# Formelsammlung zur Laplace-Transformation

Zusammengestellt von
Lars Weiser

Universität Siegen — WS 1999/2000

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Laplace-Transformation

### Laplace-Transformation

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ sei stückweise stetig und $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ existiere für $\Re\{s\} \geq \alpha$. Dann definiert man:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} := F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt} \tag{1}$$

### Rücktransformation in den Zeitbereich

Falls $f$ differenzierbar im Punkt $t$, dann gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \lim_{\omega\to\infty} \tfrac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s)e^{st}\,ds} \tag{2}$$

## 1.1 Sätze der Laplace-Transformation

Für den praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation - speziell in der Regelungstechnik - sind die folgenden Sätze essentiell.

### 1.1.1 Additionssatz (Linearitätsbeziehung)

Die Laplace-Transformation ist ein Homomorphismus. Es gilt also:

$$\boxed{\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + ... + a_n f_n(t)] = a_1 F_1(s) + ... + a_n F_n(s) \text{ mit } n \geq 1;} \tag{3}$$

### 1.1.2 Differentiationssatz

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte $\frac{d^k}{dt^k} f(0+)$ gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \frac{d^k}{dt^k} f(0+)} \tag{4}$$

### 1.1.3 Integralsatz

Dre Integralsatz als Umkehrung des Differentiationssatzes:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)} \tag{5}$$

### 1.1.4 Zeitverschiebungssatz

Dieser Satz ist für die Behandlung von Vorgängen wichtig, bei denen gewisse Verzögerungszeiten $T_t > 0$ auftreten.

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t - T_t)] = e^{-sT_t} G(s)} \tag{6}$$

### 1.1.5 Verschiebung im Bildbereich

Für $\alpha \in \mathbf{R}$ gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s+\alpha)} \tag{7}$$

### 1.1.6 Differentiation im Bildbereich

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \, \frac{d^n F(s)}{ds^n}} \tag{8}$$

### 1.1.7 Faltungssatz

Die folgende Integraloperation wird als „Faltung“ bezeichnet.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau} \tag{9}$$

Schreibweise: $f_1(t) * f_2(t)$ statt $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$

### 1.1.8 Grenzwertsätze

Sei $f(t)$ stetig und $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ rational, dann gilt, falls $deg(P(s)) < deg(Q(s))$

$$\boxed{f(0+) := \lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)} \tag{10}$$

Wenn alle Singularitäten von $sF(s)$ in $\Re(s) < 0$ liegen, gilt:

$$\boxed{f(\infty) := \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)} \tag{11}$$

## 1.2 Korrespondenztabelle

Die nachstehende Tabelle enthält die Korrespondenzen für die wichtigsten Elementarfunktionen.

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{be^{-bt}-ae^{-at}}{b-a}$ | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ |
| $\sigma(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})}{ab}$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ |
| $\rho(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ | $t^n \ (n \in \mathbf{N})$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $e^{-at} sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $t^n e^{-at}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ | $e^{-at}\cos(\omega t)$ | $\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{at-1+e^{-at}}{a^2}$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ |

## Literatur

[1] H. P. Jörgl. *Repetitorium Regelungstechnik, Band 1*, 2. Aufl.. R. Oldenbourg Verlag Wien München 1995

[2] L. Råde, B. Westergren. *Springers Mathematische Formeln*, 2. Aufl.. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1997