Асимптотическая геометрия метрических пространств

курс лекций, весна 2004

Часть I. Гиперболические пространства

1 лекция

1.1 Модели гиперболического пространства H^n

Для простоты считаем сначала, что $n = 2$.

1.1.1 Модель на единичной псевдосфере

Пусть $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма, заданная как

$$g(v) = x^2 + y^2 - z^2, \qquad v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим псевдосферу (точнее, ее верхнюю компоненту связности) $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z > 0\}$.

Лемма 1.1. *Индуцированная квадратичная форма $g : TA \to \mathbb{R}$ положительно определена.*

Доказательство. Каждый вектор $v \in TA$ есть вектор скорости $v = \{x', y', z'\}$ некоторой гладкой кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in A$. Поскольку $x^2(t) + y^2(t) - z^2(t) = -1$, имеем $xx' + yy' - zz' = 0$ и

$$z^2 z'^2 = (xx' + yy')^2 \le (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (z^2 - 1)(x'^2 + y'^2).$$

Следовательно,

$$x'^2 + y'^2 \le z^2(x'^2 + y'^2 - z'^2) = z^2 g(v).$$

Отсюда $g(v) \ge 0$ и $g(v) = 0$ влечет, что $x' = y' = 0$, а тем самым и $z' = 0$, т.е. $v = 0$. $\square$

Таким образом, (A, g) – двумерное риманово многообразие. Найдем его гауссову кривизну. С этой целью введем псевдосферические координаты на A

$$x = \sinh\chi\cos\phi,\ \ y = \sinh\chi\sin\phi,\ \ z = \cosh\chi,$$

где $0 \le \phi < 2\pi$, $\chi \ge 0$. Имеем $x^2 + y^2 - z^2 = \sinh^2\chi - \cosh^2\chi \equiv -1$ и

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi d\phi^2.$$

Поэтому гауссова кривизна метрики ds^2 равна

$$K = -\frac{(\sinh\chi)''}{\sinh\chi} \equiv -1.$$

Геодезические в A являются пересечениями псевдосферы A с двумерными подпространствами $E \subset \mathbb{R}^3$.

1.1.2 Модель Пуанкаре в единичном круге

Введем полярные координаты (r, ϕ), $0 \le r < 1$, $0 \le \phi < 2\pi$ в единичном круге $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi.$$

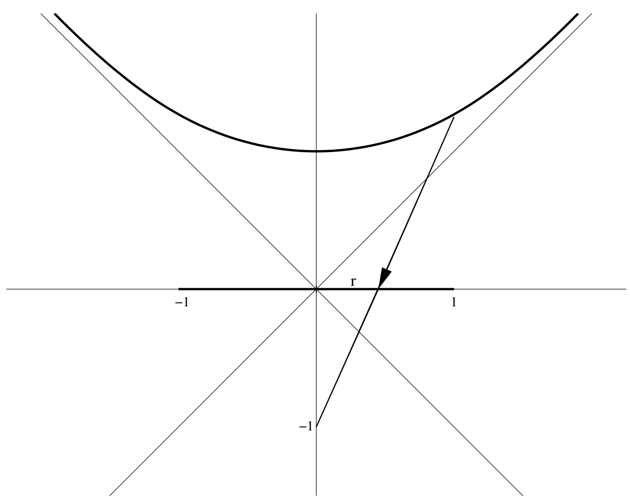

Рис. 1: Отображение $f : A \to B$

Отображение $f : A \to B$, $f(\chi, \phi) = (r, \phi)$, где

$$\frac{\sinh\chi}{r} = \frac{\cosh\chi + 1}{1},$$

является изоморфизмом двух моделей для гиперболической плоскости H^2. Найдем вид ее метрики ds^2 в модели B. Имеем

$$(\frac{\sinh\chi}{r}-1)^2=\cosh^2\chi=\sinh^2\chi+1$$

откуда

$$(\frac{1}{r^2}-1)\sinh\chi=\frac{2}{r}$$

и, следовательно,

$$\sinh\chi=\frac{2r}{1-r^2}.$$

С другой стороны,

$$r=\frac{\sinh\chi}{\cosh\chi+1},$$

поэтому

$$dr=\frac{\cosh\chi(\cosh\chi+1)-\sinh^2\chi}{(\cosh\chi+1)^2}d\chi=\frac{d\chi}{\cosh\chi+1}$$

и $d\chi=(\cosh\chi+1)dr=\frac{\sinh\chi}{r}dr=\frac{2}{1-r^2}dr$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= d\chi^2+\sinh^2\chi d\phi^2\\
&= \frac{4}{(1-r^2)^2}dr^2+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}d\phi^2\\
&= \frac{4}{(1-r^2)^2}(dr^2+r^2d\phi^2),
\end{aligned}$$

или

$$ds^2=\frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2+dy^2)$$

– метрика гиперболической плоскости в модели Пуанкаре в единичном круге.

1.1.3 Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости

Обозначим через $C=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ v>0\}$ верхнюю полуплоскость и рассмотрим отображение $g:B\to C$, заданное как

$$g(z)=w=\imath\frac{1-z}{1+z},$$

где $z=x+\imath y$. Это отображение задает изоморфизм моделей Пуанкаре гиперболической плоскости H^2 в единичном круге и в верхней полуплоскости. Найдем вид метрики ds^2 в модели C. Пусть $\overline{z}=x-\imath y$. Тогда

$x^2 + y^2 = z\overline{z}$, $dx^2 + dy^2 = dz \cdot d\overline{z}$ и поэтому

$$ds^2 = \frac{4dz \cdot d\overline{z}}{(1 - z\overline{z})^2}.$$

Поскольку

$$z = \frac{\imath - w}{\imath + w} \quad \text{и} \quad \overline{z} = \frac{\imath + \overline{w}}{\imath - \overline{w}},$$

имеем

$$dz = -\frac{2\imath dw}{(\imath + w)^2} \quad \text{и} \quad d\overline{z} = \frac{2\imath d\overline{w}}{(\imath - \overline{w})^2}.$$

Пользуясь тем, что

$$1 - z\overline{z} = \frac{2\imath(w - \overline{w})}{(\imath + w)(\imath - \overline{w})},$$

находим

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4}{(1 - z\overline{z})^2} dz \cdot d\overline{z} \\ &= -\frac{(\imath + w)^2(\imath - \overline{w})^2}{(w - \overline{w})^2} \frac{4dw \cdot d\overline{w}}{(\imath + w)^2(\imath - \overline{w})^2} \\ &= -\frac{4dw \cdot d\overline{w}}{(w - \overline{w})^2} = \frac{1}{v^2} dw \cdot d\overline{w}. \end{aligned}$$

Таким образом, метрика гиперболической плоскости в модели Пуанкаре верхней полуплоскости имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2).$$

1.1.4 Обобщения на произвольную размерность n

Квадратичная форма $g(v) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, $v = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ индуцирует на единичной псевдосфере $A^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной уравнением

$$g(v) = 1$$

и условием $x_0 > 0$, метрику постоянной секционной кривизны -1, которая в псевдосферических координатах $x_0 = \cosh\chi$, $x_i = \sinh\chi f_i(\omega)$, $i \geq 1$ имеет вид

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi d\omega^2,$$

где $d\omega^2$ – метрика единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Это дает псевдосферическую модель гиперболического пространства H^n.

Модель H^n в единичном шаре $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ задается метрикой

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\omega^2),$$

где (r, ω) – сферические координаты в $\mathbb{R}^n$. Изоморфизм моделей $f : A^n \to B^n$ задается той же формулой, что и для $n = 2$. Граница на бесконечности $\mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^n$ здесь хорошо видна – это граничная сфера шара B^n.

Модель H^n в верхнем полупространстве $C^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ задается метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1 + \dots + dx_n^2).$$

Здесь граница на бесконечности $\mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^n$ есть подпространство $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\}$, дополненное бесконечно удаленной точкой ∞.

1.2 Мёбиусовы преобразования

Граница на бесконечности $\mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^{n+1}$ гиперболического пространства H^{n+1} обладает канонической конформной структурой единичной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. При этом исключительно важным является соответствие между изометриями пространства H^{n+1} и мёбиусовыми преобразованиями граничной сферы S^n.

1.2.1 Инверсии и изометрии

Пусть $S_a(z) \subset \mathbb{R}^n$ – сфера радиуса a с центром в точке z. Инверсия $\phi : \mathbb{R}^n \setminus z \to \mathbb{R}^n \setminus z$ относительно $S_a(z)$ задается тем условием, что точка $\phi(x)$ лежит на луче $(zx\rangle$ с вершиной z, проходящим через x, и

$$|z - \phi(x)| \cdot |z - x| = a^2.$$

Если дополнить $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точкой ∞, $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \infty$, то ϕ продолжается до инволюции $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$, $\phi(z) = \infty$, $\phi(\infty) = z$. Заметим, что $\widehat{\mathbb{R}}^n$ можно отождествить со сферой $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с помощью стереографической проекции. Мы также определяем инверсию относительно гиперплоскости $E \subset \mathbb{R}^n$ как отражение относительно E (плоскость E можно рассматривать как сферу $S_\infty(\xi)$ бесконечного радиуса с центром в $\xi \in \mathrm{d}_\infty \mathbb{R}^n$).

Теорема 1.2. *Пусть $\mathrm{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – модель гиперболического пространства в верхнем полупространстве. Тогда ограничение инверсии ϕ относительно сферы $S_a(z) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ на H^{n+1}*

является изометрией пространства H^{n+1} *для любой точки* $z \in \mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^{n+1}$ *и любого радиуса* a.

Доказательство. Для $z = \infty$ это очевидно, поскольку такая инверсия является отражением относительно вертикальной гиперплоскости. Поэтому можно считать, что $z = (0, \dots, 0)$. Фиксируем $x \in \mathrm{H}^{n+1}$ и покажем, что дифференциал $d\phi : T_x \mathrm{H}^{n+1} \to T_{\phi(x)} \mathrm{H}^{n+1}$ является изометрией соответствующих касательных пространств.

Пусть $v \in T_x \mathrm{H}^{n+1}$ – радиальный вектор, т.е. касательный к лучу $\langle zx \rangle$, а $w \in T_x \mathrm{H}^{n+1}$ – тангенциальный, т.е. касательный к сфере с центром в z, проходящей через x. Обозначим через $v' = d\phi(v)$, $w' = d\phi(w) \in T_{\phi(x)} \mathrm{H}^{n+1}$ их образы. Тогда v' – радиальный вектор, а w' – тангенциальный. Для отношения евклидовых длин имеем из подобия

$$\frac{|w'|_e}{|w|_e} = \frac{|z - \phi(x)|}{|z - x|} = \frac{a^2}{|z - x|^2} =: \lambda.$$

Найдем $\frac{|v'|_e}{|v|_e}$, считая, что $|v|_e = 1$. Выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(|z - \phi(x + t)| - |z - \phi(x)|) &= \frac{a^2}{t}\left(\frac{1}{|z - (x + t)|} - \frac{1}{|z - x|}\right) \\ &= -\frac{a^2}{|z - x| \cdot |z - (x + t)|} \end{aligned}$$

стремится к $-\frac{a^2}{|z-x|^2} = -\lambda$ при $t \to 0$. Поэтому $\frac{|v'|_e}{|v|_e} = \lambda$. Отсюда следует, что $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ – конформное отображение, $|d\phi(u)|_e = \lambda |u|_e$ для всех касательных векторов в точке x.

Пусть $\omega \in (0, \pi/2]$ – угол между лучом $\langle zx \rangle$ и плоскостью $x_{n+1} = 0$. Тогда гиперболическая длина $|u|_h = \frac{1}{|z-x| \sin\omega} |u|_e$. Поэтому для образа u' вектора $u \in T_x \mathrm{H}^{n+1}$ при дифференциале $d\phi$ имеем

$$\begin{aligned} |u'|_h &= \frac{1}{|z - \phi(x)| \sin\omega} |u'|_e = \frac{|z - x|}{a^2 \sin\omega} |u'|_e \\ &= \frac{|z - x|}{a^2 \sin\omega} \lambda |u|_e = \frac{1}{|z - x| \sin\omega} |u|_e = |u|_h. \end{aligned}$$

Это доказывает, что инверсия ϕ является изометрией пространства H^{n+1}. □

Поскольку сфера $\widehat{\mathbb{R}}^n$ совпадает с границей на бесконечности $\mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^{n+1}$ пространства H^{n+1} в модели верхнего полупространства, любая инверсия сферы $\widehat{\mathbb{R}}^n$ продолжается до инверсии верхнего полупространства H^{n+1}, которая, согласно теореме 1.2, в гиперболической геометрии является отражением относительно соответствующей гиперплоскости. Напомним, что любая изометрия пространства H^{n+1} может быть представлена как композиция конечного числа таких отражений.

Мёбиусово преобразование сферы $\widehat{\mathbb{R}}^n$ является, по определению, композицией конечного числа инверсий. Поэтому из теоремы 1.2 немедленно получаем.

Следствие 1.3. *Любое мёбиусово преобразование $\widehat{\phi} : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ продолжается до изометрии $\phi : \mathrm{H}^{n+1} \to \mathrm{H}^{n+1}$. При этом любая изометрия пространства H^{n+1} может быть получена таким способом.*

2 лекция

2.1 Двойное отношение

Пусть даны 4 попарно различные точки a, b, c, $d \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Их двойным отношением называется число

$$[a,b,c,d] = \frac{|a-c| \cdot |b-d|}{|a-b| \cdot |c-d|}$$

(расстояния евклидовы). Если при этом одна из точек есть ∞, то сомножители, в которые она входит, сокращаются. Например,

$$[\infty,b,c,d] = \frac{|b-d|}{|c-d|}.$$

Теорема 2.1. *Любое мёбиусово преобразование сохраняет двойное отношение.*

Доказательство. Пусть точки a, b, c, $d \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ попарно различны, и пусть $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ – мёбиусово. Мы должны показать, что

$$[\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(d)] = [a,b,c,d].$$

Можно считать, что ϕ – инверсия относительно сферы $S_r(o)$. Треугольники oab и $o\phi(b)\phi(a)$ подобны, поскольку $|o-\phi(a)| = \frac{r^2}{|o-a|}$, $|o-\phi(b)| = \frac{r^2}{|o-b|}$ и поэтому

$$\frac{|o-\phi(a)|}{|o-\phi(b)|} = \frac{|o-b|}{|o-a|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|\phi(a)-\phi(b)|}{|a-b|} = \frac{|\phi(a)-o|}{|o-b|} = \frac{|\phi(b)-o|}{|o-a|}.$$

Тогда

$$|\phi(a)-\phi(c)| = |a-c|\frac{|\phi(a)-o|}{|o-c|}; \quad |\phi(b)-\phi(d)| = |b-d|\frac{|\phi(d)-o|}{|o-b|}$$

и

$$|\phi(a)-\phi(b)| = |a-b|\frac{|\phi(a)-o|}{|o-b|}; \quad |\phi(c)-\phi(d)| = |c-d|\frac{|\phi(d)-o|}{|o-c|}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
[\phi(a),\phi(b),\phi(c),\phi(d)] &= \frac{|\phi(a)-\phi(c)|\cdot|\phi(b)-\phi(d)|}{|\phi(a)-\phi(b)|\cdot|\phi(c)-\phi(d)|}\\
&= \frac{|a-c|\cdot|b-d|}{|a-b|\cdot|c-d|}\cdot\\
&\quad \frac{|\phi(a)-o|}{|o-c|}\frac{|o-b|}{|\phi(a)-o|}\frac{|\phi(d)-o|}{|o-b|}\frac{|o-c|}{|\phi(d)-o|}\\
&= [a,b,c,d].
\end{aligned}$$

Случай, когда одна из точек – ∞ оставляем в качестве упражнения. □

Теорема 2.2. *Допустим, что отображение $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ сохраняет двойное отношение. Тогда ϕ – мёбиусово.*

Доказательство. Можно считать, беря композицию с подходящим мёбиусовым преобразованием и пользуясь теоремой 2.1, что $\phi(\infty) = \infty$. Тогда $\phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Фиксируем точки c, $d \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим точки a, $b \in \mathbb{R}^n$ как переменные. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{|a-b|}{|c-d|} &= \frac{[\infty,b,c,d]}{[a,b,\infty,d]} = \frac{[\phi(\infty),\phi(b),\phi(c),\phi(d)]}{[\phi(a),\phi(b),\phi(\infty),\phi(d)]}\\
&= \frac{[\infty,\phi(b),\phi(c),\phi(d)]}{[\phi(a),\phi(b),\infty,\phi(d)]} = \frac{|\phi(a)-\phi(b)|}{|\phi(c)-\phi(d)|}.
\end{aligned}$$

Следовательно, отношение

$$\frac{|\phi(a)-\phi(b)|}{|a-b|} = \lambda = \frac{|\phi(c)-\phi(d)|}{|c-d|}$$

не зависит от точек a, b, и поэтому (исправленное) ϕ является подобием, а значит исходное отображение – мёбиусово. □

2.1.1 Двойное отношение в гиперболической геометрии

Рассмотрим сферу $\widehat{\mathbb{R}}^n$ как границу на бесконечности $\mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^{n+1}$. Любые две различные точки a, $b \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ соединимы единственной геодезической $ab \subset \mathrm{H}^{n+1}$.

Теорема 2.3. *Для попарно различных точек a, b, c, $d \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ пусть B, $C \in ad \subset \mathrm{H}^{n+1}$ – проекции точек b, c соответственно на геодезическую ad. Тогда для гиперболического расстояния между B и C имеем*

$$|B-C|_h = |\ln[a,b,c,d]|.$$

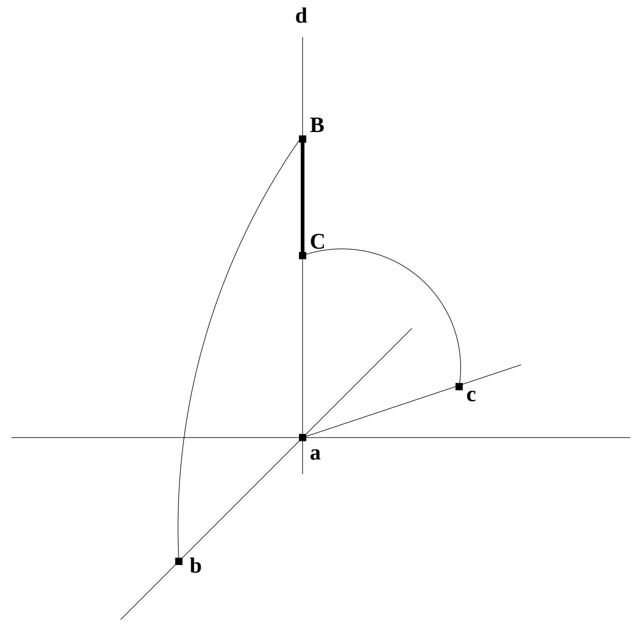

Рис. 2: Двойное отношение

Доказательство. Можно считать, что $d = \infty$. Тогда в модели верхнего полупространства точки B и C лежат на вертикальном луче $[a, d)$. Из вида геодезических в этой модели следует, что евклидовы расстояния $|a - B| = |a - b|$ и $|a - C| = |a - c|$. Поэтому

$$|B - C|_h = \left| \ln \frac{|a - c|}{|a - b|} \right| = |\ln[a, b, c, d]|.$$

$\square$

2.2 Определение и примеры гиперболических пространств

2.2.1 Произведение Громова

Пусть X – метрическое пространство. Фиксируем базисную точку $o \in X$ и для x, $x' \in X$ положим $(x|x')_o = \frac{1}{2}(|x - o| + |x' - o| - |x - x'|)$. Величина $(x|x')_o$ неотрицательна в силу неравенства треугольника и иногда называется произведением Громова точек x, x' относительно точки o. Геометрический смысл этого произведения проясняется следующей леммой. Метрическое пространство называется геодезическим, если любые две точки в нем можно соединить геодезической.

Лемма 2.4. *Пусть X – геодезическое пространство, xyz – треугольник в X. Существует единственный набор точек $u \in yz$, $v \in xz$, $w \in xy$ такой, что $|x-v| = |x-w|$, $|y-u| = |y-w|$, $|z-v| = |z-u|$.*

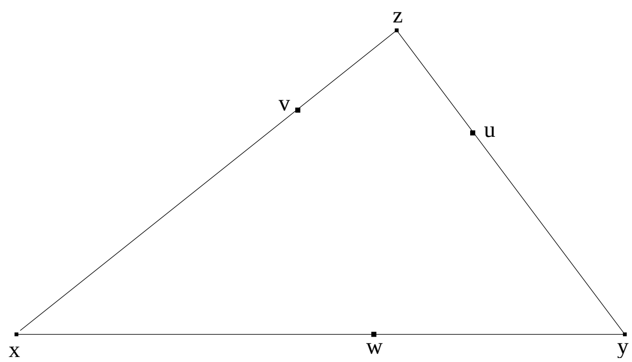

Рис. 3: Произведение Громова

Доказательство. Система уравнений

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & |x-y| \\ a & & & + & c & = & |x-z| \\ & & b & + & c & = & |y-z| \end{array}$$

имеет единственное решение, причем оно является положительным в силу неравенства треугольника. Тогда точки u, v, w однозначно определяются условиями $|x-v| = a$, $|y-w| = b$, $|z-u| = c$. $\square$

Заметим теперь, что

$$a = \frac{1}{2}(|x-y| + |x-z| - |y-z|) = (y|z)_x$$

и, аналогично, $b = (x|z)_y$, $c = (x|y)_z$.

Геодезическое метрическое пространство называется *δ-гиперболическим*, если для любого треугольника $xyz \subset X$ из того, что $y' \in xy$, $z' \in xz$ и $|x-y'| = |x-z'| \leq (y|z)_x$ следует, что $|y'-z'| \leq \delta$. В этом случае любая сторона любого треугольника лежит в δ-окрестности двух других сторон.

2.2.2 Формула параллельности для H^2

Легче всего получить эту формулу в модели верхней полуплоскости. Пусть $ab\xi$ – треугольник в H^2 с одной вершиной на бесконечности, $\xi \in$

$\partial_\infty X$, причем угол при вершине a – прямой. Пусть α – угол при вершине b. Помещая сторону ab на полуокружность $\{(u,v)\in C:\ u^2+v^2=1\}$ так, что точка a лежит на оси $\{u=0\}$, а точка $\xi=\infty$, получаем, что стороны $a\xi$, $b\xi$ являются вертикальными лучами в модели C. При этом луч $b\xi$ образует угол α с полуокружностью. Поэтому

$$|a-b|=\int_\alpha^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}=-\ln\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Лемма 2.5. *Любая точка $t\in xy$ любого треугольника $xyz\subset X$ удалена от объединения двух других его сторон $xz\cup yz$ не более чем на $\delta=-\ln\tan(\pi/8)=0.88137\ldots$.*

Доказательство. Худший случай – когда x, y, $z\in \mathrm{d}_\infty \mathrm{H}^2$, т.е. треугольник xyz – идеальный, а углы $\angle_t(x,z)=\angle_t(y,z)=\pi/2$. В этом случае $\mathrm{dist}(t,xz)=\mathrm{dist}(t,yz)=\delta$. □

Из этой леммы легко получаем, что H^n, $n\geq 2$, является δ-гиперболическим с $\delta=-\ln\tan(\pi/8)$. Дальнейшие примеры. Любое дерево является δ-гиперболическим с $\delta=0$. Любое полное, односвязное риманово многообразие с секционными кривизными $K\leq -1$ является δ-гиперболическим с $\delta=-\ln\tan(\pi/8)$ – это следует из теоремы сравнения для треугольников.

2.2.3 CAT(-1) **пространства**

Геодезическое пространство X называется CAT(-1) пространством, если его треугольники тоньше своих треугольников сравнения в H^2, т.е., если точки u, v лежат на сторонах треугольника $xyz\subset X$, то $|u-v|\leq|\overline{u}-\overline{v}|$, где $\overline{u}$, $\overline{v}$ – соответствующие точки на сторонах треугольника сравнения $\overline{xyz}\subset \mathrm{H}^2$. В частности, любое CAT(-1) пространство является δ-гиперболическим с $\delta=-\ln\tan(\pi/8)$.

Класс CAT(-1) пространств весьма широк. Он включает все полные односвязные римановы многообразия с секционными кривизнами ≤ -1, в частности, гиперболические пространства – вещественные, комплексные, кватернионные, а также плоскость Кэли, т.е., все симметрические пространства некомпактного типа и ранга 1. Кроме того, деревья и гиперболические билдинги являются CAT(-1) пространствами.

2.2.4 Гиперболические группы

Пусть Γ – конечно-порожденная группа, S – конечная симметричная система образующих группы Γ, т.е. $s\in S\Leftrightarrow s^{-1}\in S$. Для $\gamma\in\Gamma$ пусть

$|\gamma|$ – минимальная длина слов в алфавите S, представляющих γ. Тогда $|\gamma^{-1}| = |\gamma|$ и $|\gamma\gamma'| \leq |\gamma| + |\gamma'|$. Положим $|\gamma - \gamma'| = |\gamma - \gamma'|_S = |\gamma^{-1}\gamma'|$ – левоинвариантная метрика на Γ. Граф Кэли $G = G(\Gamma, S)$ имеет в качестве множества вершин множество элементов группы Γ, и две вершины соединены ребром $\Leftrightarrow |\gamma - \gamma'| = 1$. Например, если группа Γ – свободная, и S – свободная система образующих, то G – дерево.

Считая, что все ребра имеют длину 1, рассматриваем G как метрическое пространство. Группа Γ называется гиперболической, если некоторый ее граф Кэли G является гиперболическим пространством.

2.3 δ-неравенство

Лемма 2.6. *Допустим, что $y \in xy'$ и $z \in xz'$. Тогда $(y|z)_x \leq (y'|z')_x$.*

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} |x - z'| &= |x - z| + |z - z'| \\ |y - z'| &\leq |y - z| + |z - z'|, \end{aligned}$$

имеем $|x - z'| - |y - z'| \geq |x - z| - |y - z|$. Поэтому $(y|z)_x \leq (y|z')_x$. Аналогично, $(y|z')_x \leq (y'|z')_x$. □

Предложение 2.7. *Если геодезическое пространство X является δ-гиперболическим, то*

$$(x|y)_o \geq \min\{(x|z)_o, (y|z)_o\} - \delta$$

для любой базисной точки $o \in X$ и любых точек x, y, $z \in X$.

Доказательство. Пусть $t_0 = \min\{(x|z)_o, (y|z)_o\}$ и пусть $x' \in ox$, $y' \in oy$, $z' \in oz$, причем $|o - x'| = |o - y'| = |o - z'| = t_0$. Тогда $|x' - z'|$, $|y' - z'| \leq \delta$, поэтому $|x' - y'| \leq 2\delta$. С другой стороны, согласно лемме 2.6,

$$(x|y)_o \geq (x'|y')_o = t_0 - \frac{1}{2}|x' - y'| \geq t_0 - \delta.$$

□

Неравенство из Предложения 2.7 называется δ-неравенством.

Предложение 2.8. *Допустим, что в геодезическом пространстве X выполняется δ-неравенство для любой базисной точки и любых точек x, y, $z \in X$. Тогда X является 4δ-гиперболическим.*

Доказательство. Пусть точки $x' \in ox$, $y' \in oy$ на сторонах геодезического треугольника $oxy \subset X$ удовлетворяют условию $|o - x'| = |o - y'| = t \le (x|y)_o$. Достаточно показать, что тогда $|x' - y'| \le 4\delta$. Согласно δ-неравенству имеем

$$\begin{aligned}(x'|y')_o &\ge \min\{(x'|y)_o, t\} - \delta \\ &\ge \min\{\min\{(x|y)_o, t\} - \delta, t\} - \delta \\ &= t - 2\delta,\end{aligned}$$

откуда

$$|x' - y'| = 2t - 2(x'|y')_o \le 4\delta.$$

□

Наконец, покажем, что выполнение δ-неравенства для какой-либо базисной точки влечет 2δ-неравенство для любой другой базисной точки.

Лемма 2.9. *Допустим, что в метрическом пространстве X выполняется δ-неравенство для базисной точки x_0. Тогда для любой другой базисной точки $x \in X$ выполняется 2δ-неравенство.*

Доказательство. Покажем сначала, что выражение

$$A = (t|y) + (x|z) - \min\{(t|z) + (y|x), (x|t) + (y|z)\},$$

где произведение Громова берется относительно точки x_0, совпадает с $B = (t|y)_x - \min\{(t|z)_x, (z|y)_x\}$. Действительно, прямой подсчет показывает, что

$$A = -|t - y| - |x - z| - \min\{-|t - z| - |y - x|, -|t - x| - |y - z|\}.$$

Отсюда уже легко видно, что $A = B$. Остается проверить, что $A \ge -2\delta$. Считаем, например, что $(t|z)$ является максимальной величиной среди $(x|y)$, $(x|t)$, $(y|z)$, $(t|z)$. Тогда $(t|y) \ge (z|y) - \delta$ и $(x|z) \ge (t|x) - \delta$. Поэтому $(t|y) + (x|z) \ge (z|y) + (t|x) - 2\delta$, откуда $A \ge -2\delta$. Аналогично рассматриваются и другие случаи. □

3 лекция

3.1 Квази-изометрические отображения

Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств называется квази-изометрическим, если существуют такие $a \geq 1$, $b \geq 0$, что

$$\frac{1}{a}|x - x'| - b \leq |f(x) - f(x')| \leq a|x - x'| + b$$

для всех x, $x' \in X$. Если в добавок образ $f(X)$ является сетью в Y, т.е. расстояния точек из Y до $f(X)$ равномерно ограничены, то f называется квази-изометрией, а пространства X и Y – квази-изометричными.

Теорема 3.1 (Стабильность квази-геодезических). *Пусть X – δ-гиперболическое пространство, $a \geq 1$, $b \geq 0$. Существует такое $H = H(a, b, \delta) > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ образ каждого (a, b)-квази-изометрического отображения $f : \{1, \ldots, N\} \to X$ лежит в H-окрестности геодезической $c : [0, l] \to X$ с $c(0) = f(1)$, $c(l) = f(N)$.*

Лемма 3.2. *Допустим, что точки x, y являются ближайшими точками отрезка $xy \subset X$ к x', $y' \in X$ соответственно. Пусть $\sigma = \min |z - z'|$, где $z \in xy$, $z' \in x'y'$. Тогда*

$$|x' - y'| \geq |x - x'| + |y - y'| - 2\sigma.$$

Доказательство. Считаем, что $\sigma = |z - z'|$. Тогда $|x' - x| \leq |x' - z|$ и $|y' - y| \leq |y' - z|$ по условию. Поэтому

$$|x' - y'| \geq |x' - z| + |y' - z| - 2\sigma \geq |x' - x| + |y' - y| - 2\sigma.$$

□

Лемма 3.3. *Допустим, что точки x, y являются ближайшими точками отрезка $xy \subset X$ к x', $y' \in X$ соответственно и $|x - y| \geq 6\delta$. Тогда*

$$|x' - y'| \geq 2\delta.$$

Доказательство. Допустим, что $|x' - y'| < 2\delta$. Согласно лемме 2.4, найдутся точки $a \in xy$, $b \in x'y$, $c \in xx'$, для которых $|x - a| = |x - c| = (x'|y)_x$, $|y - a| = |y - b| = (x|x')_y$, $|x' - b| = |x' - c| = (x|y)_{x'}$. Тогда

$$|x - x'| \leq |a - x'| \leq |a - b| + |x' - b| \leq \delta + |x' - c| = \delta + |x - x'| - |x - a|,$$

поскольку X является δ-гиперболическим. Отсюда $|x-a| \le \delta$ и $|a-y| \ge 5\delta$. Теперь

$$\begin{array}{rcl} |y'-y| & \le & |a-b| + ||x'-b| + |x'-y'| \\ & < & 3\delta + |x'-y| - |b-y| \\ & \le & 5\delta + |y'-y| - |a-y| < |y'-y|, \end{array}$$

противоречие. □

Лемма 3.4. *Допустим, что точки x, y являются ближайшими точками отрезка $xy \subset X$ к x', $y' \in X$ соответственно и $|x-y| \ge 6\delta$. Тогда*

$$|x'-y'| \ge |x-x'| + |y-y'| - 4\delta.$$

Доказательство. В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что $\sigma \le 2\delta$, где σ – минимальное расстояние между сторонами xy и $x'y'$. Считаем, что $|x'-x|$, $|y'-y| > 2\delta$ (иначе нечего доказывать). Найдется точка $u \in x'y$ с $\operatorname{dist}(u, x'y') = \delta$. Так как отрезок $x'y$ лежит в δ-окрестности двух сторон $x'y' \cup y'y$, имеем $\operatorname{dist}(u, yy') < \delta$. Расстояние между точками отрезков xx' и yy' не меньше 2δ согласно лемме 3.3, и отрезок $x'y$ лежит в δ-окрестности двух сторон $x'x \cup xy$. Поэтому $\operatorname{dist}(u, xy) < \delta$ и, значит, $\sigma \le 2\delta$. □

Подмножество $B \subset \mathbb{N}$ будем называть *интервалом*, если оно вместе с любыми двумя элементами содержит все натуральные числа межде ними. Положим $A = \{1, \ldots, N\}$ и $A_r = \{m \in A : \operatorname{dist}(f(m), c) \ge r\}$. Максимальный интервал $B \subset A_r$ будем называть *компонентой связности* множества A_r. Если точка m – конец такой компоненты, то

$$r \le \operatorname{dist}(f(m), c) \le r + a + b. \tag{1}$$

Пусть $|B|$ есть число элементов компоненты связности $B \subset A_r$ и $H = \max_{m \in B} \operatorname{dist}(f(m), c)$. Поскольку f является (a,b)-квази-изометрическим, в силу (1) имеем

$$H \le r + a + b + a|B| + b.$$

Таким образом, подходящая оценка для $|B|$ ведет к доказательству теоремы.

Пусть $p : X \to c$ – метрическая проекция (определенная как-либо). Интервал $B \subset A_r$ назовем

- коротким, если $\operatorname{diam}(p \circ f(B)) \le 6\delta$;
- средним, если $\operatorname{diam}(p \circ f(B)) \le 10\delta$;

- длинным, если $\mathrm{diam}(p \circ f(B)) \geq 6\delta$.

Лемма 3.5. *Для любой короткой компоненты связности $B \subset A_r$ имеем*

$$|B| \leq 2a(r + a + b + 3\delta) + ab + 1.$$

Доказательство. Пусть m, n – концы компоненты B. Тогда $|B| = |m - n| + 1$, $|m - n| \leq a|f(m) - f(n)| + ab$ и

$$|f(m) - f(n)| \leq \mathrm{dist}(f(m), c) + \mathrm{diam}(p \circ f(B)) + \mathrm{dist}(c, f(n)) \leq 2(r + a + b + 3\delta).$$

Это дает требуемую оценку. □

Лемма 3.6. *Пусть m, n – концы длинного интервала $B \subset A_r$. Тогда*

$$|f(m) - f(n)| \geq \frac{1}{a^2}(2r - 4\delta - b) - b.$$

Доказательство. Найдутся точки $\overline{m}, \overline{n} \in B$, для которых $\mathrm{dist}(p \circ f(\overline{m}), p \circ f(\overline{n})) \geq 6\delta$. Тогда по лемме 3.4 имеем $|f(\overline{m}) - f(\overline{n})| \geq 2r - 4\delta$. Поэтому

$$\begin{aligned} |f(m) - f(n)| &\geq \frac{1}{a}|m - n| - b \geq \frac{1}{a}|\overline{m} - \overline{n}| - b \\ &\geq \frac{1}{a^2}(|f(\overline{m}) - f(\overline{n})| - b) - b \\ &\geq \frac{1}{a^2}(2r - 4\delta - b) - b. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.7. *При $2r > a + b + 4\delta$ и k, $k + 1 \in A_r$ имеем*

$$\mathrm{dist}(p \circ f(k), p \circ f(k+1)) < 6\delta.$$

Доказательство. Допустим, что это неверно. Тогда, в силу леммы 3.4, $|f(k) - f(k+1)| \geq 2r - 4\delta$. Далее $|f(k) - f(k+1)| \leq a + b$ согласно квази-изометричности f. Это противоречит выбору числа r. □

Следствие 3.8. *При $2r > a + b + 4\delta$ любая длинная компонента связности $B \subset A_r$ допускает разложение $B = \cup_1^k B_i$ на средние интервалы, любые два из которых имеют не более одного общего элемента, и любой интервал $(m, m+1) \subset B$ лежит в некотором B_i.*

Пусть $B = \cup_1^k B_i$ – разложение длинной компоненты связности $B \subset A_r$ на средние интервалы. Тогда

$$\mathrm{diam}(p \circ f(B)) \leq 10\delta k,$$

поскольку $\mathrm{diam}(p \circ f(B_i)) \leq 10\delta$.

Лемма 3.9. *Существует такое $r = r(a, b, \delta)$, $2r > a + b + 4\delta$, что для числа k элементов разложения $B = \cup_1^k B_i$ любой длинной компоненты связности на средние интервалы имеем $k \leq 2a^4$.*

Доказательство. Пусть m_i, n_i – концы интервала B_i, $S = \sum_1^k |f(m_i) - f(n_i)|$. Согласно лемме 3.6 имеем

$$S \geq \frac{2r - 4\delta - (1 + a^2)b}{a^2} k. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$S \leq \sum_1^k (a|m_i - n_i| + b) = a|m - n| + kb, \tag{3}$$

где m, n – концы компоненты B. Далее

$$\begin{aligned} |m - n| &\leq a|f(m) - f(n)| + ab \\ &\leq a(\operatorname{dist}(f(m), c) + \operatorname{diam}(p \circ f(B)) + \operatorname{dist}(c, f(n))) + ab \\ &\leq a(2(r + a + b) + 10\delta k) + ab. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (2) – (4) получаем

$$\frac{2r - 4\delta - (1 + a^2)b}{a^2} k \leq a^2(2(r + a + b) + 10\delta k) + a^2 b + kb.$$

Отсюда

$$(2r - 4\delta - 10a^4\delta - (1 + 2a^2)b)k \leq 2a^4(r + a + b) + a^4 b.$$

Следовательно,

$$k \leq \frac{2a^4 r + 2a^5 + 3a^4 b}{2r - 4\delta - 10a^4\delta - (1 + 2a^2)b} \leq 2a^4$$

при достаточно больших r (можно взять $r \geq a + \frac{5}{2}b + 4\delta + 10\delta a^4 + 2a^2 b$). □

Лемма 3.10. *Пусть $r = r(a, b, \delta)$ как в лемме 3.9. Тогда для любой длинной компоненты связности $B \subset A_r$ имеем $|B| \leq C$, где $C = C(a, b, \delta)$ зависит только от a, b, δ.*

Доказательство. Пусть m, n – концы B. Тогда по лемме 3.9 имеем

$$\begin{aligned} |B| = |m - n| + 1 &\leq a(2(r + a + b) + 10\delta k) + ab + 1 \\ &\leq a(2(r + a + b) + 20\delta a^4) + ab + 1. \end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 3.1. Выберем число $r = r(a, b, \delta)$ как в лемме 3.9. Тогда согласно леммам 3.5 и 3.10 число элементов любой компоненты связности $B \subset A_r$ ограничено сверху постоянной, зависящей только от a, b и δ. Утверждение теперь вытекает из оценки

$$H \leq r + a + b + a|B| + b.$$

$\square$

Отметим некоторые следствия из теоремы стабильности.

Следствие 3.11. *Пусть X – гиперболическое пространство. Тогда не существует квази-изометрического отображения $f : \mathbb{R}^2 \to X$ (гиперболическое пространство не содержит квази-плоскостей).* $\square$

Следствие 3.12. *Евклидово $\mathbb{R}^n$ не квази-изометрично гиперболическому H^m ни при каких n, $m \geq 2$.* $\square$

Следствие 3.13. *Если геодезическое пространство X квази-изометрично гиперболическому геодезическому пространству Y, то X также гиперболично.*

Следствие 3.14. *Свойство метрики слов d_S на конечно-порожденной группе Γ не зависит от выбора системы образующих S.* $\square$

4 лекция

4.1 Граница на бесконечности

Пусть X – геодезическое пространство. Геодезический луч в X есть любое изометрическое отображение $\gamma : [0, \infty) \to X$. Точка $\gamma(0) \in X$ называется вершиной луча γ. Лучи γ и γ' в X *асимптотичны,* если $|\gamma(t) - \gamma'(t)| \le C < \infty$ для всех $t \in [0, \infty)$. Ясно, что асимптотичность является отношением эквивалентности. Множество классов асимптотичных геодезических лучей обозначается как $\partial_\infty X$ и называется границей на бесконечности пространства X.

Фиксируем базисную точку $o \in X$. Обозначим через $\partial_o X$ множество классов асимптотичных лучей в X с общей вершиной o. Каждый класс $\xi \in \partial_o X$ можно также рассматривать как точку множества $\partial_\infty X$, поэтому имеется каноническое вложение $i_o : \partial_o X \hookrightarrow \partial_\infty X$.

Лемма 4.1. *Пусть X – геодезическое δ-гиперболическое пространство. Допустим, что лучи γ, γ' в X с общей вершиной o асимптотичны. Тогда $|\gamma(t) - \gamma'(t)| \le \delta$ для всех $t \ge 0$.*

Доказательство. Имеем

$$(\gamma(t)|\gamma'(t))_o = t - \frac{1}{2}|\gamma(t) - \gamma'(t)| \ge t - C$$

для всех $t \ge 0$. Поэтому для $t' \ge t + C$ выполняется $t \le t' - C \le (\gamma(t)|\gamma'(t))_o$. Поэтому $|\gamma(t) - \gamma'(t)| \le \delta$ согласно определению δ-гиперболичности. □

Метрическое пространство X называется *собственным,* если все его замкнутые шары конечного радиуса компактны. Отметим еще одно следствие теоремы стабильности квази-геодезических.

Следствие 4.2. *Любое квази-изометрическое отображение $F : X \to Y$ гиперболических пространств, где Y – собственное, индуцирует отображение $\partial_\infty F : \partial_\infty X \to \partial_\infty Y$ их границ на бесконечности.*

Доказательство. Для точки $\xi \in \partial_\infty X$ рассмотрим какой-нибудь геодезический луч $\gamma \in \xi$. Его образ $F(\gamma) \subset Y$ будет квази-геодезической. Пользуясь теоремой стабильности и тем, что Y – собственное, находим геодезический луч $\widetilde{\gamma} \subset Y$, H-окрестность которого содержит $F(\gamma)$. Здесь $H > 0$ зависит только от константы гиперболичности пространства Y и от параметров квази-изометричности отображения F. Луч $\widetilde{\gamma}$ представляет некоторую точку $\eta \in \partial_\infty Y$. Теперь полагаем $\partial_\infty F(\xi) = \eta$. Если $\gamma' \in \xi$ – какой-либо другой луч, то соответствующий луч $\widetilde{\gamma}' \subset Y$ асимптотичен лучу $\widetilde{\gamma}$ и поэтому $\widetilde{\gamma}' \in \eta$ – он представляет ту же точку $\eta \in \partial_\infty Y$. □

Следующая лемма позволяет для каждой точки $o \in X$ канонически отождествить множество $\partial_o X$ с границей на бесконечности $\partial_\infty X$.

Лемма 4.3. *Пусть X – собственное геодезическое δ-гиперболическое пространство. Тогда для каждого класса $\eta \in \partial_\infty X$ существует такой класс $\xi \in \partial_o X$, что $i_o(\xi) = \eta$. В частности, $i_o : \partial_o X \to \partial_\infty X$ – биекция.*

Доказательство. Рассмотрим геодезический луч $\gamma : [0, \infty) \to X$, предсталяющий класс η, $\gamma(\infty) = \eta$. Пусть $x_0 = \gamma(0)$. Для каждого $n \geq 1$ найдутся точки $x_n \in \gamma$, $y_n \in o\gamma(n)$, для которых $|\gamma(n) - x_n| = |\gamma(n) - y_n| = (x_0|o)_{\gamma(n)}$. Тогда $|x_0 - x_n|, |o - y_n| \leq |o - x_0|$. Поэтому для любого $t \geq |o - x_0|$ и для точки $z_n(t) \in o\gamma(n)$ с $|z_n(t) - \gamma(n)| = n - t = |\gamma(t) - \gamma(n)|$ имеем $|z_n(t) - \gamma(t)| \leq \delta$ для всех $n \geq t$.

Поскольку пространство X – собственное, отсюда легко получаем, что некоторая подпоследовательность последовательности геодезических отрезков $o\gamma(n)$ сходится к геодезическому лучу, представляющему $\xi \in \partial_o X$ с $i_o(\xi) = \eta$. $\square$

Для точек ξ, $\xi' \in \partial_o X$ положим

$$(\xi|\xi')_o = \sup \lim_{t \to \infty} (\gamma(t)|\gamma'(t))_o$$

(предел существует в силу монотонности функции $t \mapsto (\gamma(t)|\gamma'(t))_o$, см. лемма 2.6, супремум берется по всем лучам $\gamma \in \xi$, $\gamma' \in \xi'$). Ясно, что $(\xi|\eta)_o = \infty$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$.

Лемма 4.4. *Пусть X – собственное, геодезическое δ-гиперболическое пространство. Тогда для любых различных точек ξ, $\eta \in \partial_\infty X$ существует геодезическая $\gamma : \mathbb{R} \to X$ с $\gamma(-\infty) = \xi$, $\gamma(\infty) = \eta$.*

Доказательство. Фиксируем базисную точку $o \in X$ и, пользуясь леммой 4.3, считаем, что ξ, $\eta \in \partial_o X$. Положим $t_0 = (\xi|\eta)_o$. Для каждого $n \geq t_0$ геодезический отрезок $\xi(n)\eta(n)$ содержит точку, удаленную от точки o на расстояние $\leq t_0 + \delta$. Пользуясь опять тем, что пространство X – собственное, выделяем из $\xi(n)\eta(n)$ подпоследовательность, сходящуюся к искомой геодезической. $\square$

Метрика d на границе на бесконечности $\partial_\infty X$ гиперболического пространства X называется метрикой *видимости*, если существуют такие $o \in X$, $a > 1$ и положительные постоянные c_1, c_2, что

$$c_1 a^{-(\xi|\xi')_o} \leq d(\xi, \xi') \leq c_2 a^{-(\xi|\xi')_o}$$

для всех ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$. В этом случае будем говорить, что d – метрика видимости относительно базисной точки o и параметра a.

Фиксируем точку $o \in X$, $a > 1$ и рассмотрим функцию $\rho : \partial_\infty X \times \partial_\infty X \to \mathbb{R}$, $\rho(\xi, \xi') = a^{-(\xi|\xi')_o}$. Эта функция удовлетворяет условиям

(1) $\rho(\xi, \xi') \geq 0$ и $\rho(\xi, \xi') = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \xi'$;

(2) $\rho(\xi, \xi') = \rho(\xi', \xi)$;

(3) $\rho(\xi, \xi') \leq K \max\{\rho(\xi, \xi''), \rho(\xi'', \xi')\}$

для любых ξ, ξ', $\xi'' \in \partial_\infty X$, где $K = a^\delta$. Свойства (1) и (2) очевидны, а свойство (3) немедленно вытекает из δ-неравенства. Таким образом, ρ является квази-ультра-метрикой.

Предложение 4.5. *Пусть X – собственное, геодезическое, δ-гиперболическое пространство. Тогда для любой точки $o \in X$ существует такое $a_0 > 1$, что для любого $a \in (1, a_0]$ на $\partial_\infty X$ существует метрика видимости d относительно точки o и параметра a.*

Доказательство. Фиксируем $a > 1$. Достаточно показать, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция ρ^ε билипшицево эквивалентна метрике.

Для ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$ положим

$$d_\varepsilon(\xi, \xi') = \inf \sum_i \rho^\varepsilon(\xi_i, \xi'_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем последовательностям $\xi = \xi_0, \ldots, \xi_{k+1} = \xi'$ в $\partial_\infty X$. Ясно, что d_ε – метрика на $\partial_\infty X$, и что $d_\varepsilon \leq \rho^\varepsilon$. Утверждается, что $\rho^\varepsilon \leq K^{2\varepsilon} d_\varepsilon$ при $K^{2\varepsilon} \leq 2$.

Достаточно доказать, что

$$\rho^\varepsilon(\xi, \xi') \leq K^{2\varepsilon} \sum_i \rho^\varepsilon(\xi_i, \xi'_{i+1})$$

для всех последовательностей как выше. Будем это доказывать индукцией по длине последовательности. Для $k = 1$ имеем

$$\rho^\varepsilon(\xi, \xi') \leq K^\varepsilon \max\{\rho^\varepsilon(\xi, \xi''), \rho^\varepsilon(\xi, \xi'')\} \leq K^{2\varepsilon}(\rho^\varepsilon(\xi, \xi'') + \rho^\varepsilon(\xi'', \xi')).$$

Предположим, что неравенство верно для некоторого $k \geq 1$, и пусть $\xi = \xi_0, \ldots, \xi_{k+1}, \xi_{k+2} = \xi'$ – последовательность точек в $\partial_\infty X$. Обозначим эту последовательность как σ и положим $A = \sum \sigma$ – сумма последовательных величин $\rho^\varepsilon(\xi_i, \xi_{i+1})$ для σ. Представим $\sigma = \sigma' \cup \xi_p \cup \sigma''$ –

дизъюнктное объединение, где σ' наибольший начальный фрагмент σ, удовлетворяющий условию $\sum\sigma' \le A/2$. Тогда $\sum\sigma'' \le A/2$, и поэтому

$$\begin{aligned}\rho^\varepsilon(\xi,\xi') &\le K^\varepsilon \max\{\rho^\varepsilon(\xi,\xi_p),\rho^\varepsilon(\xi_p,\xi')\}\\ &\le K^\varepsilon \max\{\rho^\varepsilon(\xi,\xi_p),K^\varepsilon\rho^\varepsilon(\xi_p,\xi_{p+1}),K^\varepsilon\rho^\varepsilon(\xi_{p+1},\xi')\}\\ &\le K^\varepsilon \max\{K^{2\varepsilon}A/2,K^\varepsilon A,K^{3\varepsilon}A/2\} \le K^{2\varepsilon}A\end{aligned}$$

при условии $K^{2\varepsilon} \le 2$. Это завершает доказательство предложения. □

Рассмотрим эффект, к которому приводит замена базисной точки.

Предложение 4.6. *Метрики видимости d, d' на $\partial_\infty X$ относительно одного и того же параметра $a > 1$ и базисных точек o, o' соответственно являются билипшицево эквивалентными,*

$$c^{-1} \le \frac{d'}{d} \le c$$

для некоторой постоянной $c \ge 1$.

Доказательство. Это сразу вытекает из неравенств

$$c_1 a^{-(\xi|\xi')_o} \le d(\xi,\xi') \le c_2 a^{-(\xi|\xi')_o},$$

аналогичных неравенств для d' и того, что $|(\xi|\xi')_o - (\xi|\xi')_{o'}| \le |oo'|$ для всех ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$. □

Рассмотрим теперь эффект, к которому приводит замена параметра метрики видимости.

Предложение 4.7. *Метрики видимости d, d' на $\partial_\infty X$ относительно одной и той же базисной точки o и параметров a, $a' > 1$ соответственно являются эквивалентными по Гёльдеру, именно, существует такая постоянная $c \ge 1$, что*

$$\frac{1}{c}d^\alpha(\xi,\xi') \le d'(\xi,\xi') \le cd^\alpha(\xi,\xi')$$

для всех ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$, где $\alpha = \frac{\ln a'}{\ln a}$.

Доказательство. Это сразу следует из неравенств видимости для метрик d, d' и того, что $a' = a^\alpha$. □

Мы определяем топологию на $\partial_\infty X$ для гиперболического пространства X как метрическую топологию какой-либо метрики видимости на $\partial_\infty X$. Из предложение 4.6 и 4.7 следует, что эта топология не зависит от выбора метрики видимости.

Пример 4.8. Для $X = \mathbb{R}^n$ или H^n, $n \ge 2$, граница на бесконечности $\partial_\infty X$ гомеоморфна сфере S^{n-1}. Если X – бесконечное (однородное) дерево, то $\partial_\infty X$ – канторово множество.

4.2 Квази-симметричные отображения

Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств называется *квази-симметричным,* если оно не постоянно и существует гомеоморфизм $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такой, что из $|x-a| \le t|x-b|$ следует, что $|f(x)-f(a)| \le \eta(t)|f(x)-f(b)|$ для любых точек a, b, $x \in X$ и всех $t \ge 0$. В этом случае говорят, что f является *η-квази-симметричным.*

Квази-симметричное отображение, очевидно, является инъективным и непрерывным.

Лемма 4.9. *Если $f : X \to Y$ является η-квази-симметричным, то $f^{-1} : f(X) \to X$ является η'-квази-симметичным, где $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(t^{-1})$ для $t > 0$. Далее, если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ являются η_f- и η_g-квази-симметричными соответственно, то $g \circ f : X \to Z$ является $(\eta_g \circ \eta_f)$-квази-симметричным.*

Доказательство. Предположим, что $|x-a| \ge s|x-b|$. Тогда $|x-b| \le (1/s)|x-a|$, поэтому $|x'-b'| \le \eta(1/s)|x'-a'|$ и $|x'-a'| \ge (1/\eta(1/s))|x'-b'|$. Теперь, если $|x'-a'| < (1/\eta(1/s))|x'-b'|$, то $|x-a| < s|x-b|$, поскольку противоположное неравенство противоречило бы предыдущему вычислению. Положим $t = 1/\eta(1/s)$. Тогда $1/s = \eta^{-1}(1/t)$, и $s = 1/\eta^{-1}(1/t)$. По непрерывности неравенство $|x'-a'| \le t|x'-b'|$ влечет $|x-a| \le \eta'(t)|x-b|$, где $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$. Второе утверждение леммы очевидно. □

Пример 4.10. Для любых метрик видимости d, d' на границе на бесконечности $\partial_\infty X$ гиперболического пространства X тождественное отображение $\mathrm{id} : (\partial_\infty X, d) \to (\partial_\infty X, d')$ является квази-симметрическим.

Доказательство. Для любых ξ, η, $\zeta \in \partial_\infty X$ имеем согласно предложениям 4.6 и 4.7: если $d(\xi,\zeta) \le td(\eta,\zeta)$, то

$$\begin{aligned} d'(\xi,\zeta) &\le cd^\alpha(\xi,\zeta) \le ct^\alpha d^\alpha(\eta,\zeta) \\ &\le c^2 t^\alpha d'(\eta,\zeta). \end{aligned}$$

□

Лемма 4.11. *Пусть $F : X \to X'$ – квази-изометрическое отображение гиперболических пространств (предполагаем, что X' – собственное), $o \in X$, $o' = F(o)$. Тогда для индуцированного отображения $f = \partial_\infty F : \partial_\infty X \to \partial_\infty X'$ существуют такие постоянные $c \ge 1$, $d \ge 0$ что*

$$\frac{1}{c}(\xi|\eta)_o - d \le (\xi'|\eta')_{o'} \le c(\xi|\eta)_o + d$$

для всех ξ, $\eta \in \partial_\infty X$, где $\xi' = f(\xi)$, $\eta' = f(\eta)$.

Доказательство. Это легко следует из теоремы стабильности квази-геодезических. □

Предложение 4.12. *Для любого квази-изометрического отображения $F : X \to X'$ собственных гиперболических пространств индуцированное отображение $f : \partial_\infty X \to \partial_\infty X'$ является квази-симметрическим относительно любых метрик видимости на $\partial_\infty X$, $\partial_\infty X'$.*

Доказательство. Это легко вытекает из предложения 4.12 и определения метрик видимости. □

5 лекция

5.1 Гиперболическая аппроксимация

Пусть Z – компактное метрическое пространство. Его *гиперболическая аппроксимация* X определяется следующим образом. Фиксируем $a \geq 6$ и считаем, что $\operatorname{diam} Z = 1/2$ (нормируя при необходимости метрику). Для каждого $k \geq 0$ пусть $V_k \subset Z$ – максимальная r_k-разделенная сеть, где $r_k = a^{-k}$. С каждой точкой $v \in V_k$ ассоциируем шар $B(v) \subset Z$ радиуса $2r_k$ с центром в v. Рассмотрим множество $V = \cup_{k \geq 0} V_k$ как множество вершин графа X. Две вершины $v, v' \in V$ соединены ребром тогда и только тогда, когда они либо лежат на одном уровне и $B(v) \cap B(v') \neq \emptyset$, либо они лежат на соседних уровнях V_k, V_{k+1} и шар вершины старшего уровня содержится в шаре вершины младшего. Введем внутреннюю метрику на X, в которой любое ребро имеет длину 1.

Множество V_0 состоит из единственной вершины o, так как $\operatorname{diam} Z = \frac{1}{2}$. Эту вершину мы всегда рассматриваем как базисную.

Нашей ближайщей целью является показать, что X является геодезическим гиперболическим пространством, граница на бесконечности которого канонически отождествляется с Z, $\partial_\infty X = Z$.

Мы пользуемся обозначением $|v - v'|$ для расстояние между v, $v' \in V$ в X, и $d(v, v')$ для расстояние между ними в Z. Ребро $vv' \subset X$ будем называть *горизонтальным*, если его вершины лежат на одном уровне, v, $v' \in V_k$ для некоторого $k > 0$. Ребра, которые не являются горизонтальными, будем называть *радиальными.*

Лемма 5.1. *Для любой вершины $v \in V_{k+1}$, $k \geq 0$, найдется вершина $v' \in V_k$, соединенная с v радиальным ребром.*

Доказательство. Шары $\frac{1}{2}B(v)$, $v \in V_k$, покрывают Z, поскольку V_k – максимальное r_k-разделенное множество. Поскольку $a \geq 6 > 2$, для любой вершины $v \in V_{k+1}$ шар $B(v)$ содержится в шаре $B(v')$ для некоторой вершины $v' \in V_k$, и, следовательно, вершины v и v' соединены радиальным ребром. $\square$

Следствие 5.2. *Пространство X является локально компактным геодезическим пространством, причем множество V_k совпадает со сферой $S_k(o) = \partial B_k(o) \subset X$ для любого $k \geq 0$.*

Доказательство. Граф X является, очевидно, локально конечным. Поэтому X является локально компактным пространством. Из леммы 5.1 следует, что любая вершина $v \in V$ соединена с o радиальной кратчайшей. Отсюда и вытекает утверждение. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть $vv' \subset X$ – горизонтальное ребро. Тогда любые вершины w, w', соседние с v, v' соответственно и лежащие одним уровнем ниже, также соединены горизонтальным ребром.*

Доказательство. Шары $B(w)$, $B(w')$ пересекаются, так как содержат, соответственно, шары $B(v)$, $B(v')$, которые пересекаются. □

Отсюда легко вытекает

Следствие 5.4. *(1) Функция уровня на вершинах любой кратчайшей геодезической в X имеет не более одного (локально) минимального значения.*

(2) Для любой вершины $v \in V$ расстояние в X между вершинами одного уровня любых двух радиальных геодезических γ, $\gamma' \subset X$ между o и v не превосходит 1. □

Лемма 5.5. *Любые вершины v, $v' \in V$ можно соединить в X кратчайшей, которая не содержит никаких двух последовательных горизонтальных ребер.*

Доказательство. Пусть $vv'v'' \subset X$ – геодезическая ломаная с вершинами v, v', $v'' \in V_{k+1}$ для некоторого $k \geq 0$. Тогда найдется вершина $w \in V_k$, для которой расстояние в Z между точками v' и w не превосходит r_k, $d(v', w) \leq r_k$. Поэтому

$$d(w, v) \leq d(w, v') + d(v', v) \leq r_k + 4r_{k+1}.$$

Для любой точки $z \in B(v)$ имеем

$$d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w) \leq r_k + 6r_{k+1} \leq 2r_k,$$

поскольку $a \geq 6$. Поэтому $B(v) \subset B(w)$, и, аналогично, $B(v'') \subset B(w)$. Тогда ломаная $vwv'' \subset X$ соединяет те же точки v, v'', что и ломаная $vv'v''$ и имеет ту же длину. Утверждение леммы теперь очевидно. □

Лемма 5.6. *Любые вершины v, $v' \in V$ можно соединить в X кратчайшей, которая содержит не более одного горизонтального ребра. При этом, если такое ребро имеется, то оно лежит на нижнем уровне кратчайшей.*

Доказательство. Допустим, что кратчайшая $\gamma \subset X$ между v и v' имеет горизонтальное ребро aa' с вершинами a, $a' \in V_{k+1}$, которое не лежит на ее нижнем уровне. Согласно лемме 5.5 можно считать, ребро $ba \subset \gamma$, смежное с aa', является радиальным и $b \in V_k$. Найдется вершина $b' \in V_k$

(быть может совпадающая с b), для которой $d(b', a') \le r_k$. Тогда шар $B(b') \subset Z$ содержит шар $B(a')$ и, следовательно, вершины a', b' соединены радиальным ребром в X. При этом шары $B(b)$ и $B(b')$ пересекаются, поскольку содержат пересекающиеся шары $B(a)$ и $B(a')$ соответственно. Следовательно, вершины b, b' соединены в X горизонтальным ребром (быть может вырожденным). Таким образом, мы заменили фрагмент $baa' \subset \gamma$ фрагментом $bb'a'$ не большей длины и при этом понизили уровень горизонтального ребра, $b, b' \in V_k$. Утверждение леммы теперь легко вытекает из следствия 5.4 и леммы 5.5. $\square$

Предложение 5.7. *Пространство X является гиперболическим, точнее, для любых вершин v, v', $v'' \in V$ выполняется*

$$(v|v')_o \ge \min\{(v|v'')_o, (v'|v'')_o\} - \delta$$

с $\delta = 3/2$.

Доказательство. Согласно лемме 5.6 найдется кратчайшая между v и v', имеющая не более одного горизонтального ребра. Выберем точку $w \in V$, являющуюся вершиной наименьшего уровня этой кратчайшей, если горизонтальных ребер нет; в противном случае считаем, что вершина w имеет уровень на 1 меньший, чем вершины горизонтального ребра, и удалена по крайней мере от одной из них на расстояние в Z не более r_k, где k – уровень w. Тогда шар $B(w)$ содержит оба шара ассоциированных с вершинами горизонтального ребра, и поэтому вершина w соединена ребрами с этими вершинами. Соединим теперь w с точкой o радиальной геодезической. Этой дает геодезический треугольник $ovv' \subset X$ с радиальными кратчайшими $(ov)_w$ и $(ov')_w$. Ясно, что

$$|o - w| \le (v|v')_o \le |o - w| + \frac{1}{2}.$$

Проделаем такое же построение для пар вершин v', v'' и v, v'', обозначая через w' и w'' соответствующие вершины. Считаем, не ограничивая общности, что $|o-w| \le |o-w'| \le |o-w''|$, и положим $\sigma := |o-w'|-|o-w|$.

На радиальной геодезической $(ov)_{w''}$ отметим вершины w_1 и w_1', для которых $|o-w_1| = |o-w|$ и $|o-w_1'| = |o-w'|$. На радиальной геодезической $(ov')_{w'}$ отметим вершину w_2 с $|o-w_2| = |o-w|$. Вершина w_2 лежит также на радиальной геодезической $(ov'')_{w'}$. Из следствия 5.4(2) вытекает, что $|w_1 - w_2| \le 1$ и $|w_1' - w'| \le 1$.

Ломаная $vw''w_1'w'v'$ соединяет в X вершины v и v', и поэтому ее длина $L \ge |v - v'|$. С другой стороны,

$$L = |v - w''| + |w'' - w_1'| + |w_1' - w'| + |w' - v'|.$$

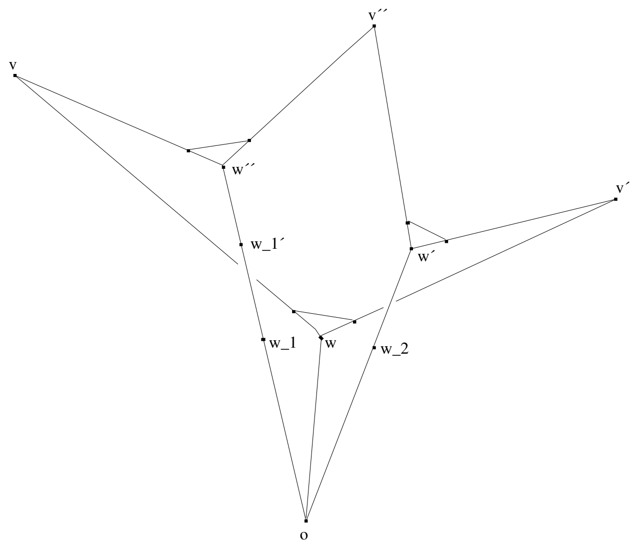

Рис. 4: δ-гиперболичность

Ломаная $vw''w_1w_2w'v'$ также соединяет вершины v и v', и ее длина

$$\begin{aligned} L' &= |v-w''| + |w''-w_1| + |w_1-w_2| + |w_2-w'| + |w'-v'| \\ &= L - |w_1'-w'| + 2\sigma + |w_1-w_2| \\ &\geq |v-v'| - |w_1'-w'| + 2\sigma + |w_1-w_2|. \end{aligned}$$

Далее, $L' = |v-w| + |w-v'| + |w_1-w_2| \leq |v-v'| + 1 + |w_1-w_2|$. Из последних двух неравенств получаем, что $2\sigma \leq |w_1'-w'| + 1 \leq 2$. Тогда

$$(v|v')_o \geq |o-w| = |o-w'| - \sigma \geq \min\{(v|v'')_o, (v'|v'')_o\} - \frac{1}{2} - \sigma,$$

откуда и следует утверждение предложения. $\square$

Лемма 5.8. *Для любой точки $z \in Z$ существует последовательность вершин $v_k \in V_k$, для которой v_kv_{k+1} – радиальное ребро для каждого $k \geq 0$, и $\cap_k B(v_k) = z$. Если $v_k' \in V_k$ – другая последовательность с такими же свойствами, то $|v_k'-v_k| \leq 1$.*

Доказательство. Так как V_k является максимальным r_k-разделенным множеством в Z, найдется $v_k \in V_k$ с $d(z, v_k) \leq r_k$. Для любой точки $z' \in B(v_{k+1})$ имеем

$$d(z', v_k) \leq d(z', v_{k+1}) + d(v_{k+1}, z) + d(z, v_k) \leq 2r_{k+1} + r_{k+1} + r_k \leq 2r_k,$$

поскольку $a \geq 6 > 3$. Поэтому $B(v_{k+1}) \subset B(v_k)$, и v_kv_{k+1} – радиальное ребро. Вложенные шары $\{B(v_k)\}$ имеет единственную общую точку z, так как их радиусы стремятся к нулю.

Допустим, что последовательность $v'_k \in V_k$ радиальна и $\cap_k B(v'_k) = z$. Тогда $z \in B(v_k) \cap B(v'_k)$ и поэтому $|v'_k - v_k| \leq 1$. $\square$

Лемма 5.9. *Допустим, что радиальные геодезические лучи*

$$\gamma = ov_1 \dots v_k \dots, \quad \gamma' = ov'_1 \dots v'_k \dots$$

в X представляют одну и ту же точку $\xi \in \partial_\infty X$. Тогда $|v_k - v'_k| \leq 2$ для любого $k \geq 2$.

Доказательство. Для каждого $k \geq 0$ построим геодезический треугольник $ov_k v'_k \subset X$ с радиальными геодезическими сторонами $(ov_k)_{w_k}$, $(ov'_k)_{w_k}$ как в доказательстве предложения 5.7.

Согласно условию $(v_k|v'_k)_o \to \infty$ при $k \to \infty$. Поэтому для любого $k \geq 0$ найдется такое $m > k$, что $|o - w_m| > |o - v_k| = |o - v'_k|$. Радиальные геодезические отрезки $ov_m \subset \gamma$ и $(ov_m)_{w_m}$ соединяют точки o и v_m, причем $v_k \in ov_m$. Поэтому, согласно следствию 5.4(2), вершина $v''_k \in ow_m$ с $|o - v''_k| = k = |o - v_k|$ удалена от v_k не более чем на 1. Аналогично, $|v''_k - v'_k| \leq 1$. Поэтому $|v_k - v'_k| \leq 2$. $\square$

Предложение 5.10. *Граница на бесконечности $\partial_\infty X$ канонически гомеоморфна пространству Z.*

Доказательство. Для любой точки $\xi \in \partial_\infty X$ имеется радиальный геодезический луч $\gamma = ov_1 \dots v_k \dots \subset X$, представляющий эту точку. Тогда шары $\{B(v_k)\}$ вложены и их пересечение состоит из единственной точки, $\cap_k B(v_k) = z \in Z$. Если $\gamma' = ov'_1 \dots v'_k \dots$ – другой луч, представляющий ξ, то, согласно лемме 5.9, для центров этих шаров имеем $d(v_k, v'_k) \leq 8r_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому $\cap_k B(v'_k) = z$. Это определяет отображение $\psi : \partial_\infty X \to Z$, $\psi(\xi) = z$.

Согласно лемме 5.8, определено отображение $\eta : Z \to \partial_\infty X$, являющееся левым и правым обратным к ψ, $\eta = \psi^{-1} : Z \to Z$. Поэтому оба отображения ψ, η биективны. Если $\xi' \to \xi$ в топологии пространства $\partial_\infty X$, то $(\xi|\xi')_o \to \infty$. Это означает, что радиус наименьшего шара в Z, содержащего точки $z = \psi(\xi)$ и $z' = \psi(\xi')$, стремится к нулю. Поэтому ψ непрерывно, а значит является гомеоморфизмом. $\square$

Лемма 5.11. *Для любых ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$ имеем*

$$c_1 a^{-(\xi|\xi')_o} \leq d(\psi(\xi), \psi(\xi')) \leq c_2 a^{-(\xi|\xi')_o},$$

где положительные постоянные c_1, c_2 зависят только от a, $c_1 = a^{-3}$, $c_2 = 4\sqrt{a}$.

Доказательство. Положим $z = \psi(\xi)$, $z' = \psi(\xi')$ и $\sigma = d(z, z')$. Как и в доказательстве предложения 5.7 находим бесконечный геодезический треугольник $\xi o \xi' \subset X$ с радиальными лучами $(o\xi)_w$ и $(o\xi')_w$, где

$$|o - w| \le (\xi|\xi')_o \le |o - w| + \frac{1}{2}.$$

Положим $k = |o - w|$. Тогда $d(z, z') \le 4r_k \le c_2 a^{-(\xi|\xi')_o}$ поскольку z, $z' \in B(w)$, и шар $B(w)$ имеет радиус $2r_k$. Это доказывает оценку сверху.

Для получения оценки снизу рассмотрим последовательность $v_m \in V_m$ с $d(z, v_m) \le r_m$. Тогда $d(v_m, z') \le r_m + \sigma \le 2r_m$ для всех $r_m \ge \sigma$, и, следовательно, $z' \in B(v_m) \cap B(w'_m)$, где $w'_m \in (o\xi')_w$ – вершина уровня m. Поэтому $|v_m - w'_m| \le 1$. С другой стороны, согласно лемме 5.9, $|v_m - w'_m| \ge |w_m - w'_m| - 2$, где $w_m \in (o\xi)_w$ – вершина уровня m. При $m \ge k + 3$ имеем $|w_m - w'_m| > 3$. Поэтому $\sigma > r_{k+3} \ge c_1 a^{-(\xi|\xi')_o}$. □

Теорема 5.12. *Пусть Y – собственное гиперболическое пространство с продолжимыми геодезическими. Тогда гиперболическая аппроксимация X границы на бесконечности $\partial_\infty Y$ с какой-либо метрикой видимости грубо подобна пространству Y.*

Доказательство. Считаем, что на $Z = \partial_\infty Y$ фиксирована метрика видимости ρ относительно точки $y_0 \in Y$ и параметра e^ε для достаточно малого $\varepsilon > 0$ (см. предложение 4.5). Выберем $h > 0$ так, чтобы метрика $d = h\rho$ имела диаметр $1/2$ и построим гиперболическую аппроксимацию пространства (Z, d), выбрав предварительно параметр $a \ge 6$. Далее, подвергнем пространство X гомотетии с коэффициентом $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\ln a$. Для пространства λX это дает

$$c_1 e^{-\varepsilon\lambda(\xi|\xi')_o} \le d(\xi, \xi') \le c_2 e^{-\varepsilon\lambda(\xi|\xi')_o}.$$

С другой стороны, для пространства Y имеем

$$\bar{c}_1 e^{-\varepsilon(\xi|\xi')_{y_0}} \le \rho(\xi, \xi') \le \bar{c}_2 e^{-\varepsilon(\xi|\xi')_{y_0}}.$$

Отсюда, вспоминая, что $d = h\rho$, получаем

$$|(\xi|\xi')_{y_0} - \lambda(\xi|\xi')_o| \le c \qquad (*)$$

для всех ξ, $\xi' \in Z$, где постоянная зависит только от ε, h и постоянных c_i, $\bar{c}_i$, $i = 1, 2$.

Определяем теперь $f : Y \to \lambda X$, выбирая для $y \in Y$ какой-либо луч $y_0\xi \subset Y$ с $y \in y_0\xi$ и точку $x = f(y) \in o\xi$, удаленную от o на расстояние $|y - y_0|$. Из свойств гиперболичности пространств Y и λX и оценки $(*)$ теперь легко следует, что f – грубая изометрия. □

6 лекция

6.1 Равномерно совершенные пространства

Метрическое пространство X называется *равномерно совершенным,* если найдется такая постоянная $\mu \in (0,1)$, что для любой точки $x \in X$ и любого $r > 0$, для которых множество $X \setminus B_r(x)$ непусто, выполняется $B_r(x) \setminus B_{\mu r}(x) \neq \emptyset$.

Лемма 6.1. *Свойство быть равномерно совершенным является квази-симметрическим инвариантом.*

Доказательство. Допустим, что отображение $f : X \to Y$ является η-квази-симметричным гомеоморфизмом, и что X – μ-равномерно совершенное пространство. Фиксируем такое $\varepsilon \in (0,1)$, что $\eta(\varepsilon) \leq 1$ и $\nu := 1/\eta(1/\varepsilon\mu) < 1$. Покажем, что тогда Y – ν-равномерно совершенно.

Пусть $y = f(x) \in Y$. Фиксируем $a_0 \in X$ с $r_0 = |x - a_0| > 0$. Тогда найдется точка $a_1 \in X$ с

$$\varepsilon\mu r_0 \leq |x - a_1| \leq \varepsilon r_0.$$

Рассуждая по индукции, находим последовательность $a_k \in X$ с

$$\varepsilon\mu|x - a_{k-1}| \leq |x - a_k| \leq \varepsilon|x - a_{k-1}|.$$

Для ее образа $b_k = f(a_k)$ имеем

$$\nu|y - b_{k-1}| \leq |y - b_k| \leq \eta(\varepsilon)|y - b_{k-1}|.$$

Это означает, что для любого $|y - b_k| \leq r < |y - b_{k-1}|$ кольцо $B_r(y) \setminus B_{\nu r}(y)$ содержит точку b_k, поскольку $|y - b_k| \geq \nu|y - b_{k-1}| > \nu r$. Это означает, что пространство Y является ν-равномерно совершенным. □

6.2 Продолжение квази-симметрии

Пусть $f : Z \to Z'$ – квази-симметрический гомеоморфизм равномерно совершенных метрических компактов. Тогда f следующим образом индуцирует отображение $F : X \to X'$ соответствующих гиперболических аппроксимаций пространств Z, Z'. Напомним, что X является графом с множеством вершин V и единичными ребрами. При этом $V = \cup_k V_k$, и вершины $v \in V_k$ являются шарами радиуса $2r_k = 2a^{-k}$, $a \geq 6$, центры которых (обозначаемые также v) образуют максимальное r_k-разделенное множество в Z.

Для каждой вершины $v \in V$ найдется вершина $F(v) \in V'$ наибольшего уровня, для которой шар $B(F(v)) \in V'$ содержит множество $f(B(v)) \subset Z'$. Это определяет отображение $F : V \to V'$. Заметим, что если $B(v') \supset f(B(v))$ для какой-либо вершины $v \in V'$ того же уровня, что и $F(v)$, то $|v' - F(v)| \leq 1$, поскольку шары $B(v')$ и $B(F(v))$ пересекаются.

Теорема 6.2. *Отображение $F : V \to V'$ определяет квази-изометрию $X \to X'$ с коэффициентами зависящими только от a, μ, η, которая индуцирует исходный гомеоморфизм $f : Z \to Z'$ границ на бесконечности.*

Доказательство распадается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 6.3. *Допустим, что для вершин $v \in V_k$, $v' \in V_m$ шары $B(v)$, $B(v')$ пересекаются. Тогда $|v - v'| \leq |m - k| + 1$.*

Доказательство. Это очевидно. □

Лемма 6.4. *Допустим, что вершины v_1, $v_2 \in V$ соединены ребром. Если точки $v_1' = F(v_1)$, $v_2' = F(v_2)$ лежат на одном уровне, то $|v_1' - v_2'| \leq 1$.*

Доказательство. Это очевидно. □

Лемма 6.5. *Допустим, что для вершины $v \in V$ вершина $F(v)$ лежит на k-том уровне, $F(v) \in V_k'$. Тогда для $D \geq \max\{d(z, f(v)) : z \in f(B(v))\}$ найдется такое $n \leq k$, что $r_{n+1} \leq D$.*

Доказательство. Найдем максимальное n с $r_n \geq D$. Тогда $r_{n+1} < D$ и найдется вершина $v' \in V_n'$ с $d(v', f(v)) \leq r_n$. Для любой точки $z \in f(B(v))$ имеем

$$d(z, v') \leq d(z, f(v)) + d(f(v), v') \leq D + r_n \leq 2r_n.$$

Поэтому шар $B(v')$ содержит множество $f(B(v))$. Следовательно, $k \geq n$. □

Лемма 6.6. *Для любых соседних вершин v_1, $v_2 \in V$ имеем*

$$\operatorname{diam} f(B(v_{i+1})) \leq 2\eta(2a/\mu) \operatorname{diam} f(B(v_i))$$

для $i = 1, 2$, где $i + 1$ берется по $\mod 2$.

Доказательство. Считаем, что уровень точки v_1 не больше уровня точки v_2, который равен $k + 1$, т.е. $v_2 \in V_{k+1}$, $v_1 \in V_k \cup V_{k+1}$.

Найдутся точки $z_i \in B(v_i)$ с $d(z_i, v_i) \geq 2\mu r_{k+1}$, $i = 1, 2$. Тогда для $z \in B(v_{i+1})$ имеем

$$d(z, v_i) \leq d(z, v_{i+1}) + d(v_{i+1}, v_i) \leq 4r_k,$$

поскольку если v_1, v_2 лежат на одном уровне, то средний член этого неравенства $\leq 2r_{k+1}+4r_{k+1} < 4r_k$, а если они на разных уровнях, средний член этого неравенства $\leq 2r_k + 2r_k \leq 4r_k$. Поэтому $d(z, v_i) \leq \frac{2a}{\mu} d(z_i, v_i)$. Следовательно

$$d(f(z), f(v_i)) \leq \eta(2a/\mu) d(f(z_i), f(v_i)) \leq \eta(2a/\mu) \operatorname{diam} f(B(v_i)),$$

и $\operatorname{diam} f(B(v_{i+1})) \leq 2\eta(2a/\mu) \operatorname{diam} f(B(v_i))$. □

Предложение 6.7. *Пусть $v_i \in V$, $v_i' = F(v_i) \in V'$, $i = 1, 2$, и $|v_1 - v_2| = 1$. Тогда $|v_1' - v_2'| \leq M_f$, где $M_f = \log_a (8a^2\eta(2a/\mu))$.*

Доказательство. Считаем, что $v_1' \in V_k'$, $v_2' \in V_m'$. Если $k = m$, то $|v_1' - v_2'| \leq 1$ по лемме 6.4. Поэтому считаем для определенности, что $k < m$.

Согласно лемме 6.5 найдется $n \leq k$ с $r_{n+1} \leq \operatorname{diam} f(B(v_1))$. Шар $B(v_2')$ имеет радиус $2r_m$ и содержит множество $f(B(v_2))$. Поэтому, пользуясь леммой 6.6, получаем

$$4r_m \geq \operatorname{diam} f(B(v_2)) \geq \frac{1}{2\eta(2a/\mu)} \operatorname{diam} f(B(v_1)) \geq \frac{1}{2\eta(2a/\mu)} r_{n+1}.$$

Следовательно, $r_n/r_m \leq 8a\eta(2a/\mu)$ и

$$|m - k| \leq m - n \leq \log_a (8a\eta(2a/\mu)).$$

По лемме 6.3, $|v_1' - v_2'| \leq |m - k| + 1 \leq M_f$. □

Рассмотрим обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : Z' \to Z$. Он также индуцирует отображение $G : V' \to V$. Наша ближайшая цель – показать, что композиция $G \circ F : V \to V$ находится на конечном расстоянии от тождественного отображения,

$$|v - G \circ F(v)| \leq C < \infty$$

для всех $v \in V$.

Лемма 6.8. *Если $v \in V_k$, $v' \in V_m$ и $B(v) \subset B(v')$, то $m - k \leq \log_a \frac{2}{\mu}$.*

Доказательство. Найдется $z \in B(v)$ с $d(z, v) \geq 2\mu r_k$. Имеем $d(v, v') \leq 2r_m$, поскольку $v \in B(v')$. Точка z лежит также в шаре $B(v')$. Поэтому

$$2r_m \geq d(z, v') \geq d(z, v) - d(v, v') \geq 2\mu r_k - 2r_m.$$

Отсюда $\mu r_k \leq 2r_m$ и $m - k \leq \log_a \frac{2}{\mu}$. □

Лемма 6.9. *Пусть $v \in V_k$, $G \circ F(v) \in V_m$. Тогда $m - k \le \log_a \frac{2}{\mu}$.*

Доказательство. Положим $v' = F(v)$. Шар $B(v')$ содержит множество $f(B(v))$. Поэтому $g(B(v')) \supset B(v)$ и, следовательно, $B(G \circ F(v)) \supset B(v)$. Утверждение теперь следует из леммы 6.8. $\square$

Предложение 6.10. *Для всех $v \in V$ имеем*

$$|v - G \circ F(v)| \le M_{gf},$$

где $M_{gf} = 1 + \max\{\log_a \frac{2}{\mu}, \log_a(2a\eta'(4a))\}$, $\eta' = \eta^{-1}$.

Доказательство. Фиксируем $v \in V_k$ и пусть $v' = F(v) \in V'_p$, $G \circ F(v) \in V_m$. По лемме 6.9 имеем $m - k \le \log_a \frac{2}{\mu}$.

Оценим теперь сверху величину $k - m$. По лемме 6.5 найдется $n \le p$ с $r_{n+1} \le D = \max\{d(z, f(v) : z \in f(B(v))\}$. Тогда для $z' \in f(B(v))$ с $d(z', f(v)) = D$ и любой точки $z'' \in B(v')$ имеем

$$d(z'', f(v)) \le 4r_p \le 4r_n \le 4aD = 4ad(z', f(v)).$$

Следовательно

$$d(g(z''), v) \le \eta'(4a) d(g(z'), v) \le \eta'(4a) 2r_k$$

и $\max\{d(z, v) : z \in g(B(v'))\} \le 2\eta'(4a) r_k$. По лемме 6.5 найдется $q \le m$ с $r_{q+1} \le 2\eta'(4a) r_k$. Тогда $r_q/r_k \le 2a\eta'(4a)$ и $k - m \le k - q \le \log_a(2a\eta'(4a))$.

Таким образом,

$$|k - m| \le \max\{\log_a(2/\mu), \log_a(2a\eta'(4a))\}.$$

Поскольку $B(v) \subset B(G \circ F(v))$, мы можем применить лемму 6.3, которая дает $|v - G \circ F(v)| \le |k - m| + 1 \le M_{gf}$. $\square$

6.2.1 Доказательство теоремы 6.2

Из предложения 6.7 немедленно следует, что отображения $F : V \to V'$, $G : V' \to V$ являются липшицевыми, $|F(v_1) - F(v_2)| \le M_f \cdot |v_1 - v_2|$, $|G(v'_1) - G(v'_2)| \le M_g \cdot |v'_1 - v'_2|$ для любых $v_i \in V$, $v'_i \in V'$, $i = 1, 2$. Из предложения 6.10 получаем, что F и G являются почти обратными друг к другу, $|v - G \circ F(v)| \le M_{gf}$, $|v' - F \circ G(v')| \le M_{fg}$ для всех $v \in V$, $v' \in V'$. Таким образом, остается проверить, что F индуцирует исходный гомеоморфизм $f : Z \to Z'$.

Согласно уже доказанному, $F : X \to X'$ является квази-изометрией гиперболических пространств. Следовательно, F индуцирует гомеоморфизм $\partial_\infty F : Z \to Z'$. Для любой точки $z \in Z$ и геодезического луча

$\gamma = ov_1 \dots v_n \dots \subset X$ с $\partial_\infty \gamma = z$ найдется единственный геодезический луч $\gamma' = o'\xi' \subset X'$, $\xi' = \partial_\infty F(z)$, лежащий на конечном расстоянии в X' от квази-луча $F(\gamma)$.

Заметим, что $v_n \to z$ в Z при $n \to \infty$, и рассмотрим последовательность $v'_n = F(v_n) \in V'_{k(n)}$. Тогда, очевидно, $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. При этом $d(f(v_n), v'_n) \leq 2r_{k(n)}$ и, поскольку $f(v_n) \to f(z)$, имеем $v'_n \to f(z)$ в Z' при $n \to \infty$. Следовательно вершины луча γ' также сходятся к $f(z)$ в Z'. Это влечет $\xi' = f(z)$ и $\partial_\infty F = f$. $\square$

Часть II. Препятствия для квази-изометрических отображений

7 лекция

Теория размерности

7.1 Три определения топологической размерности

Пусть X – компактное метрическое пространство, $\mathcal{U}$ – его открытое покрытие. Размером покрытия $\mathcal{U}$ будем называть величину $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}) = \sup\{\mathrm{diam}\, U : U \in \mathcal{U}\}$. Кратностью покрытия $\mathcal{U}$ называется наибольшее число его элементов, имеющих непустое пересечение.

7.1.1 Первое определение

Топологической размерностью пространства X, $\dim_1 X$, называется такое наименьшее целое n, что для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие X $n+1$ открытым множеством $U_j = \cup_\alpha U_{j\alpha}$, $j = 1, \ldots, n+1$, для которого

- $U_{j\alpha} \cap U_{j\alpha'} = \emptyset$ для каждого $j = 1, \ldots, n+1$ и всех $\alpha \neq \alpha'$;
- покрытие $\{U_{j\alpha}\}$ пространства X имеет размер $< \varepsilon$.

7.1.2 Второе определение

Топологической размерностью пространства X, $\dim_2 X$, называется такое наименьшее целое n, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X с $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}) < \varepsilon$ кратности $\leq n+1$.

7.1.3 Третье определение

Для множества индексов J мы полагаем R^J – евклидово пространство функций $J \to \mathbb{R}$ с конечными носителями, т.е. $x \in \mathbb{R}^J$ тогда и только тогда, когда только конечное число координат $x_j = x(j)$ отлично от нуля. Расстояние определяется как

$$|x - x'|^2 = \sum_{j \in J} (x_j - x'_j)^2.$$

Пусть $\Delta^J \subset \mathbb{R}^J$ – стандартный симплекс, т.е. $x \in \Delta^J$ тогда и только тогда, когда $x_j \geq 0$ для всех $j \in J$ и $\sum_{j \in J} x_j = 1$.

Любой n-мерный симплициальный комплекс P изоморфен подкомплексу в $\Delta^J \subset \mathbb{R}^J$ для некоторого множества индексов. J. Каждый симплекс $\sigma \subset P$ аффинно изоморфен стандартному k-симплексу $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$, $k = \dim \sigma$ (таким образом, для конечного J, $\dim \Delta^J = |J| - 1$).

Топологическая размерность пространства X, $\dim_3 X$, есть такое наименьшее целое n, что для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $p : X \to P$ в n-мерные симплициальный комплекс P, для которого покрытие $\{p^{-1}(\mathrm{st}_v) : v \in P\}$ пространства X прообразами открытых звезд $\mathrm{st}_v \subset P$ вершин P имеет размер $< \varepsilon$.

7.2 Эквивалентность определений

Предложение 7.1. *Для любого компактного метрического пространства X имеем*

$$\dim_1 X = \dim_2 X = \dim_3 X.$$

Доказательство. Неравенство $\dim_2 X \leq \dim_1 X$ сразу следует из определений. Для доказательства $\dim_3 X \leq \dim_2 X$ обозначим $n = \dim_2 X$. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы имеем открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ пространства X кратности $\leq n + 1$ и размера $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}) < \varepsilon$. Используя эти данные, мы построим непрерывное отображение $p : X \to \Delta^J$, образ которого лежит в n-мерном подкомплексе $P \subset \Delta^J$. Конструция называется барицентрическим отображением.

Для $j \in J$ определим $q_j : X \to \mathbb{R}$ как $q_j(x) = \mathrm{dist}(x, X \setminus U_j)$. Тогда $\sum_{j \in J} q_j(x) > 0$ для каждого $x \in X$. Теперь мы полагаем $p_j(x) = q_j(x) / \sum_{j \in J} q_j(x)$. Тогда $p : X \to \Delta^J$ непрерывно. Поскольку для каждого $x \in X$ имеется самое большее $n + 1$ ненулевая координата $p_j(x)$, $j \in J$, образ $p(X)$ лежит в некотором n-мерном подкомплексе $P \subset \Delta^J$. Для каждой вершины $v \in P$ прообраз ее открытой звезды $p^{-1}(\mathrm{st}_v) \subset X$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$. Поэтому покрытие $\{p^{-1}(\mathrm{st}_v) : v \in P\}$ имеет размер $< \varepsilon$. Таким образом, $\dim_3 X \leq \dim_2 X$.

Чтобы доказать, что $\dim_1 X \leq \dim_3 X$, предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ имеется непрерывное отображение $p : X \to P$ в n-мерные симплициальный комплекс P, для которого покрытие $\{p^{-1}(\mathrm{st}_v) : v \in P\}$ пространства X имеет размер $< \varepsilon$. Каждый j-мерный симплекс $\sigma \subset P$ отмечен своим барицентром, который есть вершина v_σ первого барицентрического подразделения $\mathrm{ba}\, P$ комплекса P. Пусть P_j – объединение открытых звезд $P_{j\sigma}$ подразделения $\mathrm{ba}\, P$ всех вершин v_σ с $\dim \sigma = j$,

$$P_j = \bigcup_{\dim \sigma = j} P_{j\sigma}.$$

Тогда $P_{j\sigma} \cap P_{j\sigma'} = \emptyset$ для $\sigma \neq \sigma'$ и $P = \cup_{j=0}^{n} P_j$. Теперь мы полагаем $U_{j\sigma} = p^{-1}(P_{j\sigma})$, $U_j = p^{-1}(P_j)$. Тогда $X = \cup_{j=0}^{n} U_j$ и $U_{j\sigma} \cap U_{j\sigma'} = \emptyset$ для каждого $j = 0, \ldots, n$ и всех $\sigma \neq \sigma'$. Более того, звезды $P_{j\sigma}$ подразделения $\operatorname{ba} P$ содержатся в соответствующих открытых звездах комплекса P, поэтому покрытие $\{U_{j\sigma}\}$ имеет размер $< \varepsilon$. Это показывает, что $\dim_1 X \leq \dim_3 X$. □

С этого момента мы обозначаем через $\dim X$ общее значение

$$\dim_1 X = \dim_2 X = \dim_3 X.$$

7.3 Лемма Шпернера

Пусть $X = \Delta^n$ – n-мерный симплекс. Беря его k-тое барицентрическое подразделение $\operatorname{ba}^k \Delta^n$ и рассматривая покрытие открытыми звездами этого подразделения, легко получаем, что $\dim \Delta^n \leq n$. Доказательство оценки снизу $\dim \Delta^n \geq n$ опирается на лемму Шпернера.

Лемма 7.2. *Пусть T – триангуляция симплекса Δ^n. Допустим, что каждой вершине $t \in T$ сопоставлена вершина $\phi(t)$ симплекса Δ^n, причем $\phi(t)$ есть одна из вершин той грани симплекса Δ^n, на которой лежит точка t. Тогда существует такой n-мерный симплекс $T^n = [t_0 \ldots t_n] \subset T$, что все вершины $\phi(t_0), \ldots, \phi(t_n)$ попарно различны.*

Доказательство. Пусть $T_1^n, \ldots, T_s^n$ – все n-мерные симплексы триангуляции T. Назовем симплекс нормальным, если его вершинам соответствуют различные вершины симплекса Δ^n. Утверждается, что число нормальных симплексов нечетно.

Для $n = 0$ это очевидно. Будем считать, что утверждение доказано для всех $(n-1)$-мерных симплексов, и докажем его для Δ^n. Грань размерности $n-1$ симплекса T_i^n назовем отмеченной, если ее вершинам соответствуют вершины $e_1, \ldots, e_n$ симплекса $\Delta^n = [e_0 e_1 \ldots e_n]$. Заметим, что число отмеченных граней симплекса T_i^n есть либо 0, либо 1, либо 2, причем у всех нормальных симплексов и только у них это число равно 1. Действительно, если T_i^n нормален, то число его отмеченных граней равно 1; если T_i^n не является нормальным, но содержит отмеченную грань, то для оставшейся вершины $t_i^0 \in T_i^n$ имеем $\phi(t_i^0) \in \{e_1, \ldots, e_n\}$. Поэтому у T_i^n есть еще одна отмеченная грань, которая содержит вершину t_i^0, и других отмеченных граней нет.

Пусть a_i – число отмеченных граней у симплекса T_i^n. Положим

$$a = \sum_{i=1}^{s} a_i.$$

Тогда число нормальных симплексов имеет ту же четность, что и a. Поэтому достаточно доказать, что a нечетно. Подсчитаем число a другим способом: если одна из граней размерности $n-1$ симплексов $T_1^n, \ldots, T_s^n$ лежит внутри Δ^n, то к ней примыкают в точности 2 симплекса из этого списка. Поэтому ее вклад в a четный; если такая грань лежит на какой-либо собственной грани симплекса Δ^n, отличной от $[e_1 \ldots e_n]$, то в силу условия для ϕ она не может быть отмеченной, и ее вклад в a равен нулю. Остается случай, когда такая грань лежит на $[e_1 \ldots e_n]$. Ясно, что в этом случае ее вклад в a равен 0 или 1. По индукционному предположению число граней, дающий вклад 1 в a, нечетно. Поэтому a нечетно. □

Теорема 7.3. $\dim \Delta^n = n$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ всякое открытое покрытие симплекса Δ^n, имеющее размер $< \varepsilon$, имеет кратность $\geq n+1$. Пусть ε настолько мало, что никакое множество диаметра $\leq \varepsilon$ не пересекается со всеми $(n-1)$-мерными гранями симплекса Δ^n. Пусть $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_s\}$ какое-либо открытое покрытие размера $< \varepsilon$. Можно считать, что $e_i \in U_i$ для $i = 0, \ldots, n$. Если $s > n$, то модифицируем покрытие $\mathcal{U}$ так: найдется грань Δ_i^{n-1}, не пересекающаяся с U_s; вычеркнем из $\mathcal{U}$ элемент U_s и заменим U_i на $U_i \cup U_s$; получим покрытие $\mathcal{U}^{(1)}$, в котором число элементов $s-1$, кратность не увеличилась и любой элемент из $\mathcal{U}^{(1)}$, содержащий вершину симплекса Δ^n, не пересекает противоположную грань. Повторяя эту процедуру нужное число раз, получаем покрытие $\mathcal{V} = \{V_0, \ldots, V_n\}$, удовлетворяющее условиям

- кратность $\mathcal{V}$ не превосходит кратности $\mathcal{U}$;
- $e_i \in V_i$ для всех $i = 0, \ldots, n$;
- V_i не пересекает грань Δ_i^{n-1} симплекса Δ^n.

Слегка уменьшая элементы покрытия и беря замыкания, можно считать к тому же, что покрытие $\mathcal{V}$ – замкнутое. Если i отлично от $i_0, \ldots, i_r$, то грань $[e_0 \ldots e_r] \subset \Delta_i^{n-1}$, а значит V_i не пересекается с $[e_0 \ldots e_r]$. Следовательно, $[e_0 \ldots e_r] \subset V_{i_0} \cup \cdots \cup V_{i_r}$. Возьмем теперь достаточно мелкую триангуляцию T симплекса Δ^n и для вершины $t \in T$ выберем вершину $\phi(t) = e_i$ такую, что $t \in V_i$. Тогда выполнены все условия леммы Шпернера. Поэтому существует симплекс $T^n \subset T$, который пересекается со всеми элементами покрытия $\mathcal{V}$. Поскольку триангуляцию можно выбирать сколь угодно мелкой, а элементы покрытия $\mathcal{V}$ замкнуты, отсюда следует, что кратность покрытия $\mathcal{V}$ равна $n+1$, а кратность покрытия $\mathcal{U}$ – не менее $n+1$. □

8 лекция

Гиперболический ранг и субэкспоненциальный коранг

Пусть X – метрическое пространство. Рассмотрим все собственные $\mathrm{CAT}(-1)$ пространства Y квази-изометрически вложенные в X, и определим гиперболический ранг пространства X как

$$\operatorname{rank}_h X = \sup_Y \dim \partial_\infty Y,$$

где супремум берется по всем таким Y. Из этого определения сразу вытекает монотонность гиперболического ранга, т.е. если есть квази-изометрическое вложение $X \to X'$, то $\operatorname{rank}_h X \le \operatorname{rank}_h X'$. Следовательно, гиперболический ранг – квази-изометрический инвариант. Этот инвариант является мерой гиперболичности, имеющейся в пространстве, и его вычисление или оценки как сверху, так и снизу, часто представляют интересную и нетривиальную задачу.

Если X – собственное $\mathrm{CAT}(-1)$ пространство, то $\operatorname{rank}_h X = \dim \partial_\infty X$. Действительно, тождественное отображение $X \to X$ показывает, что $\operatorname{rank}_h X \ge \dim \partial_\infty X$. С другой стороны, любое квази-изометричное вложение $f : Y \to X$ $\mathrm{CAT}(-1)$ пространства Y индуцирует согласно теореме стабильности геодезических топологическое вложение $\partial_\infty f : \partial_\infty Y \to \partial_\infty X$, и $\dim \partial_\infty X \ge \dim \partial_\infty Y$. Поэтому $\operatorname{rank}_h X \le \dim \partial_\infty X$.

Получение оценки гиперболического ранга сверху для пространств, не являющихся гиперболическими, значительно труднее, и требует введения соответствующих квази-изометрических инвариантов.

8.1 Определение субэкспоненциального коранга

Непрерывное отображение $g : X \to T$ топологических пространств можно рассматривать как непрерывное расслоение

$$X = \bigcup_{t \in T} g^{-1}(t)$$

пространства X над T. Его ранг есть $\operatorname{rank}(g) = \sup_K \dim g(K)$, где супремум берется по всем компактам $K \subset X$. Грубо говоря, субэкспоненциальный коранг пространства X есть наименьший ранг непрерывных расслоений $g : X \to T$, все слои которых имеют субэкспоненциальный рост.

Например, для $X = \mathrm{H}^n \times \mathbb{R}^m$ расслоение $g : X \to \mathrm{H}^n$, являющееся проекцией на первый сомножитель, субэкспоненциально, и его ранг равен $n = \dim \mathrm{H}^n$. Однако, это не самый маленький ранг субэкспоненциальных расслоений пространства X. Сомножитель H^n имеет субэкпоненциальное расслоение $g_1 : \mathrm{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ – проекция на фиксированную орисферу $S \subset \mathrm{H}^n$ из ее центра. Ранг этого расслоения равен $n-1$, поэтому X допускает непрерывное субэкспоненциальное расслоения ранга $n-1$.

Точное определение субэкспоненциального коранга несколько сложнее, поскольку мы хотим иметь квази-изометрический инвариант, а совместить условие непрерывности слоения с квази-изометрическими отображениями непросто.

Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется сетью, если для некоторой постоянной C любая точка $x \in X$ удалена от A на расстояние не более C. Множество A называется δ-разделенным, $\delta > 0$, если $|a-a'| \geq \delta$ для всех различных a, $a' \in A$. Если $X_\delta \subset X$ является максимальной δ-разделенной сетью, то шары $B_\delta(a)$, $a \in X_\delta$, покрывают X.

Предположим, что фиксированы максимальная сеть X_δ и $\sigma \geq \delta$. Мы определяем размер множества $A \subset X$ (относительно X_δ и σ) как число

$$\operatorname{size}_{X_\delta,\sigma}(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

точек $x \in X_\delta$, для которых шары $B_\sigma(x)$ пересекают A. Теперь мы можем сформулировать основное определение.

Непрерывное расслоение $g : X \to T$ называется субэкспоненциальным, если для любой максимальной разделенной сети $X_\delta \subset X$ (с достаточно большим δ), любого $\sigma \geq \delta$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $R_0 = R_0(X_\delta, \sigma, \varepsilon) \geq 1$, что для всех $R \geq R_0$ и всех $t \in T$ имеем

$$\frac{1}{R} \ln \operatorname{size}_{X_\delta,\sigma} \left(g^{-1}(t) \cup B_R(x_0)\right) < \varepsilon$$

для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$; ясно, что это свойство не зависит от выбора x_0.

Субэкспоненциальный коранг метрического пространства X определяется как

$$\operatorname{corank} X = \sup_{Z \sim X} \inf \operatorname{rank}(g : Z \to T),$$

где супремум берется по всем пространствам Z квази-изометричным X, а инфимум – по всем субэкспоненциальным расслоениям пространства Z.

Лемма 8.1. *Если $f : X \to Z$ – непрерывное квази-изометрическое отображение и $g : Z \to T$ – непрерывное субэкспоненциальное расслоение, то $g \circ f : X \to T$ – непрерывное субэкспоненциальное расслоение.*

Доказательство. Считаем, что f является (a,b)-квази-изометрическим. Фиксируем $x_0 \in X$ и положим $z_0 = f(x_0)$. Пусть δ_0, $\sigma_0 \geq \delta_0$ – постоянные разделения и радиуса для измерения субэкспоненциальности расслоения g. Положим $\delta = a(\delta_0 + b)$ и выберем максимальную разделенную сеть $X_\delta \subset X$. Тогда

$$|f(x) - f(x')| \geq \frac{1}{a}|x - x'| - b \geq \frac{1}{a}\delta - b \geq \delta_0$$

для любых различных x, $x' \in X_\delta$. Поэтому $f(X_\delta) \subset Z$ является δ_0-разделенным подмножеством. Найдем максимальную разделенную сеть $Z_{\delta_0} \supset f(X_\delta)$.

Далее, фиксируем $\sigma \geq \max\{\delta, \frac{1}{a}(\sigma_0 - b)\}$ и рассмотрим $t \in T$. Если шар $B_\sigma(x)$ пересекает множество $(g \circ f)^{-1}(t) \cap B_R(x_0)$ для некоторой точки $x \in X_\delta$, то его образ $f(B_\sigma(x))$ пересекает множество $g^{-1}(t) \cap B_{aR+b}(z_0)$ поскольку $f(B_R(x_0)) \subset B_{aR+b}(z_0)$. Кроме того, $f(B_\sigma(x)) \subset B_{a\sigma+b}(f(x))$. Поэтому шар $B_{a\sigma+b}(f(x))$ пересекает множество $g^{-1}(t) \cap B_{aR+b}(z_0)$, и мы имеем

$$\operatorname{size}_{X_\delta,\sigma}\left((g \circ f)^{-1}(t) \cap B_R(x_0)\right) \leq \operatorname{size}_{Z_{\delta_0},a\sigma+b}\left(g^{-1}(t) \cap B_{aR+b}(z_0)\right)$$

для каждого $R > 0$, $t \in T$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для $aR + b \geq R_0(Z_{\delta_0}, a\sigma + b, \frac{\varepsilon}{a+b})$ имеем

$$\frac{1}{aR+b} \ln \operatorname{size}_{X_\delta,\sigma}\left((g \circ f)^{-1}(t) \cap B_R(x_0)\right) < \frac{\varepsilon}{a+b}.$$

Положим $R_0(X_\delta, \sigma, \varepsilon) = \max\{1, \frac{1}{a}[R_0(Z_{\delta_0}, a\sigma + b, \frac{\varepsilon}{a+b}) - b]\}$. При $R \geq R_0(X_\delta, \sigma, \varepsilon)$ имеем

$$\frac{1}{R} \ln \operatorname{size}_{X_\delta,\sigma}\left((g \circ f)^{-1}(t) \cap B_R(x_0)\right) < \varepsilon.$$

Поэтому расслоение $g \circ f$ является субэкспоненциальным. $\square$

Метрическое пространство Z называется QPC пространством, $Z \in$ QPC, если любое квази-изометрическое отображение $f : X \to Z$ параллельно непрерывному отображению, т.е. существует такое непрерывное $f' : X \to Z$, что $|f(x) - f'(x)| \leq C < \infty$ для всех $x \in X$. В этом случае f' также является квази-изометрическим.

Лемма 8.2. *Предположим, что X квази-изометрично QPC пространству Z. Тогда*

$$\operatorname{corank} X = \inf \operatorname{rank}(g : Z \to T),$$

где инфимум берется по всем субэкспоненциальным расслоениям пространства Z.

Доказательство. Если $X' \sim X$, то $X' \sim Z$. Поэтому имеется непрерывная квази-изометрия $X' \to Z$. По лемме 8.1, $\inf \operatorname{rank}(g' : X' \to T') \leq \inf \operatorname{rank}(g : Z \to T)$. □

Лемма 8.3. *Каждое локально-компактное пространство Адамара X является QPC.*

Доказательство. Пусть имеется (a, b)-квази-изометрическое отображение $f : Y \to X$. Возьмем максимальную разделенную сеть $Y_\delta \subset Y$ с $a\delta + b \geq \delta_0 > 0$ и заметим, что каждый шар $B_{2\delta}(\alpha)$, $\alpha \in Y_\delta$ содержит только конечное число элементов сети Y_δ. Это так потому, что множество $f(Y_\delta) \subset X$ является δ_0-разделенным, пространство X – собственное, и значит шар $B_{2a\delta+b}(f(\alpha)) \supset f(B_{2\delta}(\alpha))$ пересекает $f(Y_\delta)$ по конечному множеству. Поэтому нерв $\mathcal{N}$ покрытия $\mathcal{A} = \{B_\delta(\alpha) : \alpha \in Y_\delta\}$ пространства Y является локально конечным симплициальным комплексом.

Выберем непрерывное разбиение единицы $\{p_\alpha : Y \to \mathbb{R} : \alpha \in Y_\delta\}$, подчиненное покрытию $\mathcal{A}$. С его помощью получаем непрерывное отображение $g : Y \to \mathcal{N}$, $g(y) = \sum_{\alpha \in Y_\delta} p_\alpha(y)\alpha$. При этом точка $g(y)$ лежит в симплексе Δ_y с вершинами $\{\alpha \in Y_\delta : |\alpha - y| < \delta\}$. Продолжаем $f|Y_\delta : \operatorname{ske}_0 \mathcal{N} \to X$ до непрерывного $\overline{f} : \mathcal{N} \to X$ пользуясь выпуклостью пространства X и действуя индукцией по размерности остовов. Тогда $\overline{f}(\Delta_y) \subset B_{a\delta+b}(f(y))$, и поэтому непрерывное отображение $\overline{f} \circ g : Y \to X$ параллельно исходному f. □

8.2 Свойства субэкспоненциального коранга

Перечислим несколько очевидных или почти очевидных свойств субэкспоненциального коранга.

(1) $\operatorname{corank} \mathbb{R}^n = 0$ для любого $n \geq 0$.

(2) Если метрическое произведение $X_1 \times X_2$ является QPC пространством, то $\operatorname{corank}(X_1 \times X_2) \leq \operatorname{corank} X_1 + \operatorname{corank} X_2$.
Действительно, в этом случае оба X_1, X_2 являются QPC, и произведение субэкспоненциальных расслоений $g_i : X_i \to T_i$, $i = 1, 2$, является субэкспоненциальным расслоением $g_1 \times g_2 : X_1 \times X_2 \to T_1 \times T_2$. Остается заметить, что $\dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B$.

(3) Для n-мерного многообразия Адамара X имеем $\operatorname{corank} X \leq n - 1$. Действительно, проекция на фиксированную орисферу из ее центра является субэкспоненциальным расслоением ранга $n - 1$.

(4) Если X квази-изометрично QPC и X' квази-изометрично вкладывается в X, то $\operatorname{corank} X' \leq \operatorname{corank} X$.
Действительно, можно считать, что $X \in$ QPC. Если $Z \sim X'$, то существует непрерывное квази-изометричное отображение $f : Z \to X$. По

лемме 8.2 $\operatorname{corank} X = \inf \operatorname{rank}(g : X \to T)$, где инфимум берется по всем субэкспоненциальным расслоениям. По лемме 8.1 каждое субэкспоненциальное расслоение $g : X \to T$ индуцирует субэкспоненциальное расслоение $g \circ f : Z \to T$. При этом $\operatorname{rank}(g \circ f) \le \operatorname{rank}(g)$. Следовательно, $\operatorname{corank} X' \le \operatorname{corank} X$.

Теорема 8.4. *Допустим, что метрическое пространство X квази-изометрично QPC пространству. Тогда*

$$\operatorname{rank}_h X \le \operatorname{corank} X.$$

Эта теорема дает препятствия для квази-изометрических вложений, которые в ряде случаев являются точными. Например, пусть

$$X = \mathrm{H}^{m_1} \times \cdots \times \mathrm{H}^{m_k},$$

где $m_1, \ldots, m_k \ge 2$. Согласно теореме 8.4, $\operatorname{corank} \mathrm{H}^{m_i} = m_i - 1$. Поэтому

$$\operatorname{corank} X \times \mathbb{R}^m \le \sum_i (m_i - 1) = \dim X - k$$

при любом $m \ge 0$. В частности, для $n > \dim X - (k-1)$ не существует квази-изометрических отображений $\mathrm{H}^n \to X \times \mathbb{R}^m$. Эта оценка является точной, поскольку для $n = \dim X - (k-1)$ существуют квази-изометрические вложения $\mathrm{H}^n \to X$.

Доказательство теоремы 8.4. Можно считать, что X является QPC. Пусть $f : Y \to X$ – квази-изометрического собственного CAT(-1) пространства Y. Согласно свойству (4), $\operatorname{corank} Y \le \operatorname{corank} X$. Поэтому неравенство $\dim \partial_\infty Y \le \operatorname{corank} Y$ для любого такого Y влечет искомое неравенство $\operatorname{rank}_h X \le \operatorname{corank} X$. Поскольку $Y \in$ QPC, достаточно доказать, что

$$\dim \partial_\infty Y \le \operatorname{rank}(g : Y \to T)$$

для любого субэкспоненциального расслоения g.

Идея доказательства проста. Фиксируем базисную точку $y_0 \in Y$ и для $R > 0$ рассмотрим проекцию $\mathrm{pr}_R : \partial_\infty Y \to S_R$ границы на бесконечности на метрическую сферу S_R радиуса R вокруг точки y_0, $\mathrm{pr}_R(\xi) = \xi(R)$ для геодезического луча $\xi \in \partial_\infty Y$, $\xi : [0, \infty) \to Y$, $\xi(0) = y_0$. Беря композицию с расслоением g, получаем непрерывное отображение $h_R = g \circ \mathrm{pr}_R : \partial_\infty Y \to T$ с компактным образом $K_R = h_R(\partial_\infty Y)$. Его размерность не превосходит $\operatorname{rank}(g)$ по определению. С другой стороны, любое открытое покрытие компакта K_R поднимается с помощью h_R

до открытого покрытия границы на бесконечности $\partial_\infty Y$ той же кратности. Главный момент доказательства состоит в том, что если размер покрытия пространства K_R достаточно мал, а радиус R достаточно велик, то размер индуцированного покрытия $\partial_\infty Y$ сколь угодно мал, что немедленно влечет требуемое неравенство. То, что размер индуцированного покрытия мал, легко следует из свойства субэкспоненциальности расслоения g.

Перейдем к техническим деталям. Рассмотрим метрику d_∞ на $\partial_\infty Y$,

$$d_\infty(\xi, \xi') = \lim_{t\to\infty} \angle \left(\widetilde{\xi}(t)\widetilde{y}_0\widetilde{\xi}'(t)\right),$$

где $\widetilde{\xi}(t)\widetilde{y}_0\widetilde{\xi}'(t) \subset \mathrm{H}^2$ – треугольник сравнения для треугольника $\xi(t)y_0\xi'(t)$. Тогда $\tan\left(\frac{1}{4}d_\infty(\xi,\xi')\right) = e^{-\operatorname{dist}(\widetilde{y}_0,\widetilde{\xi\xi'})}$ и $\operatorname{dist}(\widetilde{y}_0,\widetilde{\xi\xi'}) \geq \operatorname{dist}(y_0,\xi\xi')$. Поэтому $d_\infty(\xi,\xi') \leq 4e^{-\operatorname{dist}(y_0,\xi\xi')}$. Более того, метрика d_∞ является метрикой видимости на $\partial_\infty Y$, и ее метрическая топология совпадает с топологией пространства $\partial_\infty Y$.

В любое открытое покрытие $\mathcal{O}$ компакта K_R можно вписать конечное замкнутое покрытие $\mathcal{C}$ кратности $\leq n+1$, $n = \operatorname{rank}(g)$.

Найдем максимальную разделенную сеть $Y_\delta \subset Y$ и $\sigma \geq \delta$, для которых выполнено условие субэкспоненциальности роста слоев, и фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Далее мы сокращаем обозначение $\operatorname{size}_{Y_\delta,\sigma} = \operatorname{size}$. Для любого $R \geq R_0(Y_\delta,\sigma,\varepsilon)$ имеем

$$\frac{1}{R}\ln\operatorname{size}\left(g^{-1}(t)\cap B_R(y_0)\right) < \varepsilon.$$

Лемма 8.5. *Найдется такое открытое покрытие $\mathcal{O}_R = \{U_t : t\in K_R\}$ компакта K_R, что*

$$\frac{1}{R}\ln\operatorname{size}\left(g^{-1}(U_t)\cap S_R\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Множество $g^{-1}(t)\cap S_R$ покрыто

$$N(R,t) = \operatorname{size}\left(g^{-1}(t)\cap S_R\right)$$

открытыми шарами $B_\sigma(y)$ с $y\in Y_\delta$. Поскольку $S_R \subset B_R(y_0)$, имеем

$$\frac{1}{R}\ln N(R,t) \leq \frac{1}{R}\ln\operatorname{size}\left(g^{-1}(t)\cap B_R(y_0)\right) < \varepsilon.$$

Пусть $V\subset Y$ – объединение упомянутых шаров. Утверждается, что существует такая окрестность U_t точки $t\in K_R$ в T, что $g^{-1}(U_t)\cap S_R \subset V$.

Если это не так, то найдется последовательность $y_i \in S_R \setminus V$, для которой $g(y_i) \to t$. Можно считать, что $y_i \to y_\infty \in S_R \setminus V$. По непрерывности, $g(y_\infty) = \lim g(y_i) = t$. Это противоречит тому, что $y_\infty \notin g^{-1}(t)$. Поэтому покрытие $\mathcal{O}_R = \{U_t : t \in K_R\}$ является искомым. □

Найдем конечное замкнутое покрытие $\mathcal{C}_R$ кратности $\leq n+1$, вписанное в $\mathcal{O}_R$, и рассмотрим $\mathcal{A}_R = g^{-1}(\mathcal{C}_R)$ – конечное замкнутое покрытие сферы S_R кратности $\leq n+1$. Тогда $\frac{1}{R} \ln \operatorname{size} A < \varepsilon$ для любого его элемента $A \in \mathcal{A}_R$. Это не означает, что диаметр (в метрике сферы S_R) множества A субэкспоненциален – свойство, которое хотелось бы иметь. Поэтому мы модифицируем покрытие $\mathcal{A}_R$ следующим образом. Для каждого $A \in \mathcal{A}_R$ рассмотрим его покрытие открытыми шарами $B_\sigma(y)$, $y \in Y_\delta$, которые пересекают A. Объединение таких шаров открыто и имеет только конечное число компонент связности, поскольку каждая компонента α содержит по крайней мере один шар $B_\sigma(y)$, и в шаре $B_{R+\sigma}(y_0)$ имеется только конечное число точек сети Y_δ. Полагаем $A = \cup_\alpha A_\alpha$ – конечное дизъюнктное объединение замкнутых множеств $A_\alpha = A \cap \alpha$. Теперь диаметр в метрике сферы

$$\operatorname{diam}_R A_\alpha \leq 2\sigma \operatorname{size}(A_\alpha) \leq 2\sigma \operatorname{size}(A) \leq 2\sigma e^{\varepsilon R}.$$

Считаем с самого начала, что $\operatorname{diam}_R A \leq 2\sigma e^{\varepsilon R}$ для любого $A \in \mathcal{A}_R$.

Наконец рассмотрим конечное замкнутое покрытие $\mathcal{B}_R = \operatorname{pr}^{-1}(\mathcal{A}_R)$ границы на бесконечности $\partial_\infty Y$. Оно имеет кратность $\leq n+1$, и для завершения доказательства теоремы 8.4 остается показать, что размер этого покрытия становится сколь угодно мал при $R \to \infty$.

Лемма 8.6. *Для любого элемента $B \in \mathcal{B}_R$ имеем*

$$\operatorname{diam} B \leq c e^{-(1-\varepsilon)R},$$

где постоянная c зависит только от σ.

Доказательство. Найдутся ξ, $\xi \in B$, для которых $d_\infty(\xi, \xi') = \operatorname{diam} B$. Точки $v = \operatorname{pr}_R(\xi)$, $v' = \operatorname{pr}_R(\xi') \in S_R$ лежат в некотором элементе $A \in \mathcal{A}_R$. Пусть $y \in vv'$ – середина, $\rho = |y - y_0|$, $r = \operatorname{dist}(y, S_R)$. Тогда $\rho + r \geq R$ и $\operatorname{diam}_R(A) \geq \pi \sinh r$. Поскольку, с другой стороны, $\operatorname{diam}_R(A) \leq 2\sigma e^{\varepsilon R}$, получаем $\pi \sinh r \leq 2\sigma e^{\varepsilon R}$, откуда $r \leq \varepsilon R + c(\sigma)$ для некоторой постоянной $c(\sigma)$.

Далее, $\operatorname{dist}(y_0, \xi\xi') \geq \rho \geq R - r \geq (1-\varepsilon)R - c(\sigma)$ и, следовательно,

$$\operatorname{diam} B = d_\infty(\xi, \xi') \leq c e^{-(1-\varepsilon)R}.$$

□

Это завершает доказательство теоремы 8.4. □