формулы Бертрана мы введемъ символическое равенство:

7) $y_n = y'(1)_{n-1} + y''(1^2)_{n-2} + \ldots y^{(n)}(1^n)_0 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} (1^k)^{n-k} y^{(k)}.$

Развернувъ символы, надо приписать коэффиціенты N.

Примѣръ: Найти $y_4 = y'(1)_3 + y''(1^2)_2 + y'''(1^3)_1 + y^{IV}(1^4)_0$
найдемъ $(1)_3 = x_{4_1}$ $(1^2)_2 = 4x,\ x_3 + 3x_2^2$ и т. д.
получимъ

$$y_4 = y' x_4 + (4x_1 x_3 + 3x_2^2)y'' + 6x_1^2 x_2 y''' + y^{IV} x_1^4,$$

Перемѣна перемѣннаго независимаго.

Прежде всего обозначимъ $\frac{d^k z}{dx^k}$ черезъ $z_{(k)}$

Постараемся выразить $z_{(k)}$ въ $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Легко найдемъ $z_{(1)} = x_1^{-1}$; $z_{(2)} = -x_2 x_1^{-3}$ и т. д.
и вообще символически:

$$x_1^{2n-1} z_{(n)} = (1^{n-1})_{n-1},$$

гдѣ въ символѣ единица означаетъ x_1 и т. д.

Что касается численныхъ коэффиціентовъ, они находятся по формулѣ

$$(-1)^{k+p} N_p,$$

гдѣ N_p есть стоящій при $1^{m_1} 2^{m_2} \ldots n^{m_n}$ коэффиціентъ равный тому коэффиціенту N, который стоялъ бы при комбинаціи

$$1^{m_1-p}\, 2^{m_2} \ldots n^{m_n}.$$

Перемѣнивъ въ 6) x на z и обратно нашли бы

$$y^{(n)} = \Sigma N z_{(1)}^{m_1} z_{(2)}^{m_2} \ldots z_{(n)}^{m_n} y_k$$

Подставивъ же вмѣсто $z_{(1)}$, $z_{(2)}$ и т. д. ихъ выраженія въ x_1, x_2 и т. д., придемъ къ формулѣ, рѣшающей вопросъ о замѣнѣ перемѣннаго, а именно найдемъ символическое равенство

$$8)\quad y^{(n)} x_1^{2n-1} = (x_1^{n-1})_0\, y_n - (x_1^{n-1})_1\, y_{n-1} + \ldots \pm (x_1^{n-1})_{n-1} y'_1.$$

Развернувъ символы, надо приписать къ нимъ коэффиціенты N_p съ ихъ попеременными знаками $+$ и $-$.

Найдемъ, напр., коэффиціентъ при y_{n-4}, который обозначимъ чрезъ $X_{n,\, n-4}$.

Легко найдемъ (напр., разлагая 8 на 4 слагаемыхъ)

$$x_1^{2n-1} X_{n,\, n-4} = (x_1^{n-1})_4 = (x_1^{n-5} x_2^4 + x_1^{n-4} x_2^2 x_3 + x_1^{n-3} x_3^2 + \\ + x_1^{n-3} x_2 x_4 + x_1^{n-2} x_5).$$

Коэффиціенты N_p вычисляются какъ N по комбинаціи

$$x_1^{n-5} x_2^4 - x_2^2 x_3 + (x_3^2 + x_2 x_4) - x_5.$$

Такъ для $x_1^{n-5} x_2^4$ имѣемъ

$$N = \frac{n+3!}{n-5!\,(2!)4.4!} = \frac{3\ 5{,}7(n+3)!}{n-5!\,4!\,5.6.7.8} = 3.5.7\,(n+3)_8,$$

гдѣ $(n+3)_8$ есть биноміальный коэффиціентъ.

Продолжая такъ, найдемъ по умноженіи на $x_1^{-(2n-1)}$

$$X_{n,\,n-4} = 3\,.\,5\,.\,7(n+3)_8\, x_1^{-n-4}x_2^4 - 3\,.\,5\,.\,7(n+2)_7 x_1^{-n-3}x_2^2x_3 + \\ + 5(n+1)_6 x_1^{-n-2}\left[2x_3^2 + 3x_2x_4\right] - (n)_5 x_1^{-n-1}x_5.$$

Совершенно аналогичныя формулы получилъ Н. Я. Сонинъ (Изв. Имп. Ак. Н. 1894, № 4, стр. 331), вычисляя послѣдовательно $X_{n,\,n}$, затѣмъ $X_{n,\,n-2}$ и т. д. по предложенному имъ «правилу», позволяющему найти $X_{n,\,n-k-1}$, когда извѣстно $DX_{n,n-k}$. Нашъ способъ даетъ любое $X_{n,\,p}$ непосредственно и дѣйствіе не сложнѣе того, какое требуется для одного только дифференцированія вида $DX_{n,\,n-k}$.

Помимо практической выгоды наши формулы, по ихъ общности, могутъ принести пользу и для теоретическихъ изслѣдованій: такъ напр. большинство формулъ, изъ которыхъ Заальшюцъ и др. авторы выводятъ теорію Бернулліевыхъ чиселъ и функцій получается прямо изъ нашихъ формулъ 7) и 8). Также и въ другихъ изслѣдованіяхъ о свойствахъ чиселъ эти формулы не безполезны. Такъ съ помощью ихъ можно изслѣдовать, напр., свойства чиселъ, называемыхъ нѣмецкими авторами Facultäten-coefficienten, т. е. численныхъ коэффиціентовъ въ разложеніяхъ по степенямъ x формулы

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = C_{n,\,k}\, x^n + C_{n,\,2}x^{n-1} + \ldots$$

а также формулы

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-nx)} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$$

Такъ, полагая $A_k = C_{-n,\,k}$ можно доказать, что

$$\Sigma\, N_{n+k,n} = C_{-n,\,k}$$

гдѣ $N_{n+k,\,n} =$ есть коэффиціентъ N составленный, какъ показано выше, для комбинаціи $1^{m_1}\, 2^{m_2}\, \ldots\, (n+k)^{m_{n+k}}$ имѣющей вѣсъ $n+k$ и степень n.

Примѣръ: $C_{-2,4}$ есть, какъ показалъ, напр., Шлемильхъ (что легко вычислить разложеніемъ частныхъ дробей), число $= 31$. Должны стало быть, имѣть

$$\Sigma N_{6,\,2} = C_{-2,\,4} = 31$$

Но коэффиціенты вида $N_{6,2}$ получаются разложеніемъ 6 на два слагаемыхъ не всѣми способами, т. е.

$$6 = \left| \begin{array}{l} 1 + 5 = (15 + 24 + 3)^2 \\ 2 + 4 \\ 3 + 3 \end{array} \right.$$

откуда соотвѣтственные N суть

$$\frac{6!}{1!\,5!} = 6; \frac{6!}{2!\,4!} = 15; \frac{6!}{3!\,3!\,2!} = 10$$

т. е. имѣемъ $6 + 15 + 10 = 31$, что и справедливо.

Доказать равенство вида:

$$\Sigma N_{n+h,\,n} = C_{-n,\,k}\ ^{*})$$

обыкновенными аналитическими методами хотя, конечно, и возможно, но требуетъ болѣе сложныхъ вычисленій. Аналогичная теорема получается и для чиселъ $C_{n,\,k}$.

2) Н. Я. Сонинъ. «Объ интегрированіи уравненія

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}».$$

3) В. Д. фонъ-Дервизъ. «Объ одной теоремѣ въ теоріи ансамблей».

Засѣданіе 14 января 1895 г., посвященное памяти П. Л. Чебышева.

Засѣданіе открыто предсѣдателемъ Совѣта Общества Ю. В. Сохоцкимъ, который обратился къ собранію съ слѣдующей рѣчью:

Настоящее засѣданіе посвящается чествованію памяти нашего знаменитаго ученаго и незабвеннаго учителя Пафнутія Львовича Чебышева. Считаю долгомъ прежде всего прочесть обзоръ его жизни и ученой дѣятельности. Конечно, жизнь этого ученаго,

*) Изъ этой теоремы можно вывести многіе результаты, полученные Эйлеромъ относительно числа разложеній даннаго числа на слагаемыя.

никогда не отрывавшагося отъ книгъ и мемуаровъ, протекала тихо, безъ особенно выдающихся моментовъ

Пафнутій Львовичъ родился въ 1821 г. въ имѣніи матери своей, селѣ Окатовѣ, Калужской губерніи, Боровскаго уѣзда. Получивъ дома первоначальное образованіе, многообѣщавшій (16 л.) юноша выдержалъ экзаменъ прямо въ московскій университетъ, на физико-математическій факультетъ, гдѣ вскорѣ обратилъ на себя вниманіе извѣстнаго проф. Брашмана, угадавшаго въ новомъ ученикѣ будущее свѣтило.

И вотъ, окончивъ кандидатомъ курсъ въ университетѣ на 20-мъ году своей жизни, т. е. въ 1841 г., Чебышевъ подъ руководствомъ Брашмана отдается всецѣло ученымъ трудамъ и упорно не покидаетъ ихъ, относясь въ теченіи семи лѣтъ равнодушно къ стѣснительному матеріальному положенію и не помышляя о карьерѣ, но твердо продолжая избранный путь. Ученая дѣятельность Пафнутія Львовича началась двумя замѣтками по теоріи кратныхъ интеграловъ и теоріи сходимости строкъ 1845 г. Большее вниманіе обратилъ на себя «Опытъ элементарной теоріи вѣроятностей», написанной имъ для того, чтобы удовлетворить просвѣщенному желанію попечителя московскаго округа графа Строганова.

Въ 1847 г. П. Л. допущенъ былъ къ защитѣ диссертаціи «Объ интегрированіи ирраціональныхъ дифференціаловъ. Блистательная защита ея открыла ему мѣсто доцента Петербургскаго университета. Тогда, *обезпеченный* въ матеріальномъ отношеніи, молодой человѣкъ съ новымъ воодушевленіемъ принялся за многосложные математическіе труды: принимаетъ участіе въ изданіи сочиненій Эйлера, издаетъ свои классическіе мемуары по теоріи простыхъ чиселъ и свою прекрасную теорію сравненій. Мемуары по теоріи простыхъ чиселъ сразу поставили его наравнѣ съ выдающимися математиками всего міра.

Выказавъ въ полномъ блескѣ необыкновенный свой талантъ въ рѣшеніи вопросовъ чисто теоретическаго характера, П. Л.,—уступая склонностямъ своего ума,—обращается затѣмъ по преимуществу къ созданію новыхъ методовъ, приспособленныхъ къ рѣшенію вопросовъ, имѣющихъ значеніе на практикѣ въ приложеніяхъ. Избравъ себѣ новую область изслѣдованій, онъ до конца жизни идетъ по этому пути, и изслѣдованія его доставляютъ ему славу одного изъ оригинальнѣйшихъ математиковъ.

Къ этому времени относится избраніе П. Л. въ члены Академіи Наукъ, 1853 г.; въ 1856 г. былъ выбранъ въ члены-корреспонденты парижской Академіи Наукъ, а также въ дѣйствительные члены нашего артиллерійскаго комитета и въ почетные члены московскаго университета.

Изъ числа мемуаровъ, относящихся къ новому направленію, слѣдуетъ особенно отмѣтить два, появившіеся въ 1853 и 1855 г.: «Théorie des mecanismes connus sous le nom de parallelogrammes» и «О непрерывныхъ дробяхъ», гдѣ рѣшаются двѣ задачи схожія по характеру, хотя рѣшаются методами отличными. Въ обоихъ мемуарахъ ставится вопросъ о нахожденіи приближенныхъ выраженій наивозможно ближе и проще представляющихъ функцію. Съ этихъ-то именно мемуаровъ начинается рядъ работъ въ своеобразномъ направленіи, рѣзко отличающемся отъ направленія другихъ современныхъ математиковъ.

Понятна важность методовъ для рѣшенія практическихъ вопросовъ,—методовъ, дающихъ приближенныя выраженія для функцій и вмѣстѣ съ тѣмъ, дающихъ возможность опредѣлить предѣлъ неизбѣжной погрѣшности. Въ систематическомъ развитіи такихъ методовъ, приведшихъ его, между прочимъ, къ блестящимъ открытіямъ въ теоріи вѣроятностей, Чебышевъ почти не имѣетъ предшественниковъ.

Въ 1865 г. берлинская академія избрала его своимъ членомъ-корреспондентомъ, а въ 1874 парижская академія почтила его избраніемъ въ свои члены (associés). Лондонское королевское общество также избрало Чебышева своимъ членомъ.

Трудно было бы перечислять всѣ работы П. Л.; кромѣ вышеуказанныхъ общею извѣстностью, какъ у насъ, такъ и заграницей, пользуются сочиненія:

1) Черченіе географическихъ картъ.

2) О среднихъ величинахъ.

3) Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximatives des fonctions.

4) Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés.

5) О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.

6) О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

7) Объ интегрированіи дифференціаловъ, содержащихъ кубическій корень.

8) Объ одномъ ариѳметическомъ вопросѣ.

9) О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра.

10) О наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ суммъ.

11) О центробѣжномъ уравнителѣ.

12) О простѣйшихъ сочлененіяхъ.

13) О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ.

14) О разложеніи въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной.

15) Machine arithmetique à mouvement continue. etc. etc.

Съ теченіемъ времени значеніе трудовъ П. Л. будетъ возрастать, потому что вопросы, въ нихъ затрогиваемые, имѣютъ принципіальный характеръ и большую практическую важность. Окончательная научно-критическая ихъ оцѣнка потребуетъ еще не мало времени. Мы не намѣрены, да и не можемъ резюмировать послѣдняго слова науки, не намѣрены разсуждать о заслугахъ, которыя оцѣнены по достоинству давно.

Находясь подъ впечатлѣніемъ недавно угасшей жизни П. Л., подъ обаяніемъ живыхъ его словъ и разговоровъ съ нами, ученики и почитатели его заслугъ, — мы собрались сегодня, чтобъ въ тѣсномъ семейномъ кругу побесѣдовать о томъ, что узнали отъ него и чѣмъ ему остаемся лично-обязанными.

Будемъ вѣрить, что П. Л. присутствуетъ здѣсь вмѣстѣ съ нами и выразимъ убѣжденіе, что труды его жизни нашли себѣ надежное и вѣрное помѣщеніе на его родинѣ, у насъ; ничего не пропущено и ничего не будетъ забыто. Мы изучаемъ ихъ всесторонне; — снабдивъ необходимыми дополненіями и надлежащимъ освѣщеніемъ, своевременно мы передадимъ ихъ слѣдующему поколѣнію въ залогъ дальнѣйшаго, самостоятельнаго развитія математическихъ наукъ въ Россіи, и въ залогъ сохраненія неизмѣнной признательности ученому соотечественнику, имя котораго будетъ жить столько, сколько будетъ жить сама наука.

Предлагаю почтить память П. Л. и приглашаю всѣхъ присутствующихъ здѣсь встать.

Послѣ этого были сдѣланы краткіе очерки слѣдующихъ трудовъ П. Л.

1) Д. А. Граве. Задача о географическихъ картахъ.

2) И. И. Ивановъ. Постулатъ Бертрана.

3) В. И. Станевичъ. О числѣ простыхъ чиселъ.

4) Д. Ф. Селивановъ. Работы по теоріи вѣроятности.

17 декабря 1866 года П. Л. Чебышевъ сдѣлалъ докладъ Московскому Математическому Обществу «о среднихъ величинахъ». Этотъ докладъ былъ напечатанъ во второмъ томѣ Математическаго Сборника и перепечатанъ въ сочиненіи Маіевскаго «Изложеніе способа наименьшихъ квадратовъ». Въ указанной статьѣ дано вполнѣ строгое и элементарное доказательство теоремы о вѣроятности суммѣ данныхъ величинъ заключаться между нѣкоторыми предѣлами. Изъ этой теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, законъ большихъ чиселъ и его частный случай — теорема Бернулли. Доказательство отличается такою простотой, что оно доступно лицамъ едва знакомымъ съ элементарной алгеброй. Одного знанія формулы для квадрата многочлена вполнѣ достаточно. Нестрогость, встрѣчающаяся при рѣшеніи вопросовъ теоріи вѣроятностей, здѣсь совершенно отсутствуетъ. Эта нестрогость состоитъ въ томъ, что функціи, зависящія отъ большихъ чиселъ, выражаются приближенными формулами и допускаемая при этомъ погрѣшность не оцѣнивается. П. Л. разсматриваетъ математическія ожиданія, приближенными формулами не пользуется и вполнѣ строго для искомой вѣроятности получаетъ нѣкоторое неравенство.

Нѣтъ надобности входить въ подробности, такъ какъ эта работа постоянно излагается на лекціяхъ. Трудно себѣ даже представить курсъ теоріи вѣроятностей, въ которомъ бы не встрѣчалось имя П. Л. Чебышева.

5) И. Л. Пташицкій. Объ интегрированіи ирраціональныхъ выраженій.

Послѣ перерыва засѣданія, продолжавшагося 20 минутъ, были сдѣланы слѣдующіе доклады о работахъ П. Л.

6) В. І. Шиффъ. О разности интеграла произведенія двухъ функцій и произведенія интеграловъ этихъ функцій.

7) Н. Я. Сонинъ. Приближенное вычисленіе опредѣленнаго интеграла.

8) В. А. Марковъ о функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

9) Д. К. Бобылевъ. О параллелограммахъ.

Работы П. Л. Чебышева по механикѣ относятся къ прикладной механикѣ и преимущественно къ теоріи механизмовъ. Онъ самъ говорилъ, что еще съ ранней юности интересовался устройствомъ различныхъ машинъ и строилъ изъ дерева нѣкоторые простые механизмы; поэтому нельзя съ увѣренностью утверждать, чтобы извѣстный мемуаръ: Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, находящійся въ VII-мъ томѣ Mémoires de l'Acad. Impériale des sciences de S-t Pétersb. (1853 г.), былъ дѣйствительно первымъ трудомъ Чебышева по механикѣ. Въ этомъ мемуарѣ, говоря объ извѣстномъ параллелограммѣ Уатта, авторъ замѣчаетъ, что нѣкоторымъ измѣненіемъ въ устройствѣ механизма можно достигнуть того, чтобы наибольшія отклоненія оконечности штанги поршня отъ прямолинейнаго пути уменьшились бы болѣе чѣмъ вдвое; однако въ этой «первой части» мемуара только изложены первыя основанія теоріи функцій наименѣе уклоняющихся отъ нуля и въ концѣ сказано, что въ дальнѣйшихъ параграфахъ изложенная теорія будетъ примѣнена къ опредѣленію элементовъ параллелограмма, удовлетворяющаго условіямъ наибольшей точности. Объ устройствѣ и размѣрахъ такого параллелограмма говорится позже, въ 1861 году въ IV-мъ томѣ Bulletin de l'Academie Impériale des sciences des S-t Pétersb.' p. 433; отсюда взято описаніе этого механизма, помѣщенное въ механикѣ Бура.

Въ 1868 году, въ XIV томѣ записокъ Академіи Наукъ помѣщена статья П. Л. «Объ одномъ механизмѣ», въ которой авторъ даетъ теорію новаго параллелограмма, отличающагося отъ параллелограмма Уатта видомъ кривой, вычерчиваемой при полномъ оборотѣ механизма. Въ параллелограммѣ Уатта и въ первомъ параллелограммѣ Чебышева эта кривая имѣетъ видъ цифры 8, а въ новомъ механизмѣ она имѣетъ видъ сѣченія капли ртути, лежащей на стеклѣ.

Самый механизмъ представляетъ плоскій четырехсторонникъ CC_1A_1A, состоящій изъ неподвижнаго основанія CC_1, двухъ сторонъ A_1C_1 и AC равной длины, вращающихся вокругъ точекъ C и C_1 и четвертой стороны AA_1, соединяющей оконечности A и A_1. Длины AC и A_1C_1 можно принять за единицу длинъ, а длины сторонъ AA_1 и CC_1 означимъ буквами a и k. Если a менѣе единицы, а механизмъ находится въ такомъ положеніи, что стороны A_1C_1 и AC взаимно скрещены, образуя разные углы съ основаніемъ CC_1, то сторона AA_1 будетъ имѣть положеніе $(AA_1)_0$, параллельное основаніе CC_1 и будетъ отстоять отъ него на длину:

$$b = \sqrt{1 - \left(\frac{a+k}{2}\right)^2}.$$

При полномъ оборотѣ механизма точка N, находящаяся на серединѣ стороны AA_1, опишетъ замкнутую кривую, прикасающуюся въ точкѣ N_1 къ прямой, совпадающей съ положеніемъ $(AA_1)_0$ этой стороны; точка N_0 находится по серединѣ длины $(AA_1)_0$.

Нетрудно доказать, что если k болѣе или равно $\frac{2+a}{3}$, т. е. одной трети суммы трехъ подвижныхъ сторонъ, то вся кривая, описываемая точкою N будетъ внѣ прямой, проведенной черезъ $(AA_1)_0$.

П. Л. Чебышевъ доказалъ, что при k равномъ $\frac{2+a}{3}$ и при a большихъ $\frac{1}{4}$, но не большихъ 0,546, нижняя часть кривой касается къ прямой $(AA_1)_0$ не только въ точкѣ N_0, но и еще въ двухъ точкахъ N_1 и N_2, равноотстоящихъ отъ N_0 по обѣ стороны ея на длину меньшую

$$h = \sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}}$$

и на протяженіи разстояній $+h$ и $-h$ отъ точки N_0, кривая эта отступаетъ отъ прямой на разстоянія не большія величины

$$L = \sqrt{\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}}$$

Взявъ длины AC и A_1C_1 равными одному метру, a равнымъ 0,327 метра, П. Л. Чебышевъ получаетъ по этимъ формуламъ $2h$ равнымъ, 0,64 метра и наибольшее уклоненіе L равнымъ 0,00029 метра, между тѣмъ какъ въ параллелограммѣ Уатта при одинаковой длинѣ хода $2h$ получаются уклоненія отъ 0,00079 до 0,002 метра.

Въ 1878 году на парижской всемірной выставкѣ были выставлены различные механизмы и снаряды, придуманные П. Л. Чебышевымъ и основанные на свойствахъ найденной имъ системы параллелограммовъ. 29-го августа того же года, въ засѣданіи конгресса Association Française pour l'avancement des sciences, П. Л. сообщилъ о вышесказанномъ параллелограммѣ 1868 года и о цѣлой системѣ болѣе новѣйшихъ параллелограммовъ, въ которыхъ наименѣе уклоняющаяся отъ прямой линіи точка M находится не въ серединѣ N плеча AA_1 но на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ N къ длинѣ AA_1. Если означить черезъ φ уголъ, составляемый плечами CA и C_1A_1 съ основаніемъ CC_1 въ томъ положеніи сочлененія, при которомъ плечо AA_1 параллельно основанію CC_1, черезъ c разстояніе MN, черезъ T нѣкоторую величину, равную:

$$T = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi - a}{\mathrm{Cos}\,\varphi - a}}$$

гдѣ a есть длина AA_1 (длины AC и A_1C_1 равны единицѣ) и дать c величину

$$c = -\frac{2T-(T^2+1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{2(T^2-1)\,\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

то точка M будетъ описывать линію, отклоняющуюся отъ прямой на разстоянія не большія:

$$\pm L = \pm \frac{2t^3(1+2t\,\mathrm{Sin}\,\varphi+t^2)}{T^2(1-t^2)^2}$$

на протяженіи длины $2h$ хода, которая равна:

$$2h = \frac{2a}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\left(\frac{T-\mathrm{Sin}\,\varphi}{T^2-1} + \frac{2(1+2t\,\mathrm{Sin}\,\varphi+t^2)t}{(1-t^2)^2}\right)\mathrm{Sin}\,\alpha_1,$$

гдѣ α_1 опредѣляется по формулѣ

$$\operatorname{Cos} \alpha_1 = 1 - \frac{2 \operatorname{Cos} \varphi}{a T^2} (1 - T^2) \left[\left(\frac{1 + 2t \operatorname{Sin} \varphi + t^2}{1 - 2T \operatorname{Sin} \varphi + T^2} \right)^2 - 1 \right],$$

а величина t есть корень уравненія 3-й степени:

$$t^3 + 2t^2 \operatorname{Sin} \varphi + 3t + 2 \operatorname{Sin} \varphi - T (1 - t^2) = 0 .$$

Теорія этихъ параллелограммовъ изложена въ XXXIV-мъ томѣ записокъ Академіи Наукъ.

Въ томъ же 1878 году, въ IX-мъ томѣ Математическаго Сборника, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ, П. Л. Чебышевъ, въ статьѣ «О простѣйшихъ сочлененіяхъ» (стр. 340), показалъ, что показанные имъ на парижскомъ конгрессѣ механизмы могутъ быть замѣнены другою суставчатою системою, доставляющей тѣ же симметричныя кривыя, которыя вычерчиваются точкою M вышесказаннаго паралеллограмма. Въ 1889 году, въ приложеніи къ LX-му тому записокъ Академіи Наукъ онъ изложилъ полную теорію этихъ системъ. Еще ранѣе, въ 1880 году, въ приложеніи къ XXXVI-му записокъ, въ статьѣ «О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ какихъ-либо элементовъ» онъ разсматриваетъ механизмы, въ которыхъ плечи CA и C_1A_1 не равны между собою, а также не равны между собою разстоянія точки M отъ точекъ A и A_1.

Тщательное изученіе движеній разнообразныхъ видоизмѣненій простѣйшихъ сочлененій дало П. Л. возможность подмѣтить многія особенности движеній тѣхъ или другихъ элементовъ ея; основываясь па этомъ онъ построилъ весьма много механизмовъ, описаніе и объясненіе которыхъ потребовало бы много времени. Есть придуманные Чебышевымъ механизмы, основанные на другихъ соображеніяхъ; такъ напр., счетная машина съ непрерывнымъ движеніемъ основана на нѣкоторыхъ свойствахъ системъ зубчатыхъ колесъ. Насколько практичны придуманные П. Л. механизмы — покажетъ будущее.

10) Н. Б. Делоне. О механизмахъ.

Изслѣдуя вопросъ о преобразованіи вращательнаго движенія въ прямолинейное, Чебышевъ пришелъ къ блестящимъ результатамъ и, можно сказать, покончилъ съ этимъ вопросомъ, давъ необыкновенно простые трехрычажные механизмы, преобразовывающіе непрерывное вращеніе въ прямолинейное движеніе, и обратно, съ высокою степенью приближенія; и едва ли этого рода механизмы могутъ получить, послѣ Чебышева, какое-либо дальнѣйшее усовершенствованіе. Но, этого мало,—на пути къ достиженію такихъ важныхъ результатовъ Чебышевъ поднялъ другой, близко стоящій къ первому, вопросъ капитальнаго значенія въ ученіи о преобразованіи движенія: Чебышевъ первый обратилъ вниманіе на возможность устройства передачи вращенія помощью суставчатыхъ системъ безъ мертвыхъ положеній и съ увеличеніемъ числа оборотовъ. Это вопросъ совершенно новый и представляетъ собою обширное поле для изученія; но, едва поднявъ его, Чебышевъ уже успѣлъ и на этомъ поприщѣ достигнуть весьма многаго. Пользуясь тѣмъ же трехрычажнымъ механизмомъ, который извѣстенъ подъ именемъ кинематическаго четырехсторонника, прилагая къ нему тотъ же самый методъ функцій наименѣе отклоняющихся отъ нуля, Чебышевъ показалъ, что при извѣстныхъ размѣрахъ такого четырехсторонника и при непрерывномъ вращеніи одного изъ его плечъ, нѣкоторая точка его описываетъ замкнутую кривую, умѣщающуюся между двумя концентрическими окружностями, которыхъ, эта кривая поочередно касается. Воображая себѣ третью окружность, концентрическую съ двумя первыми и имѣющую радіусъ равный среднеариѳметической отъ радіусовъ двухъ ограничивающихъ кривую окружностей, Чебышевъ принимаетъ за функцію наименѣе уклоняющуюся отъ нуля разность между радіусомъ векторомъ кривой, чертимой механизмомъ, и радіусомъ упомянутой средней окружности и показываетъ, что эта разность можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины хотя и не можетъ быть обращена въ нуль, потому что при этомъ вся кривая обращается въ точку и длина вращающагося плеча четырехсторонника тоже обращается въ нуль. Но всегда можно выбрать по формуламъ Чебышева такіе размѣры механизма, что кривая, чертимая имъ, уклоняется отъ окружности на сотыя доли миллиметра, имѣя довольно значительный поперечникъ. (Демонстрируются модели механизмовъ различнаго приближенія). Этимъ механизмомъ Чебышевъ пользовался трояким способомъ: 1) Предполагая что механизмъ приводится въ движеніе рукою, Чебышевъ удивительно находчиво избѣгалъ прибавленія къ своему трехрычажному механизму какихъ-либо еще рычаговъ, разсуждая, что для рабочаго совершенно нечувствительна разница между вращеніемъ рукоятки по окружности и вращеніемъ рукоятки по кривой, весьма мало уклоняющейся отъ окружности; между тѣмъ это вращеніе прекрасно преобразуется механизмомъ во вращеніе одного изъ плечъ четырехсторонника. Такая передача примѣнена была Чебышевымъ къ изобрѣтенному имъ креслу самокату. 2) Если механизмъ долженъ приводиться въ движеніе не рукою, а вращеніемъ какого нибудь вала, получающаго движеніе отъ паровой машины, гидравлическаго двигателя и т. д., то въ центрѣ упомянутыхъ концентрическихъ круговъ укрѣпляется кривошипъ, который уже не прямо надѣвается на шарниръ устроенный въ точкѣ, описывающей приближенную кривую, но соединяется съ этимъ шарниромъ добавочнымъ рычажкомъ. Такимъ образомъ одинъ конецъ этого рычажка идетъ по приближенной кривой, а другой его конецъ идетъ по окружности, описываемой концемъ кривошипа и вращеніе одного изъ плечъ четырехсторонника преобразуется, слѣдовательно, во вращеніе кривошипа пятирычажнымъ механизмомъ. По формуламъ Чебышева можно выбрать такіе размѣры рычаговъ, при которыхъ, при равномѣрномъ вращеніи плеча четырехсторонника, получается вращеніе кривошипа весьма близкое къ равномѣрному. 3) Наконецъ давая кривой, чертимой механизмомъ, форму наиболѣе отличающуюся отъ окружности, но принуждая ее (выборомъ размѣровъ по формуламъ) заключаться между концентрическими окружностями и касаться ихъ, Чебышевъ соединяетъ кривошипъ, вращающійся около центра этихъ окружностей добавочнымъ рычажкомъ съ точкою механизма, описывающею упомянутую кривую, и даетъ этому рычажку такую длину, чтобы онъ могъ въ мѣстахъ наибольшаго отклоненія кривой вытягиваться въ одну прямую съ кривошипомъ. Въ такомъ механизмѣ существуютъ мертвыя положенія, такъ что онъ требуетъ маховика; но за то на одинъ оборотъ плеча четырехсторонника получается *два* или *четыре* оборота кривошипа, смотря по тому, при какомъ положеніи добавочнаго рычажка перейдено было мертвое положеніе.

Замѣчательно, что формулы, данныя Чебышевымъ для приближеннаго веденія точки четырехсторонника по окружности совершенно идентичны съ формулами, данными имъ же для того изъ изобрѣтенныхъ имъ преобразователей вращательнаго движенія въ прямолинейное, которому, безъ сомнѣнія, слѣдуетъ занять первенствующее мѣсто среди всѣхъ извѣстныхъ въ наукѣ прямыхъ. Здѣсь мы имѣемъ въ виду тотъ удивительный механизмъ Чебышева съ ломанымъ рычагомъ, который помощью трехъ рычаговъ превращаетъ въ прямолинейное движеніе не колебаніе плеча, а непрерывное его вращеніе. Практика еще не достаточно знакома съ этими механизмами Чебышева, но не можетъ быть никакого сомнѣнія, что они получатъ широкое примѣненіе и распространеніе; и именно ихъ удивительная простота служитъ вѣрнымъ залогомъ будущаго ихъ успѣха. Но для науки наиболѣе важное значеніе представляетъ не то, что уже вылилось въ законченную форму а именно новый поднятый Чебышевымъ вопросъ о передачѣ вращенія суставчатыми системами. Пусть рутина на первыхъ порахъ относится съ недовѣріемъ къ этому дѣлу; можетъ быть и первые шкивы и зубчатыя колеса были встрѣчены такимъ же недовѣріемъ. Путь намѣченъ смѣло, но онъ намѣченъ твердою рукою и вѣрнымъ глазомъ. Чебышевъ любилъ говорить, что природа, величайшая наша учительница, широко примѣняетъ суставчатыя системы въ органахъ передвиженія животныхъ и что поэтому можно надѣяться на пріобрѣтеніе этими системами въ будущемъ большаго значенія. Пожелаемъ же, чтобы надежды великаго геометра оправдались, чтобы суставчатыя системы не переставали быть предметомъ всесторонняго изученія на благо и пользу будущихъ поколѣній.

Засѣданіе 28 января 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе «о задачѣ Дирихле».

Засѣданіе 25 февраля 1895 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) М. М. Филипповъ. «Объ одной формулѣ общаго дифференцированія».

2) И. С. Аладовъ. «О числѣ классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ, опредѣлитель которыхъ равенъ отрицательному числу».

Дирихле доказалъ, что, если простое число p вида $4m+1$, то число классовъ квадратичныхъ формъ съ опредѣлителемъ $-p$ равно удвоенной разности между числомъ квадратичныхъ вычетовъ и числомъ невычетовъ простого числа p въ ряду: $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{4}$; если же p—вида $4m+3$, то число классовъ формъ съ опредѣлителемъ $-p$ и съ дѣлителемъ, равнымъ единицѣ, равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа p въ ряду: $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Легко показать, что и во второмъ случаѣ для опредѣленія числа классовъ квадр. формъ достаточно знать числа квадр. вычетовъ и невычетовъ въ нѣкоторыхъ рядахъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числомъ не болѣе $\frac{p+1}{4}$, если разсматривать отдѣльно случаи, когда p вида $8m+3$ и $8m+7$, а именно имѣемъ слѣдующія теоремы: 1) *Если* $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$, *то число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ* $-p$ *и дѣлителемъ единицею равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа* p *въ ряду*: $\frac{p+1}{4}, \frac{p+5}{4}, \ldots, \frac{p-1}{2}$; 2) *Если* $\left(\frac{2}{p}\right)=+1$, *то число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ* $-p$ *и дѣлителемъ единицею равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа* p *въ ряду*: $1, 2, 3, \ldots \frac{p-3}{4}$. Можно идти еще далѣе и доказать, что для опредѣленія числа классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ $-p$ и съ дѣлителемъ единицею въ случаѣ, когда $p\equiv 3$ (мод. 4), достаточно знать числа квадр. вычетовъ и невычетовъ p въ нѣкоторыхъ рядахъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числомъ, равнымъ приблизительно одной шестой части всего числа цѣлыхъ ряда 1, 2, . . . , $p-1$, а въ одномъ случаѣ приблизительно $^1/_{12}$-ой части этого числа.

Дѣйствительно, изъ предъидущихъ теоремъ Дирихле могутъ быть выведены нижеслѣдующія четыре теоремы, соотвѣтствующія случаямъ, когда $p = 8m - 1$, $p = 8m + 3$, $p = 8m + 5$ и $p = 8m + 1$. Для краткости обозначимъ число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ $-p$ чрезъ $h\,(-p)$ и будемъ помнить, что для первыхъ двухъ случаевъ дѣлитель формы предполагается равнымъ единицѣ. *Теорема I.* $p \equiv 3$ (мод. 4); $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$, $h\,(-p)$ *равняется разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ въ ряду:*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{p-3-2\left(\frac{3}{p}\right)}{6},$$

гдѣ $\left(\frac{3}{p}\right)$ *означаетъ символъ Лежандра.*

Теорема II. $p \equiv 3$ (*мод. 4*); $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, $h\,(-p)$ *равняется удвоенной разности между числомъ квадратичныхъ вычетовъ въ ряду:*

$$\frac{p+1}{4},\ \frac{p+5}{4},\ \ldots,\ \frac{2p-3-\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

безъ разности таковыхъ же чиселъ въ ряду:

$$\frac{p+3-2\left(\frac{3}{p}\right)}{6},\ \ldots,\ \frac{p-3}{4}.$$

Число чиселъ въ обоихъ послѣднихъ рядахъ равно:

$$\frac{p+\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

Теорема III. $p \equiv 1$ (*мод. 4*); $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, $h\,(-p)$ *равняется удвоенной разности, между числомъ квадрат. и неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду:*

$$\frac{p+3+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6},\ \frac{p+9+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6},\ \ldots,\ \frac{p-1}{4}.$$

Число чиселъ въ этомъ ряду равно:

$$\frac{p+3-4\left(\frac{3}{p}\right)}{12}.$$

Теорема IV. $p \equiv 1$ (*мод.* 4); $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$. $h(-p)$ *равняется удвоенной суммѣ двойной разности между числомъ неквадратичныхъ и квадр. вычетовъ въ ряду*:

$$\frac{p+3}{4}, \ldots, \frac{2p-3+\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

и таковой же разности въ ряду:

$$\frac{p+3+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \frac{p+9+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \ldots, \frac{p-1}{4}.$$

Число чиселъ въ обоихъ послѣднихъ рядахъ равно:

$$\frac{p-\left(\frac{3}{p}\right)}{6}.$$

Засѣданіе 18 марта 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Предсѣдатель сообщилъ собранію объ утратѣ, которую Общество понесло въ лицѣ скончавшагося ея члена Аркадія Васильевича Борисова и предложилъ почтить память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ.

Собраніе почтило память Аркадія Васильевича Борисова вставаніемъ.

Н. Я. Сонинъ сдѣлалъ слѣдующія сообщенія:

1) Простой выводъ формулы П. Л. Чебышева для разложенія $\frac{1}{H-x}$.

2) О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ.

Засѣданіе 21 апрѣля 1895 года.

Предсѣдательствовалъ П. В. Мещерскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Нѣсколько примѣчаній объ интегрированіи уравненія: $ydy - ydx = Rdx$».

Въ № 2 «Извѣстій Императорской Академіи Наукъ» появилась статья академика Н. Я. Сонина «О дифференціальномъ уравненіи $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$».

Докладчикъ предложилъ вниманію Общества нѣсколько замѣчаній по поводу этой статьи.

1) Въ § VIII акад. Сонинъ разбираетъ вопросъ о случаѣ, когда уравненіе

$$ydy - ydx = R(x)dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

имѣетъ три каноническихъ рѣшенія x_1, x_2, x_3, т. е. общій интегралъ представляется въ видѣ:

$$(y - \alpha_1)^{m_1}(y - \alpha_2)^{m_2}(y - \alpha_3)^{m_3} = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

m_1, m_2, m_3 опредѣленныя постоянныя

и притомъ сумма каноническихъ постоянныхъ $(m_1 + m_2 + m_3)$ равна нулю.

Задача эта была впервые поставлена и разрѣшена Эйлеромъ. (Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, T. XVII, p. 109. 1772 г.). Затѣмъ она же была рѣшена Лѣтниковымъ въ его диссертаціи (Ueber die Bedingungen der Integralilität einiger Differentialgleichungen, Dresden, 1867. S. 18), Elliot'омъ въ его статьѣ, помѣщенной въ седьмомъ томѣ третьей серіи Annales de l'Ecole normale» (1890 г.), и, наконецъ, съ иной точки зрѣнія, разобрана докладчикомъ въ его книгѣ («Изслѣдованія о дифференціальномъ уравненіи $ydy - ydx = Rdx$»), стр. 43 -- 48.

Такимъ образомъ рѣшеніе, данное акад. Сонинымъ, есть пятое по времени и результатъ можетъ быть представленъ въ болѣе простой и болѣе общей формѣ, именно у акад. Сонина для функціи $R(x)$ получилось такое выраженіе

$$R(x) = -\frac{2}{3}x + 6\frac{\mu^2+3}{(\mu+3)^2} - \frac{12\mu(\mu-3)}{(\mu+3)^2}x^{-\frac{1}{2}}$$ (μ какое угодно постоянное).

вмѣсто слѣдующаго

$$R(x) = -\frac{2}{3}(x+h) + h_0 + \frac{h'}{\sqrt{x+h}}$$

даннаго напр. въ цитированной книгѣ («Изслѣдованія», стр. 46).

2) Другой случай, встрѣчающійся у акад. Сонина, именно

$$R = {}^3/_4\left(x - x^{-\frac{5}{3}}\right)$$

тоже извѣстенъ со временъ Эйлера и кромѣ того разобранъ въ цитированиой книгѣ («Изслѣдованія» стр. 189 и слѣд.).

3) Въ началѣ § 10 акад. Сонинъ говоритъ: «мы не рѣшаемся предпринять изслѣдованіе общаго случая, когда m_1 и m_2 (въ ур. (2) остаются произвольными, въ виду чрезмѣрной сложности вычисленій».

Вопросъ этотъ въ самомъ общемъ видѣ былъ рѣшенъ докладчикомъ, рѣшеніе доложено Обществу въ засѣданіи 21 апрѣля 1894 г. и напечатано въ протоколахъ Общества.

4) Въ § IX акад. Сонинъ оставляетъ безъ разсмотрѣнія случай, когда при $x = \infty$ частное $\frac{R}{y}$ равно безконечности.

Докладчикъ показалъ, что въ этомъ случаѣ на вопросъ, изучаемый акад. Сонинымъ, прямо получается отрицательный отвѣтъ изъ теоремъ, данныхъ въ книгѣ докладчика. («Изслѣдованія», стр. 141, 147, 149).

5) Въ концѣ § XIV акад. Сонинъ получаетъ такую теорему:

Равенство $\sum\frac{m_i}{\alpha_i} = 0$ возможно не иначе, какъ подъ условіемъ $\lambda = \frac{2}{r}$ (r цѣлое число).

Т. е. если всѣ каноническія рѣшенія начинаются съ одного и того же члена при разложеніи въ тѣ формы

$$\alpha_i = hx + q_1x^{1-\lambda} + q_2x^{1-2\lambda} + \dots$$

то число λ должно быть вида $\frac{2}{r}$.

Между тѣмъ дифференціальное уравненіе

$$ydy - ydx = Rdx \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{гдѣ } R = -\frac{5}{36}x + x^{-7/5},$$

имѣетъ шесть каноническихъ рѣшеній, которыя суть попарно корни слѣдующихъ уравненій:

$$\alpha^2 + \left(-\frac{5}{3}x + A_i x^{1/5}\right)\alpha + \frac{25}{36}x^2 - \frac{5}{6}A_i x^{6/5} + \frac{1}{2}A_i^2 x^{2/5} + \\ + 5x^{-2/5} = 0$$

$$A_i^3 = -\frac{100}{3}, \; i = 1, 2, 3.$$

Для ур. (3) всѣ условія теоремы акад. Сонина выполнены, а между тѣмъ $\lambda = {}^4/_5$.

Это произошло оттого, что въ разсужденія акад. Сонина вкралась ошибка, и теорема его не имѣетъ мѣста.

Ошибка состоитъ въ томъ, что системы уравненій, которыя у акад. Сонина помѣчены цифрами (18) и (19) (§ XIV) далеко не вполнѣ замѣняютъ одна другую.

Авторъ упустилъ изъ виду, что среди чиселъ, которыя онъ обозначаетъ буквами b_k (стр. 21 его статьи внизу), могутъ оказаться равныя нулю и тогда системы (19), вовсе не существуетъ.

Къ сожалѣнію, та же самая ошибка проходитъ черезъ всѣ послѣднія 10 страницъ статьи Н. Я. Сонина, почему результаты, полученные имъ, должны быть пересмотрѣны.

6) Въ § IV акад. Litsoninъ показываетъ, что если всѣ каноническія постоянныя раціональны, то сумму ихъ можно всегда считать равною нулю. Докладчикъ обратилъ вниманіе Общества на то, что теорема эта впервые дана докладчикомъ въ его книгѣ («Изслѣдованія», стр. 157).

2) Н. Я. Сонинъ. «Объ остаточномъ членѣ въ формулѣ Лагранжа для интерполированія».

Полагаемъ:

$$\Omega(z) = \left[\Psi(z) - \sum_1^n \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(^k)} \; \frac{\varphi(z)}{z - x_k}\right] \cdot \left[f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \; \frac{\varphi(x)}{x - x_k}\right]$$

$$-\left[\Psi(x)-\sum_1^n \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right]\cdot\left[f(z)-\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(z)}{z-x_k}\right].$$

Исчезаетъ при $z = x_1\; x_1, \ldots x_n$. $\Omega^n(z)$ имѣемъ корень ξ между наиб. и найм. корнемъ $\Omega\,(z)$, такъ что

$$\Psi^{n}(\xi)\left[f(x)-\sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right]=f^n(\xi)\left[\Psi(x)-\sum \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right].$$

$\Psi(x) =$ полиномъ $(n-1)$-ой степ. дастъ форм. Лагранжа.

$\Psi(x) =$ полиномъ n-ой ст. $= \varphi(x) +$ полип. $(n-1)$-ой степ.

$$f(x)=\sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}+\frac{f^n(\xi)}{n!}\,\varphi(x).$$

$$\Psi(x) = xf(x).$$

$$D_\xi^n\xi f(\xi)\cdot\left[f(x)-\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right]=$$

$$=f^n(\xi)\left[xf(x)-\sum_1^n \frac{x_k f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right].$$

Во второй части $x_k = x - (x-x_k)$, такъ что

$$=f^n(\xi)\cdot\left[f(x)-\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}+\sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\varphi(x)\right]$$

откуда

$$D_\xi^n(\xi-x)f(\xi)\left[f(x)-\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right]=\varphi(x)f^n(\xi)\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Остатокъ будетъ точный, если

$$D_\xi^n f(\xi) = af^n \text{ или } D_\xi^n(\xi-a)f(\xi)=0, \text{ т. е.}$$

$$f(\xi)=\frac{\text{полипому } (n-1)\text{-ой степ.}}{\xi-a}$$

$$\Psi(x) = \sigma(x)\,.\,f(x)$$

$$D_\xi^n\sigma(\xi)\,f(\xi)\left[f(x)-\sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right]=$$

$$=f^n(\xi)\left[\sigma(x)f(x)-\sum_1^n \frac{\sigma(x_k)f(x_k)}{\varphi'(x_k)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_k}\right];$$

но

$$\sigma(x_k) = \sigma(x) - [\sigma(x) - \sigma(x_k)]$$

$$D_\xi^n \left[\sigma(\xi) - \sigma(x)\right] f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x - x_k}\Big] =$$

$$= f^n(\xi) \sum_1^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \frac{\sigma(x) - \sigma(x_k)}{x - x_k} \cdot \varphi(x).$$

Остатокъ точекъ, если

$$D_\xi^n \sigma(\xi) f(\xi) = a f^n(\xi) \text{ или}$$

$$D_\xi^n \left[\sigma(\xi) - a\right] f(\xi) = 0,$$

т. е. $$f(\xi) = \frac{\text{полипому } (n-1)\text{-ой степ,}}{\sigma(\xi) - a}$$

Въ этомъ случаѣ

$$f(x) = \sum_1^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x - x_k} + \frac{\varphi(x)}{a - \sigma(x)} \sum^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \frac{\sigma(x) - \sigma(x_k)}{x - x_k}.$$

Засѣданіе 25 сентября 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Предложенъ въ члены Общества Николай Семеновичъ Михельсонъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

А. Д. Путята предложилъ привѣтствовать какимъ-нибудь образомъ Французскій Институтъ по случаю столѣтней годовщины его основанія.

Постановлено отправить поздравительную телеграмму.

Въ библіотеку Общества доставлена книга Н. А. Забудскаго «Внѣшняя балистика».

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. а) «Объ одной эллиптической функціи».

При изученіи Чебышевской проекціи *), дающей изображеніе съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ внутренней части четыреугольника, образованнаго двумя меридіанами и двумя па-

---

*) *Eisenlohr*. Ueber die Flächenabbildung 1870. Journal von Crelle t. LXXII.

раллелями на шарѣ, я встрѣтился съ необходимостью разсмотрѣть свойства слѣдующей эллиптической функціи

$$\omega(x) = \frac{sn\,x\,dn\,x}{cn\,x}.$$

Свойства этой функціи аналогичны со свойствами тригонометрической функціи tgx.

Обозначая черезъ $4K$, $2K'_2$ періоды функціи snx, мы получаемъ слѣдующія соотношенія:

$$1)\ \omega(x) = \frac{sn2x}{1+cn2x} = \frac{\Theta_1(0)\Pi(2x)}{\Pi_1(0)\Theta(2x)+\Theta(0)\Pi_1(2x)}\ {}^{*)}$$

$$2)\ \omega(x+K) = -\frac{1}{\omega(x)}$$

$$3)\ \omega(x+K'i) = \frac{1}{\omega(x)}$$

$$4)\ \omega\left(x+\frac{K}{1}\right) = \frac{dn2x+k'sn2x}{cn2x}$$

$$5)\ \omega\left(x+\frac{K'i}{2}\right) = ksn2x + idn2x$$

Послѣднія два соотношенія показываютъ, что модуль функціи $\omega(x+iy)$ равенъ единицѣ для всѣхъ точекъ прямыхъ

$$x = \frac{K}{2} + nK,\ y = \left(\frac{K'}{2} + mK'\right),$$

гдѣ n и m произвольныя цѣлыя числа.

и б) «О задачахъ предложенныхъ въ журналѣ Intérmaidière de Mathematiciens».

2) Ю. В. Сохоцкій. «О группахъ».

Засѣданіе 19 октября 1895 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Избранъ въ члены Общества Н. С. Михельсонъ.

Предлагается въ члены Общества Гурій Васильевичъ Колосовъ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и И. В. Мещерскій).

---

*) Обозначеніе литографированнаго курса Hermit'а.

Въ библіотеку Общества доставлены извѣстія Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ, 2-я серія, Т. IV, № 4 и Т. V № 2.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. Я. Сонинъ. «О дифференціальномъ уравненіи $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$».

2) К. Штёрмеръ (изъ Христіаніи). «О рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія:

$$\frac{\pi}{4} = m \ arctg \frac{1}{p} + n \ arctg \frac{1}{g}.$$

(сообщено Д. А. Граве).

Засѣданіе 13 ноября 1895 года.

По предложенію Д. К. Бобылева единогласно избранъ въ члены Общества и предсѣдателемъ засѣданія Александръ Васильевичъ Васильевъ.

Было прочитано письмо отъ Французскаго Института, въ которомъ Институтъ благодаритъ С.-Петербургское Математическое Общество за привѣтствіе, посланное Обществомъ по поводу столѣтней годовщины основанія Института.

Въ библіотеку Общества доставлена книга «Извѣстія С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института».

Въ члены Общества избранъ Гурій Васильевичъ Колосовъ.

Было сдѣлано сообщеніе:

Б. М. Кояловичъ. «О дифференціальныхъ уравненіяхъ съ частными производными 2-го порядка».

Засѣданіе 16 декабря 1895 года.

По предложенію Ю. В. Сохоцкаго единогласно избранъ въ члены Общества и предсѣдателемъ засѣданія Иванъ Ивановичъ Рахманиновъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «О группахъ».

2) П. А. Шиффъ. «О женерализаціонномъ исчисленіи Ольтрамара».

Засѣданіе 22 января 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

Предложенъ въ члены Общества Станиславъ Клементьевичъ Каминскій (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Н. А. Забудскій).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Объ уравненіи: $ydy - ydx = Rdx$».

I. Если дифференціальное уравненіе

$$ydy - ydx = Rdx \quad (1)$$

допускаетъ каноническія рѣшенія, то всѣ эти рѣшенія разлагаются въ ряды вида

$$y = hx + q_1 x^{1-\lambda} + q_2 x^{1-2\lambda} + \dots \qquad \lambda > 0$$

причемъ λ опредѣляется изъ того условія, что въ функціи R не должно содержаться члена съ $x^{1-\lambda}$, такъ что q_1 или нуль или произвольное постоянное.

II. Если функція R имѣетъ форму

$$R = ax + bx^{1-2\lambda} + \dots + lx^{1-\lambda 6}$$

то наинизшій показатель x'а $(1 - \lambda 6)$ численно не больше $^5/_3$ и если онъ численно больше единицы, то онъ имѣетъ такую форму

$$-\frac{2\tau + s}{2\tau + 1}, \ \tau\text{—цѣлое положительное число.}$$

III. Если число a таково, что корни уравненія

$$z^2 - z = a \quad (2)$$

мнимые, или вещественные, но ирраціональныя, или же раціональныя одинаковыхъ знаковъ, то вопросъ о нахожденіи каноническихъ рѣшеній вполнѣ разрѣшенъ въ моей диссертаціи. Если же корни уравненія (2) раціональныя одинаковыхъ знаковъ, то можно доказать слѣдующее:

Всѣ уравненія типа (1), для которыхъ корни ур. (2) раціональныя разныхъ знаковъ, должны имѣть слѣдующую форму

$$ydy - ydx = \left(\frac{\xi}{(\xi-1)^2}\,x + Ax^{-\frac{\xi+2}{5}}\right)dx \quad (3)$$

ξ — цѣлое число, A—постоянное, какое угодно,

если только каноническія рѣшенія существуютъ.

Но для уравненій типа (3) Эйлеромъ указанъ интегрирующій множитель (Institutiones Calculi Integralis, T. I, p. 323—324).

Такимъ образомъ единственный случай, въ которомъ моя метода не давала окончательнаго отвѣта, вполнѣ разобранъ Эйлеромъ и не представляетъ интереса съ точки зрѣнія теоріи каноническихъ рѣшеній.

2) Б. М. Кояловичъ. «О дифференціальныхъ уравненіяхъ съ частными производными 2-го порядка».

3) В. Ф. Каганъ. «О нѣкоторыхъ неприводимыхъ полиномахъ».

Въ Высшей Алгебрѣ пользуется извѣстностію слѣдующее предложеніе, принадлежащее Шенеману:

Полиномъ вида:

$$p\,(\pm 1 + a_1 x + a_2 x^n + \ldots a_{n-1} x^{n-1}) + x^n \quad (1)$$

неприводимъ, если p есть число цѣлое и при томъ простое, а коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ — какія угодно цѣлыя числа. Слѣдующій ходъ разсужденій даетъ возможность значительно обобщить это предложеніе.

Основная теорема:

Положимъ, что въ полиномѣ

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^n + \ldots A^n x_n \quad (2)$$

съ цѣлыми коэффиціентами A_0 дѣлится на простое число p, но не дѣлится на квадратъ этого числа; допустимъ сверхъ того, что коэффиціенты $A_1, A_2 \ldots A_{k-1}$ также дѣлятся на p, но A_k не дѣлится на это число. Въ такомъ случаѣ полиномъ (2) имѣетъ неприводимый множитель, степень котораго не ниже k; первые k коэффиціентовъ этого множителя дѣлятся на p.

Слѣдствія.

a) Полиномъ вида (1) неприводимъ. Теорема Шелемана.

b) Если полиномъ имѣетъ видъ:

$$p(\pm 1 + c_1 x + c_2 x^n + c_{n-2} x^{n-2}) + c_{1-n} x^{n-1} + x^n \quad (3)$$

гдѣ c_{n-1} не дѣлится на p (p простое число), то полиномъ либо неприводимъ, либо имѣетъ неприводимый множитель степени $n-1$. Дополнительный множитель въ этомъ случаѣ равенъ $(x \pm l)$ и потому:

$$c_{n-1} \equiv \pm 1 \text{ (мод. } p)$$

Отсюда:

Если въ полиномѣ вида (3) c_{n-1} *не сравнимо съ* $\pm l$ *по модулю* p, *то онъ неприводимъ.* Это предложеніе заключаетъ въ себѣ теорему Шелемана, какъ частный случай.

c) Если полиномъ вида

$$p(\pm 1 + c_1 x + c_2 x^n + \ldots c^{n-3}) + c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-1} + x^n \, (4),$$

гдѣ c_{n-2} не дѣлится на p, освобожденъ отъ корней равныхъ $\pm l$, то онъ либо неприводимъ, либо имѣетъ неприводимый множитель степени $n-2$.

Въ послѣднемъ случаѣ

$$c_{n-2} \equiv \pm l \text{ (мод. } p).$$

Поэтому:

Если полиномъ вида (4) *не имѣетъ корней равныхъ* $\pm l$ *и* c_{n-2} *не сравнимо съ* $\pm l$ *по модулю* p, *то онъ неприводимъ.*

Это предложеніе заключаетъ въ себѣ предыдущее, какъ частный случай.

Замѣтимъ, что вопросъ о томъ, разлагается ли полиномъ на множители, если сравненіе (5) имѣетъ мѣсто, рѣшается на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если полиномъ (4) (обозначимъ его черезъ $f(x)$) допускаетъ разложеніе, то одинъ изъ множителей будетъ квадратнымъ и притомъ вида:

$$x^n + Bx \pm 1$$

Во-первыхъ, легко обнаружить, что

$$B \equiv c_{n-1} \text{ (мод. } p\text{), (6).}$$

Во-вторыхъ

$$f(+1) = k(1 + B \pm 1), f(1-1) = l(1 - B \pm 1) \text{ (7)}$$

гдѣ k и l цѣлыя числа. Поэтому

$$2 + |f(+1)| \leq (B) \leq |f(-1)| + 2 \text{ (8).}$$

Соотношенія (6), (7) и (8) приводятъ рѣшеніе вопроса къ весьма небольшому числу испытаній.

d) Теорема (a) справедлива при всякомъ p, не имѣющемъ кратныхъ множителей. Это непосредственно вытекаетъ изъ основной теоремы.

e) Теорема (b) справедлива при всякомъ p, не имѣющемъ кратныхъ множителей, если $n > 2$.

Въ доказательствѣ предложенія (b) то обстоятельство, что p есть простое число, играетъ только слѣдующую роль: оно даетъ право заключать, что при разложеніи многочлена на множители въ одномъ изъ составляющихъ полиномовъ свободный членъ равенъ $\pm p$, а въ другомъ ± 1. Допустимъ, что при p составномъ, но не имѣющемъ кратныхъ множителей, полиномъ разбивается на два множителя, свободные члены которыхъ $\pm p_1$, $\pm p_2$ отличны отъ ± 1; тогда по основной теоремѣ каждому изъ составляющихъ полиномовъ соотвѣтствуетъ неприводимый множитель, степень котораго не ниже $n-1$.

Поэтому

$$2(n-1) \leq n, \quad n \leq 2$$

f) Теорема (c) справедлива при всякомъ p, не имѣющемъ кратныхъ множителей, если $n > 4$.

Доказательство то же.

Засѣданіе 9 февраля 1896 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Избранъ въ члены Общества Станиславъ Клементьевичъ Каминскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. Я. Сонинъ сообщилъ Собранію нижеслѣдующее. Въ виду наступающей въ мартѣ сего года 51 годовщины дня рожденія ректора Стокгольмскаго университета и основателя журнала «Acta Mathematica», нашего сочлена г. Миттага Леффлера возникла среди самыхъ выдающихся математиковъ нашего времени мысль выразить сочувствіе основателю вышесказаннаго, замѣчательнаго въ научномъ отношеніи, журнала. Это сочувствіе иниціаторы этого дѣла желаютъ выразить подношеніемъ г. Миттагу Леффлеру адреса съ подписями возможно большаго числа математиковъ, и его портрета, написаннаго масляными красками. Съ этой цѣлью иниціаторы обратились съ циркулярнымъ письмомъ ко многимъ членамъ нашего Общества съ просьбой отвѣтить, желаетъ ли кто нибудь изъ нихъ: 1) подписаться только подъ адрессъ или 2) подписаться подъ адрессъ и внести нѣкоторую сумму, по желанію, на изготовленіе сказаннаго портрета.

Н. Я. Сонинъ, изложивъ *истинные* мотивы этого чествованія, заявилъ, что согласіе членовъ на то, чтобы ихъ подписи были помѣщены на адрессъ, а также и деньги на портретъ, принимаются Н. Я. Сонинымъ (Васильев. Островъ, 6-я линія, 29) и А. А. Марковымъ (Васильев. Островъ, 7-я линія, домъ академіи наукъ); при чемъ эти заявленія гг. членовъ Общества должны быть направлены къ нимъ не позже *14-го сего февраля.*

2) К. Стӧрмеръ. «О рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія:

$$m.arctg\,\frac{1}{x}+n\ arctg\,\frac{1}{y}=k\,\frac{\pi}{4}$$

(доклад. Д. А. Граве).

Засѣданіе 14 марта 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Н. Я. Сонинъ доложилъ Собранію, что на портретъ г. Миттагъ-Леффлеру собрано 86 рублей, которые были размѣнены на франки и пересланы въ Парижъ.

Былъ возбужденъ вопросъ относительно чествованія памяти Декарта по случаю 300-лѣтія со дня его рожденія (31 марта). Рѣшено посвятить часть слѣдующаго засѣданія обзору математическихъ работъ Декарта, при чемъ въ этомъ обзорѣ согласились принять участіе С. Е. Савичъ и Д. Ф. Селивановъ.

Былъ возбужденъ вопросъ относительно фиксированія дня засѣданій Общества. Большинствомъ голосовъ рѣшено назначать засѣданія по средамъ послѣ 15 числа мѣсяца, или 15-го, если это число попадаетъ на среду.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Г. В. Колосовъ. «Объ одномъ случаѣ вращенія тяжелаго твердаго тѣла».

2) И. В. Мещерскій. «Замѣтка объ аналитическихъ силахъ».

Въ замѣткѣ излагается: во 1-хъ послѣдовательное развитіе того пріема для составленія интегрирующихся въ квадратурахъ системъ каноническихъ уравненій, который основанъ на примѣненіи функцій отъ комплексныхъ количествъ; во 2-хъ связь этого пріема съ динамикой.

1. Первая статья *В. Г. Имшенецкаго*, посвященная разсматриваемому вопросу,—«Интегрированіе одной системы уравненій», появилась въ 1876 г. въ VIII томѣ Матем. Сборника; пріемъ, указанный въ этой статьѣ для случая системы изъ четырехъ уравненій, нѣсколько обобщенъ уже въ слѣдующей статьѣ *Имшенецкаго*, напечатанной въ томъ же 1876 г. въ «Bulletin» Darboux t. XI, и затѣмъ распространенъ на случай $4n$ уравненій въ статьѣ *Имшенецкаго*, которая появилась въ 1878 г. въ «Memoires de a Société des Sciences de Liège».

Дальнѣйшее развитіе пріемъ Имшенецкаго получилъ въ двухъ статьяхъ проф. *П. А. Некрасова*: «О совмѣстныхъ каноническихъ диф. уравненіяхъ...» и «Къ статьѣ о совмѣстныхъ кан. диф. ур...»; статьи эти будутъ помѣщены въ XVIII томѣ Мат. Сб., но оттисскп ихъ уже получены.

2) Въ 1885 г. въ «Journal de l'Ec. Polyt.» появилась статья *M. Lecornu*: «Sur les forces analytiques»; здѣсь въ первыхъ пяти теоремахъ излагаются свойства «аналитическихъ силъ», т. е. силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости, проекціи которыхъ X и Y удовлетворяютъ условію:

$$X + Y\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1});$$

а въ остальныхъ тринадцати теоремахъ — свойства движенія точки при дѣйствіи аналитическихъ силъ.

Легко показать, что диффер. уравненія точки при дѣйствіи аналитической силы представляютъ *частный случай* той системы уравненій, которой занимается *Имшенецкій* въ первой изъ упомянутыхъ статей 1876 года въ VIII томѣ Мат. Сб.; — они получаются изъ этой системы, если принять двѣ изъ перемѣнныхъ: x и y за координаты точки, а двѣ другія: q и p за проекціи ея скорости и положить $\varphi(r) = r$.

Аналитическія силы, за исключеніемъ единственнаго случая,

$$X = a + kx, \ Y = b + ky,$$

гдѣ a, b, k — постоянныя, не имѣютъ потенціала, послѣ статьи *M. Lecornu* онѣ встрѣчаются въ одномъ изъ упражненій сборника задачъ *de Saint-Germain*.

Пріемъ Имшенецкаго, если двѣ изъ его перемѣнныхъ принимать за координаты точки, а двѣ другія за проекціи ея скорости, можетъ привести только къ случаю силъ аналитическихъ; но въ томъ обобщенномъ видѣ, въ какомъ этотъ пріемъ представленъ проф. *Некрасовымъ*, онъ можетъ дать диффер. уравненія движенія при дѣйствіи и иныхъ силъ, имѣющихъ потенціалъ.

Важное значеніе разсматриваемаго пріема въ динамикѣ сдѣлается несомнѣннымъ только тогда, когда онъ приведетъ къ уравненіямъ, до сихъ поръ не проинтегрированнымъ, если при томъ эти уравненія встрѣчаются при рѣшеніи задачъ о движеніи при дѣйствіи такихъ силъ, которыя допускаются, какъ причины движеній, происходящихъ въ природѣ.

Засѣданіе 17 марта 1896 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Предлагаетъ въ члены Общества Василій Васильевичъ Серафимовъ (предлагаютъ О. А. Баклундъ и И. В. Мещерскій).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) С. Е. Савичъ. «О работахъ Декарта по геометріи».

2) Д. Ф. Селивановъ. «О работахъ Декарта по анализу».

3) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функціяхъ».

4) А. И. Богуславскій. «Понятіе о количествѣ, какъ основаніе раціональной механики» (введеніе къ курсу алгебры плоскости и пространства).

Засѣданіе 18 сентября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Въ члены Общества избранъ Василій Васильевичъ Серафимовъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ. «О числовой функціи $\varphi(n)$, выражающей число чиселъ простыхъ съ n и не превосходящихъ n».

Если числа

$$1, d, d', d'', \dots, n$$

суть всѣ дѣлители числа n, то, какъ показалъ Гауссъ, имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots + \varphi(n) = n,$$

которое для краткости обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$\Sigma\, \varphi(d) = n \qquad (1).$$

Покажемъ, что отсюда можно вывести выраженіе для функціи $\varphi(n)$, не пользуясь другими свойствами этой функціи и не обращаясь къ символическимъ пріемамъ.

Предположимъ, что разложеніе числа n на простые множители имѣетъ видъ

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}.$$

Дѣлители числа n раздѣлимъ на два класса: къ первому отнесемъ тѣ, которые въ разложеніи на простые множители содержатъ $p_1^{\alpha_1}$; всѣ же остальные дѣлители причислимъ ко второму классу. Дѣлители перваго класса имѣютъ видъ $p_1^{\alpha_1} . d_1$, гдѣ d_1— дѣлитель числа

$$n_1 = p_2^{\alpha_2} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu};$$

дѣлители же втораго класса обозначимъ черезъ d'. На этомъ основаніи (1) принимаетъ видъ

$$\Sigma\, \varphi(p_1^{\alpha_1} . d_1) + \Sigma\varphi(d') = n.$$

Такъ какъ d' есть дѣлитель числа

$$p_1^{\alpha_1 - 1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu},$$

то по теоремѣ Гаусса

$$\Sigma\, \varphi(d') = \frac{n}{p_1}$$

и слѣдовательно

$$\Sigma\, \varphi(p_1^{\alpha_1} d_1) = n\left(1 - \frac{n}{p_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Числа d_1, дѣлители числа n_1, можно снова разбить на два класса. Повторивъ тѣ же разсужденія, получимъ

$$\Sigma\varphi(p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . d_2) + \Sigma\varphi(p_1^{\alpha_1} . d_1') = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).$$

Здѣсь d_2 есть дѣлитель числа $p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}$,

а d_1' » » » $p_2^{\alpha_2 - 1} . p_3^{\alpha_3} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}$.

Такъ какъ

$$n = p_1^{\alpha_1} . n_1,$$

то на основаніи формулы (2)

$$\Sigma\varphi(p_1^{\alpha_1} . d_1 . d_1') = \frac{n}{p_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

и слѣдов.

$$\Sigma\varphi(p_1^{\alpha_1} \,.\, p_2^{\alpha_2} \,.\, d_2) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \quad . \;\; . \;\; . \quad (3)$$

Разсуждая такимъ же образомъ далѣе, наконецъ получимъ

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_\mu}\right).$$

При помощи изложеннаго метода можно найти функцію $f(n)$, удовлетворяющую соотношенію

$$\Sigma f(d) = F(n),$$

гдѣ $F(n)$ — данная функція.

2) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функціяхъ».

Засѣданіе 16 октября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія книги:

1) М. М. Филипповъ. «Элементарная теорія вѣроятностей».

2) Двадцатипятилѣтіе Московскаго Математическаго Общества (1867—1892).

3) Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ Т. XVIII вып. 4.

4) D. A. Gravé. «Sur le problème de Dirichlet».

Было прочитано возваніе отъ Высочайше утвержденнаго Комитета для завѣдыванія сборомъ пожертвованій на сооруженіе памятника французскому ученому Лавуазье.

Н. Я. Сонинъ сдѣлалъ сообщеніе: «Рѣшеніе разностныхъ уравненій».

Засѣданіе 20 ноября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

Секретарь прочелъ краткій отчетъ о состояніи Общества въ 1895—1896 г.

Были произведены выборы членовъ Совѣта Общества на новое четырехлѣтіе, причемъ избраны:

О. А. Баклундъ, Д. К. Бобылевъ, Д. А. Граве, И. В. Мещерскій, К. А. Поссе, И. Л. Пташицкій, Д. А. Селивановъ, Ю. В. Сохоцкій, В. I. Шиффъ и П. А. Шиффъ.

Въ послѣдовавшемъ затѣмъ засѣданіи Совѣта избраны: Предсѣдателемъ Совѣта — Ю. В. Сохоцкій и Секретаремъ Общества П. А. Шиффъ. Предложенъ въ члены Общества Ѳеофилъ Эдуардовичъ Фризендорфъ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и И. В. Мещерскій).

Н. Я. Сонинъ сдѣлалъ сообщеніе: 1) «О рѣшеніи уравненія въ конечныхъ разностяхъ». 2) «Замѣтка о двухъ параграфахъ курса анализа Жордана».

Засѣданіе 18 декабря 1896 года.

По предложенію Ю. В. Сохоцкаго предсѣдателемъ собранія и членомъ Общества избранъ Матвѣй Александровичъ Тихомандрицкій. Въ члены Общества избранъ Ѳеофилъ Эдуардовичъ Фризендорфъ.

Предлагается въ члены Общества Василій Федоровичъ Гартцъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: «Объ уравненіи $x = a^x$».

По поводу этого сообщенія В. Ф. Гартцъ показалъ выводъ рядовъ для вычисленія $x^x = y$ и $a^x = y$.

Въ библіотеку Общества поступила книга В. В. Витковскаго «Міръ планетъ».

Засѣданіе 15 января 1897 года.

Предсѣдательствовалъ В. В. Преображенскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функціяхъ».

2) В. В. Преображенскій. «О разложеніи раціональной дроби».

Засѣданіе 19 февраля 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

Предсѣдатель напомнилъ собранію о потерѣ, которую понесла наука и Общество въ лицѣ скончавшагося, 18 января, нашего молодого талантливаго сочлена В. А. Маркова и предложилъ почтить память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ. Собраніе съ глубокой грустью почтило память такъ рано угасшаго В. А. Маркова вставаніемъ.

Точно также, по предложенію Предсѣдателя, Собраніе почтило вставаніемъ съ мѣстъ память скончавшагося знаменитаго Берлинскаго математика Вейерштрасса.

Предлагаются въ члены Общества:

1) Веніаминъ Федоровичъ Каганъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. А. Граве). 2) Александръ Александровичъ Ивановъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

3) Валентина Петровна Теплякова (предлагаютъ В. І. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

4) Моисей Романовичъ Креверъ (предлагаютъ Д. А. Граве и Д. Ф. Селивановъ).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ. «О теоріи аналитическихъ функцій Вейерштрасса».

2) Θ. Э. Фризендорфъ. ««О варіаціонномъ исчисленіи по Вейерштрассу».

3) А. Н. Крыловъ. «О способѣ Греффе для численнаго рѣшенія уравненій».

4) Н. Я. Сонинъ. «Объ одной системѣ линейныхъ уравненій».

Засѣданіе 19 марта 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Избраны въ члены Общества:

1) Веніаминъ Федоровичъ Каганъ,

2) Александръ Александровичъ Ивановъ,

3) Валентина Петровна Теплякова,

4) Моисей Романовичъ Креверъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. «~~Объ~~ интегрированіи уравненій гидродинамики въ случаѣ установившагося дважения».

2) Г. В. Колосовъ. «О движеніи волчка по гладкой плоскости».

Засѣданіе 23 апрѣля 1887 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) О. А. Баклундъ. «Интегрированіе дифференціальнаго уравненія для опредѣленія долготы въ движеніи одной группы малыхъ планетъ».

2) Д. А. Граве. «О работахъ Карла Стормера:

а) Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія:

$$m\,arctg\,\frac{1}{x} + n\,arctg\,\frac{1}{y} + p\,arctg\,\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$$

и б) Нѣкоторыя теоремы, касающіяся уравненія Пелля:

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1».$$

3) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функціяхъ».

Засѣданіе 24 сентября 1897 года.

По предложенію Д. К. Бобылева единогласно избраны въ члены Общества Владиміръ Николаевичъ Танненбергъ (Tannenberg, проф. Тулузскаго Университета) и Андрей Александровичъ Лярондъ (Laronde, ançien élève de l'Ecole Polytechnique), и предсѣдателемъ собранія В. Н. Танненбергъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) В. Н. Танненбергомъ. «Sur la recherche des integrales premières des équations de 1-er ordre».

2) Д. А. Граве. «Объ одной теоремѣ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ».

Засѣданіе 15 октября 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Было сдѣлано сообщеніе:

1) Н. Я. Сонинъ. «О рядѣ Ивана Бернулли».

Засѣданіе 19 ноября 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ Т. XIX вып. 4.

2) Извѣстія Технологическаго института Императора Николая I 1896 г. Т. XI.

3) E. von Fedorow. Versuch einer Theorie der Thermodynamik der Krystalle.

4) E. von Fedorow. Nachträgliche Studien üder Symmetrielehre.

5) М. А. Тихомандрицкій. Нѣсколько словъ объ эваристѣ Галуа.

6) Синцовъ. Къ вопросу о раціональныхъ интегралахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Казань. 1897 г.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «Объ уравненіяхъ 5-й степени».

2) Н. Я. Сонинъ. «О неравенствѣ П. Л. Чебышева».

Засѣданіе 17 декабря 1897 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Предсѣдатель сообщилъ собранію о потерѣ, которую понесла наука и наше Общество въ лицѣ скончавшагося его члена Ивана

Ивановича Рахманинова и предложилъ почтить память скончавшагося вставаніемъ. Собраніе исполнило предложеніе Предсѣдателя.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ. «Объ уравненіяхъ гидродинамики».

2) М. Р. Креверъ. «Къ общей теоріи алгебраическихъ уравненій».

Засѣданіе 21 января 1898 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Н. Б. Делоне. «О поверхностяхъ имѣющихъ одну только сторону и объ особенныхъ точкахъ плоскихъ кривыхъ». (Сообщилъ И. В. Мещерскій).

2) Ю. В. Сохоцкій. «Объ уравненіяхъ 4-й степени».

Засѣданіе 18 февраля 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Объ уравненіи: $y\frac{dy}{dx} - y = R(x)$».

2) Г. В. Колосовъ. «О шарѣ съ гироскопомъ Гесса внутри, катящемся по гладкой плоскости безъ скольженія».

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла:

$$\left.\begin{aligned} &Mx'' = V_x, My'' = V_y, = Mz'' = V_z \\ &Ap' = (B-C)qr + \Omega_\xi \\ &Bq' = (C-A)rq + \Omega_\eta \\ &Cr' = (A-B)pq + \Omega_\zeta \qquad A>B>C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(гдѣ x, y, z координаты центра инерціи C тѣла по отношенію къ неподвижнымъ осямъ ox, oy, oz, p, q, r проэкціи угловой скорости на главныя оси инерціи Ξ, Y, Z въ C, Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ проэкціи на послѣднія оси главнаго момента силъ и реакцій связей V_x, V_y, V_z проэкціи главнаго вектора этихъ силъ и реакцій на xo, yo, oz допускаютъ въ предположеніяхъ, что главный моментъ силъ и реакцій связей приложенныхъ къ тѣлу вокругъ перпендикуляра въ C къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида построеннаго въ этой точкѣ $= 0$ частное рѣшеніе (2) $A\alpha p + C\gamma r = 0$, гдѣ $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ и $A\alpha^2(B-C) = C\gamma^2(A-B)$.

Поворотивъ систему осей Ξ, Y, Z вокругъ оси Y такъ, чтобъ новая ось Z (Z) совпала съ вышеупомянутымъ перпендикуляромъ и обозначивъ проэкціи угловой скорости на новыя оси черезъ P, Q, R, а проэкціи глав. мом. силъ и реакцій черезъ Ωx, Ωy, Ωz получимъ вмѣсто 1-хъ двухъ уравненій системы (1) систему

$$\frac{dP}{dt} = RQ + \frac{\Omega x}{B}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -RP + \frac{\Omega y}{B};$$

а вмѣсто 3-го уравненія системы (1) примемъ уравненіе (2), которое послѣ нашего поворота приметъ видъ

$$R - \frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC} P = 0.$$

Эти результаты показываютъ что при рѣшеніи задачи о движеніи тѣла въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ можно замѣнить его матерьяльнымъ стержемъ, совпадающимъ съ осью Z-овъ.

Дальнѣйшее интегрированіе приводится къ уравненію вида Рикатти

$$\frac{d\tau}{dt} = a\tau^2 + b\tau + c$$

Приводятся какъ частные случаи—вращеніе по инерціи, вращеніе тяжелаго тѣла около неподвижной точки въ случаѣ Гесса, движеніе волчка Гесса и наконецъ задача о движеніи шара съ гироскопомъ по плоскости. Въ предположеніи что шаръ снабженъ кольцомъ проф. Н. Е. Жуковскаго задача сводится къ показательнымъ и тригонометрическимъ функціямъ, при отсутствіи кольца (случай проф. Д. К. Бобылева) къ эллиптическимъ. (Болѣе подробно см. Сообщенія Харьковскаго Мат. Об. за 1898 г.).

Засѣданіе 18 марта 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ. «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ».

2) Г. Миттагъ-Лефлеръ. «Объ однозначныхъ регулярныхъ функціяхъ».

Засѣданіе 22 апрѣля 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій «Объ эллиптическихъ функціяхъ».

2) Д. А. Граве. «Къ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ».

Засѣданіе 16 сентября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

По предложенію Предсѣдателя избранъ единогласно въ члены Общества Самуилъ Рафаиловичъ Дикштейнъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Д. А. Граве. «Объ особенныхъ линіяхъ, состоящихъ изъ прямолинейныхъ частей».

2) Д. Ф. Селивановъ. «Объ уравненіяхъ, корни которыхъ вещественны».

Засѣданіе 28 октября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Д. А. Граве. «Объ особенной линіи, состоящей изъ прямолинейныхъ частей. Демонстрированіе чертежа».

2) И. И. Ивановъ. «О вычисленіи предѣла одного отношенія».

3) И. И. Ивановъ. «Объ одномъ слѣдствіи теоремы Ролля».

4) П. А. Шиффъ. «О теоріи совокупностей».

Засѣданіе 18 ноября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Доложено письмо Кіевскаго Математическаго Общества объ изданіи библіографическаго указателя трудовъ русскихъ математиковъ въ теченіи настоящаго столѣтія.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Д. А. Граве. «О работѣ Гульдберга о дифференціальномъ уравненіи: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$».

2) Н. Я. Сонинъ. «О нѣкоторыхъ параграфахъ курса интегральнаго исчисленія Жордана».

3) П. А. Шиффъ. «О теоріи совокупностей».

Засѣданіе 16 декабря 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «Рѣшеніе уравненій 4-й степени съ приложеніями».

2) Д. А. Граве. «Объ одномъ вопросѣ Чебышева».

Засѣданіе 20 января 1899 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ. Б. М. Кояловичъ сдѣлалъ сообщеніе «О методѣ Біанки для нахожденія поверхностей съ постоянной кривизной».

Засѣданіе 17 февраля 1899 года.

Засѣданіе не состоялось по случаю безпорядковъ въ университетѣ.

Засѣданіе 17 марта 1899 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ. Предсѣдатель сообщилъ собранію объ утратѣ, которую понесло Общество въ лицѣ скончавшагося его члена С. К. Каминскаго.

Собраніе почтило память усопшаго вставаніемъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія.

1) Д. А. Граве. а) «Объ одномъ свойствѣ катанія плоскости по шару» и б) «О неявныхъ фрункціяхъ».

1) Н. М. Гюнтеръ. «Объ интегрированіи уравненій 2-го порядка въ гипергеометрическихъ фрункціяхъ».