

## 第十三章 幂 级 数

### 第一讲 幂级数的收敛半径与收敛区域

**引子** 前面讲述的一般的无穷级数理论，具体应用到表示函数，有两类特殊的级数是十分重要的。其中的一类是本章要研究的幂级数。它是多项式的推广，是“无穷次”的多项式。它的收敛域与和函数很特别，需要特别注意！此外，本章还将给出初等函数的幂级数展开，一方面是为了试着用初等函数这一工具研究初等函数本身，另一方面即使是研究非初等函数也要依靠对初等函数有更深的理解。

#### 重点

求收敛半径与讨论收敛区域是本节课的重点。

#### 幂级数的定义

在函数级数中有一类结构简单、应用广泛的特殊的函数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-a)^n = a_0 + a_1(y-a) + a_2(y-a)^2 + \cdots + a_n(y-a)^n + \cdots,$$

称为幂级数，其中  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  都是常数，称为幂级数的系数。

如果令  $y-a=x$ ，上面的幂级数就化为最简形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (1)$$

为了书写简便，下面主要讨论幂级数(1)。

#### 特点

幂级数(1)的每一项都是非负整数幂的幂函数，这就是幂级数名称的来源。可以形象地把幂级数(1)看作是按自变量  $x$  升幂排列的“无穷次多项式”。由幂级数所定义的这类函数，它在许多方面几乎与多项式类似。

一个幂级数(1)完全由系数构成的数列  $\{a_n\}$  来决定。

### 定理 13.1(阿贝尔第一定理)

- 1) 若幂级数(1)在  $x_0 \neq 0$  收敛, 则幂级数(1)在  $\forall x: |x| < |x_0|$  都绝对收敛.
- 2) 若幂级数(1)在  $x_1$  发散, 则幂级数(1)在  $\forall x: |x| > |x_1|$  都发散.

证明 1) 已知级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  收敛, 由收敛的必要条件, 有

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . 从而, 数列  $\{a_n x_0^n\}$  有界, 即  $\exists M > 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$|a_n x_0^n| \leq M.$$

$\forall x: |x| < |x_0|$ , 即  $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ , 有

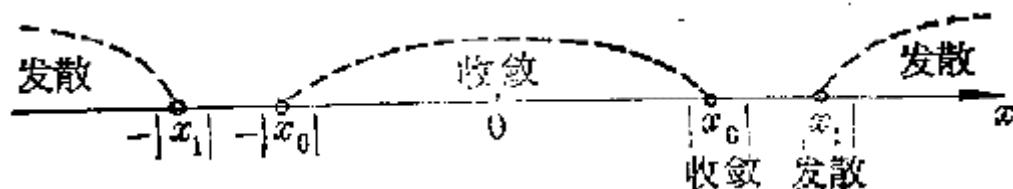
$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

已知几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$  (公比  $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ ) 收敛. 于是, 幂级数

(1) 在  $\forall x: |x| < |x_0|$  都绝对收敛.

2) 用反证法 假设  $\exists \xi: |\xi| > |x_1|$ , 幂级数(1)在  $\xi$  收敛, 由 1), 幂级数(1)在  $x_1$  (绝对)收敛, 与已知条件矛盾, 即幂级数(1)在  $\forall x: |x| > |x_1|$  都发散.  $\square$

定理 13.1 指出, 幂级数(1)的收敛点与发散点在数轴上不能混杂交错出现, 如图 9.2.



由此不难想到，若幂级数(1)既有非0的收敛点又有发散点，那么数轴上必存在关于原点0对称的两个点 $-r$ 与 $r(r>0)$ ，它们是幂级数(1)的收敛点集和发散点集的分界点。显然，这个正数 $r$ 就是幂级数(1)收敛点集的上确界，即

$$r = \sup\{x \mid x \text{ 是幂级数(1)的收敛点}\}.$$

**定理 13.2** 幂级数(1)在  $\forall x: |x| < r$  绝对收敛；在  $\forall x: |x| > r$  发散。这个 $r$  称为幂级数(1)的收敛半径。

**证明** 事实上， $\forall x: |x| < r$ ，由上确界定义， $\exists \eta: |x| < \eta < r$ 。已知幂级数(1)在 $\eta$ 收敛，根据定理1， $\forall x: |x| < r$  幂级数(1)绝对收敛； $\forall x: |x| > r$ ，显然，幂级数(1)在 $x$ 发散(否则，与收敛半径 $r$ 的定义矛盾)。因此， $\forall x: |x| > r$  幂级数(1)发散。

我们作如下的规定：若幂级数(1)仅在原点0收敛，则它的收敛半径 $r=0$ ；若幂级数(1)在 $\mathbb{R}$ 收敛，则它的收敛半径 $r=+\infty$ 。于是，任意幂级数都有唯一一个收敛半径 $r(0 \leq r \leq +\infty)$ 。

幂级数(1)的收敛半径 $r$ 也必由它的系数数列 $\{a_n\}$ 唯一确定。怎样求幂级数(1)的收敛半径呢？有下面定理：

**定理 13.3** 有幂级数(1)，即  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ )，

则幂级数(1)的收敛半径

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ +\infty, & l = 0, \\ 0, & l = +\infty. \end{cases}$$

**证明** 讨论正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 。根据达朗倍尔判别

法(或柯西判别法)，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = l |x|.$$

1)  $0 < l < +\infty$ , 当  $|x| < 1$  或  $|x| > \frac{1}{l}$ , 幂级数(1)绝对收敛;

当  $|x| > 1$  或  $|x| > \frac{1}{l}$ , 幂级数(1)发散. 于是, 收敛半径  $r = \frac{1}{l}$ .

2)  $l = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $|x| = 0 < 1$ , 即  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 幂级数(1)绝对收敛. 于是, 收敛半径  $r = +\infty$ .

3)  $l = +\infty$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq 0$ , 有  $|x| = +\infty$ , 即  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , 幂级数(1)发散. 于是, 收敛半径  $r = 0$ .  $\square$

例 1. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$  的收敛半径, 并讨论收敛区间.

解 已知  $a_n = \frac{2^n}{n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ .

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{n+1} \right| / \left| \frac{2^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

于是, 收敛半径  $r = \frac{1}{2}$ .

幂级数在区间  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  端点的敛散性须分别讨论:

$x = \frac{1}{2}$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

$x = -\frac{1}{2}$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛.

于是, 幂级数的收敛区间是  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

例 2. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$  的收敛半径.

解 已知  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

于是, 收敛半径  $r = +\infty$ , 即收敛域是  $\mathbb{R}$ .

例 3. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$  的收敛半径.

解 已知  $a_n = n^n$ ,  $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}$ .

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty.$$

于是, 收敛半径  $r = 0$ , 即仅在 0 收敛, 收敛域是  $\{0\}$ .

## 第二讲 幂级数的性质

目的：幂级数和函数的分析性质

设幂级数(1), 即  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $r > 0$ . 幂级数(1)在收敛区间确定了一个和函数  $S(x)$ , 即

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

为了讨论和函数  $S(x)$  的分析性质, 首先要讨论幂级数(1)的一致收敛性. 一般来说, 幂级数在其收敛区间不一定一致收敛. 例如,

幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在收敛区间  $(-1, 1)$  并不一致收敛(见 § 9.2 例 4),

但是却有下面的定理:

**定理 13.4 (阿贝尔第二定理)** 若幂级数(1)的收敛半径  $r > 0$ , 则幂级数(1)在任意闭区间  $[-a, a] \subset (-r, r)$  都一致收敛.

**证明**  $\forall x \in [-a, a]$ , 即  $|x| \leq a$  ( $0 < a < r$ ), 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| a^n.$$

已知级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n$  收敛. 根据  $M$  判别法, 幂级数(1)在闭区间  $[-a, a]$  一致收敛.  $\square$

由此可见, 虽然幂级数在其收敛区间不一定一致收敛, 但是它在收敛区间内的任意闭区间都一致收敛. 幂级数的这个性质称为内闭一致收敛.

**推论 1** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $r > 0$ , 则它的和函数

$S(x)$  在区间  $(-r, r)$  连续.

**证明**  $\forall x \in (-r, r), \exists \eta > 0$ , 使  $x \in [-\eta, \eta] \subset (-r, r)$ . 已知幂级数内闭一致收敛, 根据 § 9.2 定理 6, 和函数  $S(x)$  在  $x$  连续, 从而, 和函数  $S(x)$  在区间  $(-r, r)$  连续.

**推论 2** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $r > 0$ , 且在  $r(-r)$  收敛,

则和函数  $S(x)$  在  $r(-r)$  左连续(右连续), 且

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad \left( \lim_{x \rightarrow -r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n \right).$$

**证明** 由 § 9.2 例 8, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在区间  $[0, r]$  一致收敛.

根据 § 9.2 定理 6, 和函数  $S(x)$  在  $r$  左连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lim_{x \rightarrow r^-} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S(r).$$

同法可证在  $-r$  的情况.  $\square$

**定理 13.5** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $r > 0$ , 则  $\forall x \in (-r, r)$ ,

它的和函数  $S(x)$  在区间  $(-r, r)$  内可逐项微分与可逐项积分, 即

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (2)$$

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \quad (3)$$

(2) 与 (3) 幂级数的收敛半径也是  $r$ .

证明 证明  $r_1 \leq r_2$ .  $\forall x_0: 0 < |x_0| < r_1, \exists x_1: |x_0| < |x_1| < r_1$ .

已知级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$  收敛,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$|na_n x_0^{n-1}| = \frac{n}{|x_0|} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n |a_n x_1^n|.$$

已知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|x_0|} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n = 0$  ①, 从而数列  $\left\{ \frac{n}{|x_0|} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n \right\}$  有界, 即

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } \frac{n}{|x_0|} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^n \leq M.$$

于是,

$$|na_n x_0^{n-1}| \leq M |a_n x_1^n|.$$

根据比较判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x_0^{n-1}$  绝对收敛, 即  $r_1 \leq r_2$ .

同法证明,  $r_1 \geq r_2$ .  $\forall x_0: 0 < |x_0| < r_2, \exists x_1: |x_0| < |x_1| < r_2$ . 已

知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_1^n|$  收敛,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$|a_n x_0^n| = \frac{|x_0|}{n} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} |a_n x_1^n|.$$

已知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} = 0$ , 从而数列  $\left\{ \frac{|x_0|}{n} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} \right\}$  有界, 即

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } \frac{|x_0|}{n} \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} \leq M.$$

于是,

$$|a_n x_0^n| \leq M |a_n x_1^n|.$$

根据比较判别法, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  绝对收敛, 即  $r_1 \geq r_2$ .

综上所证,  $r_1 = r_2$ .  $\square$

**定理 13.6** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $r > 0$ , 则其和函数  $S(x)$  在  $(-r, r)$  内任意次

可微, 且  $\forall x \in (-r, r), \forall k \in \mathbb{N}$ , 有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k},$$

此幂级数的收敛半径也是  $r$ .

幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (收敛半径  $r > 0$ ) 具有以下性质:

1. 收敛域是以原点为心的区间(可能是开区间、闭区间、半开区间,特殊情况可能是  $\mathbb{R}$  或退化为原点).
2. 在区间  $(-r, r)$  内闭一致收敛.
3. 和函数在区间  $(-r, r)$  连续.
4. 和函数在任意闭区间  $[a, b] \subset (-r, r)$  可积,且可逐项积分,特别是,  $\forall x \in (-r, r)$ , 由 0 到  $x$  可逐项积分,逐项积分得到的幂级数的收敛半径也是  $r$ .
5. 和函数在区间  $(-r, r)$  存在任意阶导函数,且可逐项微分.逐项微分得到的幂级数的收敛半径也是  $r$ .

例 5. 求下列幂级数的和函数:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

解 1) 不难计算它的收敛半径是 1.

设它的和函数是  $f(x)$ , 即  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

根据定理 7, 逐项微分, 有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}.$$

$\forall x \in (-1, 1)$ , 对上式等号两端从 0 到  $x$  积分, 有

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \quad \text{或} \quad f(x) - f(0) = \ln(1+x).$$

已知  $f(0) = 0$ . 于是,  $f(x) = \ln(1+x)$ , 即  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

根据定理 5 的推论. 当  $x=1$  时, 有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

2) 不难计算它的收敛半径也是 1.

设它的和函数是  $f(x)$ , 即  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

根据定理 6,  $\forall x \in (-1, 1)$ , 从 0 到  $x$  逐项积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x t^n dt = \int_0^x dt + 2 \int_0^x t dt + 3 \int_0^x t^2 dt + \dots \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

对上式等号两端求导数, 有

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

即  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

**例 6.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$  的和函数.

**解** 不难计算幂级数的收敛半径是 1,

设它的和函数是  $f(x)$ , 即  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ . 为

了逐项积分, 将它改写为

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1}) = 1.$$

将函数  $\frac{f(x)}{x}$  在 0 作连续开拓 ( $x=0$ , 定义  $\frac{f(0)}{0}=1$ ).

$\forall x \in (-1, 1)$ , 从 0 到  $x$  逐项积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \cdots \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots). \end{aligned}$$

由例 5, 2), 有

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

对上式等号两端求导数, 有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

于是,

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

### 第三讲 函数的幂级数展开

以上是在给定幂级数的情况下，讨论幂级数的收敛域以及和函数的分析性质。但是也常常遇到相反的问题，即给定的函数“展成”幂级数，这对我们进一步定性地和定量地认识这些函数有着重要意义。

如果函数能展成幂级数，那么幂级数的系数与这个函数有什么关系呢？有下面的定理：

**定理 8** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a-r, a+r)$  能展成幂级数，即

$\forall x \in (a-r, a+r)$ ，有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad (2)$$

则函数  $f(x)$  在区间  $(a-r, a+r)$  存在任意阶导数，且  $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ ，  
 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

**推论** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a-r, a+r)$  能展成幂级数(2)，则其幂级数展开式是唯一的，即若  $\forall x \in (a-r, a+r)$ ，有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{与} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n,$$

则  $a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 。

**证明** 根据定理 8， $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ， $b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ，有

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad \square$$

定理 8 指出, 若函数  $f(x)$  在  $a$  的邻域能展成幂级数, 则  $f(x)$  在此邻域必存在任意阶导数, 并且幂级数的系数  $a_k$  由函数  $f(x)$  的  $k$  阶导数在  $a$  的值唯一确定, 即

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

注意, 这是在“能展成”, 即(2)式成立的前提下得到的. 反之, 如果函数  $g(x)$  在  $a$  存在任意阶导数, 我们总能形式地写出相应的幂级数:

$$\begin{aligned} g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots, \end{aligned}$$

称为函数  $g(x)$  在  $a$  的泰勒级数, 表为

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (3)$$

其中符号“ $\sim$ ”表示(3)式右端的泰勒级数是函数  $g(x)$  生成的.

特别是, 函数  $g(x)$  在 0 的泰勒级数, 即

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

称为函数  $g(x)$  的马克劳林级数.

如果泰勒级数(3)在区间  $(a-r, a+r)$  收敛, 那么它的和函数是否就是函数  $g(x)$  呢? 回答是否定的(因此(3)式才用符号“ $\sim$ ”, 而不用等号“ $=$ ”). 例如, 函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(见练习题 5.5 第 10 题) 函数  $g(x)$  在 0 存在任意阶导数, 且  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$g^{(n)}(0) = 0.$$

于是, 函数  $g(x)$  的马克劳林级数是:

$$g(x) \sim g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \quad (4)$$

显然, 级数(4)在  $\mathbb{R}$  收敛于 0, 但是  $\forall x \neq 0, g(x) \neq 0$ , 即

$$g(x) \neq g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

由此可见, 若函数  $g(x)$  在  $a$  存在任意阶导数, 我们总能写出幂级数(3), 一般来说幂级数(3)在区间  $(a-r, a+r)$  不一定收敛于函数  $g(x)$ . 那么在什么条件下幂级数(3)收敛于函数  $g(x)$  呢?

**定理 9.** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a-r, a+r)$  存在任意阶导数, 且  $\forall x \in (a-r, a+r)$ , 泰勒公式的余项  $R_n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则  $\forall x \in (a-r, a+r)$ , 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

**证明** 由 § 6.3 泰勒公式,  $\forall x \in (a-r, a+r)$ , 有

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = R_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

即 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \square$$

应用定理 9 判别函数可展成泰勒级数并不方便, 下面再给一个比较简便的函数可展成泰勒级数的充分条件:

**定理 10.** 若函数  $f(x)$  在区间  $(a-r, a+r)$  存在任意阶导数, 且  $\exists M > 0$ ,  $\forall x \in (a-r, a+r)$ ,  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \text{①}$$

则  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad x \in (a-r, a+r).$  (5)

**证明** 由 § 6.3, 带有拉格朗日余项的泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} |R_{n-1}(x)| &= \left| \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)] \right| \quad (0 < \theta < 1) \\ &\approx \frac{|x-a|^n}{n!} |f^{(n)}[a + \theta(x-a)]| \leq \frac{r^n}{n!} M. \end{aligned}$$

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ , ② 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n-1}(x) = 0$ . 根据定理 9, (5) 式成立.  $\square$

## 基本初等函数的幂级数展开

下面给出几个常用的基本初等函数的幂级数展开式:

1.  $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x.$

由 § 5.5 例 3, 有

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1.$$

根据定理 10, 函数  $\sin x$  在  $\mathbb{R}$  可展成幂级数. 当  $x=0$ , 有

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=-1, \dots$$

于是,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

用同样方法, 可把函数  $\cos x$  在  $\mathbb{R}$  展成幂级数

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

2.  $f(x) = e^x$ .

已知  $\forall n=0, 1, 2, \dots$ , 有  $f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$ .

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$\forall r > 0, x \in (-r, r), \forall n=0, 1, 2, \dots$ , 有

$$|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^r.$$

根据定理 10, 函数  $e^x$  在  $(-r, r)$  可展成幂级数. 因为  $r$  是任意的, 所以函数  $e^x$  在  $\mathbb{R}$  可展成幂级数, 即

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

特别是, 当  $x=1$  时, 有

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

3.  $f(x) = \ln(1+x)$ .

已知  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

不难计算, 这个幂级数的收敛半径是 1. 根据定理 6,  $\forall x \in (-1, 1)$ , 从 0 到  $x$  逐项积分, 有

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \dots,$$

即  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \underbrace{\frac{x^n}{n}}_{\substack{\sum_{k=1}^{n-1} \\ (-1)^k k!}} + \dots, |x| < 1.$

例 5 已证, 当  $x=1$  时, 有  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

4.  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha$  是常数,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}_{f(0)=1} (1+x)^{\alpha-n}, \dots$$

有  $f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots,$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \dots$$

从而, 函数  $(1+x)^\alpha$  的马克劳林级数是

$$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (6)$$

当  $\alpha=n \in \mathbb{N}$  时, 已知  $\forall k > n$ , 有  $f^{(k)}(x) \equiv 0$ . 这时, 函数  $(1+x)^\alpha$  的马克劳林级数就是我们熟知的牛顿二项式公式, 即

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n!}{n!} x^n \\ = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

当  $\alpha \neq n \in \mathbb{N}$  时, 有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n + 1} \right| = 1.$$

即幂级数(6)的收敛半径是 1. 下面证明马克劳林级数 (6) 在区间  $(-1, 1)$  收敛于函数  $(1+x)^\alpha$ . 这里选用柯西余项, 直接用定理 9 证明. 函数  $(1+x)^\alpha$  的马克劳林公式的柯西余项 (见 § 6.3 定理 2) 是

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 不难证明, (7) 式中的因式  $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$  与  $(1+\theta x)^{\alpha-1}$  有界.

事实上,  $\forall x > -1$ , 有  $0 < 1-\theta < 1+\theta x$  或  $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ , 从而

$$\forall x \in (-1, 1), \forall n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } 0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

因为  $\forall x; 0 \leq x < 1$ , 有  $1 \leq 1+\theta x < 1+\theta$ ,

$\forall x; -1 < x \leq 0$ , 有  $1+x < 1+\theta x \leq 1$ ,

所以  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有  $|(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$  (与  $n$  无关).

又已知,  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} = 0 \quad \text{①}$$

于是, 由(7)式,  $\forall x \in (-1, 1)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

根据定理 9, 函数  $(1+x)^\alpha$  在区间  $(-1, 1)$  可展成幂级数(6),

即

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

(+)

称为二项式展开公式.

下面是二项式展开公式的几个特殊情况( $|x| < 1$ ):

$$\alpha = -1, \text{ 是 } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\alpha = -k, \text{ 是 }$$

$$\frac{1}{(1+x)^k} = 1 - \frac{k}{1!}x + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \dots$$

将其中  $x$  换为  $-x$ , 是

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \text{ 是 }$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \text{ 是 }$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

5.  $f(x) = \arcsin x$ .

已知  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . 由二项式展开公式, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$\forall x \in (-1, 1)$ , 从 0 到  $x$  逐项积分, 有

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 dt + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt + \dots,$$

$$\text{即 } \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + \dots, \quad |x| < 1.$$

用同样方法, 可把函数  $\arctg x$  在  $(-1, 1)$  展成幂级数.

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad |x| < 1.$$

2° 亚伯耳定理 若幂级数  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $|x| < R$ ) 在收敛区间的端点  $x=R$  处收敛，则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在  $a$  点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日形式) 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta_1(x-a)]}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1}$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西形式)。

必须记住下列五个基本的展开式：

I.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II.  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$   
 $(-\infty < x < +\infty).$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$(-\infty < x < +\infty)$ .

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$(-1 < x < 1)$ .

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间  $|x-a| < R$  内有：

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n;$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

式中  $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$ ;

$$(c) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$(d) \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n^p}.$$

解 记  $a_n = -\frac{1}{n^p}$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ ；收敛区间为  $(-1, 1)$ .

当  $x = -1$  时，若  $p > 1$ ，则幂级数为绝对收敛；若  $0 < p \leq 1$ ，则为条件收敛；当  $p \leq 0$  时，则为发散。

当  $x = 1$  时，若  $p > 1$ ，则为绝对收敛；若  $p \leq 1$  则为发散。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} - (x+1)^n.$$

解 记  $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

故收敛半径  $R = \frac{1}{3}$ ；收敛区间为  $\left(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}\right)$ ，

即  $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

当  $x = -\frac{4}{3}$  时，幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

解 记  $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{a_n}{a_{n+1}} - \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

故收敛半径  $R = 4$ ，收敛区间为  $(-4, 4)$ 。

当  $x = -4$  时, 利用斯特林格公式

$$n_1 = \sqrt{2\pi n} n^* e^{-*}(1+o(1))$$

得

$$\left| \frac{(n!)^2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (-4)^{\frac{n}{2}} \right| = -\frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 + o(1)}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{\frac{n}{2}} e^{-2n} + o(1)} \cdot 4^n \\ = \sqrt{n\pi} (1 + o(1)) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此, 当  $x = -4$  时级数发散.

当  $x=4$  时, 级数为

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故由拉阿伯判別法知級數  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, \ b > 0).$$

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a^n}{n} x^n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为  $R_1 = \frac{1}{a}$  及  $R_2 = \frac{1}{b}$ ,

故原级数的收敛半径  $R = \min(R_1, R_2) = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ , 收敛区间为  $(-R, R)$ .

当  $x = -R$  时, 若  $a < b$ , 则级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left( -\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left( \frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

对于上式右端的第一个级数, 利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

故知其为绝对收敛, 而第二个级数显然为绝对收敛。因此, 当  $a < b$  时, 级数 (1) 绝对收敛。当  $a \geq b$  时, 级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left( -\frac{1}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left( \frac{b}{a} \right)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛 ( $b < a$ ) 或条件收敛 ( $b = a$ )，故当  $a \geq b$  时，级数 (2) 条件收敛。

当  $x = R$  时，若  $a < b$ ，级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left( \frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

由前段知其为绝对收敛；若  $a \geq b$ ，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left( \frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{b}{a} \right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数。

%%%%%%%%%%%%%

**把函数**

$$f(x) = x^3$$

按二项式  $x+1$  的正整数幂来展开。

**解 方法一**

$$\begin{aligned} f(x) &= [(x+1)-1]^3 \\ &= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1. \end{aligned}$$

**方法二**

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \quad f'(-1) = 3, \quad f''(-1) = -6, \\ f'''(-1) &= 6, \quad f^{(4)}(-1) = f^{(5)}(-1) = \dots = 0. \end{aligned}$$

于是，

$$f(x) = -1 + 3(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2$$

$$= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

把函数

$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (a \neq 0)$$

按以下的方式展为幂级数：(a) 依  $x$  的乘幂展开；  
 (b) 依二项式  $x-b$  的乘幂展开，此处  $b \neq a$ ；(c) 依  
 $\frac{1}{x}$  的乘幂展开。求出对应的收敛域。

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \quad f(x) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}, \end{aligned}$$

收敛域为  $|x| < |a|$ .

$$\begin{aligned}
 (6) \quad f(x) &= \frac{1}{a-b-(x-b)} \\
 &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},
 \end{aligned}$$

收敛域为  $|x - b| < |a - b|$ .

$$(B) \quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$$

$$= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为  $|x| > |a|$ .

$$f(x) = \operatorname{ch} x.$$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$  .

将下列函数展成幂级数：

$$\int_a^x e^{-t^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \\ &= \int_0^x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{4n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

%%%%%%%%%%%%%

运用逐项微分法计算下列级数的和：

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots.$$

解 设  $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$  在收敛域  $|x| < 1$  内逐项微分之，得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意  $F(0) = 0$ ，即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

于是，当  $|x| < 1$  时，有

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

解 设  $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$  在收敛域  $|x| \leq 1$  内逐项微分之，得

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2},$$

注意  $F(0) = 0$ ，即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

于是，当  $|x| \leq 1$  时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

运用逐项积分法计算下列级数的和：

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

解 设  $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$  在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t) dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\
&= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \\
&= x(1 + x + x^2 + \dots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) \\
&= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \left[ \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \right]' \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

当  $|x| = 1$  时, 由于级数的通项不趋于零, 故它是发散的.