

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 145

**Methoden der risikobasierten Kapitalallokation
im Versicherungs- und Finanzwesen**

von
Peter Albrecht und Sven Koryciorz

Mannheim 03/2003

Methoden der risikobasierten Kapitalallokation im Versicherungs- und Finanzwesen

Von Peter Albrecht und
Sven Koryciorz, Mannheim

[Version vom 30. April 2004]

Inhaltsübersicht

- 1 Einführung
- 2 Bestimmung des risikobasierten Kapitals
- 3 Arten der Kapitalallokation
 - 3.1 Absolute Kapitalallokation: Grundlagen
 - 3.2 Absolute Kapitalallokation bei homogenen Segmenten
 - 3.3 Inkrementelle Kapitalallokation
 - 3.4 Marginale Kapitalallokation
- 4 Anforderungen an eine absolute Kapitalallokation
- 5 Allokationsprinzipien
 - 5.1 Proportionale Allokation
 - 5.2 Kovarianzprinzip
 - 5.3 Bedingter Erwartungswert-Prinzip
 - 5.4 *CVaR*-Prinzip
 - 5.5 *Euler*-Prinzip
- 6 Weitere Ansätze der Kapitalallokation
 - 6.1 Firmenwertbasierte Ansätze
 - 6.2 Spieltheoretische Ansätze
- 7 Zusammenfassung

Anhang: Zur Kohärenz des *CVaR*-Prinzips

Literaturverzeichnis

1 Einführung

Die vorliegende Ausarbeitung hat die systematische Aufarbeitung von Methoden der risikobasierten Kapitalallokation im Versicherungs- und Finanzwesen zum Ziel. Bevor diese Methoden im Detail vertieft werden, ist es allerdings zunächst angezeigt, eine Erläuterung der hierbei zugrunde zu legenden Kapitalkonzeption vorzunehmen sowie kurz auf die auf einer Kapitalallokation aufbauenden Anwendungsfelder einzugehen.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet das risikoadjustierte Kapital (*RAC*; Risk Adjusted Capital¹) einer Unternehmung, verstanden als „the smallest amount of economic capital a (...) [company] must set aside to try and prevent the net asset value or earnings of a business unit from falling below some ‘catastrophic loss’ level“², welches im Sinne einer unternehmensinternen Konzeption unter Bezugnahme auf das vorhandene Risikoexposure zu spezifizieren ist. Hierbei gilt es zu beachten, dass das *RAC* nicht mit dem „physischen“ Eigenkapital des Unternehmens – nach welcher Konzeption auch immer spezifiziert – zusammenfallen muss³ und unternehmensexterne Kapitalkonzeptionen⁴ hiervon klar zu unterscheiden sind.

Grundsätzlich spielt auch der Zweck der Risikokapitalbestimmung eine Rolle, wobei zwischen der Aufgabe einer Solvabilitätskontrolle einerseits und der einer risikoadjustierten Performancesssteuerung (*RAPM*; Risk Adjusted Performance Management) andererseits zu unterscheiden ist. Um die Solvabilität eines Unternehmens zu sichern, ist zu gewährleisten, dass die insgesamt zur Verlustverrechnung verfügbaren Mittel nicht unter das entsprechende risikobasierte Kapital auf der Gesamtunternehmensebene fallen. Zu Zwecken einer risikoadjustierten Performancesssteuerung ist demgegenüber sicherzustellen, dass unternehmensweit sowie idealiter auch auf der Ebene der einzelnen Geschäftsaktivitäten eine risikoadjustierte Mindestrendite erzielt wird. Die Implementierung einer risikobasierten Kapitalallokation ist demzufolge nur in dem zuletzt genannten Kontext der Performancesssteuerung sinnvoll, der im Weite-

¹ In der Literatur existieren eine Reihe von verwandten Begriffen, wie Risk Based Capital (*RBC*), Capital at Risk (*CaR*), Economic Capital oder betriebsnotwendiges Risikokapital. Diese Begriffe können im Prinzip synonym zu *RAC* verwendet werden, so lange die dabei zugrunde liegende Kapitalkonzeption identisch ist mit der im Haupttext herausgearbeiteten.

² *Culp, C. L.* (2000), S. 16.

³ Zu Zwecken der Unternehmenssteuerung muss dabei berücksichtigt werden, dass es eine Verbindung zwischen dem physischen Eigenkapital und dem *RAC* zu etablieren gilt. Im Falle von Versicherungsunternehmen vgl. ausführlich dazu *Albrecht, P.* (1998), S. 233 ff.

⁴ Hierzu gehören Kapitalkonzeptionen der Rechnungslegung, der Rating-Agenturen oder etwa regulatorische Anforderungen an das notwendige Kapital.

ren allein von Interesse sein soll, da ein risikobasiertes Kapital zu Solvabilitätszwecken stets auf das Unternehmen in seiner Gesamtheit abzustellen hat.⁵

Im Zentrum einer risikoadjustierten Performancesteuerung stehen typischerweise Performancemaße des *RORAC*-Typus,⁶ die von der Form

$$(1) \quad RORAC = \frac{\text{Erfolg}}{RAC}$$

sind.⁷ Das *RORAC*-Performancemaß kann dabei sowohl für das Gesamtunternehmen als auch für einzelne Unternehmenssegmente (Zusammenfassungen von Geschäftsaktivitäten) bestimmt werden,⁸ wobei eine Segmentsteuerung die Spezifikation der zugehörigen Segment-*RAC*-Größen erfordert. Diese lassen sich entweder aus der isolierten Betrachtung der einzelnen Unternehmenssegmente gewinnen (Stand-alone-Ansatz) oder aber jedem Segment wird ein Teil des unternehmensweiten Gesamt-*RAC*s rechnerisch zugeordnet, das heißt, die einzelnen Segment-*RAC*s werden im Wege einer virtuellen Kapitalallokation⁹ ermittelt. Verfahrensimmanent ignoriert der Stand-alone-Ansatz gleichwohl die Wechselwirkungen der einzelnen Unternehmenssegmente im Hinblick auf das Unternehmensrisiko, die folglich nur im Rahmen einer Kapitalallokation eine adäquate Berücksichtigung erfahren können. Wie nun eine solche Kapitalallokation durchgeführt werden kann, ist das zentrale Thema der vorliegenden Ausarbeitung.

⁵ Schließlich ist es allein die Unternehmung als Ganzes – mithin die juristische Person, die selbständiger Träger von Rechten und Pflichten ist –, die insolvent werden kann und nicht etwa die einzelnen rechtlich unselbständigen Geschäftseinheiten, denen auf der rein rechnerischen Ebene bestimmte Kapitalbestandteile zugewiesen werden. Siehe dazu *Bass, I. K. / Khury, C. K.* (1992), S. 564 f., *Myers, S. C. / Read, S. A.* (2001), S. 546 und S. 559, *Schradin, H. R.* (1998), S. 219 und S. 221, *Schradin, H. R.* (2001a), S. 105 sowie *Venter, G. G.* (2002), S. 5.

⁶ Das Akronym *RORAC* steht für „Return on Risk Adjusted Capital“.

⁷ Zum Zusammenhang des *RORAC*-Maßes zu anderen Maßen wie *EVA* (Economic Value Added) oder *RAROC* (Risk Adjusted Return on Capital) vgl. etwa *Culp, C. L.* (2000), S. 22, *Cummins, D. J.* (2000), S. 10 oder *Stoughton, N. / Zechner, J.* (2000), S. 883.

⁸ Vor allem bestehenden finanzwirtschaftlichen Diversifikationseffekten oder versicherungswirtschaftlichen Ausgleich-im-Kollektiv-Effekten ist hierbei besondere Beachtung zu schenken.

⁹ Die Kapitalallokation erfolgt somit nicht etwa physisch, sondern rein kalkulatorisch. Vgl. dazu *Albrecht, P.* (1998), S. 232, *Matten, C.* (2000), S. 74 f. oder *Patrik, G. / Bernegger, S. / Rüegg, M. B.* (1999), S. 57. Ferner führt *Philbrick, S. W.* (2000), S. 23 zum bloßen virtuellen Charakter der Kapitalallokation treffend aus: „Allocation of surplus is not a compartmentalization of surplus. It is not an end product – it is an intermediate calculation.“

Im Vordergrund der weiteren Ausführungen stehen somit Methoden der Kapitalallokation und nicht konkrete Anwendungen der Kapitalallokation auf Fragen der (risikoadjustierten) Unternehmenssteuerung. Hierzu sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.¹⁰

Der Vollständigkeit halber soll abschließend noch festgehalten werden, dass die Verfahren risikoadjustierter Performancesteuerung, insbesondere des *RORAC*-Typus, durchaus der Kritik unterliegen. Ein erster zentraler Kritikpunkt ist dabei die nicht notwendigerweise gegebene Kompatibilität mit einer Maximierung des Unternehmenswertes,¹¹ während eine darüber hinausgehende Fundamentalkritik Bezug nimmt auf die Vornahme einer Allokation des *RAC* selbst.¹² Je nach zugrunde liegendem Risikomaß zur Bestimmung des *RAC*, zugrunde liegender Annahme über die Zufallsgesetzmäßigkeit sowie zugrunde liegender Allokationsregel zur Verteilung des *RAC* können nämlich erhebliche Unterschiede im zugerechneten Segment-Risikokapital auftreten, die sich wiederum in die Unternehmenssteuerung fortpflanzen.¹³

2 Bestimmung des risikobasierten Kapitals

Wie bereits ausgeführt, orientiert sich die Höhe des risikobasierten Kapitals grundsätzlich an dem vorhandenen Risikoexposure. Dies erfordert sowohl die Spezifikation dieses Exposures als auch die Spezifikation eines Risikomaßes. Beginnen wir mit der Spezifikation des Exposures im Rahmen von unterschiedlichen Anwendungsfällen.

Grundsätzlich wird im Weiteren das Exposure einer bestimmten Unternehmensaktivität über einen zu spezifizierenden Zeitraum in Termen einer (zufallsabhängigen) *Verlustvariablen* *L* quantifiziert. Zur Illustration dieses einheitlichen Ansatzes betrachten wir eine Reihe von Standardanwendungsfällen.

¹⁰ Für Anwendungen auf Kreditinstitute vgl. etwa *Ballwieser, W. / Kuhner, C.* (2000), *Culp, C. L.* (2000), *Matten, C.* (2000), *Ploegmakers, H. / Schweitzer, M.* (2000), *Stoughton, N. / Zechner, J.* (2000). Für Anwendungen auf Versicherungsunternehmen vgl. etwa *Albrecht, P.* (1998), *Graumann, M. / Baum, S.* (2003), *Patrik, G. / Bernegger, S. / Rüegg, M. B.* (1999) oder *Schradin, H. R.* (1998, 2001a).

¹¹ Vgl. etwa *Albach, H.* (2001), *Albrecht, P.* (1998), *Froot, K. A. / Stein, J. C.* (1998) sowie *Gründl, H. / Schmeiser, H.* (2002).

¹² Zur Thematisierung dieser Problematik vgl. *Schradin, H. R.* (2001b) sowie *Venter, G. G.* (2002).

¹³ Diese Problematik veranlasst *Venter, G. G.* (2002) sogar zur Empfehlung: „Allocating Surplus – Not!“

Beispiel 1: (Versicherungsverpflichtungen: Allgemeiner Fall)

Im Falle von Verpflichtungen eines Versicherungsunternehmens gehen wir aus von dem akkumulierten Gesamtschaden $S \geq 0$ eines fixierten Versicherungsbestandes über eine fixierte Zeitperiode (typischerweise ein Jahr). Die zugehörige Verlustgröße lässt sich in diesem Fall fassen als

$$(2) \quad L := S - E(S).$$

Die Subtraktion des Erwartungsschadens trägt dabei dem Umstand Rechnung, dass dem Versicherungsunternehmen neben dem Risikokapital auch eine (Risiko-)Prämie zur Finanzierung der Schäden zur Verfügung steht.¹⁴

Im Falle mehrerer Segmente (Teilkollektive) $i = 1, \dots, n$ mit zugehörigen akkumulierten Gesamtschäden S_i definieren wir entsprechend als Segmentverlustvariable $L_i := S_i - E(S_i)$ und

als Gesamtverlustvariable $L := \sum_{i=1}^n [S_i - E(S_i)]$.

Beispiel 2: (Homogene Kollektive von Versicherungsverpflichtungen)

In Weiterführung des Beispiels 1 nehmen wir an, dass der Gesamtschaden S_i des i -ten Segments die Gestalt

$$(3) \quad S_i = \sum_{j=1}^{k_i} X_{ij}$$

besitzt, wobei (pro Segment) die X_{ij} jeweils unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind und k_i deren Anzahl festlegt. Konkret symbolisiert X_{ij} den Gesamtschaden des j -ten Versicherungsnehmers des i -ten Segments (Teilkollektivs), womit das i -te Segment ein homogenes Kollektiv von k_i Versicherten darstellt. Die zugehörige Segmentverlustvariable bleibt entsprechend durch $L_i := S_i - E(S_i)$ definiert.

¹⁴ Die Risikoprämie sollte aus risikotheorietischen Erwägungen heraus mindestens mit der Höhe $E(S)$ angesetzt werden. Der Abzug nur des Erwartungswertes und nicht der Gesamtprämie liegt darin begründet, dass der Zweck der Risikokapitalbestimmung wie bereits ausgeführt die Performancesteuerung ist. Hierbei dürfen bei der Konstruktion des risikobasierten Kapitals keine Profitabilitätselemente eingehen. Vgl. im Einzelnen zu dieser Argumentation *Albrecht, P.* (1998), S. 237 f.

Beispiel 3: (Portfolios von Finanzinvestments)

Wir betrachten zunächst ein einzelnes Finanzinvestment (Aktien- oder Bondinvestment, Short- oder Long-Position einer Option) und dessen *Marktwertänderung* über eine (typischerweise kurze) Haltedauer $[t, t + h]$. Der zugehörige Periodenverlust ist sodann definiert durch

$$(4) \quad L := v_t - V_{t+h},$$

wobei v_t der bekannte Marktwert am Periodenanfang und V_{t+h} der zufallsabhängige Marktwert am Periodenende ist.

Betrachten wir nun ein Portfolio aus n einzelnen Finanzinvestments, so mündet dies in den folgenden Ansatz:

$$(5) \quad L := \sum_{i=1}^n x_i LF_i .$$

Dabei entspricht LF_i dem Periodenverlust auf Marktwertbasis gemäß (4) für eine Einheit (ein Stück) des i -ten ($i = 1, \dots, n$) Finanzinvestments (etwa: Aktie) und x_i der *absoluten* Anzahl der (Short- oder Long-)Einheiten des i -ten Investments. Auch in diesem Falle bezeichnen wir das i -te Segment mit zugehöriger Verlustvariable $L_i := x_i LF_i$ als homogen, im Detail ist die Segmentstruktur jedoch andersartig als in Beispiel 2.

Beispiel 4: (Assets und Liabilities eines Versicherungsunternehmens)

Wir erweitern die Situation aus Beispiel 1, indem wir für ein Versicherungsunternehmen n Versicherungssegmente mit korrespondierenden periodischen Gesamtschäden S_i ($i = 1, \dots, n$) sowie das Wertpapierportfolio des Versicherers betrachten, das aus m Wertpapieren besteht, die jeweils in absoluter Stückzahl x_j ($j = 1, \dots, m$) gehalten werden. Die relevante Verlustvariable¹⁵ ist in diesem Fall definiert durch

$$(6) \quad L = \sum_{i=1}^n [S_i - E(S_i)] + \sum_{j=1}^m x_j (v_{0j} - V_{1j}).$$

¹⁵ *Schradin, H. R.* (1998, 2001a) betrachtet allgemeinere Positionen eines Versicherungsunternehmens, die noch die Betriebskosten, die Rückversicherungsbeziehungen sowie Abwicklungsergebnisse aus den in Vorperioden gebildeten Schadenreserven berücksichtigen.

Dabei bezeichnen v_{0j} bzw. V_{1j} die Werte des j -ten Finanztitels am Periodenanfang bzw. am Periodenende. Die Periodenlänge für die Wertentwicklung der Finanzpositionen und die Aggregation der Gesamtschäden ist dabei identisch zu wählen. Entsprechen die einzelnen Versicherungssegmente homogenen Kollektiven, so ist eine entsprechende Modellmodifikation auf der Grundlage von Beispiel 2 unschwer möglich.

Beispiel 5: (Kreditrisiken)

Bezeichnet CL (Credit Loss) den aus einem Kreditportfolio einer Finanzinstitution resultierenden potenziellen aggregierten Ausfall über eine fixierte Periode, so ist die zugehörige Verlustvariable definiert durch

$$(7) \quad L := CL.$$

Eine entsprechende Modellierung ist zu wählen, wenn man n einzelne Segmente in Form von Sub-Kreditportfolios mit zugehörigen Verlustvariablen CL_i ($i = 1, \dots, n$) betrachtet. Es gilt

$$\text{dann } CL = \sum_{i=1}^n CL_i.$$

Beispiel 6: (Ausfallbedrohte Finanztitel)

Betrachten wir einen Bestand an ausfallgefährdeten Finanztiteln (Bonds, Over-the-Counter-Optionen) und bezeichne CL_i ($i = 1, \dots, n$) den potenziellen aggregierten Ausfall des i -ten ausfallgefährdeten Finanztitels über eine fixierte Periode, so gilt

$$(8) \quad L := \sum_{i=1}^n x_i LF_i,$$

wobei $LF_i := CL_i$ und x_i die absolute Anzahl des i -ten ausfallgefährdeten Finanztitels bezeichne.

Nach dieser – in Termen von Verlustvariablen ausgedrückten – modelltheoretischen Spezifikation des Risikoexposures wenden wir uns nun dem Prozess der Kapitalallokation zu. Bei gegebener Gesamtverlustgröße L sowie gegebenen Segmentverlustgrößen L_1, \dots, L_n , mit $L = L_1 + \dots + L_n$, beinhaltet dieser Prozess im Allgemeinen die folgenden Schritte:

1. Spezifikation einer multivariaten Verteilung für (L_1, \dots, L_n) inklusive der impliziten oder expliziten Festlegung der zugehörigen Abhängigkeitsstruktur.

2. Selektion eines Risikomaßes.
3. Kalkulation des Gesamtrisikokapitals sowie der (Stand-alone-)Segmentrisikokapitalien.
4. Überprüfung der Existenz eines positiven Diversifikationseffektes.
5. Anwendung einer (oder alternativer) Allokationsregeln zur Ermittlung der zugerechneten Segmentrisikokapitalien.

Diese Einzelschritte werden im Weiteren einer näheren Erläuterung unterzogen.

Die Vorgabe einer multivariaten Verteilung (Schritt 1) kann entweder gesamthaft direkt erfolgen (und beinhaltet damit bereits die unterstellte Abhängigkeitsstruktur) oder aber über die Spezifikation der eindimensionalen Randverteilungen, $F_i(x) = P(L_i \leq x)$, in Verbindung mit einer Copula.¹⁶ In diesem Falle legt die Copula die multivariate Abhängigkeitsstruktur fest.

Zur Quantifizierung des Risikoexposures ist hiernach das aus der Verlustvariable L bzw. den Verlustvariablen L_1, \dots, L_n resultierende Risikopotenzial zu spezifizieren, wozu es eines konkreten Risikomaßes bedarf (Schritt 2). *Albrecht* folgend,¹⁷ lassen sich grundsätzlich zwei Basiskonzeptionen von Risikomaßen unterscheiden: Risikomaße des Typus I (R_I)¹⁸ auf der einen Seite, welche Risiko als Gefahr der Abweichung von einer gegebenen Zielgröße konzeptualisieren, sowie Risikomaße des Typus II (R_{II})¹⁹ auf der anderen Seite, die Risiko als (minimal) notwendiges Kapital begreifen. Im Sinne einer unternehmensinternen Kapitalkonzeption können demzufolge Risikomaße des Typus II unmittelbar zur Quantifizierung des Risikoexposures Verwendung finden, das heißt, es gilt $R := R_{II}$ und das interessierende notwendige Risikokapital lässt sich über die Beziehung

$$(9) \quad RAC = R(L)$$

¹⁶ Vgl. hierzu etwa *Embrechts, P. / McNeil, A. / Straumann, D.* (2002), S. 179 ff.

¹⁷ Vgl. *Albrecht, P.* (2003), Abschnitt 3.

¹⁸ Beispiele hierfür sind die Varianz bzw. die Standardabweichung sowie Lower Partial Moments.

¹⁹ Beispiele hierfür sind der Value-at-Risk sowie der Conditional Value-at-Risk.

gewinnen (Schritt 3).²⁰ Ist das Risikomaß (des Typus II) translationsinvariant, das heißt gilt der strukturelle Zusammenhang $R(X - c) = R(X) - c$ für alle c ,²¹ so greift auf der Grundlage der Beziehung (9) die Gleichung

$$(10) \quad R(L - RAC) = R(L) - RAC = 0.$$

Dies verdeutlicht nochmals die Bedeutung von RAC bzw. $R(L)$ als (minimal) notwendigem Kapital, das einer Finanzposition mit der zugehörigen Verlustvariable L hinzugefügt werden muss, um eine „risikolose“ Position zu erreichen.

Die bisherigen Überlegungen vernachlässigen, dass das Risikokapital gegebenenfalls bis zum Ende der betrachteten Periode der Länge t risikolos angelegt werden kann, etwa zur sicheren Zinsrate r . Die modifizierte Bedingung an das Risikokapital, die dieser Möglichkeit Rechnung trägt, lautet entsprechend

$$(11) \quad R(L - RAC e^{rt}) = 0.$$

Ist das Risikomaß R positiv homogen – gilt mithin $R(cX) = cR(X)$ für $c \geq 0$ –, so ist (10) äquivalent zu

$$(12) \quad R(e^{-rt} L - RAC) = 0,$$

denn es gilt $0 = R(L - RAC e^{rt}) = e^{rt} R(e^{-rt} L - RAC)$. Auch unter Berücksichtigung einer sicheren Verzinsung lässt sich somit mit der Definition (9) arbeiten, das Risikomaß (des Typus II) muss nur auf die entsprechend diskontierte Verlustvariable angewendet werden.

Wie oben dargelegt, ist die Spezifikation eines Risikomaßes sowie einer multivariaten Verteilung für die Verlustvariablen L_1, \dots, L_n Voraussetzung für die Bestimmung des Gesamtrisikokapitals $R(L)$ sowie der Segmentrisikokapitalien $R(L_i)$ unter Prozessschritt 3. In bestimmten Basisfällen kann dabei ein expliziter Ausdruck für $R(L)$ bzw. $R(L_i)$ gewonnen werden. Typischerweise ist dies etwa möglich, wenn wir von einer multivariaten Normalver-

²⁰ Risikomaße R_1 des Typus I, die das Axiomensystem von Rockafellar, R. T. / Uryasev, S. / Zabrankin, M. (2003) erfüllen – vgl. hierzu auch Albrecht, P. (2003), Abschnitt 5.2 – können ebenfalls verwendet werden. In diesem Falle kann regelmäßig mit der Beziehung $RAC = E(L) + a R_1(L)$ gearbeitet werden.

²¹ Wird eine indeterminierte Verlustposition um den sicheren Betrag c reduziert, etwa durch Zuführung von Kapital, so verringert sich das Risiko der Position gerade um diesen Betrag c . Analog hierzu bedeutet die Erhöhung einer Gewinnvariablen Y um c eine entsprechende Risikoreduktion, formal: $R(Y + c) = R(Y) - c$. Zur letzteren Darstellung siehe Artzner, P. u. a. (1999), S. 209.

teilung für (L_1, \dots, L_n) ausgehen, was im Rahmen der weiteren Ausführungen entsprechend als Standardbeispiel fungieren wird. Aber auch in anderen Fällen sind gegebenenfalls analytische Resultate existent.²² Ist eine analytische Bestimmung nicht möglich, so stehen als Ansätze die Monte Carlo-Simulation oder aber die statistische Schätzung²³ der interessierenden Risikokennziffern zur Verfügung. Eine weitere Variante besteht in der Gewinnung von unteren und oberen Grenzen von $R(L)$, etwa dann, wenn nur die Randverteilungen, nicht aber die Abhängigkeitsstruktur spezifiziert sind.²⁴ Die noch ausstehenden Schritte des dargelegten Prozesses einer Kapitalallokation werden in den folgenden Abschnitten im Detail erläutert.

3 Arten der Kapitalallokation

3.1 Absolute Kapitalallokation: Grundlagen

Der Standardfall einer Kapitalallokation lässt sich wie folgt allgemein formalisieren. Die Verlustvariable L resultiert aus einer unternehmerischen Gesamtaktivität bzw. einem Gesamtportfolio und das damit verbundene Risikokapital beläuft sich auf $RAC = R(L)$. Zerlegt man die Gesamtaktivität in einzelne Teilaktivitäten bzw. das Gesamtportfolio in einzelne Teilportfolios oder Unternehmenssegmente, so resultieren hieraus Verlustvariablen L_i ($i = 1, \dots, n$) mit $L = L_1 + \dots + L_n$. Betrachtet man die isoliert ermittelten Risikokapitalien (Stand-alone-RACs) gemäß $RAC_i := R(L_i)$, so gilt in vielen zentralen Fällen²⁵

$$(13) \quad RAC = R(L) < \sum_{i=1}^n R(L_i) = \sum_{i=1}^n RAC_i .$$

Das Zusammenfügen der einzelnen Segmente bewirkt in der Regel einen Diversifikationseffekt (bzw. im Versicherungsfall einen Ausgleich-im-Kollektiv-Effekt), der das insgesamt notwendige Risikokapital reduziert. Der Diversifikationseffekt lässt sich durch die Funktion

$$(14) \quad D_R(L_1, \dots, L_n) = \sum_{i=1}^n R(L_i) - R\left(\sum_{i=1}^n L_i\right),$$

²² Siehe zum Beispiel die Resultate von *Hürlimann, W.* (2001a).

²³ Vgl. beispielsweise *Scaillet, O.* (2003) für eine nicht-parametrische Schätzung des Conditional Value-at-Risk.

²⁴ Vgl. etwa die entsprechenden Beispiele in *Hürlimann, W.* (2001b).

²⁵ Insbesondere immer dann, wenn das Risikomaß R subadditiv ist.

das so genannte *Diversifikationsmaß*,²⁶ erfassen. Für eine gegebene Menge von Verlustvariablen L_1, \dots, L_n und ein gegebenes Risikomaß R tritt ein Diversifikationseffekt folglich genau dann ein, wenn die Relation $D_R(L_1, \dots, L_n) > 0$ erfüllt ist.

Beispiel 7: (Risikomaße und Diversifikationseffekt)

Wir betrachten zunächst das Typus-II-Risikomaß $R(L) := E(L) + a \text{Var}(L)$ für $a > 0$. Es gilt dann:

$$(15) \quad \begin{aligned} D_R(L_1, \dots, L_n) &= a \left[\sum_{i=1}^n \text{Var}(L_i) - \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \right] \\ &= -a \sum_{j \neq i} \mathbf{r}(L_i, L_j) \mathbf{s}(L_i) \mathbf{s}(L_j). \end{aligned}$$

Das Eintreten eines Diversifikationseffekts $D_R(L_1, \dots, L_n) > 0$ ist somit keineswegs ein Automatismus, sondern abhängig von der jeweiligen Parameterkonstellation. So ist die Beziehung $D_R(L_1, \dots, L_n) > 0$ beispielsweise mit Sicherheit erfüllt, wenn alle $\mathbf{r}(L_i, L_j) < 0$ sind. Die Varianz erweist sich somit als problematisches Risikomaß, zumindest im Hinblick auf die Bestimmung des notwendigen Risikokapitals.

Die Risikomaße $R(L) = E(L) + a \mathbf{s}(L)$ für $a > 0$, $R(L) = E(L) + a E[|L - E(L)|]$ sowie $R(L) = E(L) + a \text{LPM}_k(E(L); L)^{1/k}$, für $a > 0$ und $k \geq 1$, sind hingegen subadditiv²⁷ und es tritt ein Diversifikationseffekt für alle Verlustvariablen L_1, \dots, L_n ein, für die die Eigenschaft der Subadditivität im strikten Sinne erfüllt ist.

Für den Value-at-Risk (*VaR*) zum Konfidenzniveau \mathbf{a} gilt $\text{VaR}_{\mathbf{a}} = Q_{1-\mathbf{a}}(L)$, wobei $Q_{1-\mathbf{a}}$ das $(1-\mathbf{a})$ -Quantil der Verteilung der Verlustvariablen bezeichnet. Für das Diversifikationsmaß gilt in diesem Falle

$$(16) \quad D_{\text{VaR}}(L_1, \dots, L_n) = \sum_{i=1}^n Q_{1-\mathbf{a}}(L_i) - Q_{1-\mathbf{a}} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right).$$

²⁶ Siehe hierzu *Hürlimann, W.* (2001b).

²⁷ Vgl. etwa *Albrecht, P.* (2003), Abschnitt 6.4.

Im allgemeinen Fall ist $D_{VaR}(L_1, \dots, L_n) \geq 0$ nicht erfüllt, was äquivalent zu der Aussage ist, dass das Risikomaß Value-at-Risk nicht generell über die Eigenschaft der Subadditivität verfügt. Es existieren aber Verteilungsklassen, für die eine Subadditivität des Value-at-Risk gewährleistet ist.²⁸ Folgt etwa (L_1, \dots, L_n) einer multivariaten Normalverteilung, so ist für $\mathbf{a} < 0,5$ die Subadditivität des Value-at-Risk stets gegeben. Im Falle der Normalverteilung gilt $Q_{1-\mathbf{a}}(X) = E(X) + N_{1-\mathbf{a}} \mathbf{s}(X)$, wobei $N_{1-\mathbf{a}}$ das $(1-\mathbf{a})$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet. Für das Diversifikationsmaß resultiert hieraus die Repräsentation

$$(17) \quad D_{VaR}(L_1, \dots, L_n) = N_{1-\mathbf{a}} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{s}(L_i) - \mathbf{s} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \right] \geq 0.$$

Die Subadditivität des Value-at-Risk gründet sich im Normalverteilungsfalle demnach auf der Subadditivität der Standardabweichung.

Als letztes Risikomaß betrachten wir den Conditional Value-at-Risk²⁹ ($CVaR$) zum Konfidenzniveau³⁰ \mathbf{a} , wobei $CVaR_{\mathbf{a}} = E[L | L > VaR_{\mathbf{a}}]$. Der $CVaR$ ist ein kohärentes Risikomaß³¹ im Sinne von *Artzner/Delbaen/Eber/Heath* und damit insbesondere subadditiv, solange man sich auf stetige Verteilungen (Existenz einer Dichtefunktion) beschränkt. In diesem Falle gilt für das Diversifikationsmaß folglich ausnahmslos die Relation $D_{CVaR}(L_1, \dots, L_n) \geq 0$. Betrachten wir auch hier wiederum den Fall, dass (L_1, \dots, L_n) einer multivariaten Normalverteilung folgt, so gilt $CVaR_{\mathbf{a}}(X) = E(X) + \frac{\mathbf{j}(N_{1-\mathbf{a}})}{\mathbf{a}} \mathbf{s}(X)$, wobei $\mathbf{j}(x) \geq 0$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.³² Für das Diversifikationsmaß greift in diesem Falle die Beziehung

$$(18) \quad D_{CVaR}(L_1, \dots, L_n) = \frac{\mathbf{j}(N_{1-\mathbf{a}})}{\mathbf{a}} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{s}(L_i) - \mathbf{s} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \right] \geq 0.$$

²⁸ Allgemein gilt dies für die Klasse der elliptischen Verteilungen (sofern $\mathbf{a} < 0,5$), vgl. *Embrechts, P. / McNeil, A. / Straumann, D. (2002)*, S. 190. Zur Klasse der elliptischen Verteilungen vgl. grundlegend *Fang, K.-T. / Kotz, S. / Ng, K.-W. (1990)*.

²⁹ Siehe *Albrecht, P. (2003)*, Abschnitt 7.2.

³⁰ Dabei ist \mathbf{a} das Konfidenzniveau, das der Value-at-Risk-Bestimmung zu Grunde liegt. Das resultierende Konfidenzniveau beim Conditional Value-at-Risk ist damit stets kleiner oder gleich \mathbf{a} , da die Relation $VaR \leq CVaR$ uneingeschränkte Gültigkeit besitzt.

³¹ Vgl. *Albrecht, P. (2003)*, Abschnitt 5.3 sowie *Albrecht, P. / Koryciorz, S. (2003)*, S. 2 f.

³² Siehe dazu wiederum *Albrecht, P. (2003)*, Abschnitt 7.2 und *Albrecht, P. / Koryciorz, S. (2003)*, S. 6.

Wie schon beim Value-at-Risk ist die Subadditivität des Conditional Value-at-Risk im Normalverteilungsfalle³³ äquivalent zur Subadditivität der Standardabweichung.

Kommen wir zurück zur Aufgabe der (absoluten) Kapitalallokation. Wie bereits im ersten Kapitel ausgeführt, ignoriert der Ansatz des Stand-alone-RAC ($RAC_i = R(L_i)$), etwa im Zuge einer RORAC-Segmentsteuerung, die Wechselwirkungen zwischen den Segmenten, die insgesamt zu einem positiven Diversifikationseffekt $D_R(L_1, \dots, L_n) > 0$ führen können. Eine Stand-alone-Steuerung des i -ten Segments ignoriert somit Risikoreduktionseffekte, die für die Gesamtposition von zentraler Bedeutung sind. Eine integrierte Segmentsteuerung, die die Gesamtposition mit berücksichtigt, darf daher nicht auf dem Stand-alone-Risikokapital $RAC_i = R(L_i)$ basieren, sondern auf einem (noch geeignet festzusetzenden) allokierten Risikokapital $RAC_i^* = R(L_i; L)$, das auf den *Risikobeitrag* des i -ten Segments zum Gesamtrisiko $R(L)$ abstellt. Die Bestimmung der Risikobeiträge $R(L_i; L)$ steht damit im Zentrum jeglicher (absoluten) Risikokapitalallokation. Die Aufgabe ist es dabei, einen (positiven) Diversifikationseffekt $D_R(L_1, \dots, L_n) > 0$ in einer angemessenen bzw. „fairen“ (z. B. risikoadäquaten) Weise so auf die einzelnen Segmente zu verteilen, dass die konstitutive Bedingung

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n RAC_i^* = \sum_{i=1}^n R(L_i; L) = R(L)$$

erfüllt ist. Diese Aufgabe ist nicht-trivial, da der Diversifikationseffekt nicht-linearer Natur ist.³⁴ Die Erfüllung der Bedingung (19) beinhaltet somit im Kern stets die Linearisierung eines nicht-linearen Zusammenhangs. Dies ist jedoch nicht willkürfrei möglich, sondern kann nur auf der Basis zusätzlicher Annahmen („Was ist eine faire bzw. risikoadäquate Verteilung?“) erfolgen, die kritisierbar sind. Gleichwohl schließen diese Zusammenhänge nicht aus, dass die Allokation in „vernünftiger“ Weise, auf der Basis von *objektiven Kriterien*, vorgenommen werden kann.

Der Zusammenhang zwischen RAC_i^* und RAC_i bzw. zwischen $R(L_i; L)$ und $R(L_i)$ kann formal auf der Grundlage von Allokationsfaktoren $0 \leq j_i \leq 1$ dargestellt werden,

³³ Im Gegensatz zum Value-at-Risk ist eine Beschränkung auf $\alpha < 0,5$ allerdings nicht länger notwendig.

³⁴ So ist etwa im Falle des Risikomaßes Standardabweichung sowie im Falle einer multivariaten Normalverteilung bei Ansatz des Value-at-Risk bzw. des Conditional Value-at-Risk der Diversifikationseffekt eine Funktion der Quadratwurzel.

$$(20) \quad R(L_i; L) = \mathbf{j}_i R(L),$$

wobei zur Gewährleistung von (19) die Beziehung $\sum_{i=1}^n \mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^n R(L_i; L)/R(L) = 1$ gelten muss.

Schließlich lässt sich der *Segmentbeitrag zum Diversifikationseffekt* (unter der Allokationsregel (\mathbf{j}_i)) $D_R(L_i) := R(L_i) - R(L_i; L) = R(L_i) - \mathbf{j}_i R(L)$ definieren. Für diesen gilt der struk-

turelle Zusammenhang $\sum_{i=1}^n D_R(L_i) = \sum_{i=1}^n R(L_i) - R(L) = D_R(L_1, \dots, L_n)$.

Eine zentrale Problematik der Kapitalallokation im Hinblick auf die Unternehmenssteuerung besteht nun darin, dass das Ausmaß des Diversifikationseffektes $D_R(L_1, \dots, L_n)$ im Allgemeinen von allen Segmentverlustgrößen L_1, \dots, L_n simultan abhängt, mithin jegliche Veränderung eines Segments (z. B. durch Segmentvergrößerung oder -schrumpfung) das Ausmaß der Diversifikation und damit die Kapitalallokation nicht unverändert lässt. Die vorgenommene Kapitalallokation setzt damit im allgemeinen Fall eine *Fixierung* der Segmentgrößen L_1, \dots, L_n voraus. Jegliche Veränderung $L_i + \Delta L_i$ auch nur eines der Segmente ändert das Gesamtrisikokapital $R(L)$ und erzwingt damit eine neue Kapitalallokation. Dies gilt es bei dem Einsatz von allokiertem Risikokapital zur Segment- bzw. Unternehmenssteuerung sorgfältig zu beachten.

3.2 Absolute Kapitalallokation bei homogenen Segmenten

Eine Klasse von Spezialfällen, denen besondere Bedeutung zukommt und bei denen, wie noch gezeigt wird, die Gewinnung tiefer gehender Resultate möglich ist, soll in diesem Abschnitt detaillierter analysiert werden. Es sind dies die Fälle, in denen die einzelnen Segmente bestimmte homogene Strukturen besitzen, wie etwa in den einführenden Beispielen 2, 3 und 6. Hier ist man nicht nur in der Bestimmung des allokierten Risikokapitals pro Segment interessiert, sondern darüber hinausgehend in einer Risikokapitalallokation pro Segmenteinheit (*per unit allocation*).

Im Falle des Beispiels 2 (homogenes Versicherungskollektiv) wird dabei eine Risikokapitalallokation $R(X_i; L)$ pro Versichertem des i -ten Teilkollektivs gesucht, die die Bedingung

$$(21) \quad R(L_i; L) = k_i R(X_i; L)$$

erfüllt. Dabei entspricht X_i derjenigen Zufallsvariable, gemäß der die individuellen Gesamtschäden X_{ij} der k_i Versicherten des i -ten Teilkollektivs (unabhängig und) identisch verteilt sind. Analog dazu wird im Falle des Beispiels 3 eine Risikokapitalallokation $R(LF_i; L)$ pro Einheit des Finanztitels i gesucht, die der Bedingung

$$(22) \quad R(L_i; L) = x_i R(LF_i; L)$$

genügt, wobei x_i die Anzahl des i -ten Finanztitels im Investmentportfolio bedeute.

Im Investmentfall (Beispiel 3) kann die dargestellte Aufgabe auch folgendermaßen formalisiert werden.³⁵ Fixiert man die Verlustvariablen LF_1, \dots, LF_n , so induziert die Funktion

$$(23) \quad R(x_1, \dots, x_n) := R\left(\sum_{i=1}^n x_i LF_i\right)$$

ein Risikomaß³⁶ auf dem \mathfrak{R}^n . Wir sind dann an einer Kapitalallokation $R_i(x_1, \dots, x_n) = R(LF_i; L)$ pro Einheit des i -ten Finanztitels interessiert, die insbesondere die Bedingung (19) der vollständigen Allokation, in diesem Kontext

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n x_i R_i(x_1, \dots, x_n) = R(x_1, \dots, x_n) \text{ für alle } (x_1, \dots, x_n)$$

erfüllt.

Wie im allgemeinen Fall des Abschnitts 3.1 ist dabei auch im Falle eines homogenen Portfolios von Finanztiteln die Kapitalallokation abhängig sowohl von den fixierten Basisfinanztiteln, wie auch von den Ausmaßen x_i mit denen in diese Basisfinanztitel investiert wurde.

³⁵ Siehe zu diesem Ansatz *Denault, M.* (2001), *Fischer, T.* (2003) sowie *Tasche, D.* (2000, 2002).

³⁶ Im Falle von homogenen Versicherungskollektiven ist eine analoge Vorgehensweise möglich. Jedoch ist das korrespondierende induzierte Risikomaß (aufgrund der Ausgleichseffekte in den betreffenden Teilkollektiven) kein positiv homogenes Risikomaß. Dies aber ist essentiell für die in Abschnitt 5.5 dargestellten Ergebnisse im Zusammenhang mit (24).

3.3 Inkrementelle Kapitalallokation

Im Rahmen einer inkrementellen Kapitalallokation wird der Risikobeitrag des i -ten Segments zum Gesamtrisiko derart ermittelt, dass die Differenz zwischen dem Risikokapital unter Einchluss des Segments sowie dem Risikokapital unter Ausschluss dieses Segments betrachtet wird,³⁷ das heißt

$$(25) \quad R(L_i; L) := R(L) - R(L - L_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Diese durchaus intuitive Vorgehensweise besitzt jedoch den Nachteil, dass im Allgemeinen nicht die für eine Kapitalallokation fundamentale Beziehung (19) gewährleistet ist, das heißt sich das allokierte Risikokapital nicht notwendigerweise zum Gesamtrisikokapital aufaddiert.³⁸ Betrachten wir hierzu ein Beispiel.

Beispiel 8: (Inkrementelle Kapitalallokation)

Wir gehen aus von zwei Segmenten mit zugehörigen Verlustvariablen L_1 und L_2 . Das Risikomaß R sei subadditiv und es existiere ein positiver Diversifikationseffekt $D_R(L_1, L_2) > 0$. Die Segmentrisikobeiträge nach dem inkrementellen Verfahren bestimmen sich demnach zu $R(L_1; L) := R(L) - R(L_2)$ bzw. $R(L_2; L) := R(L) - R(L_1)$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} R(L_1; L) + R(L_2; L) &= R(L_1 + L_2) + R(L_1 + L_2) - R(L_1) - R(L_2) \\ &= R(L_1 + L_2) - D_R(L_1, L_2) \\ &< R(L_1 + L_2), \end{aligned}$$

mithin tritt hier eine Allokationslücke exakt in Höhe des Diversifikationseffektes auf. Dies liegt allgemein darin begründet,³⁹ dass im Rahmen von (25) jeweils der gesamte Diversifikationseffekt dem Segment i zugeschlagen wird und keine Aufteilung zwischen dem Restkollektiv und dem Segment erfolgt. Dies erkennt man, indem man $R(L_i; L)$ gemäß (25) in der

äquivalenten Form $R(L_i; L) = \sum_{i=1}^n R(L_i) - R(L - L_i) - D_R(L_1, \dots, L_n)$ bestimmt.

Das dargestellte Verfahren einer inkrementellen Kapitalallokation erweist sich damit als ungeeignet für eine Kapitalallokation.

³⁷ Vgl. zu dieser Vorgehensweise etwa *Hooker, N. D.* u. a. (1996), S. 294, *Merton, C. / Perold, A. F.* (1993), S. 28 – in diesen Beiträgen als marginale Kapitalallokation bezeichnet – sowie *Dowd, K.* (1999) und *Litterman, R.* (1996), S. 75.

³⁸ Siehe hierzu allgemein *Merton, C. / Perold, A. F.* (1993), S. 32.

³⁹ Vgl. *Stoughton, N. / Zechner, J.* (2000), S. 893.

Eine Variante⁴⁰ des Verfahrens der inkrementellen Kapitalallokation stellt auf das durch die Hinzunahme eines Segments zusätzlich induzierte Risikokapital ab, das heißt, es gilt $R_1(L_1; L) := R(L_1)$ und $R(L_i; L) := R(L_1 + \dots + L_i) - R(L_1 + \dots + L_{i-1})$ für $i = 2, \dots, n$. Diese Verfahrensweise sichert zwar eine vollständige Allokation der Form $\sum_{i=1}^n R_i(L_i) = R(L)$, aber das zugewiesene Risikokapital hängt nunmehr von der Reihenfolge ab, in der die Segmente zu einem Gesamtkollektiv zusammengefügt werden. Des Weiteren erhält das zuerst ausgewählte Segment als Risikokapital stets sein Stand-alone-RAC zugeordnet und partizipiert folglich nicht an dem gesamtkollektiven Diversifikationseffekt. Auch dieses Verfahren ist somit höchst problematisch. Insgesamt werden daher in der vorliegenden Ausarbeitung inkrementelle Verfahren der Kapitalallokation nicht weiter verfolgt.

3.4 Marginale Kapitalallokation

Verfahren der marginalen Kapitalallokation⁴¹ betrachten die Auswirkungen von marginalen Positionsänderungen auf das notwendige Risikokapital. Dies erscheint insbesondere in dem in Abschnitt 3.2 dargelegten Kontext homogener Portfolios sinnvoll, in denen ein (induziertes) Risikomaß $R(x_1, \dots, x_n)$ auf einer Teilmenge des \mathfrak{R}^n definiert ist. Im Rahmen einer marginalen Kapitalallokation werden dann die Größen (*Deltas*)

$$(26) \quad D_i(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial R(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

betrachtet. Dies setzt die partielle Differenzierbarkeit von R in allen Komponenten voraus. Die marginalen Kapitalbeiträge $D_i(x_1, \dots, x_n)$ quantifizieren approximativ die Änderung des gesamten Risikokapitals bei einer kleinen Änderung Δx_i der i -ten Portfolioposition, das heißt

$$R(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \approx D_i(x_1, \dots, x_n) \Delta x_i.$$

In diesem Sinne liegt allerdings weniger eine Kapitalallokation, denn eine *Sensitivitätsanalyse*⁴² vor.

⁴⁰ Siehe etwa Kinder, C. (1999), S. 158 ff. oder Tijjs, S. H. / Driessen, T. S. (1986), S. 1017.

⁴¹ Vgl. etwa Litterman, R. (1996) sowie Garman, M. B. (1996, 1997).

⁴² Für entsprechende Sensitivitätsanalysen im VaR- bzw. CVaR-Zusammenhang siehe Gourieroux, C. / Laurent, J. P. / Scaillet, O. (2000) bzw. Scaillet, O. (2003).

Neben diesen Möglichkeiten einer Sensitivitätsanalyse existiert aber auch ein direkter Zusammenhang zur absoluten Kapitalallokation. Ist das induzierte Portfoliorisikomaß positiv homogen, das heißt gilt $R(cx) = cR(x)$ für alle $c > 0$, $x \in \mathfrak{R}^n$, und ist R nach allen x_i stetig differenzierbar, so gilt gemäß des *Satzes von Euler* die fundamentale Beziehung

$$(27) \quad R(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i D_i(x_1, \dots, x_n).$$

Setzt man mithin $R_i(x_1, \dots, x_n) = D_i(x_1, \dots, x_n)$ so ist eine (absolute) Risikokapitalallokation gefunden, die die Beziehung (24) erfüllt. In diesem Kontext kann somit der Ansatz einer marginalen Kapitalallokation unter dem der absoluten Kapitalallokation mitbehandelt werden. Dies wird im Abschnitt 5.5 dieser Ausarbeitung erfolgen.

4 Anforderungen an eine absolute Kapitalallokation

Eine Möglichkeit, eine vernünftige (absolute) Kapitalallokation zu gewährleisten, besteht darin, entsprechende Anforderungen an eine solche Allokation zu postulieren und spezifische Allokationsregeln im Hinblick auf die Erfüllung dieser Anforderungen zu kontrollieren.

Eine erste Basisanforderung ist die Gewährleistung einer *vollständigen Kapitalallokation* gemäß (19):

$$(A1) \quad \sum_{i=1}^n R(L_i; L) = R(L).$$

Eine zweite Basisanforderung besteht darin, dass das allokierte Kapital nicht höher als das Stand-alone-RAC ausfallen darf, formal

$$(A2') \quad R(L_i; L) \leq R(L_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

da andernfalls das entsprechende Segment durch die Einbettung in die Gesamtposition benachteiligt würde.

Denault (2001) postuliert nun weiter gehende Anforderungen an eine Kapitalallokation. Als Verschärfung der Bedingung (A2') kommt dabei zunächst das so genannte *No Undercut*-Axiom zum Tragen:

$$(A2) \quad \sum_{i \in M} R(L_i; L) \leq R\left(\sum_{i \in M} L_i\right), \text{ für alle Teilmengen } M \text{ von } \{1, \dots, n\}.$$

Die Summe der Segment-Risikokapitalien über beliebig kombinierte Segmente darf somit ebenfalls nicht höher sein, als das Stand-alone-Risikokapital des entsprechenden vereinigten Segments. Ansonsten würde wiederum eine Benachteiligung relativ zu dem vereinigten Segment existieren.

Äquivalent⁴³ zur No Undercut-Bedingung (A2) – und die eigentliche Basis für die Namensgebung – ist die folgende Anforderung:

(A2*) Es gibt keine Teilmenge $M \subseteq \{1, \dots, n\}$ und Größen $H_i, i \in M$, mit der

$$\text{Eigenschaft } \sum_{i \in M} H_i = R\left(\sum_{i \in M} L_i\right) \text{ und } H_i < R(L_i; L) \text{ für alle } i \in M.$$

Es darf folglich keine Teilmenge M von Segmenten geben, so dass allokierte Risikokapitalien H_i existieren, die in allen diesen Segmenten geringer als $R(L_i; L)$ ausfallen.

Als weitere Anforderung postuliert *Denault* (2001) eine Symmetriebedingung, die der Theorie der kooperativen Spiele entlehnt ist.⁴⁴ Zum Zweck der Übersetzung in den vorliegenden Kontext definieren wir zunächst den Sachverhalt der *Austauschbarkeit*. Die Segmente i und j heißen dabei austauschbar, wenn für beliebige Teilmengen $M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ gilt:

$$R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_i\right) - R\left(\sum_{k \in M} L_k\right) = R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_j\right) - R\left(\sum_{k \in M} L_k\right).$$

Für eine beliebige Kombination von Segmenten ändern sich somit die Zuwächse an Risiko nicht, wenn alternativ die Segmente i bzw. j hinzugefügt werden. Äquivalent hierzu ist offenbar die folgende Forderung in absoluten Risikotermen:

$$R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_i\right) = R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_j\right) \text{ für alle } M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

⁴³ Vgl. *Hürlimann, W.* (2001b), S. 12.

⁴⁴ Zur spieltheoretischen Formulierung vgl. *Denault* (2001, S. 7).

Die Symmetriebedingung lautet nun:

(A3) Sind die Segmente i und j austauschbar, so gilt:

$$R(L_i; L) = R(L_j; L).$$

Induzieren die Segmente i und j bei ihrer alternativen Hinzufügung die jeweils gleichen Risikozuwächse, so ist ihnen ein Risikokapital in gleicher Höhe zu allokalieren.

Eine alternative Formulierung der spieltheoretischen Symmetrieeigenschaft findet sich in *Le-maire* (1991, S. 27). Zur Übersetzung dieser Eigenschaft in den vorliegenden Kontext gehen wir dabei aus von einer Permutation $p: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, das heißt einer Änderung der Reihenfolge bzw. Indizierung der betrachteten Segmente bzw. den zugehörigen Verlustvariablen. Die Symmetriebedingung lautet nun:

Gilt $R\left(\sum_{i \in p(M)} L_i\right) = R\left(\sum_{i \in M} L_i\right)$ für alle Teilmengen M , so muss ebenfalls gelten:

$$R(L_{p(i)}; L) = R(L_i; L).$$

Ändert die Permutation die Risikoverhältnisse hinsichtlich der Bildung unterschiedlicher Segmente nicht, dann bleibt auch die Kapitalallokation unverändert. Diese Forderung stellt somit sicher, dass das Allokationsergebnis ausschließlich von dem betrachteten Risikomaß⁴⁵ abhängig ist und nicht von der Indizierung der Einzelrisiken.⁴⁶

Abschließend wird noch die Bedingung der *risikolosen Allokation* postuliert:

(A4) $R(c; L) = c$.

Für deterministische Verluste $L_i = c$ entspricht das allokierte Kapital exakt der Verlusthöhe.

Eine andere Kapitalallokation kommt in diese Falle nicht in Betracht, da es an einem Risikoelement fehlt.⁴⁷ Diese Bedingung ist ein Spezialfall⁴⁸ der „Dummy Player-Eigenschaft“ in der Spieltheorie⁴⁹ für Segmente mit deterministischen Verlusten.

⁴⁵ Der gegebenen „charakteristischen Funktion“ im Terminus der Spieltheorie.

⁴⁶ Mit der Forderung nach Symmetrie scheidet beispielsweise die unter Gliederungspunkt 3.3 skizzierte modifizierte Variante inkrementeller Kapitalallokation als vernünftige Allokationsmethode aus, da hier auch die Betrachtungsreihenfolge auf das Allokationsergebnis Einfluss nimmt.

⁴⁷ In einem verallgemeinerten Verständnis lässt sich das Axiom der risikolosen Allokation dahingehend interpretieren, dass einer Geschäftseinheit i , die ihren gesamt Kollektiven Risikobeitrag um den sicheren Betrag b reduziert – im Versicherungsfall beispielsweise ausgelöst durch gestiegene Beitragseinnahmen ($\Delta p_i = b$) bei unverändertem Risikoexposure – eine Allokationsersparnis von $\Delta R(L_i; L) = -b$ zu Gute kommen soll. Vgl. dazu *Denault, M.* (2001), S. 5.

Kapitalallokationen, die die Postulate (Axiome) (A1) - (A4) erfüllen, werden von *Denault* (2001) als *kohärente Allokationsprinzipien* bezeichnet.

5 Allokationsprinzipien

5.1 Proportionale Allokation

Eine erste einfache Allokationsregel, die die Bedingung (A1) einer vollständigen Allokation erfüllt, besteht darin, den gesamten Diversifikationseffekt $D_R(L_1, \dots, L_n)$ proportional zur relativen Höhe des Stand-alone-Risikokapitals jedes Segmentes aufzuteilen,⁵⁰ das heißt

$$(28) \quad D_R(L_i) := D_R(L_1, \dots, L_n) \frac{R(L_i)}{\sum_{j=1}^n R(L_j)}.$$

In Termen des allokierten Risikokapitals ist hierzu aufgrund von $R(L_i; L) = R(L_i) - D_R(L_i)$

und $D_R(L_1, \dots, L_n) = \sum_{j=1}^n R(L_j) - R(L)$ die folgende Festsetzung des Segmentrisikokapitals

äquivalent:

$$(29) \quad R(L_i; L) := \frac{R(L_i)}{\sum_{j=1}^n R(L_j)} R(L).$$

Die Allokationsfaktoren gemäß (19) lauten demgemäß

$$(30) \quad \mathbf{j}_i = \frac{R(L_i)}{\sum_{j=1}^n R(L_j)}.$$

⁴⁸ Vorausgesetzt werden muss hierbei die Vorlage eines kohärenten Risikomaßes.

⁴⁹ Vgl. hierzu etwa *Lemaire, J.* (1991), S. 27.

⁵⁰ Offenbar kann der Diversifikationseffekt gemäß (28) auch entsprechend aufgeteilt werden, wenn $R(\cdot)$ ein beliebiges Risikomaß (des Typus I oder II) ist, das heißt nicht notwendigerweise dem Stand-alone-Risikokapital entspricht. Aufgrund der im Haupttext dargelegten grundsätzlichen Mängel einer proportionalen Allokation, soll diese erweiterte Variante aber nicht näher untersucht werden.

Insgesamt sind hierbei offenbar die Bedingungen $\sum_i R(L_i; L) = R(L)$, $\sum_i j_i = 1$ sowie auch

$$\sum_i D_R(L_i) = D_R(L_1, \dots, L_n) \text{ erfüllt.}$$

Beispiel 9:

Betrachten wir zunächst das Risikomaß Standardabweichung, so ergeben sich die Allokationsfaktoren zu

$$j_i = \frac{s(L_i)}{\sum_{j=1}^n s(L_j)}.$$

Im Falle des Value-at-Risk zum Konfidenzniveau \mathbf{a} erhalten wir aufgrund von $VaR_{\mathbf{a}}(L) = Q_{1-\mathbf{a}}(L)$ Allokationsfaktoren der Form

$$j_i = \frac{Q_{1-\mathbf{a}}(L_i)}{\sum_{j=1}^n Q_{1-\mathbf{a}}(L_j)}.$$

Im Falle des Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau \mathbf{a} ergeben sich schließlich die Allokationsfaktoren zu

$$j_i = \frac{E[L_i | L_i > Q_{1-\mathbf{a}}(L_i)]}{\sum_{j=1}^n E[L_j | L_j > Q_{1-\mathbf{a}}(L_j)]}.^{51}$$

Da die Allokationsfaktoren gemäß (30) ausschließlich an den Stand-alone-Risikokapitalien orientiert sind und diese die Wechselwirkungen (stochastische Abhängigkeiten) zwischen den Segmenten nicht erfassen, gilt dieser Kritikpunkt auch für die proportionale Allokation. Die eigentliche Kernaufgabe einer Kapitalallokation, die segmentweise Aufspaltung des Gesamtrisikos $R(L)$, spiegelt sich in den Allokationsfaktoren ebenfalls nicht wider. Schließlich und endlich ist die proportionale Kapitalallokation nicht kohärent: Zunächst gilt bei Bestehen eines positiven Diversifikationseffektes zwar $R(L)/\sum_j R(L_j) < 1$, womit gemäß (29) die „schwache Version“ (A2 $\hat{}$) des No Undercut-Axioms erfüllt ist. Demgegenüber ist jedoch die

⁵¹ Weitere Beispiele für eine proportionale Risikokapitalallokation finden sich in *Albrecht, P. (1998)*.

No Undercut-Bedingung (A2) in ihrer vollen Allgemeinheit verletzt. Betrachten wir hierzu abschließend ein Beispiel.

Beispiel 10:

Gegeben seien drei Segmente $i = 1, 2$ und 3 mit zugehörigen Verlustvariablen L_1, L_2 und L_3 . Dabei gelte $L_i \sim N(1, 2)$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $\mathbf{r}(L_1, L_2) = \mathbf{r}(L_2, L_3) = 0,5$ und $\mathbf{r}(L_1, L_3) = 0$. Als Risikomaß wählen wir den Value-at-Risk zum Konfidenzniveau $\mathbf{a} = 0,01$, das heißt $R(L) = VaR_{0,01}(L)$. Für die Stand-alone-Kapitalien ergibt sich dann zunächst jeweils $R(L_i) = E(L_i) + 2,33 \mathbf{s}(L_i) = 1 + 2,33 \sqrt{2} = 4,295$. Aufgrund von $Var(L_1 + L_2 + L_3) = \sum_i Var(L_i) + \sum_{i \neq j} \mathbf{r}(L_i, L_j) \mathbf{s}(L_i) \mathbf{s}(L_j) = 10$ folgt hieraus für den Value-at-Risk $VaR_{0,01}(L_1 + L_2 + L_3) = 3 + 2,33 \sqrt{10} = 10,368$. Bei proportionaler Allokation nehmen nun die Allokationsfaktoren jeweils den Wert $1/3$ an; hieraus resultiert $R(L_i; L) = 10,368/3 = 3,456$. Betrachten wir nun das vereinigte Segment $\{1, 3\}$, so ergibt sich hier als Stand-alone-Kapital $R(L_1 + L_3) = VaR_{0,01}(L_1 + L_3) = 2 + 2,33 \mathbf{s}(L_1 + L_3) = 2 + 2,33 \sqrt{4} = 6,66$. Damit gilt insgesamt $R(L_1; L) + R(L_3; L) = 6,912 > 6,66 = R(L_1 + L_3)$. Die Bedingung (A2) ist folglich verletzt; die Segmente 1 und 3 wären günstiger auf Stand-alone-Basis zu führen als vereinigt mit Segment 2 im Gesamtkollektiv.⁵²

⁵² Aus der Beziehung (29) ist des Weiteren unmittelbar ersichtlich, dass eine proportionale Allokation zwar symmetrisch ist, typischerweise aber auch gegen das Axiom der risikolosen Allokation verstößt.

5.2 Kovarianzprinzip

Die kovarianzbasierte Risikokapitalallokation basiert auf der folgenden Festsetzung der Allokationsbeträge:

$$(31) \quad \begin{aligned} R(L_i; L) &:= E(L_i) + \frac{\text{Cov}(L_i, L)}{\text{Var}(L)} [R(L) - E(L)] \\ &= E(L_i) + \mathbf{b}_i [R(L) - E(L)] . \end{aligned}$$

Dabei werden die Betafaktoren $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}(L_i; L)$ gemäß $\mathbf{b}_i = \text{Cov}(L_i, L)/\text{Var}(L)$ definiert.⁵³

Die Allokationsfaktoren ergeben sich somit zu

$$(32) \quad \mathbf{j}_i = \text{Cov}(L_i, L)/\text{Var}(L) = \mathbf{b}_i$$

und sind damit offenbar unabhängig vom konkret gewählten Risikomaß. Wegen

$$\sum_i \text{Cov}(L_i, L)/\text{Var}(L) = \text{Cov}\left(\sum_i L_i, L\right)/\text{Var}(L) = \text{Cov}(L, L)/\text{Var}(L) = 1$$

ist offenbar die Bedingung (A1) der vollständigen Risikokapitalallokation erfüllt. Da bei der Allokation die Stand-alone-Risikokapitalien keine Rolle spielen, ist jedoch bereits das schwache No Undercut-Postulat $R(L_i; L) \leq R(L_i)$ im allgemeinen Fall nicht gewährleistet.⁵⁴

Die Allokationsfaktoren \mathbf{j}_i ergeben sich offenbar aus der Aufspaltung des Risikomaßes Varianz in einzelne Segmentbeiträge,

$$(33) \quad \text{Var}(L) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n L_i\right) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \text{Cov}(L_i, L_j) \right] = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(L_i, L),$$

und der Normierung der Segmentbeiträge $\text{Cov}(L_i, L)$ zum Gesamtrisiko $\text{Var}(L)$ durch Division durch dieses Gesamtrisiko. Mithin erfolgt im Rahmen des Kovarianzprinzips eine Verrechnung des auf $R(L) - E(L)$ entfallenden Diversifikationseffekts auf der Basis der Kovarianzstruktur der L_1, \dots, L_n , das heißt auf der Grundlage einer spezifischen Quantifizierung der linearen stochastischen Abhängigkeit der Segmente. Unter Beschränkung auf die Verteilungsklasse der elliptischen Verteilungen, insbesondere der multivariaten Normalverteilung, kann eine solche Erfassung der stochastischen Abhängigkeit als gerechtfertigt angesehen

⁵³ Die Betafaktoren können somit prinzipiell negativ werden. Inwiefern dies in *empirischen* Anwendungen zu Segmentrisikokapitalien $R(L_i; L) < 0$ gemäß (31) führen kann, ist jedoch unklar.

⁵⁴ Analog zur proportionalen Allokation steht daneben auch beim Kovarianzprinzip der Symmetrie des Verfahrens die generell fehlende Einhaltung des Axioms der risikolosen Allokation gegenüber.

werden.⁵⁵ Im generellen Fall greift dies jedoch zu kurz und es wäre eine segmentspezifische Aufspaltung von $R(L)$ anstelle von $Var(L)$ vorzuziehen. Wir verzichten im Zusammenhang mit dem Kovarianzprinzip auf ein Beispiel, da wie bereits festgestellt die Allokationsfaktoren gemäß (32) unabhängig vom konkret gewählten Risikomaß sind.

Das Kovarianzprinzip besitzt den Vorteil einer sehr generellen Anwendbarkeit, solange $R(L) > E(L)$ gewährleistet ist.⁵⁶ Allerdings wird die Allokation stets so durchgeführt, als ob $R(L) - E(L)$ und $Var(L)$ identisch wären. Das zur Ermittlung des Gesamtrisikokapitals verwandte Risikomaß $R(\cdot)$ spielt dabei keine Rolle mehr. Zudem ist es nur im multivariaten elliptischen Fall plausibel, die Korrelationsstruktur als Ausgangspunkt für eine Verteilung des auf $R(L) - E(L)$ entfallenden Diversifikationseffekts zu verwenden.

Im Falle von homogenen Segmenten – man vergleiche die entsprechenden Beispiele des Abschnitts 2 – kann das Kovarianzprinzip entsprechend verallgemeinert werden. Beginnen wir

mit dem Versicherungsfall (Beispiel 2). Hier ist $L_i = \sum_{j=1}^{k_i} X_{ij}$, wobei die Zufallsvariablen X_{ij}

unabhängig und gemäß X_i identisch verteilt sind. Definieren wir in einem ersten Schritt

$$\mathbf{b}(X_i; L) := Cov(X_i, L)/Var(L), \text{ so gilt entsprechend } \mathbf{b}(L_i; L) = Cov\left(\sum_{j=1}^{k_i} X_{ij}, L\right)/Var(L) =$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} Cov(X_{ij}, L)/Var(L) = k_i Cov(X_i, L)/Var(L) \text{ und damit } \mathbf{b}(L_i; L) = k_i \mathbf{b}(X_i; L). \text{ Definieren wir}$$

$R(X_i; L) = E(X_i) + \mathbf{b}(X_i; L)[R(L) - E(L)]$, so gleicht $\mathbf{b}(X_i; L)$ einer Risikokapitalallokation pro Versichertem, die die Bedingung (21) erfüllt.

Im Investmentfall (Beispiel 3) ist entsprechend $\mathbf{b}(LF_i; L) := Cov(LF_i, L)/Var(L)$ zu definieren und $R(LF_i; L) = E(LF_i) + \mathbf{b}(LF_i; L)[R(L) - E(L)]$ zu setzen, um das Kovarianzprinzip auf Segmente von Finanztiteln zu verallgemeinern. Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass die $Var(L)$ -Terme in den beiden behandelten Fällen unterschiedlich sind und damit auch die Befaktoren. Im Versicherungsfall gilt die Beziehung

⁵⁵ Siehe Embrechts, P. / McNeil, A. / Straumann, D. (2002).

⁵⁶ Dies gilt insbesondere für erwartungswertbegrenzte Risikomaße des Typus II, vgl. dazu Albrecht, P. (2003), Abschnitt 5.4.

$$(34a) \quad \text{Var}(L) = \sum_{i=1}^n k_i \text{Var}(X_i) + \sum_{j \neq i} k_i k_j \text{Cov}(X_i, X_j),$$

während im Investmentfall der Zusammenhang

$$(34b) \quad \text{Var}(L) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var}(LF_i) + \sum_{j \neq i} x_i x_j \text{Cov}(LF_i, LF_j)$$

Gültigkeit besitzt. Der Unterschied (linearer bzw. quadratische Anteile der Segmentgröße im ersten Term) resultiert daraus, dass im Versicherungsfall ein Ausgleich-im-Kollektiv-Effekt auch *innerhalb* des Segments wirkt, im Investmentfall hingegen nicht.

5.3 Bedingter Erwartungswert-Prinzip

Im Rahmen einer bedingten Erwartungswertbildung greifen die Beziehungen $L = E[L | L] = \sum_{i=1}^n E[L_i | L]$ sowie $E[L | L = R(L)] = R(L)$. Insgesamt gilt damit

$$(35) \quad R(L) = E[L | L = R(L)] = \sum_{i=1}^n E[L_i | L = R(L)].$$

Die bedingte Erwartungswertbildung impliziert somit eine lineare Aufspaltung des Risikomaßes und legt die folgende Definition des Segmentrisikokapitals nahe:

$$(36) \quad R(L_i; L) = E[L_i | L = R(L)],$$

eine Allokation, die den Postulaten (A1), (A3) sowie (A4) per constructionem genügt.

Beispiel 11: (Bedingtes Erwartungswert-Prinzip und multivariate elliptische Verteilung)

Im Falle einer multivariaten elliptischen Verteilung gilt⁵⁷

$$(37) \quad E[L_i | L] = E(L_i) + \frac{\text{Cov}(L_i, L)}{\text{Var}(L)} [L - E(L)]$$

und damit $E[L_i | L = x] = E(L_i) + \frac{\text{Cov}(L_i, L)}{\text{Var}(L)} [x - E(L)]$. Hieraus folgt die Risikokapitalauftei-

lung

⁵⁷ Siehe Hürlimann, W. (2001b), S. 12.

$$(38) \quad R(L_i; L) = E(L_i) + \mathbf{b}_i [R(L) - E(L)],$$

wenn wie in Abschnitt 5.2 wiederum der Betafaktor $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(L_i; L) = \text{Cov}(L_i, L) / \text{Var}(L)$ benutzt wird. Im Beispielfalle reduziert sich somit das Bedingter Erwartungswert-Prinzip auf das Kovarianzprinzip (31).

Betrachten wir als Risikomaß $R(L) = E(L) + a\mathbf{s}(L)$, so reduziert sich (38) auf

$$(39) \quad R(L_i; L) = E(L_i) + a\mathbf{b}_i\mathbf{s}(L).$$

Damit kann im elliptischen Fall für das Risikomaß $R(L) = E(L) + a\mathbf{s}(L)$ auch direkt die Gültigkeit des schwachen No Undercut-Postulats (A2') nachgewiesen werden. Zu zeigen ist $R(L_i; L) \leq R(L_i)$, das heißt $E(L_i) + a\mathbf{b}_i\mathbf{s}(L) \leq E(L_i) + a\mathbf{s}(L_i)$. Dies reduziert sich auf den Nachweis von $\text{Cov}(L_i, L) \leq \mathbf{s}(L_i)\mathbf{s}(L)$, was wegen $\text{Cov}(L_i, L) = \mathbf{r}(L_i, L)\mathbf{s}(L_i)\mathbf{s}(L)$ und $\mathbf{r}(L_i, L) \leq 1$ stets erfüllt ist.

Damit ist es auch möglich, im Falle des Value-at-Risk bzw. des Conditional Value-at-Risk die entsprechenden Segmentrisikokapitalien anzugeben, wenn wir uns auf den Fall der multivariaten Normalverteilung beschränken. Es gilt dann

$$(40) \quad R(L_i; L) = E(L_i) + N_{1-a} \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L)$$

bzw.

$$(41) \quad R(L_i; L) = E(L_i) + \frac{\mathbf{j}(N_{1-a})}{\mathbf{a}} \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L).$$

Im allgemeinen Fall ist der bedingte Erwartungswert gemäß (36) nicht analytisch ermittelbar und es müssen alternative Wege, z. B. Monte Carlo-Simulation oder statistische Schätzung, beschritten werden.⁵⁸

⁵⁸ Für einen Überblick vgl. etwa *Hallerbach, W. G. (2002/03)*. Für den Spezialfall des Value-at-Risk siehe *Gourieroux, C. / Laurent, J. P. / Scaillet, O. (2000)* und für den Spezialfall des Conditional Value-at-Risk vgl. *Scaillet, O. (2003)*.

5.4 CVaR-Prinzip

Bei Ansatz des spezifischen Risikomaßes Conditional Value-at-Risk $CVaR_{\mathbf{a}}(L) = E[L | L > VaR_{\mathbf{a}}(L)] = E[L | L > Q_{1-\mathbf{a}}(L)]$ ergibt sich aufgrund der Linearität des bedingten Erwartungswertes offenbar eine direkte additive Aufspaltung der Form

$$(42) \quad CVaR_{\mathbf{a}}(L) = \sum_{i=1}^n E[L_i | L > VaR_{\mathbf{a}}(L)],$$

die die Erfüllung des Postulats (A1) der vollständigen Kapitalallokation gewährleistet. Die einzelnen Summanden aus (42) lassen sich nun unmittelbar als Segmentrisikokapital interpretieren,

$$(43) \quad R(L_i; L) = E[L_i | L > Q_{1-\mathbf{a}}(L)],$$

was formal einer Verwendung der Allokationsfaktoren⁵⁹

$$(44) \quad \mathbf{j}_i = \frac{E[L_i | L > Q_{1-\mathbf{a}}(L)]}{E[L | L > Q_{1-\mathbf{a}}(L)]}$$

gleichkommt.

Beispiel 12: (CVaR-Prinzip im elliptischen Fall)

Unter Anwendung des Resultats (37) für den bedingten Erwartungswert $E[L_i | L]$ einer multivariaten elliptischen Verteilung, folgt allgemein⁶⁰

$$(45) \quad R(L_i; L) = E(L_i) + \mathbf{b}_i [CVaR_{\mathbf{a}}(L) - E(L)].$$

Dies ist gemäß (38) ein Spezialfall des Bedingter Erwartungswert-Prinzips für $R(L) = CVaR_{\mathbf{a}}(L)$.

Wie Panjer (2001) feststellt, erfüllt das CVaR-Prinzip die Anforderungen an eine kohärente Kapitalallokation nach Denault. Ein entsprechender Nachweis findet sich im Anhang dieser Ausarbeitung.

⁵⁹ Man beachte den Unterschied zur proportionalen Aufteilung des CVaR gemäß Beispiel 9.

⁶⁰ Vgl. hierzu Hürlimann, W. (2001b), S. 12.

5.5 Euler-Prinzip

Im Zuge der Kapitalallokation entfaltet das *Euler-Prinzip*⁶¹ seine Bedeutung bei der Betrachtung homogener Segmente von Finanztiteln.⁶² Die Allokation selbst erfolgt auf der Basis der Beziehung (27), der der Satz von *Euler* zugrunde liegt. Voraussetzung ist somit zunächst die Spezifikation eines positiv homogenen (induzierten) Risikomaßes R auf einer (offenen) Teilmenge des \mathfrak{X}^n , das in allen Komponenten stetig differenzierbar ist. Das Besondere am *Euler-Prinzip* bzw. am Verfahren der Kapitalallokation auf Basis des Gradienten⁶³ (D_1, \dots, D_n) ist nun, dass für dieses Verfahren eine Reihe von Optimalitätsaussagen existieren.

So weist *Denault* (2001) auf der Grundlage der Theorie kooperativer (konvexer) Spiele mit fraktionalen Spielern nach, dass im Falle eines positiv homogenen, konvexen und differenzierbaren Risikomaßes – solche können beispielsweise von kohärenten Risikomaßen induziert werden – der Gradient dem *Aumann-Shapley*-Wert entspricht. Bezogen auf das Kapitalallokationsproblem bedeutet dies, dass der Gradient (D_1, \dots, D_n) als *eindeutige faire Risikokapitalallokation pro Einheit* (Finanztitel) angesehen werden kann. Im Falle eines kohärenten und differenzierbaren Risikomaßes weist *Denault* (2001) weiter nach, dass eine kohärente Kapitalallokation vorliegt.

Ist das Risikomaß nur positiv homogen, so kann die Theorie konvexer Spiele nicht mehr angewandt werden. Aber auch in diesem Fall existieren Argumente für die Vernünftigkeit des *Euler-Prinzips*. So betrachtet *Tasche* (2000) für den Fall von Investmentportfolios eine (erwartete) *RORAC*-Variante der Form $RORAC(L) := E(-L)/R(L)$, wobei $R(L) = R(x_1, \dots, x_n)$ ein Risikomaß⁶⁴ ist und $E(-L)$ die mit dem Periodenverlust $L = L(x_1, \dots, x_n)$ einer Gesamtposition verbundene, erwartete Gewinngröße darstellt. Damit induziert auch der (erwartete) *RORAC* selbst eine Funktion auf dem \mathfrak{X}^n , das heißt $RORAC = RORAC(x_1, \dots, x_n)$. Die Anforderungen an eine Risikokapitalallokation $R_i(x_1, \dots, x_n)$ pro Finanztitel sind dann dergestalt, dass der Segment-*RORAC* der Form $RORAC_i = E(-L_i)/R_i(x_1, \dots, x_n)$ die „richtigen

⁶¹ Vgl. zu dieser Nomenklatur *Patrik, G. / Bernegger, S. / Rüegg, M. B.* (1999), S. 65.

⁶² Wie bereits in Fußnote 36 angemerkt, ist diese Vorgehensweise wegen der fehlenden positiven Homogenität nicht auf den Versicherungsfall übertragbar.

⁶³ So die Terminologie von *Fischer, T.* (2003).

⁶⁴ *Tasche, D.* (2000) betrachtet dabei Risikomaße des Typus I, insbesondere zweiseitige Risikomaße – vgl. hierzu *Albrecht, P.* (2003), Abschnitt 6.1 –, die auf Abweichungen vom Erwartungswert abstellen.

Signale“ für eine vernünftige Segmentsteuerung, insbesondere bei marginalen Positionsänderungen, gibt. Formal gelten die folgenden Anforderungen (dabei ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ und e_i der i -te Einheitsvektor):

1. Gilt $RORAC_i < RORAC$, dann gibt es ein $\Delta_0 > 0$ mit
 $RORAC(x - \Delta e_i) > RORAC(x) > RORAC(x + \Delta e_i)$ für alle $0 < \Delta \leq \Delta_0$.
2. Gilt $RORAC_i > RORAC$, dann gibt es ein $\Delta_0 > 0$ mit
 $RORAC(x - \Delta e_i) < RORAC(x) < RORAC(x + \Delta e_i)$ für alle $0 < \Delta \leq \Delta_0$.

*Tasche*⁶⁵ (2000) weist nun unter diesen Anforderungen nach, dass für ein positiv homogenes, partiell differenzierbares Risikomaß R mit stetigen partiellen Ableitungen der Gradient (D_1, \dots, D_n) die einzige stetige Lösung ist, die die Anforderungen an eine vernünftige RO - RAC -Segmentsteuerung erfüllt.

Insgesamt bedeutet dies, dass die Frage nach einer optimalen Kapitalallokation dann eindeutig beantwortbar ist, wenn das Risikomaß positiv homogen und auf der zugrunde liegenden (offenen) Teilmenge des \mathfrak{R}^n total differenzierbar ist. Als Konsequenz stellt sich dann die Folgefrage, ob ein konkret ins Auge gefasstes (induziertes) Risikomaß $R(L) = R(x_1, \dots, x_n)$ für alle multivariaten Verteilungen von (L_1, \dots, L_n) total differenzierbar ist oder gegebenenfalls nur für eine eingeschränkte Menge von multivariaten Verteilungen. Bevor wir dieser Frage nachgehen, betrachten wir aber zunächst ein Beispiel.

Beispiel 13: (*Euler-Prinzip* für multivariat normalverteilte Finanztitelportfolios)

Als erstes Risikomaß betrachten wir $R(L) = \mathbf{s}(L)$, ein Risikomaß des Typus I. Das durch

$L = \sum_{i=1}^n x_i LF_i$ gemäß (5) induzierte Risikomaß ist somit

$$\mathbf{s}(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(LF_i, LF_j) \right]^{1/2} = (x^T C x)^{1/2},$$

⁶⁵ Für weiter gehende Ergebnisse vgl. *Fischer, T.* (2003).

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $C = (\text{Cov}(LF_i, \dots, LF_n))$ die Varianz-Kovarianz-Matrix bezeichne. Gemäß den Rechenregeln der Vektordifferentiation gilt $d(x^T C x)/dx = 2 C x$ und damit $d\mathbf{s}/dx = C x/R(x) = C x/\mathbf{s}(L)$. Es gilt somit⁶⁶

$$(46) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_i} &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j \text{Cov}(LF_i, LF_j)}{\mathbf{s}(L)} = \frac{\text{Cov}(LF_i, L)}{\mathbf{s}(L)} \\ &= \frac{\text{Cov}(LF_i, L)}{\mathbf{s}^2(L)} \mathbf{s}(L) = \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{b}_i := \text{Cov}(LF_i, L)/\text{Var}(L)$. Dies bestimmt die marginalen Risikobeiträge. Insgesamt gilt damit aufgrund von (46)

$$\mathbf{s}(L) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L) = \sum_{i=1}^n x_i R_i,$$

wobei

$$(47) \quad R_i = R_i(x_1, \dots, x_n) := \frac{\text{Cov}(LF_i, L)}{\mathbf{s}(L)} = \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L)$$

eine Kapitalallokation pro Investmenteinheit gemäß (22) bzw. (24) darstellt.

Nochmals explizit festzuhalten ist die Tatsache, dass die Kapitalallokation pro Investmenteinheit $R_i(x_1, \dots, x_n) = \text{Cov}(LF_i, L)/\mathbf{s}(L)$ aufgrund von $L = \sum_{i=1}^n x_i LF_i$ nicht unabhängig von den Ausgangssegmentgrößen x_1, \dots, x_n ist, das heißt, unterschiedliche Ausgangssegmentgrößen führen zu einer unterschiedlichen Kapitalallokation pro Investmenteinheit.

Betrachten wir nun das Risikomaß (des Typus II) $R(L) = E(L) + a\mathbf{s}(L)$, wobei $a > 0$. Dies induziert das folgende Risikomaß auf dem \mathfrak{R}^n :

$$R_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i E(LF_i) + a \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(LF_i, LF_j) \right]^{1/2}.$$

Die entsprechende partielle Ableitung ergibt sich dann zu

⁶⁶ Siehe zu diesem Resultat erstmals *Garman, M. B.* (1996, 1997).

$$(48) \quad \frac{\partial R}{\partial x_i} = E(LF_i) + a \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L) = E(LF_i) + \mathbf{b}_i [R(L) - E(L)],$$

wobei wie zuvor $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(x_1, \dots, x_n) = \text{Cov}(LF_i, L)/\text{Var}(L)$. Die Risikokapitalallokation $R_i(x_1, \dots, x_n) = \partial R(x_1, \dots, x_n)/\partial x_i$ gemäß (48) ist damit identisch mit dem in Abschnitt 5.2 dargestellten Kovarianzprinzip für den Fall homogener Finanztitelportfolios.

Damit sind wir nun – immer noch unter Voraussetzung der multivariaten Normalverteilung – auch in der Lage, die Kapitalallokation vorzunehmen, wenn wir als Risikomaß den Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α bzw. den Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α verwenden. Es folgt

$$(49) \quad R_i(x_1, \dots, x_n) = E(LF_i) + N_{1-\alpha} \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L)$$

im Falle des Value-at-Risk sowie

$$(50) \quad R_i(x_1, \dots, x_n) = E(LF_i) + \frac{j(N_{1-\alpha})}{\alpha} \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L)$$

im Falle des Conditional Value-at-Risk. Im Rahmen der Value-at-Risk-Literatur werden die Allokationsgrößen $\text{Cov}(LF_i, L)/\mathbf{s}(L) = \mathbf{b}_i \mathbf{s}(L)$ dabei auch als komponentenweiser Value-at-Risk⁶⁷ (component VaR) oder aber als marginaler Value-at-Risk⁶⁸ (marginal VaR) bezeichnet.

Für den Fall der multivariaten Normalverteilung liegen somit für eine Reihe zentraler Risikomaße Ergebnisse vor, die – kaum erstaunlich – auf Varianten des Kovarianzprinzips hinauslaufen. Inwieweit lassen sich nun weiter gehende Resultate erzielen? Im Falle des Value-at-Risk sowie des Conditional Value-at-Risk ist eine generelle Differenzierbarkeit des induzierten Risikomaßes $R(x_1, \dots, x_n)$ nicht gegeben, vor allem diskrete Verteilungen für (LF_1, \dots, LF_n) gemäß Beispiel 13 bereiten hier Probleme. Tiefer greifende strukturelle Aussagen liegen insofern primär dann vor, wenn für (LF_1, \dots, LF_n) von der Existenz einer (n -dimensionalen) Dichtefunktion ausgegangen werden kann.⁶⁹ Hier gilt im Finanztitelportfolio-

⁶⁷ Vgl. etwa Garman, M. B. (1997).

⁶⁸ Siehe etwa Hallerbach, W. G. (2002/03).

⁶⁹ Für allgemeinere Konstellationen vgl. Tasche, D. (2000) und Tasche, D. (2002), Abschnitt 4.

fall⁷⁰ für den Value-at-Risk $VaR_a(L)$ zum Konfidenzniveau \mathbf{a} die folgende strukturelle Beziehung⁷¹

$$(51) \quad \frac{\partial R}{\partial x_i} = E[LF_i | L = VaR_a(L)].$$

Dieses Ergebnis ist demnach nichts anderes als eine Variante des Bedingter Erwartungswert-Prinzips für den Portfoliofall. Für den Conditional Value-at-Risk $CVaR_a(L)$ zum Konfidenzniveau \mathbf{a} gilt entsprechend⁷²

$$(52) \quad \frac{\partial R}{\partial x_i} = E[LF_i | L > Q_{1-a}(L)].$$

Dieses Ergebnis ist somit eine Variante des $CVaR$ -Prinzips gemäß Abschnitt 5.4. Eine entsprechende Bestimmung der involvierten bedingten Erwartungswerte kann im Wege einer Monte Carlo-Simulation oder über eine statistische Schätzung, z. B. auf der Basis von Kernschätzern, erfolgen.⁷³

Bei den bisherigen Illustrationen des *Euler*-Prinzips haben wir uns die Risikomaße Standardabweichung, Value-at-Risk und Conditional Value-at-Risk beschränkt. Entsprechende Resultate lassen sich bei Betrachtung weiterer Risikomaße erzielen, soweit die induzierten Risikomaße im betrachteten Kontext hinreichend differenzierbar sind.⁷⁴

6 Weitere Ansätze der Kapitalallokation

6.1 Firmenwertbasierte Ansätze

Die im Zentrum der vorliegenden Ausarbeitung stehenden, bisher behandelten Kapitalallokationsmethoden basieren auf einer rein unternehmensinternen Modellierung der relevanten Verlustgrößen und weisen dabei insbesondere keinen Kapitalmarktbezug auf. In der Literatur

⁷⁰ Für entsprechende Anwendungen im Falle von Kreditrisiken siehe *Overbeck, L.* (2000) sowie *Haaf, H. / Tasche, D.* (2002).

⁷¹ Vgl. *Gourieroux, C. / Laurent, J. P. / Scaillet, O.* (2000), S. 229.

⁷² Siehe *Scaillet, O.* (2003) oder *Tasche, D.* (2000), S. 20 f.

⁷³ Vgl. hierzu wiederum *Gourieroux, C. / Laurent, J. P. / Scaillet, O.* (2000), *Hallerbach, W. G.* (2002/03) sowie *Scaillet, O.* (2003).

⁷⁴ Siehe etwa *Fischer, T.* (2003), der Risikomaße vom Lower Partial Moment-Typus betrachtet und nachweist, dass die Bedingung der globalen Differenziertheit von $R(x_1, \dots, x_n)$ abgeschwächt werden kann.

werden des Weiteren eine Reihe von Ansätzen diskutiert, die auf einem expliziten Firmenwertmodell, etwa im Rahmen einer Kapitalmarktbeurteilung beruhen. Grundsätzliches Steuerungsziel ist dabei die Maximierung des (modelltheoretischen) Unternehmenswertes. Entsprechende Ergebnisse zur Kapitalallokation existieren im Rahmen des Capital Asset Pricing-Modells⁷⁵ (CAPM), der Optionspreistheorie⁷⁶ sowie weiterer Firmenwertmodelle.⁷⁷ Die Relevanz dieser Modelle für die praktische Unternehmensteuerung hängt davon ab, inwieweit die entsprechenden modelltheoretisch basierten Firmenwerte tatsächlich den empirischen Wert des zu steuernden Unternehmens in realistischer Weise erfassen.

6.2 Spieltheoretische Ansätze

Neben der in die vorliegende Ausarbeitung eingeflossene Anlehnung an die Spieltheorie,⁷⁸ ist zu konstatieren, dass sich spieltheoretische Lösungsansätze für das Problem der Kostenallokation⁷⁹ grundsätzlich auf die hier verfolgte Fragestellung übertragen lassen. Diese Übertragung kann dabei in unmittelbarer und weitgehend unmodifizierter Form erfolgen, wenn man den Terminus „Kosten“ durch den Terminus „Risikokapital“ ersetzt.⁸⁰

Ein Beispiel für ein solches Vorgehen besteht in der Verwendung des bekannten spieltheoretischen Allokationsprinzips „Shapley-Wert“,⁸¹ der übertragen auf das Problem der Risikokapitalallokation die Form

$$(53) \quad R(L_i; L) := \sum_{M \in C_i} \frac{1}{m} \frac{R\left(\sum_{j \in M} L_j\right) - R\left(\sum_{j \in M_i} L_j\right)}{\binom{n}{m}}$$

⁷⁵ Für eine Anwendung des CAPM im Rahmen von Financial Insurance Pricing-Modellen (betabasierte Kapitalallokation) vgl. beispielsweise *Albrecht, P.* (1998), Abschnitt 4.2.2.

⁷⁶ Siehe etwa *Cummins, D. J.* (2000), *Merton, C. / Perold, A. F.* (1993) sowie *Myers, S. C. / Read, J.* (2001).

⁷⁷ Vgl. etwa *Froot, K. A. / Stein, J. C.* (1998), *Gründl, H. / Schmeiser, H.* (2002), *Perold, A. F.* (2001) sowie *Taflin, E.* (2000).

⁷⁸ Diese basiert primär auf dem Beitrag von *Denault, M.* (2001) und dem im Abschnitt 5.5 angeführten *Aumann-Shapley-Wert*.

⁷⁹ Vgl. hierzu vor allem *Tijs, S. H. / Driessen, T. S.* (1986) sowie daneben *Holler, M. J. / Illing, G.* (2003) oder *Kinder, C.* (1999). Im Zusammenhang mit Versicherungsanwendungen vgl. insbesondere *Lemaire, J.* (1984, 1991).

⁸⁰ Siehe generell dazu *Kinder, C.* (1999). Im Versicherungskontext vgl. *Mango, D. F.* (1998) sowie *Schradin, H. R.* (2001b).

⁸¹ Für eine (spieltheoretische) Interpretation des *Shapley-Wertes* sei auf die Literatur verwiesen, etwa *Hürliemann, W.* (2001b), S. 13, *Lemaire, J.* (1984), S. 70, *Lemaire, J.* (1991), S. 27, *Shubik, M.* (1962), S. 334 ff., *Young, H. P.* (1985), S. 13 oder *Young, H. P.* (1994), S. 1214 f.

annimmt.⁸² Dabei bezeichnet C_i die Menge aller Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, die i enthalten, des Weiteren m die Anzahl der Elemente in M , das heißt $m = |M|$, sowie $M_i = M \setminus \{i\}$. Es lässt sich nun beispielsweise zeigen, dass der *Shapley*-Wert die Axiome (A1), (A2'), (A3) sowie (A4) zwar generell erfüllt, nicht jedoch das No Undercut-Postulat (A2). Im Allgemeinen⁸³ ist das *Shapley*-Prinzip somit kein kohärentes Allokationsprinzip.

7 Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist die Frage, wie das unternehmensweite Risikokapital einer Finanzinstitution in einer risikoadäquaten Art und Weise auf nachgelagerte Steuerungseinheiten heruntergebrochen werden kann. In einem ersten Schritt ist daher zunächst der Begriff des Risikokapitals zu konkretisieren, welches hier im Sinne eines „*imputed* buffer against unexpected and intolerable losses“⁸⁴ aufgefasst wird, den es im Rahmen einer unternehmensinternen Konzeption unter Bezugnahme auf das vorliegende Risikoexposure zu spezifizieren gilt. Motiviert wird das Erfordernis der Risikokapitalallokation dabei anhand des Einsatzfeldes der risikoadjustierten Performanccsteuerung (Abschnitt 1). Nach der beispielhaften Erörterung relevanter versicherungs- und finanzwirtschaftlicher Risikoexposures, die der weiteren Analyse zugrunde liegen, werden im Anschluss die Einzelschritte des Prozesses der Kapitalallokation aufgezeigt (Abschnitt 2).

In Abschnitt 3 werden zunächst die Grundlagen der (absoluten) Kapitalallokation offen gelegt, insbesondere der aus der Kollektivierung von Risiken resultierende Diversifikationseffekt in Abhängigkeit unterschiedlicher Risikomaße quantifiziert, die Schwächen des Stand-alone-Ansatzes illustriert und der Segmentbeitrag zum Diversifikationseffekt definiert. Weiterführende Erkenntnisse lassen sich daneben für den Fall homogener Kollektive in Form einer Risikokapitalallokation pro Segmenteinheit gewinnen. Demgegenüber erweist sich die Grundform inkrementeller Kapitalallokation für den Anwendungszweck der risikoadjustierten Performanccsteuerung als ungeeignet und ihre Modifikation als nicht risikogerecht. Für die Spielart marginaler Kapitalallokation wird des Weiteren herausgearbeitet, dass ihr der Cha-

⁸² Vgl. *Hürlimann, W.* (2001b), S. 13, *Lemaire, J.* (1984), S. 70, *Lemaire, J.* (1991), S. 29, *Shapley, L. S.* (1953), S. 311 f. bzw. *Shapley, L. S.* (1971/72), S. 23.

⁸³ *Denault, M.* (2001), S. 8 verweist auf eine – allerdings im Zusammenhang mit der Risikokapitalallokation schwer greifbare – Bedingung von *Aubin*, die die Kohärenz des *Shapley*-Prinzips sicherstellt.

⁸⁴ *Culp, C. L.* (2000), S. 16, mit der Hervorhebung im Original.

rakter einer Sensitivitätsanalyse zufällt, die nur in Spezialfällen mit einer absoluten Kapitalallokation kompatibel ist.

Mit den Basisanforderungen der vollständigen Allokation, des No Undercut, der Symmetrie sowie der risikolosen Allokation werden in Abschnitt 4 intersubjektiv nachvollziehbare Gütemerkmale postuliert, über die Allokationsmethoden verfügen sollten, um ein vernünftiges Allokationsergebnis zu induzieren. Vor dem Hintergrund dieser (Kohärenz-)Eigenschaften werden in Abschnitt 5 verschiedene Allokationsmechanismen diskutiert. Der proportionalen Kapitalallokation ist danach eine unzureichende Risikogerechtigkeit zu attestieren, die sich darüber hinaus in der fehlenden Berücksichtigung stochastischer Abhängigkeiten niederschlägt. In diesem Punkt stellt das Kovarianzprinzip eine Verbesserung dar, da hier zumindest lineare Abhängigkeiten Beachtung finden. Demgegenüber machen sich sowohl das Bedingter Erwartungswert-Prinzip als auch das *CVaR*-Prinzip die Linearität des bedingten Erwartungswertes zu Nutze. Dabei kann speziell für das *CVaR*-Prinzip gezeigt werden, dass es sich um eine kohärente Allokationsmethode handelt. Im Kontext homogener Segmente von Finanztiteln gilt dies unter bestimmten Bedingungen auch für das *Euler*-Prinzip.

Abschließend wird auf firmenwertbasierte sowie spieltheoretische Ansätze der Kapitalallokation eingegangen und für den *Shapley*-Wert, einen der bekanntesten Vertreter der letztgenannten Kategorie, aufgezeigt, dass er das Kapitalallokationsproblem nicht systematisch besser zu lösen vermag.

Anhang: Kohärenz des CVaR-Prinzips

Es sei $N = \{1, \dots, n\}$. Wir betrachten die Segmentverlustvariablen L_1, \dots, L_n und definieren

$$L := \sum L_i.$$

Wir definieren nun die folgende durch das (kohärente) Risikomaß R auf der Potenzmenge von N definierte Risikofunktion (die wir ebenfalls mit R bezeichnen).

$$(A1) \quad R\left(\sum_{i \in M} L_i\right) := E\left[\sum_{i \in M} L_i \mid L > Q_{1-a}(L)\right] \text{ für alle } M \subseteq N.$$

Die Kapitalallokation definieren wir gemäß des CVaR-Prinzips (43) durch

$$(A2) \quad R(L_i; L) := E[L_i \mid L > Q_{1-a}(L)].$$

Wenden wir uns nunmehr dem Nachweis der Kohärenzaxiome zu.

Die Forderung der vollständigen Allokation ist aufgrund der Linearität des bedingten Erwartungswertoperators $E(\cdot | A)$ erfüllt. Kommen wir damit zur No Undercut-Eigenschaft. Hierzu nutzen wir ebenfalls die Linearitätseigenschaft aus. Es gilt dann für beliebige $M \subseteq N$

$$\sum_{i \in M} R(L_i; L) = \sum_{i \in M} E[L_i \mid L > Q_{1-a}(L)] = E\left[\sum_{i \in M} L_i \mid L > Q_{1-a}(L)\right] = R\left(\sum_{i \in M} L_i\right).$$

Auch zum Nachweis der Symmetrie nutzen wir die Linearitätseigenschaft aus. Aus der Austauschbarkeitseigenschaft:

$$R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_i\right) = R\left(\sum_{k \in M} L_k + L_j\right) \text{ für beliebige } M \subseteq N \setminus \{i, j\} \text{ folgt im Falle des CVaR-}$$

Prinzips $E\left[\sum_{k \in M} L_k + L_i \mid L > Q_{1-a}(L)\right] = E\left[\sum_{k \in M} L_k + L_j \mid L > Q_{1-a}(L)\right]$. Aufgrund der Linearitäts-

beziehung $E\left[\sum_{k \in M} L_k + L_h \mid L > Q_{1-a}(L)\right] = E\left[\sum_{k \in M} L_k \mid L > Q_{1-a}(L)\right] + E[L_h \mid L > Q_{1-a}(L)]$ für

$h = i, j$ folgt dann direkt $E[L_i \mid L > Q_{1-a}(L)] = E[L_j \mid L > Q_{1-a}(L)]$, d.h. $R(L_i; L) = R(L_j; L)$.

Die Forderung der risikolosen Allokation ist schließlich aufgrund der generellen Eigenschaft $E[c|A] = c$ des bedingten Erwartungswertoperators erfüllt.

Literaturverzeichnis

- Albach, H.* (2001): Shareholder Value und Unternehmenswert – Theoretische Anmerkungen zu einem aktuellen Thema, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 71. Jg., Heft 6, S. 643-674.
- Albrecht, P.* (1998): Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung, in: *Oehler, A.* (Hrsg.): *Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen: Herausforderungen für das Risk Management*, Stuttgart, S. 229-257.
- Albrecht, P.* (2003): Zur Messung von Finanzrisiken, *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft*, Nr. 143, Universität Mannheim, URL: <http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht/download/extern/mm/mm143.pdf> [Stand: 17.10.2003].
- Albrecht, P. / Koryciorz, S.* (2003): Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (CVaR) bei Normal- und Lognormalverteilung, *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft*, Nr. 142, Universität Mannheim, URL: <http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht/download/extern/mm/mm142.pdf> [Stand: 17.10.2003].
- Albrecht, T.* (1998): Die Vereinbarkeit der Value-at-Risk-Methode in Banken mit anteilseignerorientierter Unternehmensführung, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 68. Jg., Heft 3, S. 259-273.
- Artzner, P. / Delbaen, F. / Eber, J.-M. / Heath, D.* (1999): Coherent Measures of Risk, in: *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, S. 203-228.
- Ballwieser, W. / Kuhner, C.* (2000): Risk Adjusted Return On Capital: Ein geeignetes Instrument zur Steuerung, Kontrolle und Kapitalmarktkommunikation?, in: *Riekeberg, M. / Stenke, K.* (Hrsg.): *Banking 2000, Perspektiven und Projekte*, Hermann Meyer zu Selhausen zum 60. Geburtstag, Wiesbaden, S. 367-381.
- Bass, I. K. / Khury, C. K.* (1992): Surplus Allocation: An Oxymoron, in: *Casualty Actuarial Society* (Hrsg.): *1992 Discussion Papers on Insurer Financial Solvency*, Vol. 2, Arlington/Virginia, S. 553-584.
- Culp, C. L.* (2000): Ex Ante versus Ex Post RAROC, *Derivatives Quarterly*, Vol. 7, No. 1, S. 16-25.
- Cummins, D. J.* (2000): Allocation of Capital in the Insurance Industry, *Risk Management and Insurance Review*, Vol. 3, No. 1, S. 7-27.
- Denault, M.* (2001): Coherent Allocation of Risk Capital, *The Journal of Risk*, Vol. 4, No. 1, S. 1-33.

- Dowd, K.* (1999): A Value at Risk Approach to Risk-Return Analysis, *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 25, No. 4, S. 60-67.
- Embrechts, P. / McNeil, A. / Straumann, D.* (2002): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, in: *Dempster, M. A. H.* (Hrsg.): *Risk Management, Value at Risk and Beyond*, Cambridge, S. 176-223.
- Fang, K.-T. / Kotz, S. / Ng, K.-W.* (1990): *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, New York.
- Fischer, T.* (2003): Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 32, No. 1, S. 135-146.
- Froot, K. A. / Stein, J. C.* (1998): Risk Management, Capital Budgeting, and Capital Structure Policy for Financial Institutions: An Integrated Approach, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 47, No. 1, S. 55-82.
- Garman, M. B.* (1996): Improving on VAR, in: *Risk*, Vol. 9, No. 5, S. 61-63.
- Garman, M. B.* (1997): Taking VAR to Pieces, in: *Risk*, Vol. 10, No. 10, S. 70-71.
- Gourieroux, C. / Laurent, J. P. / Scaillet, O.* (2000): Sensitivity Analysis of Values at Risk, in: *Journal of Empirical Finance*, Vol. 7, No. 3/4, S. 225-245.
- Graumann, M. / Baum, S.* (2003): Methoden zur Allokation von Sicherheitskapital, Darstellung und Beurteilung aus Sicht der Unternehmensleitung, in: *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, Band 92, Heft 3, S. 421-457.
- Gründl, H. / Schmeiser, H.* (2002): Marktwertorientierte Unternehmens- und Geschäftsbereichssteuerung in Finanzdienstleistungsunternehmen, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 72. Jg., Heft 8, S. 797-822.
- Haaf, H. / Tasche, D.* (2002): Calculating Value-at-Risk contributions in CreditRisk⁺, Arbeitspapier, URL: http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0112/0112045.pdf [Stand: 17.10.2003].
- Hallerbach, W. G.* (2002/03): Decomposing portfolio value-at-risk: a general analysis, in: *The Journal of Risk*, Vol. 5, No. 2, S. 1-18.
- Holler, M. J. / Illing, G.* (2003): *Einführung in die Spieltheorie*, 5. Aufl., Berlin u. a.
- Hooker, N. D. u. a.* (1996): Risk Based Capital in General Insurance, in: *British Actuarial Journal*, Vol. 2, Part 2, No. 7, S. 265-323 (inkl. Diskussion).
- Hürlimann, W.* (2001a): Analytical Evaluation of Economic Risk Capital for Portfolios of Gamma Risks, in: *ASTIN Bulletin*, Vol. 31, No. 1, S. 107-122.
- Hürlimann, W.* (2001b): Analytical Evaluation of Economic Risk Capital and Diversification Using Linear Spearman Copulas, Arbeitspapier, URL: <http://www.gloriamundi.org/picsresources/wh1.pdf> [Stand: 17.10.2003].

- Kinder, C.* (1999): Interne Leistungsverrechnung in Industriebetrieben und Banken, Köln.
- Lemaire, J.* (1984): An Application of Game Theory: Cost Allocation, in: *ASTIN Bulletin*, Vol. 14, No. 1, S. 61-81.
- Lemaire, J.* (1991): Cooperative Game Theory and its Insurance Applications, in: *ASTIN Bulletin*, Vol. 21, No. 1, S. 17-40.
- Litterman, R.* (1996): Hot SpotsTM and Hedges, in: *The Journal of Portfolio Management*, Special Issue, S. 52-75.
- Mango, D. F.* (1998): An Application of Game Theory: Property Catastrophe Risk Load, in: *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, Vol. 85, Part 1, No. 162, S. 157-181.
- Matten, C.* (2000): Managing bank capital: capital allocation and performance measurement, 2. Aufl., Chichester u. a.
- Merton, R. C. / Perold, A. F.* (1993): Theory of Risk Capital in Financial Firms, in: *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol. 6, No.2, S. 16-32.
- Myers, S. C. / Read, J. jr.* (2001): Capital Allocation for Insurance Companies, in: *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 68, No. 4, S. 545-580.
- Overbeck, L.* (2000): Allocation of Economic Capital in loan portfolios, in: *Franke, J. / Härdle, W. / Stahl, G.* (Hrsg.): *Measuring risk in complex stochastic systems*, New York u. a., S. 1-17.
- Panjer, H.* (2001): Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates, Research Report 01-15, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo.
- Patrik, G. / Bernegger, S. / Rüegg, M. B.* (1999): The Use of Risk Adjusted Capital to Support Business Decision-Making, in: *Casualty Actuarial Society* (Hrsg.): *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 1999, Including the Reinsurance Call Papers, Arlington/Virginia, S. 243-334.
- Perold, A. F.* (2001): Capital Allocation in Financial Firms, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston.
- Philbrick, S. W.* (2000): Brainstorms: Surplus Allocation Redux, in: *The Actuarial Review*, Vol. 27, No. 1, S. 23-24.
- Ploegmakers, H. / Schweitzer, M.* (2000): Risk Adjusted Performance and Capital Allocation for Trading Desks within Banks, in: *Managerial Finance*, Vol. 26, No. 3, S. 39-50.
- Rockafellar, R. T. / Uryasev, S. / Zabaranin, M.* (2003): Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization, Research Report No. 2002-7, Risk Management and Financial Engineering Lab, Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville/Florida, überarbeitete Version vom 08. Juni 2003.

- Scaillet, O.* (2003): Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall, erscheint in: *Mathematical Finance*.
- Schradin, H. R.* (1998): Finanzielle Steuerung der Rückversicherung: unter besonderer Berücksichtigung von Großschadenereignissen und Fremdwährungsrisiken, Karlsruhe.
- Schradin, H. R.* (2001a): Risikoadäquate Kapitalallokation im Versicherungskonzern, in: *Britzelmaier, B. / Geberl, S.* (Hrsg.): *Wandel im Finanzdienstleistungssektor*, 1. Liechtensteinisches Finanzdienstleistungs-Symposium an der Fachhochschule Liechtenstein, Heidelberg, S. 101-110.
- Schradin, H. R.* (2001b): Wertorientierte Steuerung der Versicherungsunternehmung – Ermittlung und Allocation des Risk-Based Capital, Vortrag, 45. Tagung der deutschen ASTIN-Gruppe, Köln, 13. November 2001, URL: <http://www.uni-koeln.de/wiso-fak/versich/mitarbeiter/schradin.htm#veroeffentlichungen> [Stand: 17.10.2003].
- Shapley, L. S.* (1953): A Value For n-Person Games, in: *Kuhn, H. W. / Tucker, A. W.* (Hrsg.): *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II, Princeton/New Jersey, S. 307-317.
- Shapley, L. S.* (1971/72): Cores of Convex Games, in: *International Journal of Game Theory*, Vol. 1, No. 1, S. 11-26.
- Shubik, M.* (1962): Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing, in: *Management Science*, Vol. 8, No. 3, S. 325-343.
- Stoughton, N. / Zechner, J.* (2000): Konzepte zur Risiko-Ertragssteuerung in Kreditinstituten, in: *Johanning, L. / Rudolph, B.* (Hrsg.): *Handbuch Risikomanagement*, Band 2, Risikomanagement in Banken, Asset-Management-Gesellschaften, Versicherungs- und Industrieunternehmen, Bad Soden/Ts., S. 879-902.
- Taflin, E.* (2000): Equity allocation and portfolio selection in insurance, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 27, No. 1, S. 65-81.
- Tasche, D.* (2000): Risk contributions and performance measurement, Arbeitspapier, TU München, URL: <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/riskcon.pdf> [Stand: 17.10.2003].
- Tasche, D.* (2002): Expected shortfall and beyond, in: *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, No. 7, S. 1516-1533.
- Tijs, S. H. / Driessen, T. S.* (1986): Game Theory and Cost Allocation Problems, in: *Management Science*, Vol. 32, No. 8, S. 1015-1027.
- Venter, G. G.* (2002): Allocating Surplus – Not!, *The Actuarial Review*, Vol. 29, No. 1, S. 5-6.
- Young, H. P.* (1985): Methods and Principles of Cost Allocation, in: *Young, H. P.* (Hrsg.): *Cost Allocation: Methods, Principles, Applications* (Outgrowth of Meeting on Cost Allocation, held by the International Institute for Applied Systems Analysis at Laxenburg, Austria, in August 1983), Amsterdam u. a., S. 3-29.

Young, H. P. (1994): Cost Allocation, in: *Aumann, R. J. / Hart, S.* (Hrsg.): Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 2, Amsterdam u. a., S. 1193-1235.