

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universums & Dunkle Materie

Moritz Bubek

ZUSAMMENFASSUNG

Im Frühstadium des Universums zerstrahlen mit abnehmender Temperatur Teilchen mit ihren Antiteilchen. Die Zeitpunkte sind entscheidend für den weiteren Verlauf der Entwicklung. Aus heutigen Meßwerten können die Verhältnisse im Frühstadium zurückgerechnet werden.

Durch Dunkle Materie können einige Phänomene im Universum erklärt werden, für die eigentlich zu wenig baryonische Materie vorhanden ist.

1 Das frühe Universum

Die Zeit ungefähr vor der ersten 10^{-6} ten Sekunde wird hier nicht beschrieben, wir starten mit einer Temperatur $T \approx 10^{13}$ K, also ca. $1\mu s$ nach dem Urknall. Bis zu diesem Zeitpunkt sind alle Teilchen mit Massen größer der Neutron-Masse zerstrahlt. Sie können auch nicht mehr erzeugt werden, da um Teilchen aus Energie erzeugen zu können, mindestens ihr Massenäquivalent an Energie vorhanden sein muß. D.h die Temperatur darf nicht unter eine Schwelle (verschiedene Schwellen für verschiedene Teilchenarten) fallen.

$$k_B T = mc^2 \rightarrow T \geq \frac{mc^2}{k_B}$$

Zu Beginn der Hadronen-Ära, also der Zeit in der es noch heiß genug ist, um Hadronen zu erzeugen, besteht das Universum aus folgendem Substrat:

	Masse $[\frac{MeV}{c^2}]$	Spin	Beitrag zu x	Teilchenart
Hadronen:				
p^+, p^-, n, \bar{n}	≈ 939	1/2	1	Fermionen
π^+, π^-, π^0	≈ 139	0	1/2	Bosonen
Leptonen:				
μ^+, μ^-	105	1/2	1	Fermionen
e^+, e^-	0.51	1/2	1	Fermionen
ν_τ, ν_μ, ν_e	0	1/2	1/2	Fermionen
$\bar{\nu}_\tau, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e$	0	1/2	1/2	Fermionen
Photon:				
γ	0	1	1	Boson

Der Beitrag x gibt die Anzahl der strahlungsartigen Teilchen an und ist hier 13.5.

Das Tauon τ^\pm ($m_\tau \approx 1750$ MeV) ist zu diesem Zeitpunkt bereits zerstrahlt.

Im Laufe der Zeit dehnt sich das Universum immer mehr aus und wird dadurch kälter, weshalb dann bestimmte Teilchen nicht mehr erzeugt werden können. Aus den benötigten Temperaturen können nun die Zeitpunkte, die Energiedichte und die Teilchendichte der weiteren Ereignisse im Universum berechnet werden. Weiter kann man auch die Energie eines einzelnen Teilchens errechnen. Man berechnet diese jeweils im thermodynamischen Gleichgewicht, in dem gleichviele Teilchen einer Art entstehen wie vernichtet werden.

1.1 Wiederholung

1.1.1 Zeitgesetz

Um die Zeit, die seit dem Urknall vergangen ist, zu berechnen, muß man zwischen strahlungsdominiertem und materiedominiertem Universum unterscheiden.

$$\text{für } \rho_{\text{Strahlung}} > \rho_{\text{Materie}} : t = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} \quad (1.1)$$

$$\text{für } \rho_{\text{Materie}} > \rho_{\text{Strahlung}} : t = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_{\text{mat}}}} \quad (1.2)$$

mit $x = x_{\text{Bosonen}} + \frac{14}{16}x_{\text{Fermionen}} \approx x_{\text{Bosonen}} + x_{\text{Fermionen}}$.

1.1.2 Energie- und Anzahldichten

- relativistischer Bereich des Gases, d.h. die kinetische Energie eines Teilchens durch die Temperatur ist viel größer als seine Ruheenergie: $k_B T \gg m_0 c^2$:

– Fermionen:

Die 2 vor beiden Ausdrücken steht für die beiden Spineinstellungen der Teilchen. Bei Neutrinos, bei denen Teilchen und Antiteilchen als energetische Einheit auftreten, muß sie durch eine 1 ersetzt werden.

Anzahldichte:

$$n_F = 2 \frac{3}{2} \zeta(3) \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 = 2 \cdot 0,0913 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \quad (1.3)$$

Energiedichte:

$$u_F = 2 \frac{7}{16} \sigma T^4 \text{ mit } \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} \text{ (Stefan-Boltzmann-Konstante)} \quad (1.4)$$

mittlere Energie eines Fermions:

$$\bar{E} = \frac{u_F}{n_F} = \frac{7\pi^4}{12 \cdot 15 \zeta(3)} k_B T \approx 3,15 k_B T \quad (1.5)$$

– Bosonen

Anzahldichte:

$$n_B = 2 \zeta(3) \frac{2}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 = 2 \cdot 0,12 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \quad (1.6)$$

Energiedichte:

$$u_B = 2 \frac{1}{2} \sigma T^4 \quad (1.7)$$

mittlere Energie eines Bosons:

$$\bar{E} = \frac{u_B}{n_B} = \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} k_B T \approx 2,7 k_B T \quad (1.8)$$

- unrelativistischer Bereich des Gases, $k_B T \ll m_0 c^2$:

$$n_F = n_B = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(m k_B T)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{m c^2}{k_B T}} \quad (1.9)$$

1.1.3 thermodynamisches Gleichgewicht

Um im thermodynamischen Gleichgewicht zu sein, muß die mittlere Stoßzeit zwischen zwei Teilchen sehr viel kleiner als das Alter des Universums sein.

$$t_s = \frac{1}{\sigma \cdot n \cdot c} \ll t \quad (1.10)$$

mit t_s : Stoßzeit, σ : Wirkungsquerschnitt, n : Anzahldichte, t : Weltalter

1.2 Zerstrahlung der Protonen und Neutronen

$$\begin{aligned} n + \bar{n} &\Rightarrow \pi^0, \pi^+ + \pi^- \\ p + \bar{p} &\Rightarrow 2\gamma, \pi^0, \pi^+ + \pi^- \end{aligned}$$

Vor der Zerstrahlung sind noch $x = 13.5$ Strahlungsarten vorhanden, die zu dem berechneten Zeitpunkt auf $x = 13.5 - 4 = 9.5$ reduziert werden. Es bleiben noch folgende Teilchen übrig:

$$\pi^+, \pi^-, \pi^0, \mu^+, \mu^-, e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma$$

Daraus läßt sich mittels der oben genannten Formeln die Temperatur und der Zeitpunkt bestimmen.

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_p c^2}{k_B} = 1.1 \cdot 10^{13} K, \quad t = 0.63 \mu s \\ \bar{u} &= 9.7 \cdot 10^{36} \frac{J}{m^3}, \quad \bar{n} = 2.0 \cdot 10^{46} \frac{1}{m^3} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Durch die bei der Zerstrahlung freiwerdende Energie verlangsamt sich die Abkühlung des Universums. Es zerstrahlen aber nicht alle Protonen und Neutronen, da es durch eine Asymmetrie mehr Teilchen als Antiteilchen gibt.

1.3 Zerstrahlung der Pionen

Die Energie der Ruhemasse der Pionen wird erreicht und sie zerfallen zu:

$$\begin{aligned} \pi^- &\Rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^+ &\Rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^0 &\Rightarrow 2\gamma \end{aligned}$$

Es bleiben:

$$\mu^+, \mu^-, e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma$$

$$\begin{aligned} T &= 1.6 \cdot 10^{12} K, \quad t = 3 \cdot 10^{-5} s \\ \bar{u} &= 4.95 \cdot 10^{33} \frac{J}{m^3}, \quad \bar{n} = 8.2 \cdot 10^{42} \frac{1}{m^3} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$x = 9.5 \rightarrow x = 8$

Mit dem Zerstrahlen der Pionen endet die Hadronen-Ära.

1.4 Zerfall der Myonen

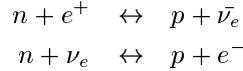
$$\begin{aligned} \mu^- &\Rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ \mu^+ &\Rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \end{aligned}$$

Es bleiben:

$$\begin{aligned}
 & e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma \\
 & T = 1.2 \cdot 10^{12} K, \quad t = 5.5 \cdot 10^{-5} s \\
 & \bar{u} = 1.37 \cdot 10^{33} \frac{J}{m^3}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.5 Einfrieren des $\frac{n_n}{n_p}$ -Verhältnisses

Von Anfang an werden Neutronen in Protonen und Protonen in Neutronen umgewandelt, doch mit abnehmender Temperatur verschiebt sich das Gleichgewicht immer mehr in Richtung der Protonen.



Mit Hilfe der Saha-Theorie kann man das Verhältnis der Teilchenzahldichten bestimmen. Für eine sehr große Zahl von e^+ , e^- und ν gilt für das Verhältnis von Neutronen zu Protonen:

$$a = \frac{n_n}{n_p} = \frac{g_n}{g_p} \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T}} \tag{1.14}$$

Um ein Proton in ein Neutron umzuwandeln (inverser β -Zerfall, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$), benötigen die Elektronen eine Energie von $2.5 \cdot m_e c^2$.

$\Rightarrow E \gg m_0 c^2$, d.h im relativistischen Bereich.

Der Zeitpunkt des Einfrierens ist die Zeit, in der ein Neutrino mit einem Neutron wechselwirkt, also die mittlere freie Weglänge $\lambda_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu}$ zurücklegt.

$$t_\nu = \frac{\lambda_\nu}{c} = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu c} \tag{1.15}$$

Diese Stoßzeit muß also kürzer als das Alter des Universums sein

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} \geq t_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu c} \tag{1.16}$$

mit

$$\text{Anzahldichte der Neutrinos: } n_\nu = 0.0913 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3$$

$$\text{Wirkungsquerschnitt der Neutrinos mit Nukleonen (temperaturabhängig !): } \sigma_\nu = 2 \cdot 10^{-62} T^2 \frac{cm^2}{K^2}$$

Daraus läßt sich die Temperatur des Universums zum Zeitpunkt des Einfrierens berechnen:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} & \geq \frac{(\hbar c)^3}{c \cdot 0.0913 (k_B T)^3 \cdot 2 \cdot 10^{-62} T^2} \\
 \Rightarrow T^3 & \geq \frac{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G x \sigma}}{0.0913} \left(\frac{\hbar}{k_B} \right)^3 \frac{2c}{2 \cdot 10^{-62}}
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Konstanten ergibt sich

$$T \geq 9.82 \cdot 10^9 \sqrt[6]{x} \text{ K} \tag{1.17}$$

Je nach dem, wieviele Strahlungsarten noch vorhanden sind, ist die Temperatur höher oder niedriger. Maximal stehen noch 6 Strahlungsarten zur Verfügung: $\underbrace{\nu_e, \bar{\nu}_e}_{\nu_e}, \underbrace{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu}_{\nu_\mu}, \underbrace{\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau}_{\nu_\tau}, e^-, e^+, \gamma$. Eingesetzt ergibt das:

$$x = 1 \rightarrow T = 9.8 \cdot 10^9 K, \quad t = 2.4 s \tag{1.18}$$

$$x = 6 \rightarrow T = 1.32 \cdot 10^{10} K, \quad t = 0.54 s \tag{1.19}$$

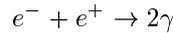
Daraus kann man nun das $\frac{n_n}{n_p}$ -Verhältnis berechnen:

$$x = 1 : \quad a = \frac{n_n}{n_p} = 0.216 \quad (1.20)$$

$$x = 6 : \quad a = \frac{n_n}{n_p} = 0.32 \quad (1.21)$$

wobei $x = 6$ voraussetzt, daß es drei Leptonenfamilien gibt.

1.6 Elektron-Positron-Zerstrahlung



$$T = \frac{m_e c^2}{k_B} = 5.9 \cdot 10^9 K \Rightarrow t = 2.7s$$

$$\bar{u} = 3.1 \cdot 10^{36} \frac{J}{m^3}$$

x geht von 6 auf 4 zurück, es bleiben: $\underbrace{\nu_e, \bar{\nu}_e}_{\nu_e}, \underbrace{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu}_{\nu_\mu}, \underbrace{\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau}_{\nu_\tau}, \gamma$

Da $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$, wird die komplette Energie der Elektronen in Photonen umgewandelt
 \Rightarrow die Temperatur der γ -Strahlung geht langsamer zurück als die der Neutrinos, ca. 3x höhere Anzahl-
 dichte von Photonen

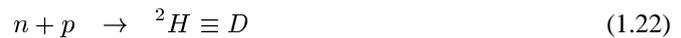
\rightarrow Energie eines Photons 3x höher als die Energie eines Neutrino-Antineutrino-Paars:

$$\underbrace{E_\gamma}_{3E_\nu} = \underbrace{E_{\nu_e} + E_{\nu_\mu} + E_{\nu_\tau}}_{E_\nu}$$

Da die Energie aller Neutrinos nur noch so groß ist wie die der Photonen, geht die effektive Zahl der Strahlungsarten auf $x = 2$ zurück, damit schwindet auch der Einfluss der Leptonen, das Ende der Leptonen-Ära.

1.7 Deuterium- und Heliumbildung

Nach weiterer deutlicher Abkühlung des Universums beginnt die Bildung von Kernen mit mehreren Nucleonen, also z.B. Deuterium oder Helium



Die Reaktion $p + p \rightarrow D + e^+ + \nu + 1.44MeV$ findet wegen zu geringer Dichte ($10^{-4} \frac{g}{cm^3}$) nicht statt, aber ${}^4He + 2p \rightarrow {}^6Li + e^+ + \nu_e$ durch inversen β -Zerfall.

Aus dem Verhältnis der Protonen und Neutronen, also a aus (1.14) und

$$N_{4He} = \frac{N_n}{2} \quad \text{je zwei Neutronen pro } {}^4He\text{-Kern} \quad (1.26)$$

$$N_H = N_p - N_n \quad \text{je Neutron ein Proton im } {}^4He \quad (1.27)$$

$$N = N_{4He} + N_H = \frac{N_n}{2} + N_p - N_n = N_p - \frac{N_n}{2} \quad \text{Gesamtzahl} \quad (1.28)$$

folgt das Verhältnis von Helium-4 zur Gesamtteilchenzahl:

$$\frac{N_{4He}}{N} = \frac{\frac{N_n}{2}}{N_p - \frac{N_n}{2}} = \frac{\frac{N_n}{2}}{\frac{2N_p - N_n}{2}} = \frac{N_n}{2N_p - N_n} = \frac{\frac{N_n}{N_p}}{2 - \frac{N_n}{N_p}} = \frac{\tilde{a}}{2 - \tilde{a}} \quad (1.29)$$

Da aber in der Zwischenzeit Neutronen mit einer Halbwertszeit von $t_{\frac{1}{2}} = 10.6$ Minuten zerfallen sind, ist das Verhältnis a nicht das zum Zeitpunkt des Einfrierens, sondern $\tilde{a} < a$.

$$n_n = n_{n_0} e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}} \ln 2}} \quad (1.30)$$

$$n_p = n_{p_0} + (n_{n_0} - n_n) \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \tilde{a} = \frac{n_n}{n_p} = \frac{n_{n_0} e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}} \ln 2}}}{n_{p_0} + (n_{n_0} - n_n)} = \frac{a e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}} \ln 2}}}{1 + a \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}} \ln 2}}\right)} \quad (1.32)$$

$$\frac{n_{He}}{n} = \frac{\tilde{a}}{2 - \tilde{a}} \quad (1.33)$$

1.8 Zeitpunkt des Deuterium- und Heliumbrennens

Der Zeitpunkt des Deuterium- bzw. Heliumbrennens wird festgelegt, als der Zeitpunkt, an dem sich das Verhältnis auf die rechte Seite verschiebt

$$n + p \leftrightarrow d + \gamma \quad (1.34)$$

Da die Entstehung von Deuterium allein über die starke Wechselwirkung abläuft, ist die Stoßzeit sehr kurz, da ein sehr großer Wirkungsquerschnitt vorhanden ist \rightarrow der Vorgang findet im thermodynamischen Gleichgewicht statt.

Aus der Saha-Theorie folgt das Dissoziationsgleichgewicht:

$$\frac{n_p n_n}{n_d} = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_n}{m_d} \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_p + m_n - m_d}{k_B T} c^2} \quad (1.35)$$

Die Masse des Deuteriums ist die Summe der Massen eines Protons und eines Neutrons abzüglich der Bindungsenergie

$$m_d = m_p + m_n - \frac{\chi_d}{c^2} \rightarrow \chi_d = 2.23 \text{ MeV} \quad (1.36)$$

damit

$$\frac{n_p n_n}{n_d} = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_n}{m_p + m_n - \frac{\chi_d}{c^2}} \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} \quad (1.37)$$

Da ${}^4\text{He}$ mit 26 MeV eine viel größere Bindungsenergie hat, verbrennt bei dieser Temperatur ${}^2\text{D}$ sofort weiter.

Der gesuchte Zeitpunkt, der Beginn des Heliumbrennens, ist durch $n_n = n_d$ festgelegt, also $\frac{n_n}{n_d} = 1$. Das Gleichgewicht verschiebt sich langsam von $n_d = 0$ nach $n_n = 0$, wobei dann die Hälfte der vor diesem Prozess vorhandenen Neutronen noch als freie Neutronen vorhanden sind.

$$n_n = \frac{1}{2} \bar{n}_n \rightarrow n_p = \bar{n}_p - \frac{1}{2} \bar{n}_n \quad (1.38)$$

\bar{n}_n und \bar{n}_p : Teilchendichte vor dem Prozess

n_n und n_p : Teilchendichte während des Heliumbrennens

$$\text{Wasserstoff ist dann in folgender Menge vorhanden: } n_H = \bar{n}_p - \bar{n}_n \quad (1.39)$$

$$\text{Helium ist dann in folgender Menge vorhanden: } n_{He} = \frac{\bar{n}_n}{2}$$

$$\Rightarrow n := n_p = n_H + n_{He}$$

Mit einigen Näherungen ($m_p \approx m_n$, $m_p \gg \frac{\chi_d}{c^2}$) vereinfacht sich der Ausdruck:

$$n_p = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_p k_B T}{2 m_p 2 \pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T}{4 \pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} \quad (1.40)$$

Diese Anzahldichten können aus den heutigen Verhältnissen über die Rotverschiebung des Universums zurückgerechnet werden. Wenn die Rotverschiebung $z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ ist, dann ist mit den heutigen Werten n_0 und T_0

$$n = n_0(1+z)^3 \text{ und } T = T_0(1+z) \quad (1.41)$$

mit guter Näherung

$$z \gg 1 \rightarrow n = n_0 z^3 \text{ und } T = T_0 z \quad (1.42)$$

$$n = n_0 z^3 = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0 z}{4 \pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0 z}} \quad (1.43)$$

$$n_0 = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0}{4 \pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0 z}} \quad (1.44)$$

Über die Dichte des heutigen Universums läßt sich n_0 herleiten:

$$\rho_0 = n_{H_0} \cdot m_H + n_{He_0} \cdot m_{He} \quad (1.45)$$

mit $m_{He} \approx 4m_H$

$$\text{und dem Verhältnis } \frac{n_{He}}{n_H} = \frac{\frac{n_n}{n_p}}{2 \frac{n_p - n_n}{n_p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_0 &= n_{H_0} \cdot \left(m_H + 4m_H \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \right) \\ &= n_{H_0} \cdot m_H \cdot \left(1 + 2 \frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) = n_{H_0} m_H \left(\frac{1 + \tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\rightarrow n_{H_0} = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1 - \tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \quad (1.48)$$

$$\rightarrow n_{He} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{m_H} \frac{\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \quad (1.49)$$

die heutige Anzahldichte:

$$n_0 = n_{H_0} + n_{He_0} = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1}{1 + \tilde{a}} \cdot \left(\frac{1}{2} \tilde{a} + 1 - \tilde{a} \right) = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1 - \frac{1}{2} \tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_0 &= \frac{n_0 m_H}{1 - \frac{\tilde{a}}{2}} (1 + \tilde{a}) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0}{4 \pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} m_H \frac{1 + \tilde{a}}{1 - \frac{\tilde{a}}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0 z}} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Durch Einsetzen verschiedener Werte für die Rotverschiebung z , können Werte ermittelt werden, die mit den heutigen Messungen (z.B. baryonische Dichte des Universums) übereinstimmen. Dabei geht man von der heutigen Temperatur $T_0 = 2.7K$ und der heutigen baryonischen Dichte $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-31} \frac{g}{cm^3}$ aus. Außerdem ist die Bindungsenergie $\chi_d = 2.23MeV$, $m_p \approx m_H$.

$z [10^8]$	2.60	2.70	2.75	2.80	3.0
$T [10^8 K]$	7.02	7.29	7.4	7.56	8.1
$t [s]$	331.4	307.3	296.2	285.7	248.9
$\Delta t [s]$	330.8	306.7	295.7	285.2	248.4
$\Delta t [\text{min}]$	5.5	5.1	4.9	4.7	4.1
\tilde{a}	0.174	0.180	0.182	0.185	0.194
$\frac{N_{He}}{N}$	0.095	0.099	0.100	0.102	0.107
$\rho_0 [10^{-31} \frac{g}{cm^3}]$	0.31	1.15	2.15	3.9	34.8

Für $z = 2.75 \cdot 10^8$ kommt die berechnete Dichte der heute beobachteten am nächsten.
 $\rightarrow T = 7.4 \cdot 10^8 K$

Das gebildete Deuterium verbrennt weiter



In diesem Frühstadium des Universums werden keine Elemente höherer Kernladungszahl gebildet. Die Dichte ist für die dafür notwendigen 3-fach Stöße schon zu gering geworden. Maximal wird jetzt noch ${}^8_4\text{Be}$ (${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$) erreicht, was sehr instabil ist und sofort wieder zerfällt. Die Elemente mit den Massenzahlen 5 und 8 sind ebenfalls instabil und können nicht entstehen. Die höheren Elemente werden erst wieder in den Sternen erbrütet, wo die Dichte hoch genug werden wird.

1.9 Heliummassenverhältnis

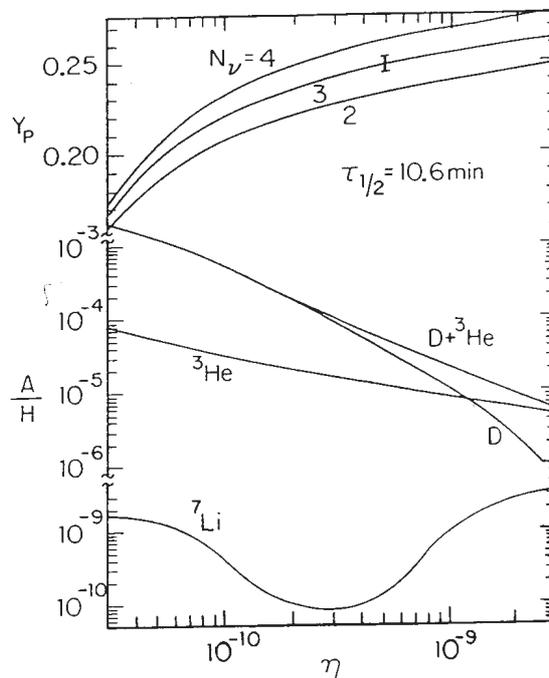


Abb. 1. Elementenmassenanteile in Abhängigkeit von der Anzahl der Baryonen pro Photon.

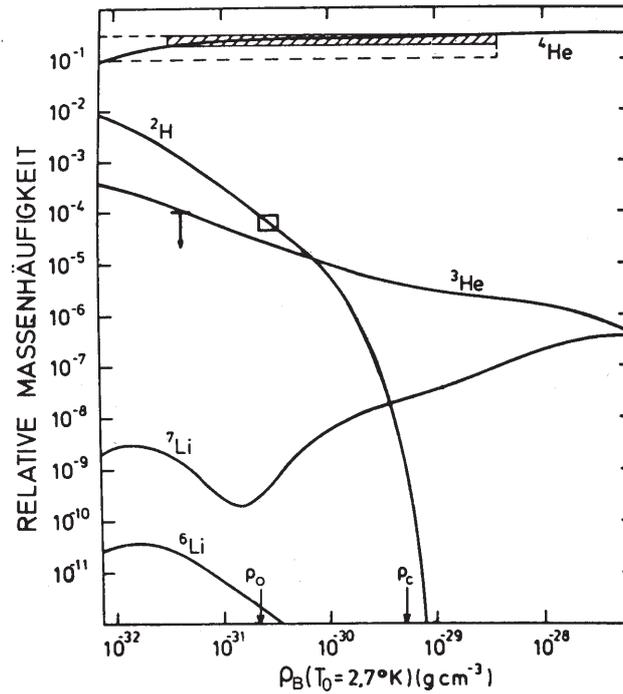


Abb. 2. Elementenmassenanteile in Abhängigkeit von der baryonischen Dichte ρ_B .

Aus den berechneten Werten kann man den Massenanteil von Helium errechnen

$$M_{He} = 4m_p \cdot n_{He}, \quad M = M_{He} + M_H = (4n_{He} + n_H)m_p$$

$$\frac{M_{He}}{M} = \frac{4n_{He}}{4n_{He} + n_H} = \frac{2\tilde{a}}{\tilde{a} + 1} = 0.308 \quad (1.55)$$

Mit der berechneten Helium-Häufigkeit und dem entsprechenden Meßwert kann die Zahl der Leptonenfamilien begrenzt werden, die im Zusammenhang mit der Anzahl der Strahlungsarten x steht. In Abbildung 1 wird das Heliummassenverhältnis durch drei je nach Teilchenfamilienanzahl verschiedene Kurven dargestellt.

1.10 Wasserstoffrekombination

Durch weitere Abkühlung des Universums wird es möglich, aus Protonen und Elektronen neutrale Atome zu bilden. Bis zu diesem Zeitpunkt werden die Photonen an den freien Elektronen gestreut (Thomson-Streuung), nun wird das Universum durchsichtig. Dadurch fällt auch der Strahlungsdruck, der bis dahin die Materie noch auseinander treibt, weg und es können Kondensationsprozesse starten, also z.B. Galaxienbildung.

Die Rekombination von Wasserstoff



wird durch die elektromagnetische Kraft bestimmt und läuft deshalb ebenfalls im thermodynamischen Gleichgewicht ab. Aus der Saha-Theorie folgt das Ionisationsgleichgewicht:

mit $n := n_p + n_H$; Bindungsenergie des H $\chi_e = 13.6 \text{ eV}$

$$\frac{n_e}{n} = \frac{n_e}{n_p + n_H} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{\chi_e}{k_B T}}}{2n} \left[\sqrt{1 + 4 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} n e^{\frac{\chi_e}{k_B T}} - 1} \right] \quad (1.57)$$

Es gibt nun zwei Grenzfälle:

1.

$$n \gg \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_B T}} \quad (1.58)$$

$$\Rightarrow \frac{n_e}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_B T}} \ll 1 \quad (1.59)$$

also eine beinahe vollständige Umwandlung in neutralen Wasserstoff

2.

$$n \ll \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_B T}} \quad (1.60)$$

$$\Rightarrow \frac{n_e}{n} = 1 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} n e^{\frac{\chi_e}{k_B T}} \approx 1 \quad (1.61)$$

alle Wasserstoffatome sind ionisiert (Protonen)

Der Zeitpunkt der Rekombination des Wasserstoffs wird dazwischen festgelegt:

$$\rightarrow n = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T}} \quad (1.62)$$

Mit $n_R = n_0 z_R^3$ und $T_R = T_0 z_R$ wird es mit den heutigen Meßwerten zusammengefügt

$$\rightarrow n_0 z_R^3 = \left(\frac{m_e k_B T_0 z_R}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \quad (1.63)$$

$$\rightarrow n_0 = \left(\frac{m_e k_B T_0}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} z_R^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \quad (1.64)$$

mit $n_0 = \frac{\rho_{0,H}}{m_H} = \frac{\rho_0 \cdot 0.64}{m_H}$ aus dem Massenverhältnis von Helium zu Wasserstoff

$$\rightarrow \rho_0 = \frac{n_0}{0.64} m_H = \left(\frac{m_e k_B T_0}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} z_R^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \cdot \frac{m_H}{0.64} \quad (1.65)$$

Abermals kann nur numerisch gelöst werden

z_R	1372	1374	1376	1378	1380
T_R [$10^3 K$]	3.70	3.71	3.72	3.72	3.73
ρ_h [$10^{-31} \frac{g}{cm^3}$]	1.79	1.91	2.02	2.15	2.28
ρ_R [$10^{-22} \frac{g}{cm^3}$]	4.64	4.94	5.27	5.62	5.98
ρ_{RH} [$10^{-22} \frac{g}{cm^3}$]	2.97	3.16	3.37	3.59	3.83
t_R [$10^{13} s$]	4.1	4.0	3.9	3.76	3.65
t_R [10^6 Jahre]	1.31	1.27	1.23	1.19	1.16

Der beste Wert für z ist 1376, da hier die heute gemessene Dichte am besten erreicht wird. Aus dem Schaubild 3 kann man noch eine zweite Lösung ablesen, bei $z = 2.69 \cdot 10^{15}$, allerdings liegt die Dichte in diesem Fall weit über der Kerndichte und somit ist diese Lösung irrelevant. An der sehr steilen Kurve erkennt man außerdem, daß die Rekombination sehr schnell erfolgt.

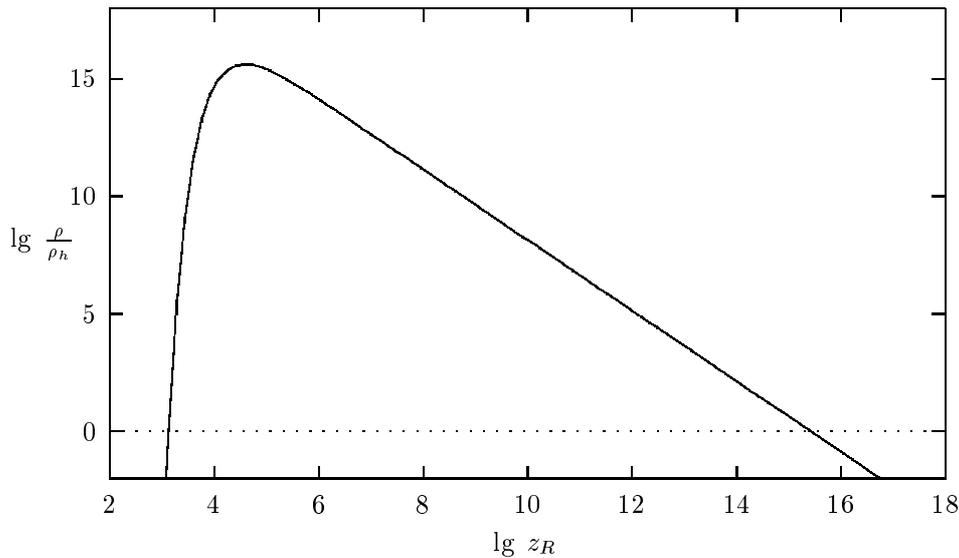


Abb. 3. Das Verhältnis $\frac{\rho}{\rho_h}$ abhängig von der Rotverschiebung z_R .

1.11 Übergang vom strahlungs- zum materiedominierten Universum

$$\rho_{Str} = \rho_{Mat} \Rightarrow x\sigma T^4 = \rho_{Mat}c^2 \quad (1.66)$$

$$\text{mit } T = T_0z \text{ und } \rho = \rho_0z^3 \Rightarrow x\sigma T_0^4 z^4 = \rho_0 z^3 c^2 \quad (1.67)$$

$$\Rightarrow z = \frac{\rho_0 c^2}{x\sigma T_0^4} = 224 \quad (1.68)$$

$$\rightarrow \text{Dichte zum Zeitpunkt des Übergangs} \quad \rho_b = 1.12 \cdot 10^7 \rho_0 = 2.24 \cdot 10^{-24} \frac{g}{cm^3} \quad (1.69)$$

$$\rightarrow T = 604K \quad (1.70)$$

$$\rightarrow t = 4.5 \cdot 10^{14}s \approx 1.4 \cdot 10^7 \text{ Jahre} \quad (1.71)$$

Damit endet das strahlungsdominierte Universum. Bei Anwesenheit von erheblicher Dunkelmaterie (kalt) verschiebt sich der Übergang gemäß (1.68) zu größeren z-Werten!

2 Dunkle Materie

2.1 Warum braucht man überhaupt dunkle Materie?

Solange die Materie noch dem Strahlungsdruck der elektromagnetischen Strahlung (und auch der der anderen Wechselwirkungen) ausgesetzt ist, kann sie sich nicht durch die Gravitation zusammenballen, erst nachdem das Universum durchsichtig wird, kann der Prozess der Galaxienbildung (Galaxienhaufen, Superhaufen, allgemein sehr große Strukturen im Universum) beginnen.

Da dies aber erst nach ca. $1.2 \cdot 10^6$ Jahren geschieht, ist es schon zu spät, um die heutigen Strukturen noch erzeugen zu können, da die Dichte schon zu weit abgesunken ist. Die Zusammenballung hätte schon viel früher beginnen müssen.

Dunkle Materie schafft hier Abhilfe, sie könnte durch ihre Anwesenheit schon in der frühesten Phase des Universums zur Strukturierung beigetragen haben, denn die dunkle Materie hat ihrer Definition nach keinerlei Wechselwirkungen mit der elektromagnetischen Strahlung. Sie ist also nicht dem Strahlungsdruck unterworfen und macht sich nur durch ihre Gravitation bemerkbar.

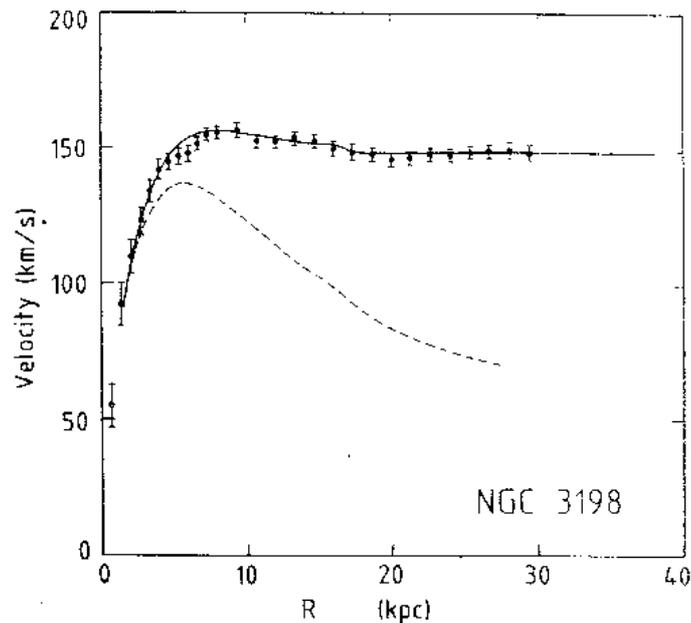


Abb. 4. Rotationsgeschwindigkeiten einer Spiralgalaxie in Abhängigkeit von ihrer Entfernung zu ihrem Zentrum.

Bei Messungen fällt auf, daß bei Spiralgalaxien die umlaufenden Sterne zum Teil deutlich von den bei der sichtbaren baryonischen Masse anzunehmenden Rotationsgeschwindigkeiten abweichen. Weit vom Zentrum entfernt bleiben die Geschwindigkeiten nahezu konstant, anstatt mit $\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$ abzufallen (Abb. 4).

Die Masse der Galaxien muß um ein Vielfaches größer sein, als leuchtende Materie zur Verfügung steht.

Große Galaxienhaufen haben zu wenig Masse, um die Galaxien in ihnen mit den gemessenen großen kinetischen Energien zu halten, die Galaxien müßten wegfliegen.

Vielen Messungen zur Folge ist das Universum flach, d.h. die Dichte des Universums ist genau die kritische Dichte, das Universum ist offen. Auch hierfür wird wesentlich mehr Masse benötigt, als durch die baryonische Masse vorhanden ist.

2.2 Was ist Dunkle Materie ?

2.2.1 Neutrinos mit geringer Masse

Neutrinos haben kaum Wechselwirkungen mit normaler Materie.

Da im Frühstadium des Universums ca. ebenso viele Neutrinos wie Photonen freigesetzt werden, reicht schon eine geringe Masse pro Neutrino ($\sim \frac{1}{100000} \dots \frac{1}{10000} \cdot m_e$) aus, um als Dunkle Materie fungieren zu können. Allerdings ist nach heutigen Messungen eine Neutrinomasse von mehr als 2 eV unwahrscheinlich.

2.2.2 Skalare Higgs-Teilchen

Durch das Higgs-Feld gibt es eine kontinuierliche gleiche Massenverteilung über das komplette Universum.

2.2.3 MOND-Theorie

Es gibt für einige Effekte im Universum noch einen anderen Erklärungsansatz: die MOND-Theorie (Modified Newtonian Dynamics). Diese modifiziert das zweite Newtonsche Gesetz, so daß bei sehr kleinen Beschleunigungen ($10^{-10} \frac{m}{s^2}$) die Kraft nicht $F = m \cdot a$, sondern eine deutlich kleinere Kraft ist, d.h. auch eine deutlich kleinere Masse reicht aus, um die erforderliche Kraft zu erzeugen (siehe Abbildung 5).

Für große Beschleunigungen geht MOND in die normale Newtonsche Dynamik über, ist also wie die Quantenmechanik oder die Relativitätstheorie eine Erweiterung der klassischen Mechanik für ein spezielles Gebiet extremer Werte (Beschleunigung).

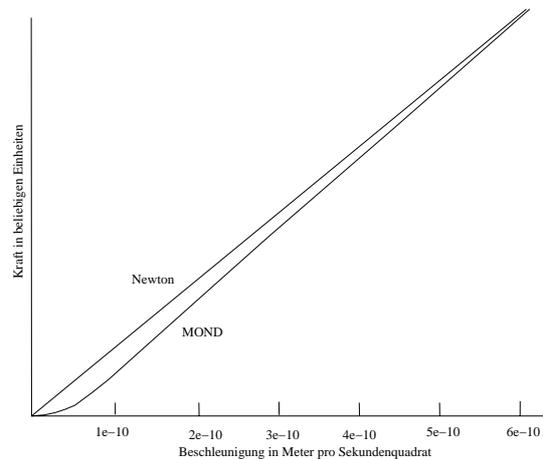


Abb. 5. MOND modifiziert Newtons 2. Gesetz.

Allerdings kann MOND nicht auf das komplette Universum angewendet werden, ebenso kann sie nicht auf relativistische Fälle, also andere Extreme (hohe Masse, hohe Geschwindigkeiten) angewendet werden. MOND kann z.B. keine Gravitationslinseneffekte erklären.

Außerdem reicht auch MOND alleine nicht aus, um die fehlende Masse komplett zu ersetzen, es wird weiterhin zusätzliche dunkle Materie benötigt.

2.3 Wie beobachtet man dunkle Materie?

- Da dunkle Materie per Definition nicht mit 'leuchtender' Materie sowie elektromagnetischer Strahlung wechselwirkt, ist es schwierig, Dunkle Materie zu entdecken.
- Dunkle Materie kann nur indirekt über ihre Gravitationswirkung gefunden werden.
- Lichtstrahlen werden durch große Massen gekrümmt, dadurch scheinen Sterne hinter der Sonne auf anderen Positionen zu stehen (z.B. Sonnenfinsternis 1919).
So können bei sehr großen Massen sogar Linseneffekte entstehen, die zu Doppelbildern (oder sogar Mehrfachbildern) führen.
- Über die Verzerrung einer Abbildung (z.B. eines Galaxienhaufens) kann dann auf die Verteilung der Masse und dadurch auch die Verteilung der Dunklen Materie geschlossen werden.
- Durch die Verzerrungen kann man auch die Verteilung der Masse übers ganze Universum beobachten, also auch Gebiete entdecken, in denen nichts ist (Voids).

Literatur

- [1] Heinz Dehnen; *Theorie der Sternentwicklung, Physikalische Kosmologie*, Vorlesungsmanuskript, unveröffentlicht, ca. 1984.
- [2] Lawrence M. Krauss; *Kosmologie und Teilchenphysik: Dunkle Materie im Universum*, Spektrum, Heidelberg, 1990, S. 32ff.
- [3] Peebles; *Physical Cosmology*, Princeton University Press.
- [4] Steven Weinberg; *Die ersten drei Minuten*, dtv, 1980.
- [5] L. Tarrasow; *Symmetrie, Symmetrie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1982.

