



"Strengthening the links between education and the economy"

PHARE PMU Programme HU-94.050101-L013/34

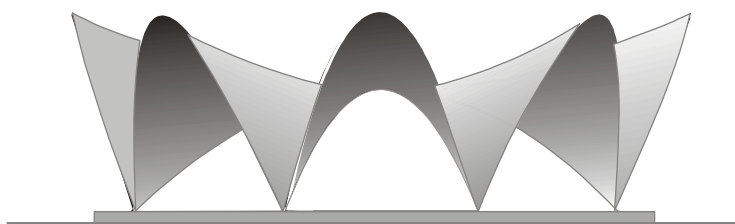
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

Vasbetonszerkezetek Tanszék

Dr. Hegedűs István

egyetemi tanár

HÉJSZERKEZETEK



TARTALOM

Előszó	6
1. VÁZLATOS TÖRTÉNELMI ÁTTEKINTÉS	7
2. A MÉRNÖKI HÉJELMÉLET	11
2.1. A felületszerkezetek	11
2.2. A mérnöki héjelmélet alapfeltevései	12
2.3. A mérnöki héjelmélet geometriai alapjai	13
2.3.1. A felület fogalom általánosítása	13
2.3.2. Felületek külső és belső geometriai jellemzői	14
2.3.2.1. A belső geometriai jellemzők áttekintése	17
2.3.3. Felületi koordinátarendszerek	18
2.3.4. Felületek görbületei	22
2.3.4.1. Egy felület síkmetszeteinek görbületei	24
2.3.4.1.1. <i>Meusnier</i> tétele	24
2.3.4.1.2. <i>Euler</i> tétele	25
2.3.4.1.3. <i>Descartes</i> -féle koordinátarendszerben megadott felület görbületeinek kiszámítása	26
2.3.4.2. A felületek osztályozása felületi görbület alapján	29
2.3.4.3. Speciális felületalakok	30
2.4. Gauss felületelméletének elemei. A Theorema Egregium	31
2.4.1. A felületi excesszus és a térszög	32
2.4.2. Felületek alakváltozásai a szorzatgörbület változásának tükrében	34
2.5. Vékony héjak kétrétegű helyettesítő felülete	37
2.6. A mérnöki héjelmélet alapegyenleteinek formális levezetése	40
2.6.1. A geometriai egyenletek	43
2.6.2. Fizikai vagy konstitutív egyenletek	44
2.6.3. Egyensúlyi egyenletek	45
2.6.4. A peremfeltételekről	48
2.7. Feszültségfüggvény alkalmazása	48
2.8. A domináns membrán-állapot	51
3. HÉJAK NYOMATÉKMENTES TEHERVISELÉSE: A MEMBRÁNELMÉLET	54
3.1. Forgásfelület alakú membránhéjak	54
3.1.1. Forgásfelület alakú membránhéjak egyensúlyi egyenletei tetszőleges felületi teher feltételezésével	57
3.1.2. A metszeterő-számítás gyakorlati módszere körszimmetrikus terhelés esetén	61
3.1.3. Körszimmetrikus terhelésű forgáshéj membrán-deformációi és elmozdulásai	63
3.1.4. Példák	67
3.1.4.1. Önsúlyával terhelt körkúp metszeterői	67
3.1.4.2. Önsúlyával terhelt félgömb metszeterői	68
3.1.4.3. Ha a gömböt alaprajzban egyenletesen megoszló teher terheli	70
3.1.4.4. Ha a gömböt a tetőpontjában egy P nagyságú koncentrált erő terheli	71
3.1.4.5. Belső túlnyomással terhelt gömb (szappanbuborék)	71

- 3.1.4.6. Alaprajzban egyenletesen megoszló teherrel terhelt forgásellipszoid metszeterői 72
- 3.1.4.7. Egyköpenyű forgáshiperboloid 75
- 3.1.4.8. Belső túlnyomással terhelt tórusz membránerői 80
- 3.1.4.9. Forgásszimmetrikus minimálfelület 82
- 3.1.4.10. Csepp alakú folyadéktartály 84
- 3.1.5. Kupola antimetrikus terhelése (membránállapot szerint) 85
- 3.1.6. Alsó peremén megtámasztott körhenger szélteher hatására fellépő membránigénybevételei 87
- 4. **A MEMBRÁNHÉJAK PUCHER-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLETE. (MEMBRÁN-HÉJAK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE)** 92
 - 4.1. **A Pucher-féle differenciálegyenlet levezetése** 94
 - 4.1.1. A felületelemre ható erők egyensúlya 97
 - 4.1.2. A feszültségfüggvény bevezetése 99
 - 4.2. **Membránhéjak megtámasztása; a membránfeladat peremfeltételei** 103
 - 4.2.1. A peremfeltételek különböző felülettípusoknál 104
 - 4.3. **Hiperbolikus héjak. Torznégyszög héj** 105
 - 4.3.1. Szabad perem felvételének lehetősége és korlátja 109
 - 4.3.2. Csavarfelület alakú héj körgyűrű alaprajz fölött 111
 - 4.4. **Parabolikus héjak. Membrán-dongahéj** 113
 - 4.5. **Elliptikus héjak. Elliptikus paraboloid héj négyszög alaprajz fölött** 115
 - 4.5.1. Oldalnyomás-mentes elliptikus paraboloid trigonometrikus megoldása 118
 - 4.5.2. Nyeregfelület téglalap alaprajz fölött (Hiperbolikus paraboloid) 121
 - 4.5.3. „Talált megoldások” (Forgásparaboloid héjak) 122
 - 4.5.3.1. Forgásparaboloid szabad peremmel 123
 - 4.5.3.2. Forgásparaboloid háromszög alaprajz fölött 125
 - 4.5.3.3. A megoldásmódszer általánosítása tetszőleges eloszlású teherre 126
 - 4.6. **A feszültségfüggvény meghatározásának inverz feladatai** 128
 - 4.7. **Ponyvaszerkezetek (Sátrak, légsátrak)** 128
 - 4.7.1. A szálerősítés okozta anizotrópia 128
 - 4.7.2. Nyitott sátrak közelítő alakfelvétele 130
 - 4.7.3. Hengeres légsátrak 132
 - 4.7.4. Forgásfelület alakú légsátor 133
 - 4.7.5. Pneumatikus gerenda maximális nyomatéka 134
- 5. **HENGERHÉJAK HAJLÍTÁSELMÉLETE** 136
 - 5.1. **Körszimmetrikus terhelésű körhenger hajlítása. (Közvetlen levezetés)** 142
 - 5.2. **Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásai.** 143
 - 5.3. **A homogén differenciálegyenlet általános megoldása.** 146
 - 5.4. **Példák** 150
 - 5.4.1. Befogott peremű, folyadékterherrel terhelt henger vizsgálata 150
 - 5.4.2. Hőmérsékleti terheléssel terhelt henger vizsgálata 154
 - 5.5. **A körszimmetrikus terhelésű forgásfelületek peremzavarai.** 156
 - 5.5.1. A Geckeler-féle közelítés 156
- 6. **HOSSZÚ DONGÁK, DONGASOROK** 160
 - 6.1. **Gerenda-erőjátékú hosszúdongák, héjgerendák** 160
 - 6.1.1. A héjgerendák ellapulása hajlítónyomaték következtében 161

6.1.2.	Körhenger ellapulása hajlítónyomaték hatására. (Brazier-hatás)	161
6.2.	A túlnyomás hatása a csövek állékonyságára	164
7.	LAPOS HÉJAK HAJLÍTÁSELMÉLETE	168
7.1	Lapos paraboloid héjak négyszög alaprajz fölött	175
7.2	Körszimmetrikus terhelésű lapos forgáshéjak peremzavarainak közelítő vizsgálata simuló paraboloid alkalmazásával	178
7.3	Forgásparaboloid alakú lapos héj, (ill. lapos gömbsüveg) tetőpontjában koncentrált erővel terhelve.	181
7.4	Héjak horpadása	184
7.4.1	A lokális horpadás differenciálegyenlete.	185
7.4.2	Alkotóirányban nyomott körhenger lineáris kritikus terhe	188
7.4.3	További megoldások	189
7.4.4	A horpadás utáni viselkedés szerepe	190
	FÜGGELÉK	192
F.1,	Hajlított és síkjukban terhelt rugalmas kör- és körgyűrű lemezek	192
F.1.1.	Körszimmetrikus peremterhű kör- és körgyűrű-tárcsák közismert megoldásai	193
F.1.2.	Kör alakú tárcsa konstans normális irányú peremteherrel terhelve	194
F.1.3.	Körgyűrű alakú tárcsa egyik peremén konstans normális irányú peremteherrel	195
F.1.4.	Megoszló nyomatékkal terhelt gyűrű alakú rúd	198
F.1.5.	Körszimmetrikus peremterhű kör- és körgyűrű-alakú lemezek megoldásai	200
F.2.	Rugalmas ágyazású kör- és körgyűrű-alakú lemezek	205
F.2.1.	Végtelen kiterjedésű, középpontjában F erővel terhelt rugalmas ágyazású lemez	207
F.3.	Nem körszimmetrikus terhelésű körlemez igénybevételei	208
F.4.	A szélteher hatása a héjszerkezetekre	209
	IRODALOMJEGYZÉK	213

ELŐSZÓ

Ennek a szövegnek az első változata az 1989/90-es tanév első félévében, a Vasbeton Híd- és Szerkezetépítés kilencedik félévi, héjszerkezetek témájú előadásainak vázлата alapján készült, azzal a céllal, hogy a vizsgára való felkészüléshez használható anyag kerüljön a hallgatóság kezébe addig is, amíg a tananyag fejlődésének megfelelően átdolgozott jegyzet vagy tankönyv nem áll rendelkezésre.

Az első változat CHIWRIER, ill. a későbbiek WORD szövegszerkesztővel készített fájljainak számos részletét az előadások közvetlen visszhangja és a tárgy vizsgáin szerzett tapasztalatok figyelembevételével többször kiegészítettem, ill. módosítottam, a legutóbbi átdolgozás során ábrákkal is kiegészítettem a szöveget. Az anyagnak ezért a kézírásos előadási vázlat xerox-másolataitól kezdve számos változata forog – beleegyezésemmel, ill. anélkül – közkézen.

Az előadással a mérnöki héjelmélet legfontosabb alkalmazási köreiből használt módszerek szemléletes bemutatását igyekeztem elvégezni, és csak a módszerek illusztrációiként próbáltam közismert, lehetőleg gyakorlati jelentőséggel is bíró megoldásokat is bemutatni. Nem törekedhettem a mérnöki héjszerkezetek problémáinak áttekintésében sem a teljességre, inkább csak arra, hogy megmutathassam, hogyan illeszkednek a héjelmélet megfontolásai a korábbi elméleti tárgyakban taglalt elvekhez és ismeretekhez, ezzel mintegy illusztrálva, hogy a szerkezetanalízis összetettebb kérdéseiben való eligazodáshoz elengedhetetlen az alapelvek ébrentartása.

Az ismert héjkönyvek hasonló témájú fejezeteihez képest szokatlanul hosszú, de a további érthetőség veszélyeztetése nélkül nehezen rövidíthető felületelméleti fejezet a matematikai analízis legegyszerűbb módszereinek alkalmazásával mutatja be a felületek „külső” és „belső” geometriáját leíró mennyiségeket és azok eltérő szerepét a héjak viselkedésében.

A mérnöki héjelmélet alapelveit és legfontosabb összefüggéseit bemutató további fejezetekben a könyv a magyar nyelvű szakirodalomban kevésbé bejárta deduktív úton halad. Előbb a deformálható felületek általános geometriai és statikai összefüggéseit tárgyalja a „belső” és a „külső” geometriai jellemzők megváltozását okozó hatások szemléletes elválasztását lehetővé tevő fiktív kétrétegű héj alkalmazásával, majd az elválasztás eredményeként lehetővé váló egyszerűsítések részletezésével vezeti be a héjelmélet gyakorlatban használt változatait: a membránhéjak elméletét, a forgáshéjak hajlításelméletén alapuló peremzavar-vizsgálatokat, a laposhéjak elméletét és a héjhorpadás alapösszefüggéseit.

A tárgyalás illetően megfordítására hosszas mérlegelés után határoztam magam, némi idegenkedésre és értetlenégre is számítva kollégáim és a hallgatóság körében. Az előadássorozat tapasztalatai azt a reményemet látszanak igazolni, hogy azokért a nehézségekért, amelyek a váltásból következnek, bőséges kárpótlást ad a tárgyalás hatékonyabbá válása.

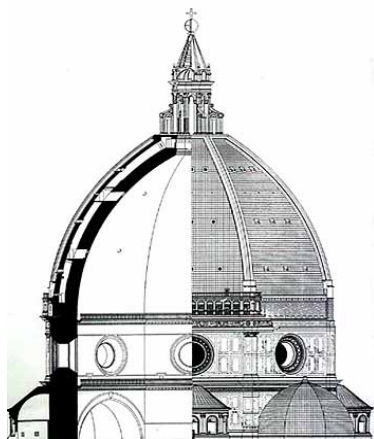
Az előadás – így függelékében e könyv is – kitér a forgásszimmetrikus terhű kör- és körgyűrű alakú tárcsák és lemezek, ill. a rugalmasan ágyazott körlemezek vizsgálatára is, mivel ezek is alkotóelemei az összetett forgásszimmetrikus felületszerkezeteknek.

A könyv kiadását a „Strengthening the links between education and the economy” c. PHARE program támogatása tette lehetővé.

1. VÁZLATOS TÖRTÉNELMI ÁTTEKINTÉS

A héjelmélet alkalmazási köre lényegesen szélesebb az építőmérnöki alkalmazásokénál, gyökerei is messzebb nyúlnak annál, hogy kialakulásáról csupán az építőmérnöki tevékenység fejlődésének áttekintése alapján teljes képet rajzolhassunk.

Minden magára valamit is adó történelmi áttekintés valahogy úgy kezdi, hogy „már a görögöknél is...”, vagy „már a mezopotámiai kultúrákban is...”, esetleg „már az altamirai barlangrajzokon is...” kimutatható ez vagy az, amit a jelenlegi ismeretek gyökerének tekinthetünk. Hát, ezekben a régi kultúrákban aligha találunk valamit is, amire azt mondhatnánk, hogy az építészet héjszerkezeteinek archetípusa. A rómaiak előtt íveket sem használtak még az építészetben, és aki csak egy pillantást vet pl. a Kr.u. 125-ben újjáépült római Pantheon másfél évezreden át nagyságában felülmúlhatatlan kupolájának a keresztmetszetére, bizony, kétségei támadnak abban, hogy az elliptikus héjak ösét látja a hatalmas vastagságú, inkább tömbszerűnek, mintsem felületnek ható szerkezetben. Még a későbbi századok kiemelkedő építészeti teljesítményeiként számon tartott kupolák, a konstantinápolyi Hagia Sophia templom kora-középkori (VII. sz.), a firenzei Santa Maria del Fiore templom, a római Szent Péter Bazilika reneszánsz kori (XV. sz.), a londoni Szent Pál katedrális (1710), sőt, a budapesti Szent István bazilika újkorban (XIX. sz.) épült kupolája láttán is bölcsőbbnek látszik arra a következtetésre jutni, hogy a héjszerkezetű térlefedések a szerkezet működésének tekintetében építészeti előzmények nélkül a XX. század termékei.



1.1. ábra. A firenzei Santa Maria del Fiore dóm kupolája

De ha mindenképpen antik elődöket akarunk találni, keressük ezeket az ókori kultúra kevésbé monumentális emlékei között!

Kevés embernek jut egy öblös görög vázáról eszébe, hogy statikai, mégpedig éppen héjszerkezeti problémát keressen mögötte. Pedig ezeknek a vázáknak az alakját, falvastagságát, a mérethatárait elsősorban az alacsony folyáshatárú szerkezeti anyagban – az agyagban – fellépő feszültségek nagysága határozta meg, amelyeket pedig az önsúly, a fazekaskorong forgása miatti centrifugális erők és az alakító kéz által keltett „héjigénybevételek” ébresztenek. Homérosz hőseinek „görbeorrú hajóit”, e hajók duzzadó vitorláit, a hősök sátrát, pajzsát, mellvértjét, sisakját, bor- és ivóvíztároló tömlőit is bátran tekinthetjük speciális kialakítású és terhelésű héjszerkezeteknek, és egy-egy bronzlemezről domborított tál visszahajló pereméhez legalább olyan fontos szerepű héjszerkesztési elv megvalósulása köthető, mint a firenzei Dóm, vagy a római Szent Péter Bazilika kupolájának tojást formázó alakjához.

A gyökerek keresésének ezek a váratlan eredményei megszívlelendő tanulsággal szolgálhatnak annak az eldöntéséhez, hogy a héjelméletet valóban könnyen nélkülözhető „luxustárgynak” tekintő-e a normál mérnökképzésben, csupán azért, mert manapság – különösen minálunk – a fehér hollónál ritkábbak a kiemelkedő jelentőségű, „dekoratív” építészeti héjfeladatok. A csövek, tartályok, silók, sátrak stb. mind héjszerkezetek, így a gyakorlat nap mint nap fölvetethet olyan feladatokat, amelyek igényes mérnöki megoldása a héjelméletben való alapos tájékozottságot igényli.

Az építőmérnöki tervezés csak a XX. század kezdete óta vizsgálja a felületszerkezeteket a szerkezetanalízis maihoz hasonlítható módszereivel, ezt megelőzően a méretezés nagyrészt empirikus módszerekre hagyatkozott.

Kivétel talán a kupolák szerkesztésének elmélete, amelynek alapjait Angliában *Ch. Wren* (1637-1723), a londoni Szent Pál Bazilika (1710) építője, a kontinensen *T. Le Seur és F. Jacquier*, koruk ismert építész tudósai fektették le 1725. körül, a római Szent Péter templom kupolájának állékonysági gondjaival kapcsolatban – *XIII. Benedek pápa* megbízásából – készített szakvéleményükben. A kupolaszerkesztés gyakorlati módszerét – mai szemmel is helyesen – a csak nyomásnak ellenálló anyagból készült szerkezetek alakfelvételének korlátjaiból vezették le. Elméletüket *R.J. Boskovic* (1711-1787.) horvát jezsuita páter, matematikus és csillagász 1743-ban készült fölülvéleményezése tökéletesítette. *Boskovic* kupolaszerkesztési módszerével készültek egy sereg híres katedrális – pl. a budapesti Szent István Bazilika – nagyméretű kupolájának tervei. (Ennek korántsem egyedülálló beomlását 1868-ban nem tervezési hiba, hanem az alátámasztás silány kivitelezése okozta.)

A fizika és a matematika a XVIII. században és a XIX. század első éveiben alakította ki azokat az elveit és módszereit, amelyek lehetőséget adtak a felületszerkezetek elméletének témakörébe tartozó kérdések felvetésére és vizsgálatára. E munka végrehajtói közt koruk természet-tudományának legnagyobb alakjai, a már említett *Boskovic* mellett pl. a svájci *Bernoulliak* (*Jacob I.* (1646-1705); *Johann*, (1667-1748); *Daniel*, (1700-1782); *Jacob II.* (1759-1789)), az ugyancsak svájci *L. Euler* (1707-1783), az angol *Th. Young* (1773-1829) és a francia *C.A. Coulomb* (1736-1806), *J.F. Lagrange* (1736-1813), *S. Germain* (1776-1831), *S.D. Poisson* (1781-1840), *C.L.M.H. Navier* (1785-1836) találhatóak. Úttörő munkájuk nyomán a rugalmas felületek és testek alakváltozásainak vizsgálata a XIX. században a fizika egyik központi feladata volt.

A héjelmélet alapelvei az általános szilárdságtanban és a matematikai felületelméletben gyökereznek. Az előbbi „a matematika gyöngyszemének”, a matematika szinte minden ágában maradandót alkotó francia mérnöknek, *A.L. Cauchy*-nak (1789-1857), az utóbbi pedig német kortársának, „a matematika királyának” *K.F. Gauss*-nak (1777-1855) a nagy elődök munkáját betetőző szellemi teljesítménye. A deformálható felületek matematikai elmélete e kettő összekapcsolásával alakult ki, létrejöttében a legkiemelkedőbb szerepet műszaki mechanika megalapítójaként emlegetett *B. de Saint-Venant* (1797-1886) francia mérnök, továbbá a fizika más területein is ismert nevű *G. Kirchhoff* (1824-1887) német, *lord Rayleigh* (*J.W. Strutt*, 1842-1919) és *A.E.H. Love* (1863-1940) angol fizikusok játszották.

A mérnöki problémák megoldása – szemben a matematikai és részben a fizikai problémákkal – nem teljes egy-egy speciális esetre vonatkozó megoldás megmutatásával és annak az igazolásával, hogy a megoldás általánosabb feltételek esetén is létezik, hanem a problémamegoldást mindig el

kell tudnunk vinni a konkrét esetekre vonatkozóan érvényes numerikus számértékek meghatározásáig, sőt, az ezekre alapított mérnöki döntés meghozataláig. Mivel a deformálható felületek viselkedését elvben leíró, legáltalánosabb esetben is érvényes összefüggések ilyen szempontból szinte kezelhetetlenek, (még inkább azok voltak a

számítógépek elterjedése előtt,) a gyakorlati alkalmazás szintjéig elvihető „mérnöki héjelmélet” – pontosabban: héjelméletek – megalkotása a műszaki tudomány számára akkor is hatalmas kihívást jelentő, sokáig megoldatlan elméleti feladat maradt, amikor a matematika és a fizika ezt a kérdéskört a már megoldott klasszikus problémái közé sorolta.

Csupán a múlt század harmadik harmadában vált általánossá a mérnöki szerkezetek tervezésében a fizika, az anyagismeret és a mérnöki tapasztalatok addig összegyűlt eredményeinek felhasználásán alapuló erőtan mértezés. Az ábrázoló geometria sokoldalú építészeti alkalmazása, továbbá a statika és az euklideszi, ill. a projektív geometria törvényszerűségei közötti szoros összefüggések magyarázzák, hogy a szerkezetanalízis fejlődésének ebben a fázisában elsősorban grafikus, grafoanalitikus módszerek alakultak ki. Ezek elterjedése nemigen kedvezett annak, hogy a deformálható felületek matematikai elméletén alapuló, kevésbé szemléletes vizsgálati elvek széles körben ismertté váljanak. A századforduló képzetesebb építészeinek és mechanikusainak héjelméleti ismeretei ezért nem sokkal terjedhettek túl a túlnyomás alatti csövek falában fellépő húzóerő, ill. -feszültség meghatározására használatos ún. kazánképleten, amelyet *E. Mariotte* (1620-1684) már mintegy 250 évvel korábban fölfedezett és kísérletekkel is igazolt. A kazánképletet – egymástól függetlenül – *H. Zimmermann* (1888) és *M. Milankovich* (1908) általánosította kettős görbületű héjfelületekre.

A mérnöki héjelmélet kifejlődésének igazi lendületet a vasbeton szerkezetek alkalmazásának elterjedése adott, mert ennek az új építőanyagoknak a kedvező sajátságai legmeggyőzőbben a felületszerkezetek körében érvényesülnek. Már a századforduló tájáról találhatunk – igaz, részletes statikai mértezés nélkül kialakított – héjszerkezetű vasbeton tartályokat és kupolákat, de további tíz év elegendő volt a vasbeton századi diadalútján ahhoz is, hogy néhány cm. vastagságú héjszerkezettel túlszárnyalják a Pantheon majd kétezer éven át felülmúlhatatlan 43 méteres átmérőjű kupolaalaprajzának a méretét (*M. Berge*: Wrotzlaw, Kunsthalle, 1912.).

Ezekre az évtizedekre esik – *lord Rayleigh* és *de Saint-Venant* eredményei nyomán – a forgáshéjak nyomatékmentes teherviselését leíró mérnöki elmélet, az ún. membránelmélet kidolgozása, (*H. Reissner*, 1912. és *E. Meissner*, 1913.), a dongahéjakban és a forgáshéjak peremén fellépő nyomatékok és nyíróerők szerepének közelítő figyelembevételére alkalmas vizsgálati módszerek kialakítása és alkalmazhatóságuk megépült szerkezeteken való igazolása, (*F. Dischinger*, 1922; *U. Finsterwalder*, 1924; *J. Geckeler*, 1926. stb.), majd az általános alakú és terhelésű héjak jelenleg is alkalmazott membránelméletének és a lapos héjak közelítő hajlításelméletének kidolgozása (*A. Pucher*, 1934., ill. *K. Marguerre*, 1936.).

Ezekben az évtizedekben világossá vált, hogy a héjszerkezetek mindenféle alkalmazásának leg súlyosabb korlátja a stabilitási kérdések tisztázatlansága. Bár az egzakt henger-, gömb- stb. alakú héjak kicsiny elmozdulásokat feltételező horpadásvizsgálatának eredményei viszonylag korán napvilágot láttak, (*Rayleigh*, 1882.; *G.H. Brian*, 1889.; *S. Timoshenko*, 1910.; *R.v. Mises*, 1914.; *R. Zoelley*, 1915.), ezek a „klasszikus” vizsgálatok a kritikus terhekre a valóságtól reménytelenül távoli, ráadásul a biztonság kárára eltérő értékeket adtak. Ez arra mutatott, hogy a feltételezettnél szűkebb azoknak az egyszerűsítő feltételezéseknek az alkalmazhatósági köre, amelyek a kellően merev és megfelelő módon megtámasztott héjak igénybevételeinek meghatározásánál még elfogadhatóan pontos számítást tesznek lehetővé. Stabilitásvizsgálat esetén vagy speciális alakú és megtámasztású héjak vizsgálatánál a kísérletekkel kielégítő egyezést mutató eredmények csak a deformálható testek „pontos” matematikai elméletéhez közelebb álló feltételezéseken alapuló héjelméleti módszerektől remélhetők.

Az egyre finomabb feltételezés-rendszereken alapuló, egyre részletesebb vizsgálatokat lehetővé tevő, egyre megbízhatóbb eredményeket adó mérnöki héjelméletek kifejlődését, egymásra épülését csak a megoldandó részproblémák pontosabb ismeretében lehetne áttekinteni. Álljon itt ezek áttekintése helyett csak néhány név és évszám: *L.G. Brazier*, 1927, *E. Chwalla*, 1930; *W. Flügge*, 1932.; *F. Aimond*, 1933.; *L.H. Donnell*, 1933.; *K. Girkmann*, 1933.; *A.I. Lurje*, 1937; *K.M. Mushtari*, 1938; *A.L. Goldenveijzer*, 1939; *A. Aas-Jakobsen*, 1941.; *W.T. Koiter*, 1946.; *V.Z. Vlaszov*, 1947.; *E. Reissner*, *I.N. Vekua*, 1948.; *H. Lundgren*, *H. Neuber*, 1949.; *A.E. Green és W. Zerna*, 1950.; *F.T. Geyling*, *K. Hruban*, 1953, *F. Candela*, 1955, *J.L. Sanders*, 1959., *K.M. Mushtari*, 1961., *P.M. Naghdi*, 1963, *V.V. Novozhilov*, 1964. A mérnöki héjelmélet fejlődése máig sem zárult le, mert az újszerű alkalmazások újabb és újabb kérdéseket vetnek fel. Jelenleg a kutatás homlokterében az anizotróp vékony és vastag héjak viselkedésének vizsgálata, a nagy alakváltozású héjak vizsgálata és változatlanul a héjhorpadás problémái állnak.

A mérnöki héjelmélet módszereinek kidolgozásában, a héjak mérnöki alkalmazásaiban nemzetközileg is jelentős szerepet játszottak a magyar, ill. magyar származású mérnökök. Közülük is kiemelkedik *Kármán Tódor*, (1881-1963) aki a század alkalmazott mechanikai kutatásainak egyik legsokoldalúbb és legeredményesebb tudósa volt, valamint *Hoff Miklós*, (1911-1997.), a Stanford Egyetem professzora, aki évtizedeken át a héjstabilitási kutatások vezéralakja volt az Amerikai Egyesült Államokban.

A vasbeton héjépítés magyarországi meghonosításában elévülhetetlen érdemeket szerzett úttörő tervezői munkásságával *Zielinski Szilárd* (1860-1924) és *Lipták Pál* (1874-1926), az első vasbeton-szerkezetű víztornyok – a kőbányai, a szegedi, a margitszigeti, ill. a szentesi víztorony – tervezői. A héjelmélet első nemzetközileg kimagasló hatású hazai művelője volt *Menyhárd István* (1902-1969), c. egyetemi tanár, aki a II. Világháború előtti években a héjszerkezetek oktatását a Műegyetemen elindította, emellett a háború első éveiben épült Kelenföldi Autóbuszgarázs és a hatvanas években épült Székesfehérvári KÖFÉM Öntödecsarnok héjszerkezeteivel a héjépítés új távlatait nyitotta meg. Komoly nemzetközi elismertséget vívott ki sok évtizedes oktatói és kutatói munkásságával *Csonka Pál* (1897-1988) egyetemi tanár, aki könyveiben és ezret megközelítő számú szakkikkében a membránelmélet vizsgálati módszereinek elképzelhetetlenül gazdag gyűjteményét hagyta ránk, utóda, *Pelikán József* (1913-1968), az ú.n. hártvaszerkezetek elméletének kidolgozója, *Szmodits Kázmér* (1908-1978), aki a héjak hajlításméletének a matematikusok körében is elismert szakértője, számos hatékony analitikus és szemianalitikus vizsgálati módszer kidolgozója volt, *Bölcskei Elemér* (1917-1977), aki a hajlított héjak általános mérnöki elméletének egyik megalkotója, korai haláláig a Vasbetonszerkezetek Tanszéke tanszékvezetője és e tárgy előadója volt, *Márkus Gyula* (1920-1989), a Vasbetonszerkezetek Tanszéke c. egyetemi tanára, akinek a forgáshéjak mérnöki elméletével foglalkozó könyve mindmáig a legkiemelkedőbb és leghasználhatóbb mű a témakör nemzetközi irodalmában. *Thoma József* és *Homonnay Tamás* nevéhez fűződik a héjépítés egyik leghatékonyabb hazai módszerének, a csúszózsalsus építési eljárásnak a kidolgozása.

Jelentős eredményekkel gazdagították a héjak mérnöki elméletét Egyetemünk nemzetközi hírű professzorai, *Kollár Lajos*, *Dulácska Endre*, *Füzy Jenő*, *Tarnai Tibor*, *Kollár László* és a Miskolci Egyetemen tevékenykedő *Kozák Imre* professzor is.