

# 16. MEKAANISET AALLOT

## Pääkohdat:

1. Aaltojen eteneminen, superpositio ja heijastuminen.
2. Aallon nopeus
3. Etenevät aallot
4. Seisovat aallot, resonanssi
5. Aallon kuljettama energia
6. Aaltoyhtälö

**Aalto** on etenevä "häiriö" tai poikkeama tasapainotilasta. **Aalto kuljettaa tavallisesti mukanaan energiaa ja liikemäärää.** Tällä tavoin etenevät esim. ääni, valo ja radioaallot. **Mekaaniset aallot etenevät kimmoisan väliaineen värähtelyinä** (esim. ääniaallot ilmassa tai aallot veden pinnalla). Tällöin aalto ei kuitenkaan kuljeta mukanaan väliainetta. **Sähkömagneettiset aallot** (esim. valo) taas eivät tarvitse väliainetta, vaan voivat edetä tyhjiössä. Kvanttimekaniikka selittää kuinka jopa hiukkasetkin liikkuvat **aineaaltoina**.

## 16.1. Peruskäsitteitä

**Poikittaisessa aallossa** häiriöt (esim. väliaineen hiukkasten poikkeamat tasapainoasema- taan) ovat kohtisuorassa aallon etenemissuuntaa vastaan (esim. jännitetyn langan värähtelyt ja sähkömagneettiset aallot). **Pitkittäisessä aallossa** taas poikkeamat ovat aallon etenemissuunnassa (esim. ääniaallot kaasussa tai kitkattomassa nesteessä).

Veden pinnan aaltoilussa hiukkaset liikkuvat elliptisiä ratoja, siis sekä poikittain että pitkittäin. (Esim. pinnalla kelluvan roskan liikerata)

**Aaltorintama** on niiden pisteiden muodostama pinta, joissa aalto on samassa vaiheessa (esim. aallonharjan muodostama pinta).

**Säde** on suora, joka on kohtisuorassa aaltorintamaa vastaan.

Pistemäinen lähde synnyttää **palloaallon**, jonka aaltorintamat ovat pallopintoja. Kaukana lähteestä ne ovat lähes tasoja, jolloin kyseessä on **tasoaalto**.

## 16.2. Aaltojen superpositio

Jos samalla alueella on yhtäaikaan kaksi tai useampia aaltoliikkeitä, muodostuu aaltojen **superpositio**. Resultanttiaalto on lineaarisen superpositioperiaatteen mukaan **yksittäisten aaltojen summa**. Jos aaltoliikkeet 1, 2, 3, ... aiheuttavat tietyssä pisteessä erikseen poikkeamat  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , niin niiden yhdessä aiheuttama kokonaispoikkeama tässä pisteessä on

$$y_{\text{tot}} = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

Lineaarisuus on tavallisesti voimassa, jos poikkeamat eivät ole liian suuria.

Aaltojen superpositio voi johtaa niiden **interferenssiin**, jossa samansuuntaiset poikkeamat vahvistavat toisiaan (konstruktii- vinen interferenssi) ja vastakkaissuuntaiset poikkeamat heikentävät toisiaan (destruktiivinen interferenssi).

Interferenssi ei johdu aaltojen vuorovaikutuksesta, sillä **yksittäiset aallot etenevät lineaarisen superpositioperiaatteen mukaan toisistaan riippumattomasti.**

### 16.3. Aallon nopeus jännitetyssä langassa

Tarkastellaan jännitetyssä langassa etenevää yhtä poikittaista aaltoa, pulssia, joka aiheuttaa jokaisessa pisteessä hetkellisen poikkeaman tasapainosta.

Laboratorioon kiinnitetyssä koordinaatistossa pulssi liikkuu oikealle nopeudella  $v$ . Pulssin mukana liikkuvassa koordinaatistossa pulssi on stationaarinen (paikallaan pysyvä), mutta lanka liikkuu vasemmalle nopeudella  $v$ . Lyhyttä langan osaa AB voidaan pitää R-säteisen ympyrän kaarena, jonka pituus on  $\Delta\ell = 2\theta R$ .

Pulssikoordinaatistossa langan liike on tässä osassa pyörimisliikettä, jonka keskeiskiihtyvyys on  $a = v^2/R$ .

Jos  $\Delta\ell$ :n pituisen langan osan massa on  $m = \mu \Delta\ell = 2\mu\theta R$  (missä  $\mu$  on langan lineaarinen massatiheys, ts. massa/pituus), siihen täytyy vaikuttaa keskihakuisvoima  $F_{\perp} = ma = mv^2/R = 2\mu\theta v^2$ .

Tämä voima aiheutuu langan jännityksestä: jos langan suuntainen jännitysvoima on  $F$ ,  $\Delta\ell$ :n pituista osaa pyrkii palauttamaan tasapainotilaan  $F$ :n poikittainen komponentti  $F_{\perp} = 2F \sin\theta$ . Pienillä poikkeamilla  $\theta$  on pieni ja  $\sin\theta \approx \theta$ , joten

$$(F_{\perp} =) 2\mu\theta v^2 = 2F\theta.$$

Tästä saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{F/\mu}. \quad (16.1)$$

**Esim. 16.1.** Toisesta päästä kiinnitettyä vaakasuoraa langaa jännitetään toisesta päästä 2.0 kg punnuksella. Vaaka-suoran osan pituus on 1.60 m ja massa 20.0 g. Mikä on puls-sin etenemisnopeus langassa?

### 16.4. Aallon heijastuminen

Kun jännitetyssä langassa liikkuva pulssi saapuu langan päähän, se **heijastuu**.

Jos pää on liikkumaton, pulssi palaa ylösalaisin kääntyneenä. Tämä johtuu kiinteänseinämän lankaan kohdistamasta reaktiovoimasta, joka on yhtä suuri ja vastakkaissuuntainen kuin saapuvan pulssin seinämään kohdistama voima.

Jos langan pää on vapaasti liikkuva, siihen ei kohdistu mitään ulkoisia voimia ja heijastunut pulssi on alkuperäisen pulssin kanssa identtinen.

Kun pulssi kohtaa epäjatkuvuuskohdan, se yleensä osittain läpäisee sen ja osittain heijastuu siitä. Näin tapahtuu esim. pulssin saapuessa kevyen ja raskaan langan liitoskohtaan. Jos pulssi tulee kevyen langan puolelta, raskaan langan reaktiovoima riittää kääntämään heijastuneen osan ylösalaisin (mutta se ei tietenkään käännä läpäissyttä osaa). Jos sen sijaan pulssi tulee raskaan langan puolelta, heijastunut osa ei käännä (eikä myöskään läpäissyt osa).

Yleisessä tapauksessa heijastunut aalto kääntyy ylösalaisin silloin, kun heijastuminen tapahtuu tiheämmästä aineesta. Kääntymistä ei tapahdu, kun aalto kohtaa harvemman aineen.

## 16.5. Etenevät aallot

Tarkastellaan jännitetyssä langassa nopeudella  $v$  etenevää pulssia, jonka aiheuttamaa poikkeamaa merkitään  $y$ :llä. Ajan hetkellä  $t = 0$  pulssin muotoa kuvaa jokin paikan  $x$  funktio  $y = f(x)$ . Jos pulssi etenee langassa muotonsa säilyttäen, hetkellä  $t$  on pisteessä  $x$  täsmälleen sama poikkeama, joka oli hetkellä  $t = 0$  pisteessä  $x - vt$ . Tämä poikkeama on  $y = f(x - vt)$ . Näin ollen poikkeaman paikka- ja aikariippuvuutta kuvaavalle aalto-funktiolle  $y(x,t)$  saadaan yhtälö

$$y(x,t) = f(x - vt). \quad (16.3)$$

Tietty pulssin kohta (esim. sen huippu), pulssin vaihe, liikkuu siten, että yhtälö

$$x - vt = x_0 = \text{vakio}$$

on koko ajan voimassa, missä  $x_0$  on ko. kohdan paikka hetkellä  $t = 0$ . Tästä nähdään, että muotonsa säilyttävän pulssin kaikki vaiheet liikkuvat samalla nopeudella, vaihenopeudella

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(vt + \text{vakio}) = v.$$

Jos  $v$  on positiivinen, yhtälö (16.3) esittää positiivisen  $x$ -akselin suuntaan etenevää aaltoa. Tällöin vastakkaiseen suuntaan liikkuva aalto noudattaa yhtälöä

$$y(x,t) = f(x + vt) \quad (16.4)$$

Jotta funktio  $y(x,t)$  esittäisi nopeudella  $v$  etenevää (muotonsa säilyttävää) aaltoa,  $x$ :n ja  $t$ :n täytyy siis esiintyä siinä joko kombinaationa  $x - vt$  tai  $x + vt$ , mutta ei missään muussa muodossa.

## 16.6. Harmoninen aalto

Tarkastellaan jännitettyä lankaa, jonka jokin piste (esim.  $x = 0$ ) on pakotettu yksinkertaiseen harmoniseen värähdysliikkeen

$$y(x_0,t) = A \sin \omega t.$$

$A$  on poikkeaman itseisarvon maksimiarvo, amplitudi, ja  $\omega$  on sen kulmataajuus (rad/s)

$$\omega = 2\pi / T,$$

missä  $T$  on yhteen kokonaiseen värähdykseen kuluva aika, värähdysaika ( $\omega T = 2\pi$  radiaania).

Värähtely leviää pisteen  $x_0$  ympäristöön siten, että langan muutkin pisteet alkavat suorittaa harmonista värähdysliikettä amplitudilla  $A$  ja kulmataajuudella  $\omega$ . Eri pisteet värähtelevät kuitenkin eri vaiheessa (esim. maksimipoikkeama esiintyy eri pisteissä eri aikoina). Pisteessä  $x$  langan poikkeama on siis

$$y(x,t) = A \sin [\omega t + \Phi(x)],$$

missä  $\Phi(x)$  on värähtelyn vaihekulma (joka on paikan funktio).

Funktio  $y(x,t)$  esittää nopeudella  $v$  etenevää muotonsa säilyttävää aaltoa, **harmonista aaltoa**. Yhtälöiden (16.3) ja (16.4) mukaan  $x$ :n ja  $t$ :n täytyy siis esiintyä siinä joko kombinaationa  $x + vt$  tai  $x - vt$ . Edellisessä tapauksessa vaihekulman  $\Phi(x)$  täytyy olla muotoa  $\Phi(x) = \omega x / v + \phi$ , missä  $\phi$  on muuttujista  $x$  ja  $t$  riippumaton vakio, **vaihevakio**. Tällöin aaltofunktion lauseke on

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \sin [\omega/v (x + vt) + \phi] \\ &= A \sin (k x + \omega t + \phi), \end{aligned} \quad (16.7)$$

missä  $k = \omega/v$  on **aaltoluku**. Yhtälö (1.7) esittää negatiivisen  $x$ -akselin suuntaan etenevää harmonista aaltoa. Vastaavalla tavalla todetaan, että positiivisen  $x$ -akselin suuntaan etenevää harmonista aaltoa kuvaa funktio

$$y(x,t) = A \sin (k x - \omega t + \phi). \quad (16.8)$$

Tämä standardimuoto saadaan esittämällä funktion  $A \sin [\omega t + \Phi(x)]$  vaihekulma muodossa  $\Phi(x) = \omega x / v + \phi + \pi$  ja käyttämällä identiteettiä  $\sin (x + \pi) = \sin (-x)$ .

Tietyllä ajan hetkellä kahden peräkkäisen samassa vaiheessa olevan pisteen (esim. kahden aallonharjan) välinen etäisyys on **aallonpituus**,  $\lambda$ . Siten  $x$ :n muutos  $\lambda$ :n verran aiheuttaa siis  $2\pi$ :n vaiheen muutoksen:  $k (x + \lambda) = k x + 2 \pi$ . Aaltoluku on siis

$$k = 2\pi / \lambda.$$

Toisaalta  $k$  on määritelmänsä perusteella  $\omega/v$ , joten aallon nopeudelle saadaan yhtälö

$$v = \omega / k = (\omega / 2\pi) \lambda = f \lambda = \lambda / T, \quad (16.5)$$

missä  $f = \omega / 2\pi = 1 / T$  on aallon taajuus.

Väliaineen hiukkasten nopeus tietyssä pisteessä on yhtälön (16.8) mukaan

$$\partial y / \partial t = -\omega A \cos (k x - \omega t + \phi) \quad (16.9)$$

ja hiukkasten kiihtyvyys on

$$\partial^2 y / \partial t^2 = -\omega^2 A \sin (k x - \omega t + \phi). \quad (16.10)$$

**Esim. 16.3.** Erään etenevän aallon yhtälö on

$$y(x,t) = 0.05 \text{ m} \sin [ \pi/2 (10x - 40t) - \pi/4 ].$$

Määrittää (a) aallonpituus, taajuus ja vaihenopeus; sekä (b) väliaineen nopeus ja kiihtyvyys paikassa  $x = 0.5 \text{ m}$  ajanhetkellä  $t = 0.05 \text{ s}$ .

## 16.7. Seisovat aallot

Tarkastellaan kahta vastakkaisiin suuntiin etenevää harmonista aaltoa, joilla on sama amplitudi, taajuus ja aallonpituus. Lineaarisen superpositioperiaatteen mukaan niiden resultanttiaalto on summa

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t),$$

kun komponenttiaaltojen (16.7) ja (16.8) vaihevakiot on asetettu nolliksi. Käyttämällä identiteettiä  $\sin x + \sin y = 2 \sin [(x + y)/2] \cos [(x - y)/2]$  saadaan

$$y(x,t) = 2 A \cos \omega t \sin kx. \quad (16.11)$$

Tämä yhtälö esittää stationääristä harmonista aaltoa  $y(x,t) = 2 A \cos \omega t$ , **seisovaa aaltoa**, joka ei etene. Väliaineen jokainen piste on samanvaiheisessa yksinkertaisessa harmonisessa värähdysliikkeessä, jonka amplitudi  $2A \sin kx$  on paikan funktio. **Solmukohdissa** (engl. node) amplitudi on nolla ja **kupukohdissa** (engl. antinode) se on  $2A$ .

Solmukohdissa  $\sin kx = 0$ , ts.  $kx = 0, \pi, 2\pi, \dots$  ja kupukohdissa  $\sin kx = \pm 1$ , ts.  $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ . Solmukohtien ja kupukohtien etäisyys toisistaan on  $\pi/k = \lambda/2$ .

## 16.8 Resonanssi

Rajoittamattomassa jatkuvassa väliaineessa esiintyvillä seisovilla aalloilla voi olla mikä taajuus tai aallonpituus tahansa. Sen sijaan rajoitetussa tilassa vain tietyt diskreetit taajuudet ja aallonpituudet ovat mahdollisia.

Molemmista päistään kiinnitettyyn lankaan voi muodostua seisova harmoninen aalto (langan päistä heijastuvien aaltojen yhdistyessä). Koska päät eivät liiku, niiden kohdalla on oltava solmukohdat. Solmukohdat ovat etäisyydellä  $\lambda/2$  toisistaan, joten langan pituuden  $L$  täytyy olla  $\lambda/2$ :n monikerta. Siten

$$L = n \lambda/2; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tämän ehdon ollessa voimassa saadaan heijastuvien aaltojen **resonanssi**, jolloin muodostuu joku värähtelyn **normaali-muodoista**. Tällöin aallonpituuden täytyy olla

$$\lambda_n = 2L / n, \quad (16.12)$$

joten sallitut normaalimuotojen taajuudet ovat

$$f_n = v / \lambda = nv / 2L. \quad (16.13)$$

Alin taajuus, jolla lanka voi värähdellä, on **perustaajuus** eli **ensimmäinen harmoninen taajuus**  $f = v / 2L$ . Tätä vastaava normaalimuoto on **perusvärähdys**, ja korkeamman taajuuden normaalimuodot ovat **ylivärähdyksiä**, 1. ylivärähdys, 2. ylivärähdys jne.

Käyttämällä yhtälöä  $v = \sqrt{F/\mu}$  (16.1) resonanssitaajuuksille saadaan lauseke

$$f_n = nv / 2L = n \sqrt{F/\mu} / 2L \quad (16.14)$$

joka osoittaa, että taajuus kasvaa langan jännityksen kasvaessa.

Resonanssiaallonpituus  $\lambda_n$  (16.12) saadaan myös seisovan aallon yhtälöstä (16.11) vaatimalla, että  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ . Tästä seuraa ehto  $\sin kL = 0$ , josta edelleen  $kL = n\pi$  ja  $L = n \lambda / 2$ .

**Esim. 16.4.** Tasajakoisessa eli kromaattisessa sävelasteikossa, jollaista käytetään tavallisesti kiinteäviritteisissä soittimissa, sävelten A ja D taajuuksien suhde on  $3/2$  (terssi). Määrää pianon A- ja D-kielten jännityksien suhde  $F_A / F_D$ , jos kielten pituuksien suhde  $L_A / L_D = 4/5$  ja ne on tehty samanlaisesta langasta.

## 16.9. Aaltoyhtälö

Jokainen muotoa  $y(x,t) = f(x \pm vt)$  oleva aalto toteuttaa lineaarisen differentiaaliyhtälön, jota sanotaan **aaltoyhtälöksi**. Merkitään  $z = x + vt$ , jolloin  $y(x,t) = f(x + vt) = f(z)$  ja

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz}, \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = \frac{d^2 f(z)}{dz^2}; \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} v, \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \frac{d^2 f(z)}{dz^2} v^2. \end{aligned}$$

Samat toiset derivaatat saadaan myös muuttujan  $x - vt$  tapauksessa. Aaltoyhtälö on derivaattojen välinen relaatio

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \quad (16.15)$$

Mekaanisten aaltojen tapauksessa tämä differentiaaliyhtälö voidaan johtaa suoraan soveltamalla Newtonin toista lakia väliaineen hiukkasten liikkeeseen.

Koska aaltoyhtälö (16.17) on **lineaarinen** (siinä esiintyy vain derivaattojen ensimmäisiä potensseja), sen ratkaisujen  $y_1, y_2, \dots$  mikä tahansa lineaarikombinaatio  $ay_1 + by_2 + \dots$  on myös ratkaisu. Tästä seuraa, että yhtälön kuvaamat aallot noudattavat lineaarista superpositioperiaattia.

**Esim.** Totea, että  $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$  toteuttaa aaltoyhtälön (16.15).

## 16.10. Aallon kuljettama energia jännitetyssä langassa

Tarkastellaan aallon  $y(x,t)$  etenemistä langassa, jonka massatiheys on  $\mu$ . Silloin  $dx$ :n pituisen langan osan massa on  $dm = \mu dx$ , joten tämän osan liike-energia on

$$dK = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2.$$

Kun  $dx$ :n pituinen osa venyy pituuteen  $d\ell$ , tehty työ on  $dU = F(d\ell - dx)$ . Koska  $(\partial y / \partial x)^2 \ll 1$ ,  $d\ell$  voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} d\ell &\approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \\ &\approx dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

missä on käytetty binomikehitelmää  $(1 + z)^n = 1 + nz + \dots$ . Näin ollen tarkasteltavan langan osan potentiaalienergia on

$$dU = F(d\ell - dx) \approx \frac{1}{2} F dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

ja mekaaninen kokonaisenergia  $dE = dK + dU$  on

$$dE = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + F \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Harmoniselle aallolle  $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} A^2 [\mu \omega^2 + Fk^2] \cos^2(kx - \omega t) dx \\ &= \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) dx, \end{aligned}$$

missä on käytetty riippuvuuksia  $k = \omega/v$  ja  $v^2 = F/\mu$ , jolloin  $Fk^2 = F\omega^2/v^2 = \mu\omega^2$ . Tämä merkitsee sitä, että kunkin langan osan liike- ja potentiaalienergiat ovat koko ajan keskenään yhtä suuret.

Lausekkeen  $dE$  arvot ovat välillä  $[0, \mu\omega^2 A^2 dx]$  ja funktion  $\cos^2(kx - \omega t)$  keskiarvo on  $1/2$ , joten aallon kuljettama keskimääräinen energia on

$$dE_{av} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 dx$$

ja keskimääräinen teho on

$$P_{av} = (dE/dt)_{av} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v, \quad (16.16)$$

missä  $v = dx/dt$  on aallon nopeus.

**Teho on siis verrannollinen etenevän aallon taajuuden ja amplitudin neliöihin.**

**Esim. 16.5.** Lanka, jonka massatiheys on 2.0 g/m, on kiinnitetty tankoon siten, että langan jännitys on 15 N. Tanko värähtelee taajuudella 12 Hz ja aiheuttaa lankaan aallon, jonka amplitudi on 1.5 mm. Kuinka paljon tangosta siirtyy tehoa lankaan?

## 16.11. Aallon nopeus

Tarkastellaan aaltoa  $y(x,t)$ , joka etenee langassa. Tällöin  $d\ell$ :n pituiseen langan osaan kohdistuu  $y$ -akselin suuntainen voima

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= F [\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta] \\ &\approx F [\tan(\theta + d\theta) - \tan \theta] \\ &= F [(\partial y / \partial x)_{x+dx} - (\partial y / \partial x)_x], \end{aligned}$$

missä derivaatat on laskettu pisteissä  $x$  ja  $x+dx$ . Kun tässä yhtälössä esiintyvä  $y$ :n 1. derivaattojen muutos jaetaan  $dx$ :llä, saadaan  $y$ :n toinen derivaatta

$$F_{\perp} = F dx (\partial^2 y / \partial x^2).$$

Newtonin toisen lain mukaan  $F_{\perp} = \mu dx (\partial^2 y / \partial t^2)$ , joten

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \quad (16.18)$$

Tuloksena on aaltoyhtälö (16.15), josta nähdään, että aallon nopeus on  $v = \sqrt{F/\mu}$ , kuten aikaisemmin on osoitettu yhtälössä (16.1).

# 17. ÄÄNIOPPI

## Pääkohdat:

1. Ääniaallot: pitkittäiset paine- ja tiheysaallot
2. Ääniaaltojen resonanssi
3. Doppler-ilmiö
4. Huojunta
5. Ääniaallon intensiteetti
6. Aaltoyhtälö

Ihmiskorvin voidaan kuulla ääniä, joiden taajuudet ovat välillä 20 Hz – 20 kHz. Tätä matalammat äänet ovat **infra-** ja korkeammat **ultraääniä**.

## 17.1. Ääniaallot

**Ääni on kaasun tai nesteen pitkittäistä aaltoliikettä, joka muuttaa jaksollisesti väliaineen painetta ja tiheyttä.**



Paineen muutosten maksimikohtissa molekyylien poikkeamat ovat nolliä ja päinvastoin, joten paineen ja poikkeamien välillä on  $90^\circ$  vaihe-ero.

Kappaleessa 17.5 osoitetaan, että pitkittäisten aaltojen nopeus nesteessä ja kaasussa (engl. fluid) on

$$v = \sqrt{B/\rho}, \quad (17.1)$$

missä

$$B = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (17.2)$$

on puristusmoduli eli puristuvuuskerroin (engl. bulk modulus).

**Esim. 17.1.** Laske pitkittäisten ääniaaltojen nopeus (a) vedessä ja (b) ilmassa (1 atm).

	B / Nm <sup>-2</sup>	ρ / kgm <sup>-3</sup>
vesi	$2.1 \times 10^9$	$10^3$
ilma	$1.41 \times 10^5$	1.29

## 17.2. Ääniaaltojen resonanssi

Putkessa olevaan ilmapatsaaseen, esim. urkupilliin voi muodostua seisova aalto, koska ääni heijastuu sekä putken suljetusta että avoimesta päästä. "Suljetun pillin" toinen pää on suljettu ja "avoimen pillin" molemmat päät ovat avoimia.

**Pillin suljetussa päässä** molekyylien poikkeamat ovat koko ajan nolliä, joten kyseessä **on poikkeamien solmukohta**, joka vastaa paineen kupukohtaa. Pillin suljettuun päähän saapuva paineen maksimi (minimi) heijastuu siis maksimina (miniminä) ja heijastuminen ei muuta paineaallon vaihetta.

**Avoim pää** on koko ajan ulkoilman paineessa, joten se **on paineen solmukohta** ja siis poikkeamien kupukohta. Pillin avoimeen päähän saapuva paineen maksimi muuttuu minimiksi ja päinvastoin, joten heijastunut paineaalto on puolen aallon vaihesiirrossa tulevaan aaltoon nähden, mutta poikkeama-aalto heijastuu vaiheensa säilyttäen.

Koska solmukohdan etäisyys viereisestä kupukohdasta on  $\lambda/4$ , pillin pituuden täytyy olla resonanssissa  $L = n \lambda/4$ , missä  $n$  on pariton kokonaisluku. Näin ollen suljetun pillin resonanssitaajuuudet ovat

$$f_n = v / \lambda = nv / 4L ; n = 1, 3, 5, \dots \quad (17.3)$$

Avoimen pillin molemmissa päissä on poikkeamien kupukohta. Koska vierekkäiset kupukohdat ovat etäisyydellä  $\lambda/2$  toisistaan, resonanssissa  $L$ :n täytyy olla  $\lambda/2$ :n monikerta, ts.

$$f_n = nv / 2L ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.4)$$

**Esim. 17.2.** Yläpäästään avoimeen pystyssä olevaan putkeen muodostetaan ilmapatsas laskemalla putkessa olevan veden pintaa. Samalla kuunnellaan ääniraudan putkeen tuottamaa ääntä, jolloin alunperin täydestä putkesta kuullaan kaksi ensimmäistä resonanssia, kun ilmapatsaan korkeus on 18.9 cm ja 57.5 cm. Mikä on ääniraudan taajuus, jos äänen nopeus on  $340 \text{ ms}^{-1}$ ?

### 17.3. Doppler-ilmio

Kun aaltoliikkeen lähde ja havaitsija liikkuvat toistensa suhteen, havaittu taajuus muuttuu. Tämä on Doppler-ilmio.

(i) Jos äänen lähde (S) on levossa väliaineen suhteen, mutta havaitsija (O) lähestyy lähdettä nopeudella  $v_O$ , ääniaaltojen nopeus O:n suhteen on  $v' = v + v_O$ , missä  $v$  on äänen nopeus väliaineen suhteen. **Aallonpituus O:n suhteen on muuttumaton**  $\lambda_0 = v / f_0$ , missä  $f_0$  ja  $\lambda_0$  ovat äänen taajuus ja aallonpituus S:n ja O:n ollessa levossa. Näin ollen O:n kuulema taajuus on

$$f' = \frac{v'}{\lambda_0} = \frac{v + v_O}{v} f_0.$$

Jos taas O etäänny lähteestä nopeudella  $v_O$ ,  $v' = v - v_O$  ja O:n havaitsema taajuus on  $f' = v' / \lambda_0 = [(v - v_O)/v] f_0$ . Yhdistämällä nämä lausekkeet saadaan

$$f' = \frac{v \pm v_O}{v} f_0. \quad (17.5)$$

(ii) Jos havaitsija on levossa, mutta äänen lähde lähestyy sitä nopeudella  $v_S$ , **aallonpituus lyhenee**. Koska S liikkuu yhden jakson aikana matkan  $v_S T$ , peräkkäiset aallonharjat ovat etäisyydellä  $\lambda' = v T - v_S T = (v - v_S) / f_0$  toisistaan. Aallonpituus on siis  $\lambda'$ , ja koska äänen nopeus O:n suhteen on  $v$ , hän havaitsee taajuuden

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_S} f_0.$$

Jos S etäänny O:sta nopeudella  $v_S$ , aallonpituus on  $\lambda' = v T + v_S T = (v + v_S) / f_0$  ja O:n havaitsema taajuus on  $f' = v / \lambda' = [v / (v + v_S)] f_0$ . Yhdistämällä nämä kaksi lauseketta saadaan

$$f' = \frac{v}{v \pm v_S} f_0. \quad (17.6)$$

(iii) Jos sekä lähde että havaitsija liikkuvat, voidaan yhdistää yhtälöt (17.5) ja (17.6) Tällöin saadaan

$$f' = \frac{v \pm v_O}{v \pm v_S} f_0. \quad (17.7)$$

Tätä yhtälöä käytettäessä etumerkit valitaan siten, että  $f'$  kasvaa S:n tai O:n liikkuesssa toista kohti ja se pienenee S:n tai O:n liikkuesssa toisesta poispäin.

**Esim. 17.3.** Poliisiauto kulkee  $50 \text{ ms}^{-1}$  nopeudella ja saavuttaa samaan suuntaan kulkevaa kuorma-autoa, jonka nopeus on  $25 \text{ ms}^{-1}$ . Poliisiauton hälytysäänen taajuus on  $1200 \text{ Hz}$ . Minkä taajuuden kuorma-auton kuljettaja kuulee ennen ohitusta ja sen jälkeen, kun äänen nopeus on  $350 \text{ ms}^{-1}$ ?

## 17.4. Huojuminen

Tarkastellaan kahta harmonista aaltoa, joilla on hieman toisistaan poikkeavat taajuudet  $f_1$  ja  $f_2$ . Oletetaan, että aaltojen amplitudit ovat samat ja niiden vaihevakiot ovat nolliä. Tällöin niiden resultantti on pisteessä  $x = 0$  on

$$\begin{aligned} y(0,t) &= A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t \\ &= 2 A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \end{aligned}$$

Tämä voidaan tulkita aalloksi, jonka taajuus on  $f_1$ :n ja  $f_2$ :n keskiarvo  $f_{av} = (f_1 + f_2) / 2$  ja jonka amplitudi vaihtelee hitaasti (on moduloitunut) taajuudella  $(f_1 - f_2) / 2$ .

Korva kuulee taajuuden  $f_{av}$ , mutta äänen voimakkuus vaihtelee huojuntataajuudella  $(f_1 - f_2)$ , joka on kaksi kertaa modulaatio-taajuus. Tämä aiheutuu siitä, että äänen voimakkuuden määrää amplitudifunktion  $\cos[(\omega_1 - \omega_2) t / 2]$  neliö  $\cos^2[\dots]$ .

Amplitudimoduloinnilla (AM) voidaan esim. radioaaltoihin liittää informaatiota. Tällöin kanta-aallon (taajuus esim.  $f_{av} = 30 \text{ MHz}$ ) amplitudia moduloidaan äänisignaalin taajuuksilla (yleensä alueella  $0 - 5 \text{ kHz}$ ). Tällöin nähdään, että amplitudifunktion taajuuden ollessa  $(f_1 - f_2) / 2 = 5 \text{ kHz}$  komponenttiaaltojen taajuudet ovat  $f_1 = f_{av} + 5 \text{ kHz}$  ja  $f_2 = f_{av} - 5 \text{ kHz}$ . Tästä seuraa, että AM-radiokanava vaatii käyttöönsä  $10 \text{ kHz}$ :n levyisen taajuuskaistan.

## 17.5. Äänen nopeus

Tarkastellaan putkessa olevaa nestettä (tai kaasua), jossa etenee pitkittäinen aalto. Kun aalto saapuu pisteeseen  $x$ , siinä oleva  $\Delta x$ :n pituinen nestesyylinteri siirtyy pisteeseen  $x + s$  ja laajenee tai puristuu  $\Delta x + \Delta s$ :n pituiseksi. Ko. neste-elementin massa ei muutu, vaan se on  $\Delta m = \rho A \Delta x$ , missä  $\rho$  on nesteen tasapainotiheys ja  $A$  on putken poikkipinta-ala.

Neste-elementin kiihtyvyys on  $a = \partial^2 s / \partial t^2$ , joten Newtonin toisen lain mukaan

$$F = (p_1 - p_2) A = \Delta m a = \rho A \Delta x \partial^2 s / \partial t^2, \quad (17.8)$$

missä  $p_1$  ja  $p_2$  ovat aallon aiheuttamat paineen muutokset elementin vasemmalla ja oikealla puolella. Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain  $A$ :lla ja  $\Delta x$ :llä, saadaan rajalla  $\Delta x \rightarrow 0$  tulos

$$-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p_2 - p_1}{\Delta x} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (17.9)$$

Tilavuuden suhteelliseen muutokseen  $\Delta V/V$  tarvittavaa paineen muutosta  $p$  kuvaa puristusmoduli (17.2)

$$B = -p / (\Delta V/V).$$

Aallon aiheuttama tilavuuden muutos on

$$\Delta V/V = A \Delta s / (A \Delta x) = \Delta s / \Delta x \rightarrow \partial s / \partial x, \text{ kun } \Delta x \rightarrow 0.$$

Siten paineen muutokselle saadaan lauseke

$$p = -B \partial s / \partial x. \quad (17.10)$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (17.9), saadaan pitkittäisten poikkeamien  $s$  aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (17.11)$$

Vertaamalla tätä yleiseen aaltoyhtälöön (16.15) havaitaan, että aallon nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (17.12a)$$

Tämä on äänen nopeus nesteessä ja kaasussa (fluid).

Harmonisen aallon tapauksessa väliaineen pitkittäiset poikkeamat ovat ( $\phi = 0$ )

$$s = s_0 \sin(kx - \omega t), \quad (17.13)$$

joten yhtälön (17.10) mukaan sen paineen muutokset ovat

$$\begin{aligned} p &= -B \partial s / \partial x = -B k s_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= -p_0 \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Koska  $k = \omega/v$  (16.15) ja  $B = \rho v^2$  (17.12a), paineamplitudi on

$$p_0 = B k s_0 = \rho \omega v s_0. \quad (17.15)$$

Vertaamalla yhtälöitä (17.13) ja (17.14) nähdään, että  $s$ :n ja  $p$ :n (poikkeaman ja paineen) välillä todella on  $90^\circ$ :n vaihe-ero, kuten kappaleessa 17.1 jo pääteltiin.

Äänen nopeus kaasussa voidaan kirjoittaa tilasuureiden avulla olettamalla, että äänen eteneminen on ideaalikaasun adiabaattinen prosessi (ts., lämmön siirtymistä kaasussa ei paineaallon oskillaatioiden aikana ehdi tapahtua). Tällöin paineen  $P$  ja tilavuuden  $V$  välillä on relaatio  $PV^\gamma = \text{vakio}$ , missä  $\gamma = C_p/C_v$ . Tämän yhtälön kokonaisdifferentiaali antaa paineen muutoksen  $dP$  ja tilavuuden muutoksen  $dV$  välille relaation

$$dP V^\gamma + P \gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

josta saadaan merkitsemällä  $dP = \Delta P = p$  ja  $dV = \Delta V$  edelleen

$$p = -\gamma P \Delta V/V.$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (17.2) havaitaan, että kaasun adiabaattinen puristuvuuskerroin on

$$B = -p / (\Delta V/V) = \gamma P.$$

Siten äänen nopeus kaasussa on yhtälön (17.12a) mukaan

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \quad (17.12b)$$

Käyttämällä vielä ideaalikaasun tilanyhtälöä  $PV = nRT$  ja esittämällä kaasun massatiheys muodossa  $\rho = nM/V$ , missä  $M$  on moolinmassa (kg/mol), saadaan

$$v = \sqrt{[(\gamma nRT/V) / (nM/V)]}.$$

Tästä saadaan lopulta äänen nopeuden riippuvuus lämpötilasta ja kaasumolekyylien massasta

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (17.12c)$$

## 17.6. Äänen intensiteetti

Edellä tarkastellun (putkessa etenevän) harmonisen aallon aiheuttama nesteeseen paineen lisäys on  $p$ , joten aalto kohdistaa nesteeseen voiman  $F(x,t) = p(x,t) A$ . Koska väliaine liikkuu nopeudella  $\partial s(x,t)/\partial t$ , aalto tekee työtä teholla

$$P(x,t) = F(x,t) \partial s(x,t)/\partial t = p(x,t) A \partial s(x,t)/\partial t.$$

Käyttämällä yhtälöitä (17.13) ja (17.14) tehoksi saadaan

$$P(x,t) = p_0 A \omega s_0 \cos^2(kx - \omega t).$$

Funktion  $\cos^2(kx - \omega t)$  keskiarvo on  $1/2$ , joten aallon kuljettama keskimääräinen teho on

$$P_{av} = 1/2 p_0 A \omega s_0 = 1/2 \rho A \omega^2 s_0^2 v, \quad (17.16)$$

koska  $p_0 = \rho \omega v s_0$  (17.15).

Aaltoliikkeen intensiteetti  $I$  on sen etenemissuuntaa vastaan kohtisuoran pinta-alayksikön läpi aikayksikössä siirtynyt energiamäärä ( $W/m^2$ )

$$I = \text{teho} / \text{pinta-ala} = P / A. \quad (17.17)$$

Ääniaallon keskimääräinen intensiteetti on yhtälön (17.16) mukaan

$$I_{av} = P_{av} / A = 1/2 \rho \omega^2 s_0^2 v,$$

joka voidaan esittää paineamplitudin  $p_0$  funktiona sijoittamalla  $s_0 = p_0 / (\rho \omega v)$  (17.15)

$$I_{av} = p_0^2 / 2\rho v. \quad (17.18)$$

Tässä muodossa esitettyä intensiteettiä on taajuudesta riippumaton.

Pistemäisen lähteen synnyttämän isotrooppisen palloaallon tapauksessa aaltorintaman pinta-ala etäisyydellä  $r$  lähteestä on  $4\pi r^2$ , joten intensiteetti on

$$I = P / 4\pi r^2, \quad (17.19)$$

missä  $P$  on lähteen säteilemä teho.

Kokeellisesti on huomattu, että äänen intensiteetin kasvaessa kymmenkertaiseksi korvan aistiman äänen voimakkuus kasvaa noin kaksinkertaiseksi. Tästä syystä on hyödyllistä mitata kuuloaistimuksen voimakkuutta intensiteetin  $I$  logaritmilta määrittelemällä äänen intensiteettitaso  $\beta$  yhtälöllä

$$\beta = 10 \lg I/I_0, \quad (17.20)$$

missä  $I_0$  on ihmisen kuulokynnystä vastaava intensiteetti (pienin ihmisen kuultavissa oleva intensiteetti) 1 kHz:n taajuudella,  $10^{-12} W/m^2$ . Intensiteettitason yksikkö on **desibeli** (dB). Edellisessä, desibelin määritelmässä, käytetään 10-kantaista logaritmia  $\lg = \log_{10}$ .

Kuulokynnyksen ja kipukynnyksen,  $I_p = 1 W/m^2 = c I_0$  intensiteettitasot ovat

$$\beta_0 = 10 \lg I_0/I_0 = 0 \text{ dB ja}$$

$$\beta_p = 10 \lg 10^{12} I_0/I_0 = 120 \text{ dB.}$$

**Esim. 17.4.** Laske kuulo- ja kipukynnyksiä vastaavat poikkeama- ja paineamplitudit, kun ilman tiheys on  $1.29 \text{ kg/m}^3$  ja äänen nopeus on  $340 \text{ m/s}$  ja taajuus  $1.0 \text{ kHz}$ .

**Esim. 17.5.** Erään äänilähteen intensiteetti on  $I_1$  tietyllä etäisyydellä mitattuna. Mikä on intensiteettitaso havaintopaikassa, jos äänilähteen viereen tuodaan toinen samanlainen äänilähde.

**Esim. 17.6.** Isotrooppisesti joka suuntaan emittoivan kaiuttimen ääniteho on 0.8 W. Millä etäisyydellä kaiuttimesta on intensiteettitaso 85 dB?

## 17.7. Fourier-sarja

Luonnossa esiintyvät aallot ovat harvoin puhtaasti harmonisia, ts. muotoa (16.7) tai (16.8). Esim. musiikki-instrumenttien tuottamien ääniaaltojen muoto poikkeaa yleensä huomattavasti sinifunktion muodosta, koska instrumentti värähtelee perustajuutensa lisäksi useilla korkeammilla harmonisilla taajuuksilla.

Vuonna 1807 Joseph Fourier osoitti, että mikä tahansa normaalisti käyttäytyvä jaksollinen funktio voidaan esittää harmonisten funktioiden superpositiona. Jos aaltoliike on tietyssä pisteessä  $x$  ajan  $t$  jaksollinen funktio  $y(t)$ , jonka jakson pituus on  $T$ , se voidaan esittää Fourier-sarjana

$$y(t) = b_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t), \quad (17.21a)$$

missä  $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ . Sen harmonisten komponenttien  $a_n \sin n\omega t$  ja  $b_n \cos n\omega t$  taajuudet  $nf$  ovat funktion  $y(t)$  taajuuden  $f$  monikertoja. Komponenttien amplitudit  $a_n$  ja  $b_n$ , Fourier-kertoimet, saadaan integraaleina

$$a_n = 2/T \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt \quad (17.21b)$$

ja

$$b_n = 2/T \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt. \quad (17.21c)$$

Esim. värähdysajan  $T$  välein jaksollisesti toistuvan suorakulmaisen aallon

$$y(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T/2 \text{ ja} \\ -A, & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

Fourier-sarja on

$$y(t) = 4A/\pi (\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/5 \sin 5\omega t + 1/7 \sin 7\omega t + \dots).$$

# 34. MAXWELLIN YHTÄLÖT JA SÄHKÖMAGNEETTISET AALLOT

## Pääkohdat:

1. Ampèren lain täydennys: Siirtymävirta
2. Sähkömagneettiset aallot: Maxwellin yhtälöt
3. Sähkömagneettisen säteilyn energia ja Poyntingin vektori
4. Sähkömagneettisen säteilyn liikemäärä ja säteilypain

Faraday oli huomannut jo v. 1845, että **magneettikenttä vaikuttaa lasissa etenevään valoon**, ja oletti sen vuoksi valossa olevan "sähköisiä ja magneettisia" värähtelyjä. Koska suureen  $1 / (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  oli havaittu olevan suuruudeltaan mitatun valonnopeuden luokkaa, päätti James Clerk Maxwell tutkia Faradayn hypoteesia tarkemmin. Hän huomasi v. 1861, että **Ampèren laki ei ole yksikäsitteinen** ja täydensi sitä ns. siirtymävirtatermillä. Tämän jälkeen hän päätyikin lopulta v. 1865 ennustamaan sähkömagneettisten aaltojen olemassa olon ns. Maxwellin yhtälöiden pohjalta.

## 34.1. Siirtymävirta

Sähkövirta luo ympärilleen magneettikentän  $\mathbf{B}$ , jonka viivaintegraali suljetun silmukan  $\ell$  ympäri on Ampèren lain mukaan

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I, \quad (30.11)$$

missä  $I$  on silmukan rajoittaman pinnan läpi kulkeva sähkövirta ja  $\mu_0$  on tyhjiön permeabiliteetti. Katso tarkemmin Sähkö- ja magnetismiopin kurssista, kappaleesta 30.4.

Tarkastellaan oheisen kuvan mukaisesti johtimen magneettikenttää tapauksessa, jossa virralla  $I$  varataan kondensattoria. Ampèren lakia voidaan soveltaa siten, että johdin läpäisee silmukan, jota pitkin integrointi suoritetaan ja virta  $I$  läpäisee silmukan määräämän tason. Mutta jos silmukan määräämä pinta valitaan siten, että se kulkee kondensaattorin levyjen välistä, pinnan läpäisevä virta  $I = 0$  ja saadaan virheellinen tulos  $\mathbf{B} = 0$ .

Tästä syystä Maxwell päätteli, että **kondensaattorin levyjen välissä muuttuva sähkökenttä aiheuttaa oman magneettikenttänsä**. Sen lähteenä on muodollisesti kondensaattorin levyjen välissä kulkeva ns. **siirtymävirta**  $I_D$  (engl. displacement current), jonka avulla Ampèren laki saa muodon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 (I + I_D).$$

Jos tasolevykondensaattorin varaus on  $Q(t)$  ja levyjen pinta-ala on  $A$ , levyjen välissä on sähkökenttä  $E = Q / \epsilon_0 A$ , missä  $\epsilon_0$  on tyhjiön permittiivisyys. Varaus ja kenttä muuttuvat, kun johdossa kulkee virta, sillä

$$I = dQ/dt = \epsilon_0 A dE/dt = \epsilon_0 d\Phi_E/dt, \quad (34.1)$$

missä  $\Phi_E = AE$  on sähkökentän vuo. Siten **muuttuvaan sähkökenttään liittyvä siirtymävirta** on

$$I_D = \epsilon_0 A dE/dt = \epsilon_0 d\Phi_E/dt.$$

Nyt voidaan kirjoittaa **Ampère–Maxwellin laki** muotoon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right). \quad (34.2)$$

**Esim. 34.1.** Tasolevykondensaattorin levyt ovat R-säteisen ympyrän muotoisia. Määrää magneettikenttä levyjen välissä, kun kondensaattori varautuu vakiovirralla I.

## 34.2. Maxwellin yhtälöt

Sähkö–magnetismin perusyhtälöt voidaan nyt koota yhteen ns. Maxwellin yhtälöiksi. Nämä ovat Sähkö- ja magnetismin kurssilta yhtälöt (24.3), (31.2) ja (31.3) sopivasti yleistettyinä sekä edellä saatu yhtälö (34.2):

Gauss 
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int \rho \, d\mathbf{r} = Q \quad (34.3)$$

Gauss 
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (34.4)$$

Faraday 
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (34.5)$$

Ampere–Maxwell 
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (34.6)$$

Maxwellin yhtälöt ovat symmetriset sähkö- ja magneettikenttien suhteen lukuunottamatta sitä, että magneettisia varauksia ja niiden virtoja ei esiinny.

Maxwellin yhtälöt voidaan esittää myös differentiaalimuodossa:

Gauss 
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (34.3b)$$

Gauss 
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (34.4b)$$

Faraday 
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (34.5b)$$

Ampere–Maxwell 
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (34.6b)$$

Maxwellin yhtälöt täydennettyinä vielä varauksen säilymislailla ja liikkuvaan varaukseen q kohdistuvan Lorentz-voiman lausekkeella

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (29.12)$$

selittävät ja kuvaavat täydellisesti kaikki sähkömagneettiset ilmiöt.



### 34.3. Sähkömagneettiset aallot

Kahdesta jälkimmäisestä Maxwellin yhtälöstä voidaan helposti johtaa sähkömagneettisten aaltojen yhtälö. Tarkastellaan tilannetta tyhjiössä:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (34.7)$$

Samoin saadaan magneettikentälle

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (34.8)$$

Nämä ovat tavallisia aaltoyhtälöitä, muotoa (16.15), joista **ete-  
nevän aallon nopeudeksi saadaan**

$$c = 1 / (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \quad (34.9)$$

Vakion  $\mu_0$  arvo on ampeerin määritelmän perusteella  $4\pi \times 10^{-7}$  Vs / Am ja vakion  $\epsilon_0$  arvo puhtaasti sähköisin mittauksin määritettynä  $8.854 \times 10^{-12}$  As / Vm. Nämä arvot antavat sähkömagneettisten aaltojen nopeudeksi

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Tämä on **valon nopeus tyhjiössä**. Valo onkin sähkömagneettista aaltoliikettä. Tästä johtuen vakio  $\epsilon_0$  määritelläänkin nykyisin yhtälöllä

$$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2).$$

Aaltoyhtälöiden (34.7) ja (34.8) ratkaisut

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) \text{ ja}$$

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

kuvaavat **x-akselin suuntaan eteneviä tasoaaltoja, jotka eivät riipu koordinaateista y ja z, mutta  $E = E_y$  tai  $E_z$  ja  $B = B_z$  tai  $B_y$ .**

Maxwellin yhtälöistä seuraa siis, että sähkömagneettisilla tasoaalloilla on seuraavat ominaisuudet:

1. E ja B esiintyvät yhdessä siten, että kaikilla x:n ja t:n arvoilla

$$E = c B \quad (34.10)$$

2. Edellisestä seuraa, että **E ja B ovat samassa vaiheessa.**
3. **E ja B ovat kohtisuorassa aallon etenemissuuntaa vastaan, joten kyseessä on poikittainen aalto.**
4. **E ja B ovat myös kohtisuorassa toisiaan vastaan siten, että vektori  $E \times B$  osoittaa aallon etenemissuuntaan.**

Mikäli sähkömagneettinen aalto, esim. valo kulkee väliaineessa, jossa  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  ja  $\mu = \mu_r \mu_0$ , niin sen nopeus on

$$v = 1 / \sqrt{\mu\varepsilon},$$

joka on aina pienempi kuin valon tyhjiönopeus  $c$ . Tämä on seurausta siitä, että **sähkö- ja magneettikentät ovat vuorovai-  
kutuksessa aineen varausten kanssa.**

### 34.4 Aallon kuljettama energia ja Poyntingin vektori

Sähkö- ja magneettikenttiin liittyvän energian analyysi osoitti, yht. (26.10) ja (32.13), että kenttien **energiatiheydet** ovat

$$u_E = 1/2 \varepsilon_0 E^2 \quad (34.11a)$$

ja

$$u_B = 1/2 B^2/\mu_0. \quad (34.11b)$$

Koska  $E = cB = B / \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ , niin  $u_E = u_B$  ja **etenevän sähkömagneettisen aallon kokonaisenergiatiheys**  $u_E + u_B$  on

$$u_E = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0 = \sqrt{(\varepsilon_0/\mu_0)} EB. \quad (34.12)$$

Koska aallon energia liikkuu aallon mukana nopeudella  $c$ , sen etenemissuuntaa vastaan kohtisuoran tason läpi kulkee ajassa  $dt$  energia  $dU = u A c dt$ , missä  $A$  on tason pinta-ala ja  $A c dt$  on sen aallon osan tilavuus, joka kulkee ajassa  $dt$  tason läpi. **Aallon intensiteetti** eli teho/pinta-ala

$$S = (dU/dt) / A \quad (34.13)$$

on siis

$$S = uc = EB / \mu_0, \quad (34.14)$$

missä  $E$  ja  $B$  ovat ajasta riippuvia.

Aallon kuljettaman energian suuruutta ja suuntaa voidaan kuvata ns. **Poyntingin vektorilla**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0, \quad (34.15)$$

jonka itseisarvo  $|\mathbf{S}| = S$  on aallon intensiteetti ja suunta on energian etenemissuunta.

Jos  $\mathbf{E}$  on tasoaalto  $\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t)$ ,  $\mathbf{B}$  on samanvaiheinen tasoaalto  $\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{B}_0 \sin(kx - \omega t)$  ja aallon intensiteetti on yhtälön (34.14) mukaan

$$S = EB / \mu_0 = E_0 B_0 / \mu_0 \sin^2(kx - \omega t).$$

Koska funktion  $\sin^2(kx - \omega t)$  keskiarvo  $1/2$ , aallon keskimääräinen intensiteetti on

$$S_{av} = u_{av} c = E_0 B_0 / 2\mu_0. \quad (34.16)$$

**Esim. 34.2.** Radioasema lähettää 10 kW teholla 100 MHz taajuista signaalia. Laske 1 kilometrin etäisyydellä lähettimestä (a) aallon sähkö- ja magneettikenttien amplitudit, ja (b) energia, joka saapuu 10 cm  $\times$  10 cm pinnalle 5 min aikana.

**Esim. 34.3.** Kun jännitelähde kytketään johtimella virtapiiriin, syntyy johtimen ympärille sähkökenttä. Sen lisäksi sähkövirta synnyttää magneettikentän. Osoita käyttäen Poyntingin vektoria, että johtimeen siirtyvä energia on yhtäsuuri kuin syntyvä Joulen lämpö.

## 34.5 Säteilypain

Suhteellisuusteorian mukaan **energialla  $U$  on massa  $m$  siten, että  $U = mc^2$** . Koska sähkömagneettinen aalto kuljettaa energiaa (nopeudella  $v = c$ ), sillä on näin ollen myös liikemäärä. Energian  $U$  **liikemäärä** on

$$p = mv = mc = U/c. \quad (34.17)$$

Jos sähkömagneettinen aalto absorboituu täydellisesti johonkin pintaan, se luovuttaa sille liikemäärän  $U/c$ . Jos aalto heijastuu pinnasta täydellisesti palaten tulosuuntaansa, liikemäärän säilymisen vuoksi se "luovuttaa" pinnalle liikemäärän  $2U/c$ .

Jos kappale saa ajassa  $dt$  liikemäärän  $dp$ , siihen kohdistuu Newtonin toisen lain mukaan voima  $F = dp/dt$ . Sähkömagneettisen aallon etenemissuuntaa vastaan kohtisuoralle tasolle saapuu ajassa  $dt$  energia  $dU = uAc dt = SA dt$ . Jos energia absorboituu täydellisesti, taso saa liikemäärän  $dp = dU/c = uA dt = (S/c) A dt$  ja siihen kohdistuu siis voima  $F = dp/dt = uA = (S/c) A$ . Tämä merkitsee sitä, että pintaan kohdistuu **säteilypain**

$$P = F/A = S/c = u, \quad (34.18)$$

joka on sama kuin aallon energiatiheys  $u$  ( $N/m^2 = J/m^3$ ). Jos aalto heijastuu täydellisesti kääntyen vastakkaissuuntaiseksi, säteilypain on  $2u$ .

**Esim. 34.4.** Auringon säteilyn intensiteetti maan pinnalla on  $1.0 \text{ kW/m}^2$ . Aurinkopaneeli, jonka koko on  $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ , absorboi auringon säteilyn kokonaan. Mikä on auringon säteilyn aiheuttama voima paneeliin, kun säteily tulee kohtisuoraan paneelin pintaa vastaan?

## 34.6. Hertzin koe

Heinrich Hertz onnistui v. 1887 tuottamaan ja havaitsemaan Maxwellin ennustamat aallot laboratorio-olosuhteissa. Heijastavia metallipintoja käyttäen hän onnistui jopa saamaan aikaan seisovia aaltoja. Kun taajuus oli määritettävissä LC-piirin resonanssitaajuutena, hän saattoi määrittää keksimiensä aaltojen etenisnopeudenkin, noin  $3 \times 10^8$  m/s.

Hertzin kokeiden seurauksena opittiin pian käyttämään radioaalloja informaation siirtoon. Vuonna 1996 "radio täyttikin jo sata vuotta".

## 34.7. Sähkömagneettisten aaltojen spektri

Sähkömagneettiset aallot kattavat hyvin laajan taajuusalueen, jonka ääripäitä edustavat hyvin pitkät radioaallot ( $\approx 100$  Hz) ja kosmisessa säteilyssä esiintyvät "kovat"  $\gamma$ -säteet ( $\approx 10^{23}$  Hz). Tämä kattaa noin 100 oktaavia. Taajuuksilla ei ole periaatteessa mitään teoreettista ylä- tai alarajaa. Taajuudet tai aallonpituudet voidaan karkeasti jakaa erillisiin alueisiin lähinnä sen mukaan, kuinka aallot syntyvät ja/tai kuinka niitä havaitaan.

### Näkyvä valo

Ihmisen silmän näkemät aallonpituudet ovat välillä 400 – 750 nm seuraavasti: **violetti** 400 – 450 nm, **sininen** 450 – 520 nm, **vihreä** 520 – 560 nm, **keltainen** 560 – 600 nm, **oranssi** 600 – 625 nm ja **punainen** 625 – 750 nm.

Näkyvän valon aallonpituuksia voi syntyä **atomien valenssielektronien siirtyessä** diskreetistä energiatilasta toiseen, jolloin saadaan **epäjatkuva viivaspektri** tai elektronien satunnaisliikkeen seurauksena korkeassa lämpötilassa olevassa **termisessä lähteessä**, esim. auringossa, jolloin säteilyn intensiteetti on aallonpituuden jatkuva funktio. Hyvin intensiivistä näkyvää valoa ja muuta sähkömagneettista säteilyä aallonpituuksilla 0.01 - 10000 nm voidaan myös tuottaa **synkrotronisäteilynä** elektronien kiertäessä lähes valon nopeudella rengasmaisessa hiukkaskiihdyttimessä, synkrotronissa.

Näköaisti ja kasvien fotosynteesi ovat kehittyneet toimimaan sillä auringonvalon aallonpituusalueella, jota maan ilmakehä ei absorboi (300 – 1100 nm).

### Ultraviolettisäteily

Ultraviolettisäteilyn (UV) aallonpituusalue on välillä 400 nm – 1 nm. UV-säteilyä voi syntyä **atomien ulkoelektronien siirtymisissä, termisissä lähteissä** ja myös esim. synkrotronissa. Jos ilmakehän **otsoni** ei absorboisi lähes kokonaan UV-säteilyn lyhytaaltoista osaa ( $\lambda < 300$  nm), auringon säteily vahingoittaisi vakavasti elollista luontoa. On osoitettu, että mm. kylmälaiteissa käytettävät (chlorofluorocarbon) **CFC-yhdisteet** (freonit, esim.  $\text{CF}_2\text{Cl}_2$  ja  $\text{CF}_3\text{Cl}$ ) aiheuttavat otsonikerroksen ohenemista, otsonikatoa, ja lisäävät näin maan pinnalle tulevan UV-säteilyn määrää. Tavallinen lasi absorboi voimakkaasti pitkäaaltoistakin UV-säteilyä, joten UV-alueen optisissa komponenteissa on käytettävä esim. kvartsilasia.

Joissakin atomeissa UV-säteilyn absorptiota seuraa pitempi-aaltoisen näkyvän valon emissio. Tämän **fluoresenssi-ilmiön** avulla voidaan esim. Hg-loisteputken 253.7 nm:n UV-säteily, joka on noin 80 % putken kokonaissäteilystä, muuttaa näkyväle alueelle.

### **Infrapunasäteily**

Infrapunasäteilyn (IR) aallonpituusalue on välillä 750 nm – 1 mm ja se **voidaan havaita lämpönä**. Sitä syntyy termisten lähteiden lisäksi **molekyylien värähdys- ja pyörimisenergian muutoksissa**. Ilmakehän hiilidioksidi ja muut ns. kasvihuonekaasut absorboivat IR-säteilyä ja kohottavat näin maapallon lämpötilaa, ns. **kasvihuoneilmiö**. Koska lasi läpäisee vain lyhytaaltoista IR-säteilyä, IR-alueen optiikassa on käytettävä esim. NaCl-komponentteja.

Ympäristöään lämpimämpi kohde voidaan havaita sen lähettämän IR-säteilyn avulla käyttämällä IR-herkkää filmiä tai videokameraa, ns. **lämpökameraa**. Tällä tavoin voidaan paikantaa mm. rakennusten lämpövuotoja, maastoon kadonneita henkilöitä ja ihmisen elimistössä olevia kasvaimia.

### **Mikroaallot**

Mikroaaltosäteilyn aallonpituusalue on 1 mm – 15 cm ja sitä emittoituu **molekyylien pyörimisenergian muutoksissa** ja elektronien värähdellessä erityisrakenteisissa **elektroniputkissa**, esim. klystronissa tai magnetronissa. Näitä aaltoja **käytetään mm. tiedonsiirrossa** (esim. puheluiden ja numeerisen tiedon välittämiseen), tutkissa (esim. säätutkassa havaitsemaan ilmassa olevia vesipisaroita) ja **mikroaaltouunissa taajuudella 2450 MHz, jota vesimolekyylit absorboivat** tehokkaasti.

**Esim.** Laske 2450 MHz:n mikroaaltojen aallonpituus.

### **Radioaallot**

Radioaaltojen aallonpituusalue on 15 cm – 3000 km, mutta radio- ja TV-lähetyksissä käytettävä alue on 15 cm – 2 km. Radioaaltoja syntyy **elektronien ollessa kiihtyvässä liikkeessä** esim. auringon pintakerroksessa olevassa magneettikentässä tai lähetyksantenniin kytketyssä vaihtojännitteessä. Niitä **voidaan vastaanottaa** joko aallon E-kentän suuntaisella suoralla johtimella, ns. **sauva-antennilla**, tai B-kentän suuntaisella kellalla, ns. **kehäantennilla**, joihin muuttuva E tai B indusoi vaihtovirran.

### **Röntgensäteet** (v. 1895, W. Röntgen)

Röntgensäteiden aallonpituusalue on 1 nm – 0.1 pm, joka menee osittain päällekkäin  $\gamma$ -säteiden alueen kanssa. Tätä säteilyä syntyy **elektronien ollessa kiihtyvässä liikkeessä** tähtien pintakerroksissa ja todennäköisesti supernovien sekä mustien aukkojen ympärillä. Sitä voidaan tuottaa synkrotronisäteilynä tai **röntgenputkessa** kiihdytettyjen elektronien hidastuessa raskaasta metallista valmistetussa anodissa, jolloin saadaan **jatkuvan spektrin omaavaa jarrutus säteilyä**. Sitä syntyy myös **atomien sisäkuorten elektronien siirtyessä** energiatilasta toiseen, jolloin saadaan **epäjatkuvaa karakteristista säteilyä**.

Laajan diagnostisen ja terapeuttisen lääketieteellisen käytön lisäksi röntgensäteitä käytetään **röntgendiffraktion** avulla kiteiden tai kiteytettyjen molekyylien, esim. proteiinien **rakenteiden tutkimiseen**. Niillä voidaan myös paikallistaa materiaaleissa olevia virheitä.

### **Gammasäteet**

Säteilyä, jonka aallonpituudet ovat alle 10 pm tai vastaavasti taajuudet yli  $10^{20}$  Hz, sanotaan  $\gamma$ -säteiksi. Niitä emittoituu **ydinreaktioissa** ja saapuu maahan mm. **avaruussäteilynä**. Gammasäteily on tavallisesti selvästi **hiukkassäteilyn luonteista**.

# 35. VALON HEIJASTUMINEN JA TAITTUMINEN

## Pääkohdat:

1. Valon säteet -> geometrinen optiikka
2. Heijastumis- ja taittumislait
3. Huygensin periaate
4. Valon dispersio ja prisma
5. Todellinen kuva ja valekuva
6. Pallopeilit, kuvausyhtälöt ja sädediagrammit

Newton oli olettanut valon olevan **hiukkasvirtaa**. Huygens taas oletti valon olevan jotakin muuta, lähinnä **aaltoliikettä**, mikä saikin tukea kokeellisilta havainnoilta. Itse asiassa valo on osoittautunut olevan **molempia kvanttiteorian mukaan**.

Kaikki klassilliseen sähkömagnetismiin liittyvät probleemat, kuten valon eteneminen, voidaan ratkaista Maxwellin yhtälöiden ja Lorentz-voiman lausekkeen avulla. Monissa tapauksissa ratkaisu voidaan kuitenkin löytää yksinkertaisemmin. Esim. valon käyttäytymistä kahden aineen rajapinnassa voidaan tarkastella **geometrisen optiikan** eli **sädeoptiikan** avulla.

## 35.1. Geometrinen optiikka

Kokemuksesta tiedämme, että valo kulkee suoraviivaisesti, ainakin tavallisimmissa tapauksissa. Geometrisessa optiikassa valon säteiden eli aaltorintamien normaalien oletetaan noudattavan yksinkertaisia geometrisia lakeja. Perusolettamus on se, että

- **valon säteet etenevät homogeenisessa väliaineessa suoraviivaisesti.**

Tämä merkitsee sitä, että valon **aaltoluonteesta johtuvat taipumisilmiöt jätetään ottamatta huomioon**. Näin voidaan tehdä, kun valon aallonpituus on paljon pienempi kuin tarkasteltavan systeemin yksityiskohdat.

## 35.2. Heijastuminen

Kun valo kohtaa kahden aineen (esim. ilman ja lasin) rajapinnan, tapahtuu **yleensä osittainen heijastuminen**. Jos pinta on epätasainen, heijastuneet säteet lähtevät eri suuntiin. Heijastuminen on tällöin diffuusi ja pinta näyttää himmeältä. Jos sen sijaan pinta on kiillotettu tasaiseksi, heijastuneet säteet noudattavat **heijastuslakia**:

- **Tuleva säde, heijastunut säde ja pinnan normaali ovat samassa tasossa ja tulokulma on sama kuin heijastuskulma.**

Tämä edellyttää sitä, että pinnan epätasaisuudet ovat pienempiä kuin valon aallonpituus. Kyseessä on tällöin **peiliheijastus** eli spekulaarinen heijastus ja heijastunut säde voidaan nähdä vain yhdestä suunnasta.

**Esim. 35.1.** Kaksi peiliä on asetettu  $120^\circ$  kulmaan toistensa suhteen. Valonsäteen tulokulma on ensimmäiseen peiliin on  $50^\circ$  siten, että säde heijastuu siitä toiseen peiliin ja säde on kohtisuorassa peilien yhdyssuoraa vastaan. Mihin suuntaan säde heijastuu toisesta peilistä?

Kolmen keskenään kohtisuoran peilin muodostama kuutiomainen **nurkkaheijastin** (engl. corner reflector tai cube corner reflector) **heijastaa kaikki siihen saapuvat säteet takaisin täsmälleen tulo-suuntaansa**. Sitä käytetään esim. autojen ja polkupyörien heijastimissa. Lähettämällä satelliitteihin ja kuun pinnalle asennettuihin nurkkaheijastimiin eri paikoista lyhyitä laserpulseja ja mittaamalla niiden paluuaikoja on voitu seurata tarkasti esim. mannerten hidasta liikkumista.

### **Huygensin periaate**

Vuonna 1678 Christian Huygens esitti periaatteen, joka tarjoaa käyttökelpoisen näkökulman aallon etenemisen kuvaamiseen. Se voidaan muotoilla seuraavasti:

- **Aaltoliikkeen etenemisalueen jokainen piste muodostaa sekundääristen alkeisaaltojen lähteen, josta ne etenevät kaikkiin suuntiin palloaaltoina. Kokonaisalto on näiden alkeisaaltojen summa.**

Siten aaltorintaman eri pisteistä lähteneiden palloaaltojen verhokäyrä muodostaa aaltorintaman myöhemmällä ajan hetkellä.

Heijastuslaki voidaan johtaa Huygensin periaatteen avulla tarkastelemalla tasoaaltoa, joka saapuu tasaiselle pinnalle tulokulmassa  $\theta$ . Tietyn aaltorintaman AB eri pisteet kohtaavat tämän pinnan eri aikoina ja jokaisessa kohtauspisteessä syntyy samanvaiheinen palloaalto, joiden verhokäyrä CD muodostaa heijastuneen aaltorintaman. Koska tulevien ja lähtevien aaltojen nopeus on sama, etäisyyksien AD ja BC täytyy olla samoja. Tästä seuraa, että heijastuskulman  $\theta'$  ja tulokulman  $\theta$  täytyy olla samoja.

### 35.3. Taittuminen

Kun valo (tai yleisemmin etenevä aalto) kohtaa kahden aineen rajapinnan, osa siitä yleensä läpäisee pinnan ja muuttaa samalla suuntaansa eli **taittuu**. Taittumisen säännön mukaisuuden löysi kokeellisesti hollantilainen matemaatikko Willebrord Snell v. 1621. Hän päätteli, että  $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = \text{vakio}$ , missä  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  ovat tulo- ja taitekulmat valon kulkiessa aineiden rajapinnan läpi.

V. 1678 Huygens johti tämän tuloksen olettamalla aallon nopeuksiksi  $v_1$  ja  $v_2$  väliaineissa 1 ja 2. Tarkastellaan pinnalle aineesta 1 saapuvaa aaltorintamaa AB. Rintama kulkee matkan  $BB' = AB' \sin\theta_1$  ajassa  $\Delta t = BB'/v_1$ . Tänä aikana pisteestä A lähtenyt aalto on kulkenut aineessa 2 matkan  $AA' = AB' \sin\theta_2 = v_2 \Delta t$ . Aineessa 2 etenevä taittunut aaltorintama A'B' on alkuperäisen aaltorintaman AB lähettämien samanvaiheisten palloaaltojen tangentti. Näin ollen

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (35.1)$$

Taittuminen ilmaistaan yleensä väliaineen **taitekertoimen**

$$n = c/v \quad (35.2)$$

avulla, missä  $c$  ja  $v$  ovat valon nopeudet tyhjiössä ja kyseisessä aineessa. Aineen taitekerroin (engl. refractive index  $n$  on sille ominainen vakio.

Taitekertoimen määritelmästä seuraa nyt, että  $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2 = n_2/n_1$ . Siten voidaan kirjoittaa **taittumislaki**:

- **Tuleva säde, taittunut säde ja pinnan normaali ovat samassa tasossa ja tulo- ja taitekulman  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  välillä on relaatio**

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \quad (35.3)$$

missä  $n_1$  ja  $n_2$  ovat aineiden 1 ja 2 taitekertoimet.

Tätä kutsutaan myös nimellä **Snelliuksen laki** (engl. Snell's law).

Kun aallon (lähteen määräämä) taajuus on  $f$  sama molemmilla puolilla rajapintaa, mutta nopeus muuttuu, niin myös aallonpituus muuttuu. Koska  $f = v_1/\lambda_1 = v_2/\lambda_2$ , niin

$$\lambda_1/\lambda_2 = v_1/v_2 = n_2/n_1.$$

Koska tyhjiössä  $n_0 = 1$ , niin taitekertoimen  $n$  omaavassa aineessa aallonpituus on

$$\lambda_n = \lambda_0 / n, \quad (35.4)$$

missä  $\lambda_0$  on aallonpituus tyhjiössä.

Jos  $n_2 > n_1$ , väliaine 2 on **optisesti tiheämpää** kuin väliaine 1. Aallon tullessa optisesti tiheämpään aineeseen se taittuu pinnan normaalia kohti ja päinvastoin. Jos aineen taitekerroin muuttuu paikan jatkuvana funktiona, aine on **epähomogeeninen** ja säde etenee käyräviivaisesti. Esim. ilman taitekerroin voi olla lämpimän maanpinnan läheisyydessä pienempi kuin ylempänä. Tästä syystä valonsäteet voivat käyristyä maanpinnan läheisyydessä ylöspäin ja aiheuttaa ns. **kangastuksen**, jossa sinisen taivaan kuva näyttää maassa olevalta vedeltä.



**Esim. 35.2.** Valo, jonka aallonpituus on 600 nm ilmassa, osuu tulokulmassa  $35^\circ$  piilasin pintaan. Piilasin taitekerroin on 1.6 ja ilman taitekerroin on hyvin lähellä arvoa 1. Laske kyseisen valon (a) taitekulma, (b) aallonpituus ja (c) nopeus piilasissa tällä tulokulmalla.

**Esim. 35.3.** Väliaineessa, jonka taitekerroin on  $n_1$ , on lasilevy, jonka taitekerroin on  $n_2$ . Valo läpäisee lasilevyn tulokulmalla  $\alpha$ . Osoita, että lasilevyn läpäissyt valo yhdensuuntaista lasilevyn tulevan valon kanssa.

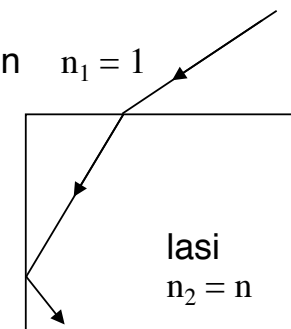
## 35.4. Kokonaisheijastus

Kun valonsäde etenee optisesti tiheämmästä aineesta 2 harvempaan aineeseen 1, se taittuu rajapinnan normaalista poispäin. Tästä seuraa, että eräällä tulokulmalla  $\theta_2 = \theta_c$  taittunut säde on pinnan suuntainen, ts. taitekulma on  $\theta_1 = 90^\circ$ . Tätä suuremmilla tulokulmilla säde ei lainkaan läpäise rajapintaa, vaan heijastuu kokonaan takaisin. Tätä sanotaan **kokonaisheijastukseksi**. Kriittisen kulman  $\theta_c$  arvo voidaan ratkaista Snelliuksen laista (35.3) asettamalla  $\theta_1$ :n arvoksi  $90^\circ$ :  $n_1 \sin 90^\circ = n_2 \sin \theta_c$ , josta saadaan

$$\sin \theta_c = n_1 / n_2. \quad (35.5)$$

Esim. valon tullessa lasista ( $n_2 = 1.50$ ) ilmaan ( $n_1 = 1.00$ )  $\theta_c = 42^\circ$ .

**Esim. 35.4.** Mm. Kepler käytti hyväkseen kokonaisheijastusta kuvan mukaisella tavalla. Mikä on lasin taitekertoimen oltava, jos valon tulokulma on  $i$ ?



Kokonaisheijastuksella on useita sovelluksia:

### Heijastavat prismat

Suorakulmaisessa tasakylkisessä **prismassa** hypotenuusan normaali muodostaa  $45^\circ$ :n kulman kateettien kanssa. Jos tällaiseen lasista ( $n = 1.50$ ) valmistettuun prismaan tulee valonsäde kohtisuoraan kateettia vastaan, säde kohtaa hypotenuusan tulokulmalla  $45^\circ$ , joka on suurempi kuin kriittinen kulma  $\theta_c = 42^\circ$ . Tästä syystä **säde kokee kokonaisheijastuksen, jonka avulla sen suuntaa voidaan muuttaa paljon pienemmin häviöin kuin normaalia peiliä käytettäessä.** Peili heijastaa parhaimmillaankin vain n. 95 % tulevasta energiasta. Sädettä voidaan käsitellä eri tavoin käyttämällä erilaisia prismoja, jotka voidaan suunnitella esim. kääntämään optisen systeemin välittämä kuva oikein päin. Esim. kiikari.

### Kuituoptiikka

Lasista ja muoveista voidaan valmistaa pienemmän taitekertoimen omaavalla aineella päällystettyjä ohuita kuituja (ytimen halkaisija 10 – 100  $\mu\text{m}$ ), joiden sisällä **valo etenee pienin häviöin** (vaimennus esim. 0.2 dB/km) toistuvien kokonaisheijastusten avulla. Tällaisten **optisten kuitujen** muodostamaa kimppua voidaan käyttää **kuvan siirtämiseen** esim. lääketieteellisissä tähystyslaitteissa, joilla voidaan tarkastella ihmisen sisäelimiä. Optisia kuituja käytetään myös **tietoliikenteessä**, jossa informaatiota voidaan kuljettaa infra-punasäteellä, aallonpituuksilla, joilla vaimennus on alhainen, esim. 1300 nm ja 1550 nm. **Korkea taajuus antaa hyvin suuren siirtokapasiteetin, ja signaaliin eivät sähköiset häiriöt vaikuta.**

## 35.5. Prisma ja dispersio

Aineen **taitekerroin  $n$  riippuu yleensä aallonpituudesta  $\lambda$ .** Kun  $n$  esitetään  $\lambda$ :n funktiona, saadaan **dispersiokäyrä**, jossa  $n$  normaalisti pienenee  $\lambda$ :n kasvaessa. Kun valkoinen kaikkia näkyviä aallonpituuksia sisältävä valo suunnataan prismaan, sen **eri värit taittuvat eri tavalla.** Jokaisella aallonpituudella on oma **poikkeamansa** eli **deviaationsa  $\delta$** , jolla tarkoitetaan prismaan tulevan säteen suunnasta laskettua poikkeamakulmaa.

Prisman avulla voidaan mitata tulevan säteilyn aallonpituusjakautuma eli **spektri**. Mittaus voidaan tehdä **prismaspektroskoopilla**, jossa tuleva säteily ensin yhdensuuntaistetaan **kolli-maattorissa** kapean raon ja linssin avulla. Säde ohjataan sen jälkeen prismaan, josta lähtevien ja eri suuntiin taittuneiden säteiden suunnat mitataan tarkasti kaukoputkella.

Voidaan osoittaa, että deviaatiolla  $\delta$  on minimi  $\delta_{\min}$ , kun säde kulkee prisman läpi symmetrisesti. Tällöin kolmiosta PQR nähdään, että taitekulman  $r$  ja prisman taittavan kulman  $\phi$  välillä on relaatio  $2r + (\pi - \phi) = \pi$ , joten  $r = \phi / 2$ .

Kolmiosta PQS nähdään, että  $2(i - r) + (\pi - \delta) = \pi$ , joten  $\delta = 2(i - r)$  ja  $i = \delta/2 + r$ . Jos prisman ja sen ympäristön taitekerroimet ovat  $n$  ja  $1$ , Snelliuksen lain mukaan  $\sin i = n \sin r$ . Säteen aallonpituutta vastaava taitekerroin on (kun  $\delta = \delta_{\min}$ )

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}, \quad (35.6)$$

joka voidaan määrittää mittaamalla minimideviaatio  $\delta_{\min}$ .

## 35.6. Tasopeilit

Kun pisteestä  $S$  lähtevät valonsäteet heijastuvat tasopeilistä, niiden jatkeet leikkaavat toisensa pisteessä  $S'$ . Koska silmä näkee säteiden tulevan tästä pisteestä, sitä sanotaan pisteen  $S$  kuvaksi. Yleisesti **pisteen kuva on siitä lähteneiden säteiden tai niiden jatkeiden yhteinen leikkauspiste**. Todellisten säteiden leikkauspiste on **todellinen kuva** (engl. real image) ja niiden jatkeiden leikkauspiste on **valekuva** (engl. virtual image). **Todellinen kuva**, toisin kuin valekuva, **voidaan saada näkyviin asettamalla sen kohdalle varjostin**. Piste  $S'$  on siis  $S$ :n valekuva.

Esineen jokaisella pisteellä (esim.  $O$ ) on oma kuvapisteensä ( $I$ ). Heijastuslaista seuraa, että suorakulmaisten kolmioiden OMA ja IMA kaikki kulmat ovat samat, joten **piste ja sen kuva ovat samalla etäisyydellä peilistä sen samalla normaalilla**. Tämä tulos ei riipu valitusta säteestä, joten kaikkien säteiden jatkeet yhtyvät samassa pisteessä ja **kuvapiste on siis yksikäsitteinen**.

**Esine ja sen tasopeilissä näkyvä kuva ovat yhtä suuria**, mutta sen **vasen ja oikea puoli ovat vaihtaneet paikkaa**. Erityisesti oikeakätisestä suorakulmaisesta koordinaatistosta tulee vasenkätinen ja päinvastoin.

**Esim. 35.6.** Esine on asetettu kahden toisiaan vastaan kohtisuoran peilin väliin. Kuinka monta kuvaa on nähtävissä?

**Esim. 35.7.** Mikä on seinälle ripustetun peilin pienin korkeus, kun siitä tulee näkyä kuvaansa katsova henkilö kokonaisuudessaan? Kuinka katselijan etäisyys vaikuttaa asiaan?

## 35.7. Pallopeilit

**Kovera** (engl. concave) ja **kupera** (engl. convex) pallopeili muodostuvat pallopinnoista, joiden sisä- tai ulkopinta on heijastava. Peilipinnan keskipisteen normaali, joka kulkee kaarevuuskeskipisteen eli pallon keskipisteen kautta, on peilin **pääakseli**. Koveraan tai kuperaan peiliin kapeana kimpuna saapuvat pääakselin suuntaiset säteet tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa peilin (todellisessa tai virtuaalisessa) **polttopisteessä** (engl. focal point, focus)  $F$ , joka on **polttovälin** (engl. focal length)  $f$  päässä peilistä sen pääakselilla.

Jos sädekimppu ei ole kapea verrattuna peilin kaarevuussäteeseen, säteet tai niiden jatkeet eivät leikkaa toisiaan pääakselin samassa pisteessä. Tämä kuvaa vääristävä **palloaberraatio** (engl. spherical aberration) voidaan korjata käyttämällä pallopinnan sijasta **paraboloidia**.

Jos säde saapuu koveraan pallopeiliin etäisyydellä  $h$  pääakselista, sen tulo- ja heijastuskulma  $\alpha$  (pinnan normaalin CP suhteen) noudattaa yhtälöä  $\sin\alpha = h/R$ , missä  $R$  on peilin kaarevuussäde eli CP:n pituus. Jos  $h/R$  on hyvin pieni,  $\alpha \approx h/R$ .

Tällöin heijastunut säde PF leikkaa pääakselin polttovälin  $f$  päässä peilistä, joten  $\tan 2\alpha \approx 2\alpha \approx h/f$ . Koska  $\alpha \approx h/R$ , polttoväli on puolet kaarevuussäteestä,

$$f = R / 2. \quad (35.7)$$

Tämän tuloksen johti ensimmäisenä G. Della Porta v. 1591.

### **Sädediagrammit**

Pallopeilin antama kuva voidaan konstruoida sädediagrammilla etsimällä esineen pisteistä muodostuneiden kuvien paikat graafisesti. Tämä tapahtuu piirtämällä **kaksi tarkasteltavasta pisteestä lähtevää sädettä ja paikantamalla niiden tai niiden jatkeiden leikkauspiste**. Valekuvat piirretään yleensä katkoviivoja käyttäen. **Mitkä tahansa kaksi seuraavista säteistä riittävät kuvan löytämiseen:**

1. **Kaarevuuskeskipisteen kautta** peiliin tuleva säde heijastuu samaa tietä takaisin.
2. **Pääakselin suuntaisena** peiliin tuleva säde heijastuu polttopisteen kautta.
3. **Polttopisteen kautta** peiliin tuleva säde heijastuu pääakselin suuntaisena.
4. **Pääakselin kohdalla** peiliin osuva säde ja heijastunut säde muodostavat akselin kanssa yhtä suuret kulmat.

Säteet (2) ja (3) käyttäytyvät kuvatulla tavalla vain pääakselin lähellä. Toisaalta juuri näiden säteiden käyttö on tavallisesti suoraviivaisinta.

## Pallopeilin kuvausyhtälö

Tarkastellaan koveran pallopeilin pääakselilla etäisyydellä  $p$  peilistä olevaa pistemäistä esinettä  $O$ . Mikä tahansa siitä lähtevä säde heijastuu peilistä ja leikkaa pääakselin kuvapisteesä  $I$ , jonka etäisyys peilistä on  $q$ . Pienillä kulmilla on voimassa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (35.8)$$

Koska tämä yhtälö on voimassa mille tahansa  $O$ :sta lähtevälle säteelle, kaikki tällaiset säteet leikkaavat toisensa pisteessä  $I$ , joka näin ollen on  $O$ :n kuvapiste (edellyttäen, että säteiden lähtökulmat  $\beta$  ovat pieniä). Saatu tulos on **pallopeilin kuvausyhtälö**. Se on **voimassa myös kuperalle pallopeilille**, jos sovitaan, että sen polttoväli  $f$  ja kuvan etäisyys  $q$  ovat negatiivisia. **Kuperan pallopeilin polttopiste on virtuaalinen ja kuva on valekuva**, ja molemmat ovat peilin heijastamattomalla puolella. Tämä voidaan yleistää seuraavaksi peilien merkkisopimukseksi:

- **Kun valo tulee vasemmalta,  $p$ ,  $q$  ja  $f$  ovat peilin vasemmalla puolella positiivisia ja oikealla puolella negatiivisia.**

## Suurennus

Kuvan koko ei yleensä ole sama kuin esineen koko. **Poikittainen** (tai **lineaarinen**) **suurennus**  $m$  on kuvan korkeuden  $y_I$  suhde esineen korkeuteen  $y_O$ . Määritellään  $y$  negatiiviseksi, jos piste on pääakselin alapuolella.

Koska  $\tan \alpha = y_O/p = -y_I/q$ , suurennus on

$$m = y_I / y_O = -q / p. \quad (35.9)$$

- Jos  $m > 0$ , kuva on **oikeinpäin** (engl. erect).
- Jos  $m < 0$ , kuva on **ylösalaisin** (engl. inverted).
- Jos  $|m| > 1$ , kuva on **suurennettu** (engl. enlarged).
- Jos  $|m| < 1$ , kuva on **pienennetty** (engl. reduced).

Peilin vasemmalla puolella olevasta esineestä ( $p > 0$ ) vasemmalle puolelle muodostunut todellinen kuva on aina ylösalaisin ja oikealle puolelle muodostunut valekuva on aina oikeinpäin. Suurennuksen yhtälö (35.9) on voimassa molemmissa tapauksissa, sillä valekuvalla  $q < 0$ .

**Esim. 35.8.** Esine, jonka korkeus on 1.2 cm, on asetettu 2.0 cm:n etäisyydelle pallopeilistä, jonka kaarevuussäde on 8.0 cm. Määrää kuvan paikka ja koko, kun (a) peili on kovera ja kun (b) peili on kupera.

**Esim. 35.9.** Esine, jonka korkeus on 2.0 cm, on etäisyydellä 12.0 cm pallopeilistä. Oikeinpäin olevan kuvan korkeus on 3.2 cm. Millainen peili on kyseessä?