Kapitel 10: Elektromagnetismus

10.1 Einführung

- Der Elektromagnetismus = die Maxwellsche Feldtheorie (J. Maxwell (1831-1879))
- Eine **Feldtheorie** beschreibt das Verhalten von Feldern.
  - ☞ Die Dynamik elektrischer und magnetischer Felder.
- Die Maxwellschen Gleichungen fassen in einer kompakten mathematischen Formulierung alle Gesetze der Elektrodynamik zusammen.
  - ☞ Sie setzen die elektrischen und magnetischen “Vektorfelder” mit ihren “Quellen” in Beziehung.
  - ☞ Eine ähnliche Bedeutung wie die Newtonschen Axiome für die klassische Mechanik.
- Im Prinzip können alle elektromagnetischen Phänomene mit Hilfe dieser Gleichungen erklärt werden. In der Praxis ist die Lösung der Maxwellschen Gleichungen oft schwierig, und in diesen Fällen sucht man numerische Lösungen der Gleichungen.

10.2 Das elektrische Feld

- Die Coulombsche Kraft: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ $\quad \varepsilon_0$ = *elektrische Feldkonstante*

- Wir definieren das elektrische Feld der Punktladung *Q*

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

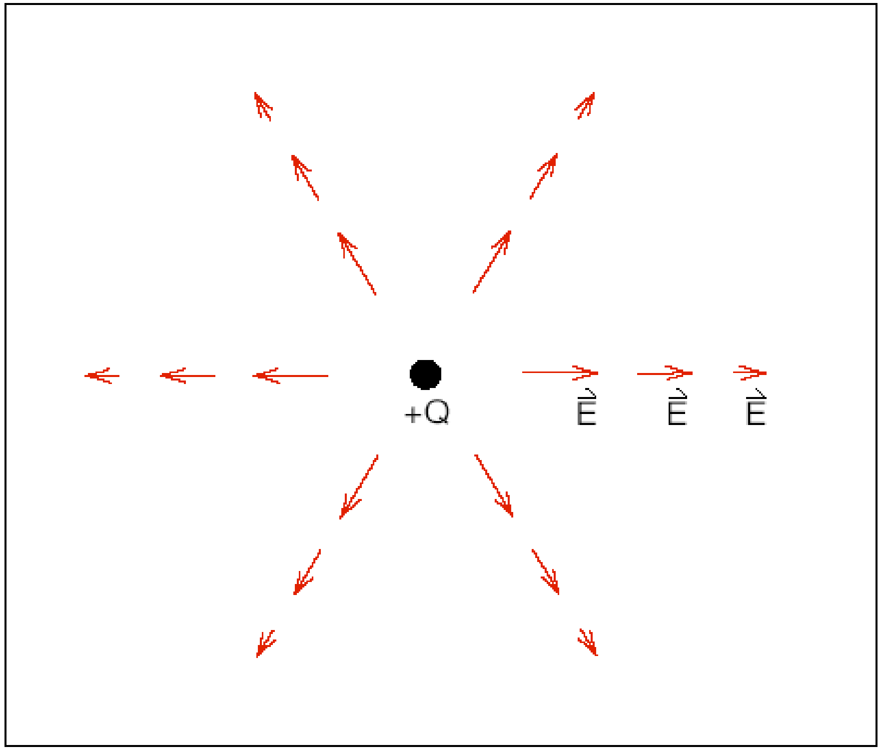
- Wir sagen: die Punktladung *Q* <u>erzeugt</u> ein elektrisches Feld im ganzen Weltraum. Im Allgemeinen erzeugt eine elektrische Ladung ein elektrisches Feld in jedem Punkt des Weltraums. Dieses Feld übt eine elektrische Kraft auf eine zweite Ladung *q* an deren Ort aus

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})}$$

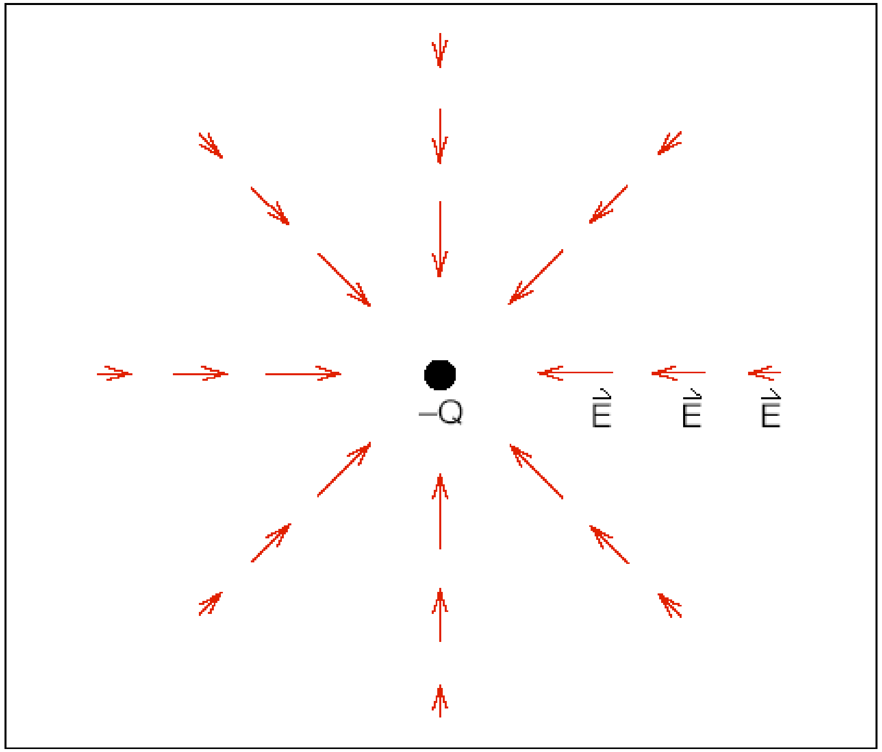
Eine elektrische Ladung erzeugt ein elektrisches Feld in jedem Punkt des Weltraums um sie.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

Positive Ladung

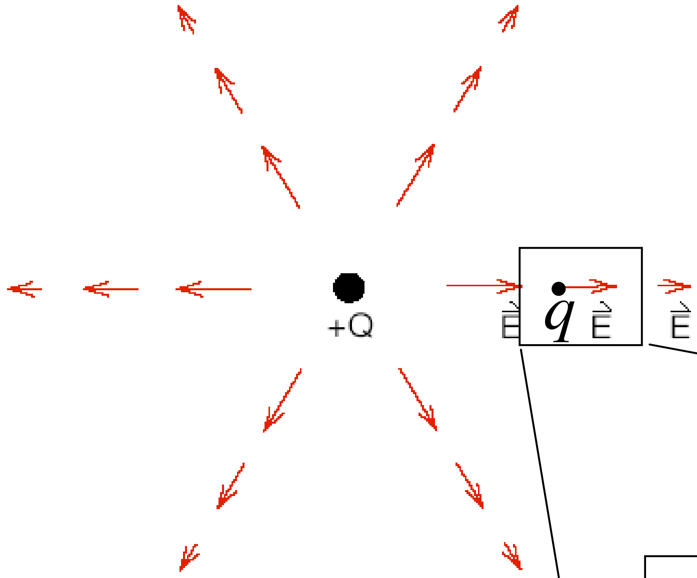


Negative Ladung

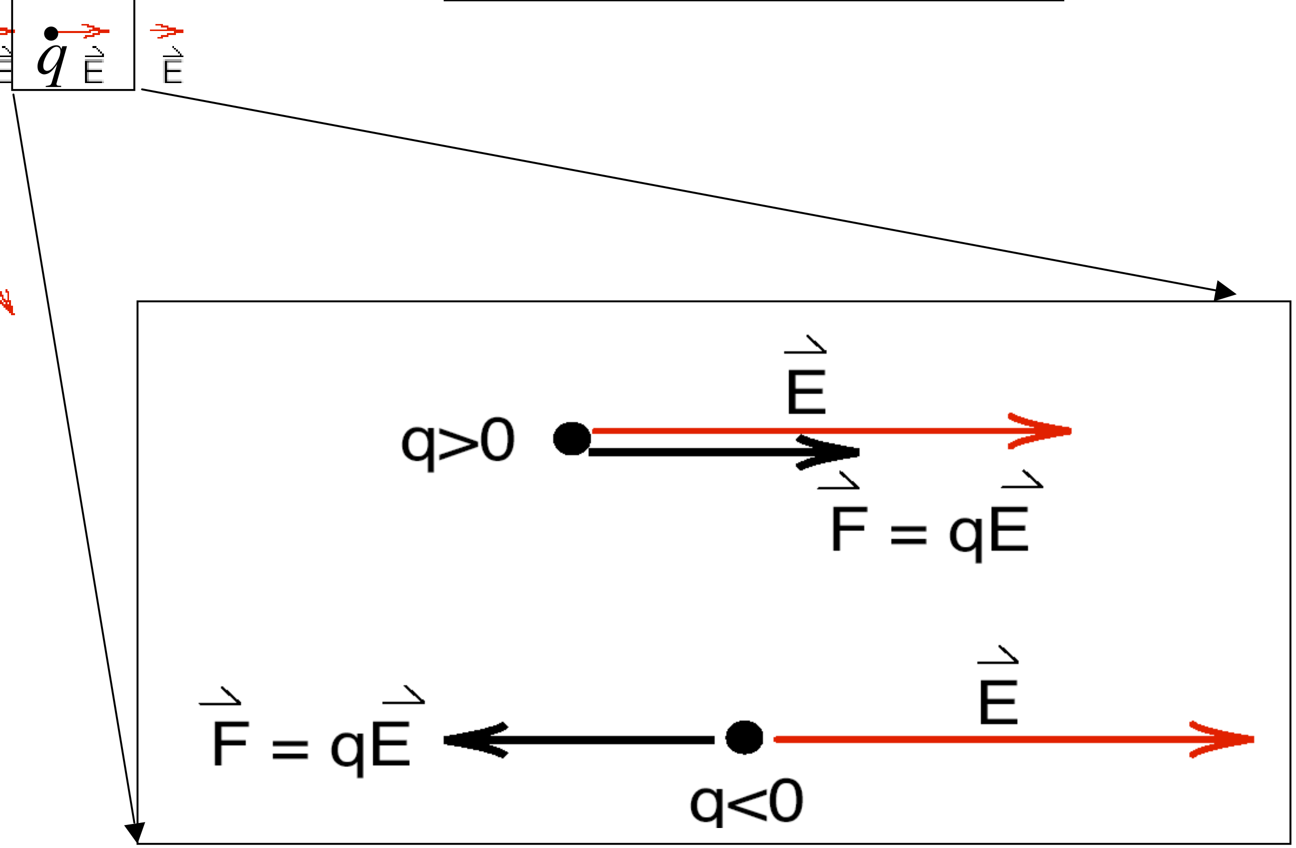


Das elektrische Feld zeigt bei einer positiven Ladung weg von der Ladung und zu einer negativen Ladung hin

Eine zweite Ladung *q* spürt den lokalen Wert des Feldes



$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Für eine positive Ladung q zeigt die Kraft in die Richtung des Feldes. Für eine negative Ladung zeigt sie in entgegengesetzter Richtung.

Vergleich Gravitations- und elektrisches Feld

Newtonsche Gravitationskraft

- Gravitationsfeld

M erzeugt das Feld

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

m (Testmasse) spürt das Feld

$$\vec{F}_G = m\vec{g}(\vec{r})$$

Coulombsche Kraft

- Elektrisches Feld

Q erzeugt das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

q (Testladung) spürt das Feld

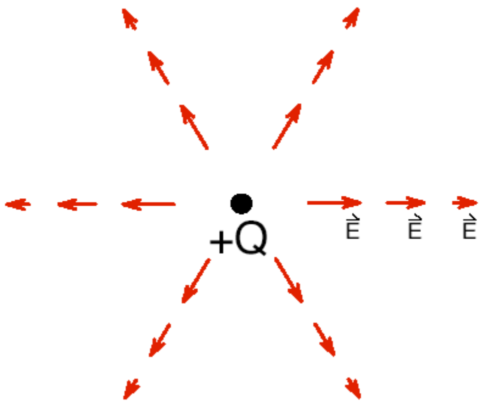
$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Dasselbe Konzept

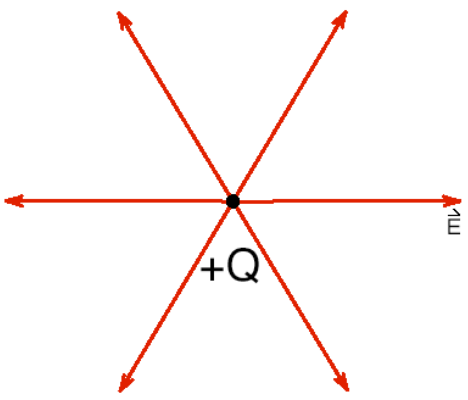
Elektrische Feldlinien

- Feldlinien liefern eine graphische Darstellung der Felder.
- Die Feldlinien folgen der Richtung des Feldes.
- Sie beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen oder im Unendlichen.
- An einem bestimmten Punkt im Raum ist die "Liniendichte" zur Stärke des Feldes an diesem Punkt proportional.
- Um eine einzelne Punktladung sind die Feldlinien kugelsymmetrisch verteilt.
- Die Anzahl der Feldlinien um eine Punktladung ist zur Grösse der Ladung proportional.

Elektrisches Feld



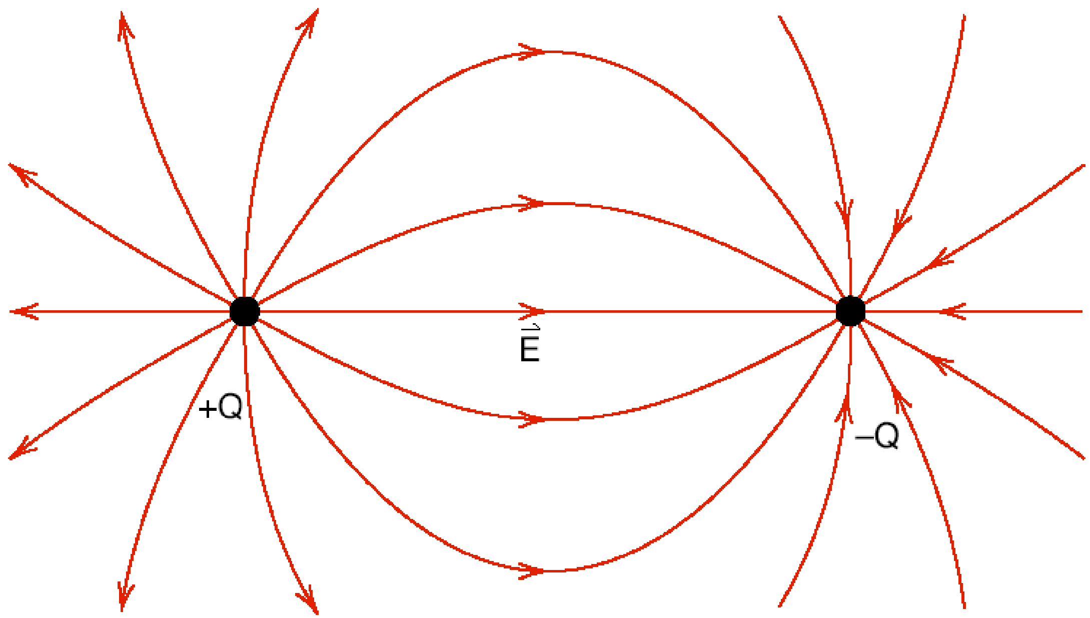
Feldlinien



Feldlinien eines elektrischen Dipols

- **Demonstrationsexperiment**: *Elektrische Feldlinien*

- Elektrischer Dipol = ein System aus zwei gleich grossen Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen und in relativ kleinem Abstand voneinander



Elektrisches Potential

- Kap. 6: Definition der potentiellen Energie der elektrischen Kraft.
- **Verwandte Definition**: Das elektrische Potential

$$\boxed{V(\vec{r}) \equiv \frac{E^{e}_{pot}(\vec{r})}{q} \quad \Leftrightarrow \quad E^{e}_{pot}(\vec{r}) \equiv qV(\vec{r})}$$

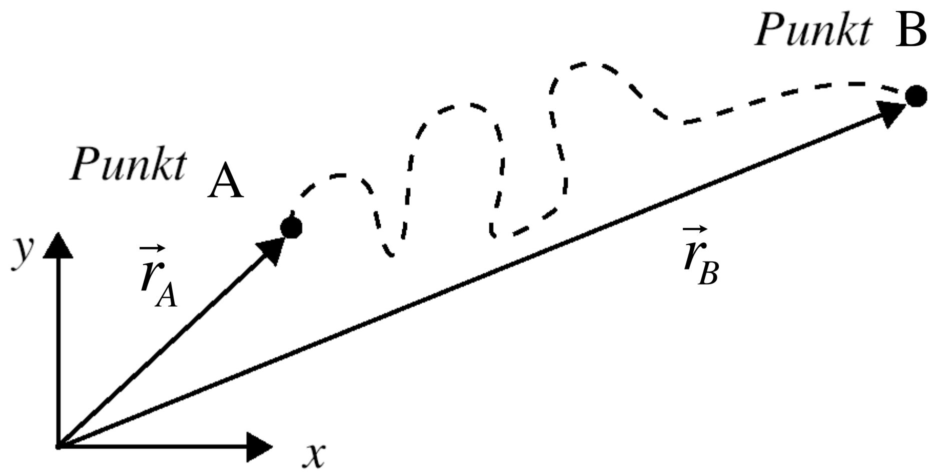
- Wenn sich eine Ladung *q* längs eines Weges von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B bewegt, ist die Arbeit, die vom elektrischen Feld geleistet wird, gleich

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(E^{e}{}_{pot}(\vec{r}_B) - E^{e}{}_{pot}(\vec{r}_A)\right) = -q\left(V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)\right)$$

Elektrisches Potential (II)

- Damit:
  - ☞ Der elektrische **Potentialunterschied** zwischen zwei Punkten ist die Arbeit, die ein elektrisches Feld leistet, wenn es eine Einheitsladung von einem Punkt zu einem anderen bewegt

$$\boxed{\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{E^e{}_{pot}(\vec{r}_B) - E^e{}_{pot}(\vec{r}_A)}{q} = -\left(V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)\right)}$$



Das Linienintegral

Elektrisches Potential (III)

- **Einheit**: das Volt (V) = ein Joule pro Coulomb

$$[V] = \frac{[Energie]}{[Ladung]} = \frac{J}{C} = V$$

D.h., es besteht zwischen zwei Punkten ein Potentialunterschied von einem Volt, wenn das elektrische Feld bei der Bewegung einer Ladung von einem Coulomb von einem Punkt zum anderen eine Arbeit von einem Joule leistet.

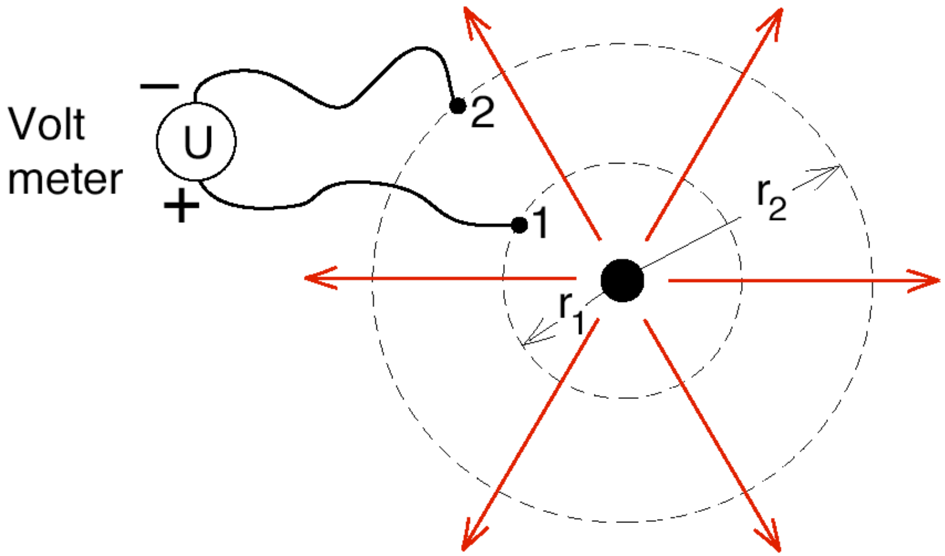
- **Einheit des elektrischen Felds**: $\left[\vec{E}\right] = \frac{[V]}{[Länge]} = \frac{V}{m}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{\nabla E^{e}_{pot}(\vec{r})}{q} = -\frac{q\nabla V(\vec{r})}{q} = -\nabla V(\vec{r})$$

Elektrische Spannung

- Die elektrische Spannung ist gleich dem Potentialunterschied zwischen zwei Punkten:

$$\boxed{U_{AB} \equiv V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)}$$



- **Einheit**: das Volt (d.h. dieselbe wie die des Potentials)
- Wird mit einem Voltmeter gemessen

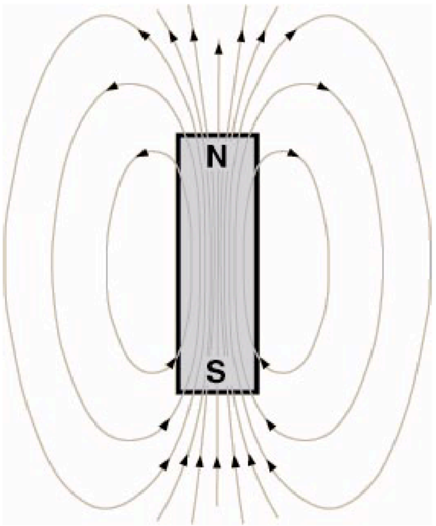
$$U_{AB} \equiv V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B) = -\left(V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)\right)$$

$$= -\frac{E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A)}{q} = \frac{W_{AB}}{q}$$

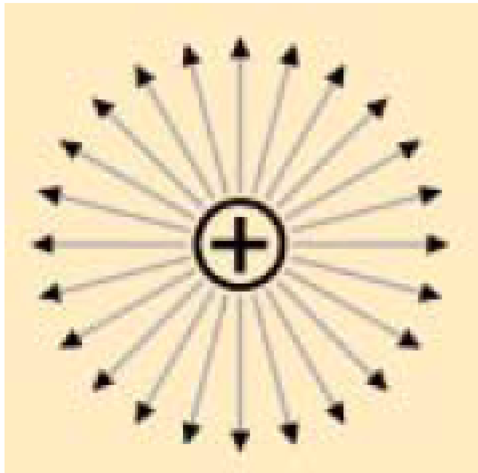
10.3 Das magnetische Feld

- **Magnetismus** (Jahrhunderte vor Christus): Kleine Eisenstückchen, die sich natürlich anziehen (natürliche Magneten), wurden in der Provinz Magnesia in Kleinasien entdeckt.
- **Magnetische Pole** = Die Bereiche eines Körpers, in denen der Magnetismus konzentriert ist
- Es gibt zwei Arten von magnetischen Polen (mit Buchstaben *N* und *S* definiert)
  - ☞ Die Wechselwirkung zwischen gleichen Magnetpolen ist abstossend, die zwischen ungleichen Polen ist anziehend.

Magnetfeld eines Magnetstabs



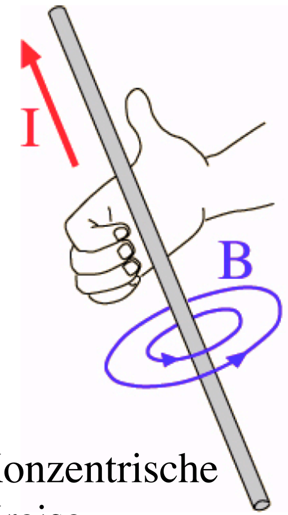
Elektrisches Feld einer Punktladung



Magnetische Feldlinien

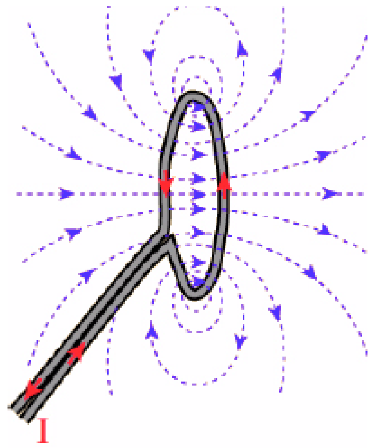
- Das magnetische Feld kann durch magnetische Feldlinien (oder Induktionslinien) illustriert werden.
- **Elektrische Ströme**: Um ein Magnetfeld zu erzeugen, werden bewegte elektrische Ladungen gebraucht.
- **Demonstrationsexperiment**: *Magnetfeldlinien*

Langer Draht

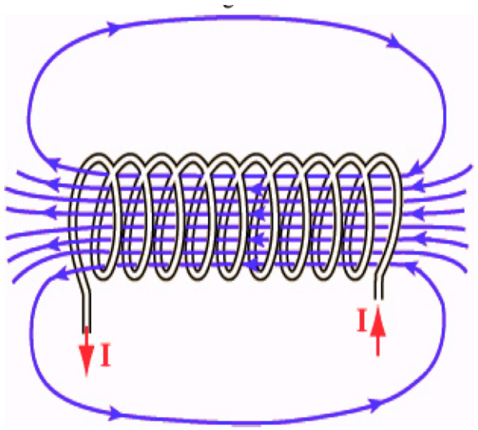


Konzentrische Kreise

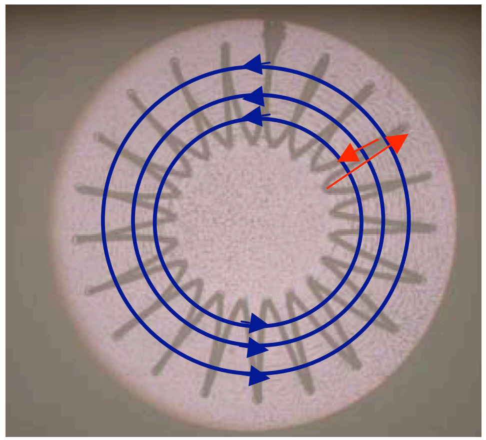
Ring



Solenoid



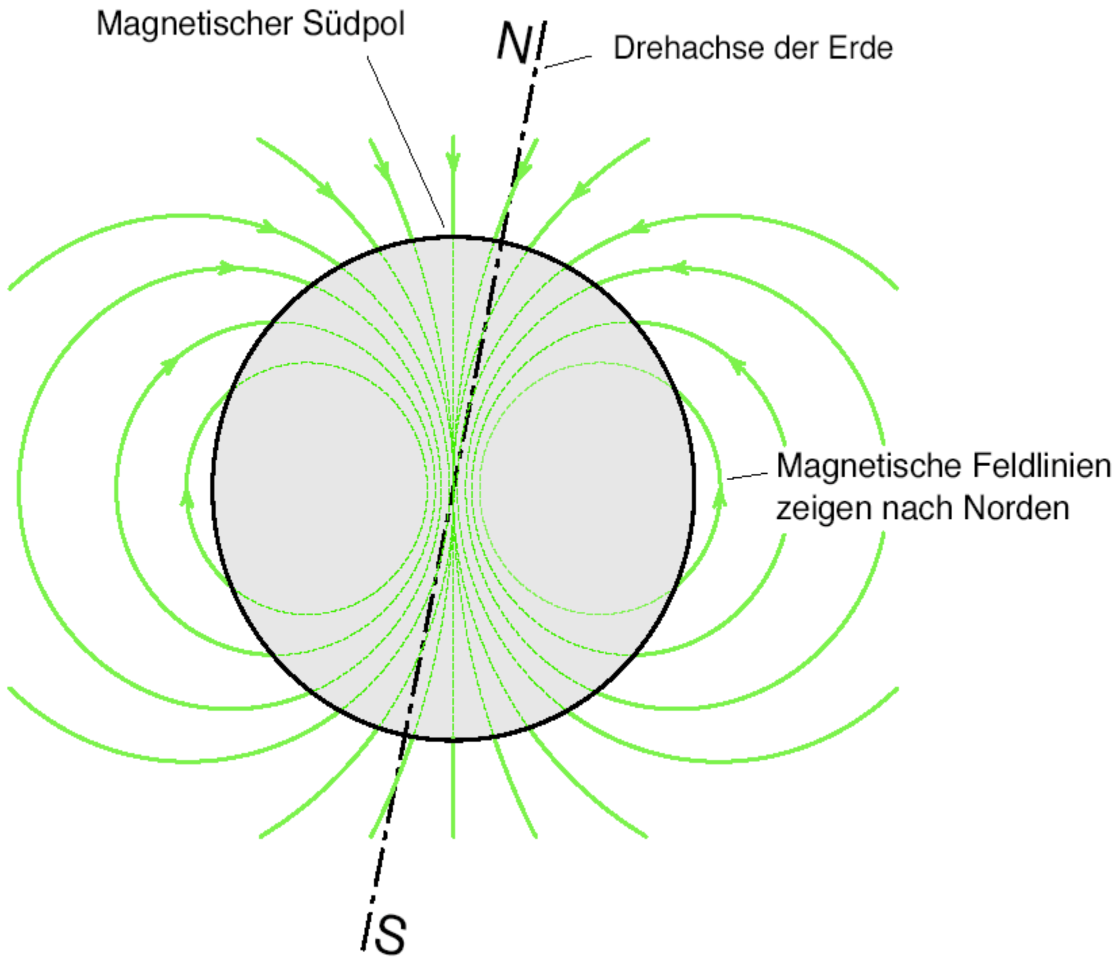
Torus



Das meiste des Felds ist auf das Innere des Torus begrenzt

Feldlinien des magnetischen Feldes der Erde

- Die magnetischen Feldlinien zeigen vom magnetischen Nordpol zum magnetischen Südpol (Konvention).
- Da der “Nordpol einer Kompassnadel” nach Norden zeigt, befindet sich der **magnetische Südpol** der Erde **im geographischen Norden** der Erde.



Unterschiede zwischen elektrischen und magnetischen Feldlinien

- Man beobachtet “elektrische Ladungen” in der Natur
  - ☞ Die elektrischen Feldlinien enden immer auf negativen Ladungen und beginnen auf positiven Ladungen.
- Man hat nie eine “magnetische Ladung” (sogenannte Monopole) in der Natur beobachtet.
  - ☞ Die elektrische und magnetische Wechselwirkung sind zwei verschiene Aspekte einer Eigenschaft der Materie, d.h. ihrer elektrischen Ladung.
  - ☞ Es gibt keine Punkte im Raum, an denen die magnetischen Feldlinien anfangen oder enden. *Deshalb bilden die magnetischen Feldlinien geschlossene Schleifen.*
- Die Kraft, die ein elektrisches Feld auf eine Ladung ausübt, wirkt längs der Feldlinien. Im Gegensatz dazu wirkt die Kraft des magnetischen Feldes nur auf eine bewegte Ladung und zwar senkrecht zum B-Feld und zur Bewegungsrichtung.

Elektrische Ladung im E- und B-Feld

- **Die Lorentz-Kraft**: Die allgemeine Form der elektromagnetischen Kraft enthält zwei unterschiedliche Terme. Die elektromagnetische Kraft wird deshalb als Funktion zweier Vektorfelder, des elektrischen und des magnetischen Feldes, ausgedrückt

$$\boxed{\vec{F} \equiv \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

Elektrisches Feld

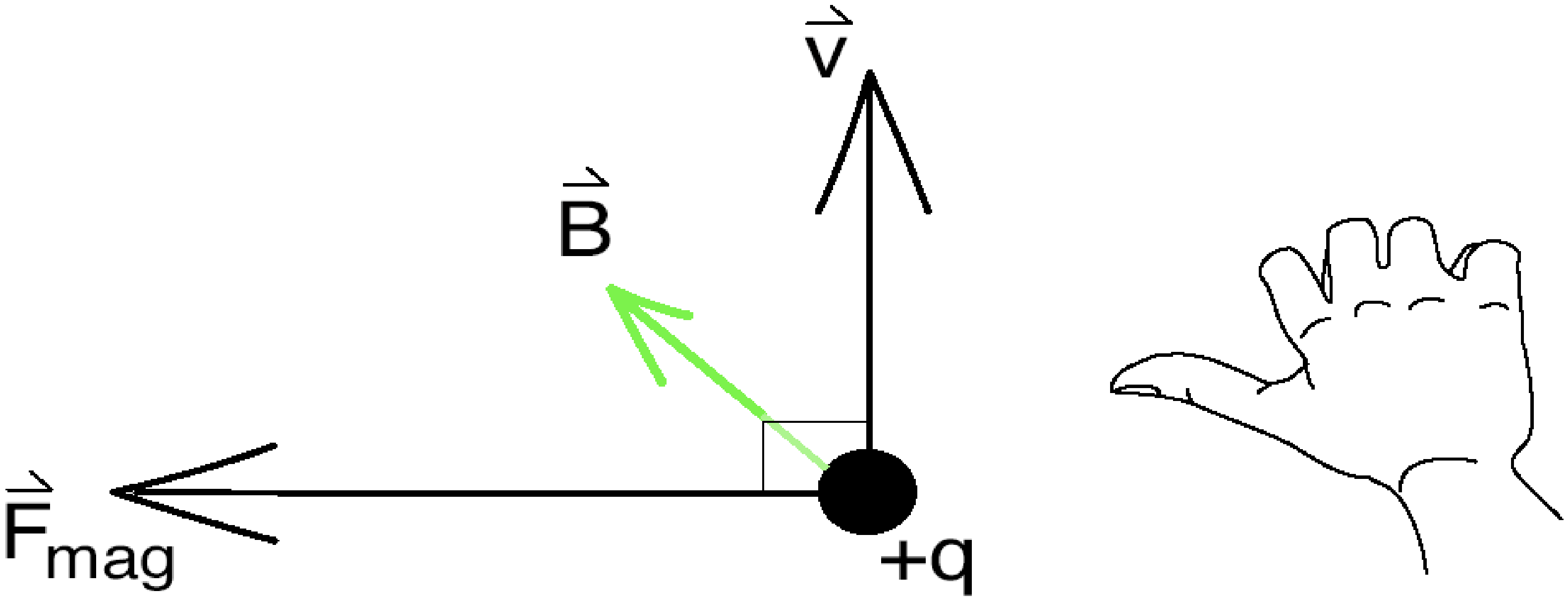
„Coulombsche" Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen

Magnetisches Feld

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen bewegten elektrischen Ladungen

Magnetische Kraft

- Rechte-Hand-Regel $$\vec{F}_B = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$



Die magnetische Kraft wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des Feldes.

Einheit der Felder

- im SI-System

$$\left[\vec{E}\right] = \left[\frac{Kraft}{Ladung}\right] = \frac{N}{C} \quad oder \quad \left[\vec{E}\right] = \frac{[V]}{[Länge]} = \frac{V}{m}$$

Das Tesla

$$\left[\vec{B}\right] = \left[\frac{Kraft}{Ladung.Geschwindigkeit}\right] = \frac{N}{C(m/s)} \equiv T$$

Die Feldstärke des Erdmagnetfeldes ≈ 10^{-4} T.
Die Feldstärke eines Elektromagnets ist ≈ 1 T.
Supraleitende Elektromagneten können Feldstärken von ≈ 10 T erreichen.

Das Gauss: Erdmagnetfeld ≈ 1 Gauss (G)

$$1\ T = 10^4\ G$$

Bewegung im E-Feld

- Beschleunigung durch ein elektrisches Potential

$$E = m_0 c^2 + E_{kin} + E_{pot} = \gamma m_0 c^2 + qV(\vec{r})$$

Das Elektronvolt = gesamte Energiezunahme, wenn ein Teilchen mit der Elementarladung *e* durch einen Potentialunterschied von *1 Volt* beschleunigt wird

$$1 \ eV \equiv (e) \ Joule \ = \ 1{,}602 \times 10^{-19} \ J$$

- Bewegung einer Punktladung in einem elektrischen Feld

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

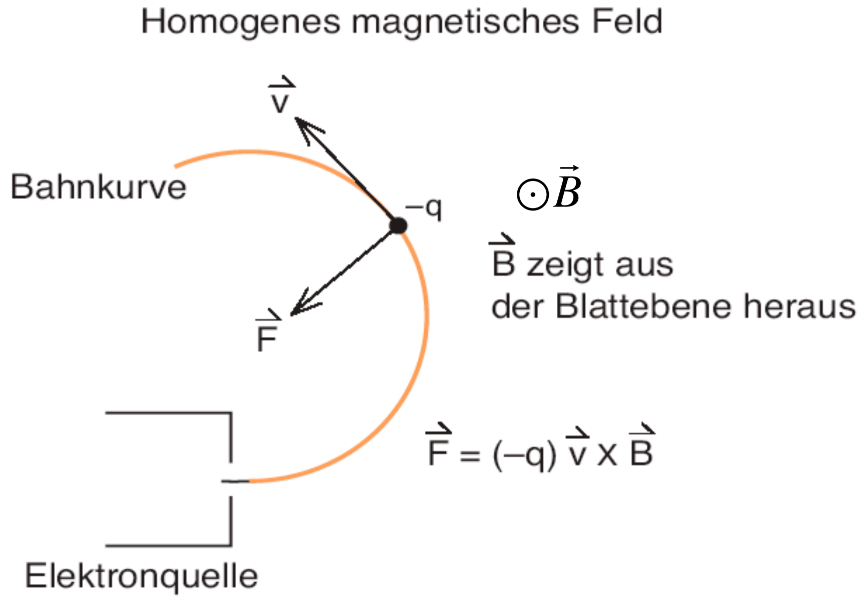
$$\vec{a} = \frac{q}{\gamma m_0}\vec{E}$$

Bewegung im B-Feld

- Die Wirkung des B-Feldes ist immer senkrecht zur Bewegungsrichtung.
- Die mechanische Arbeit verschwindet:

$$\vec{F} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\Delta t = 0$$

- Im Fall eines homogenen Felds: die Bahnkurve ist ein Kreis mit Radius *r*

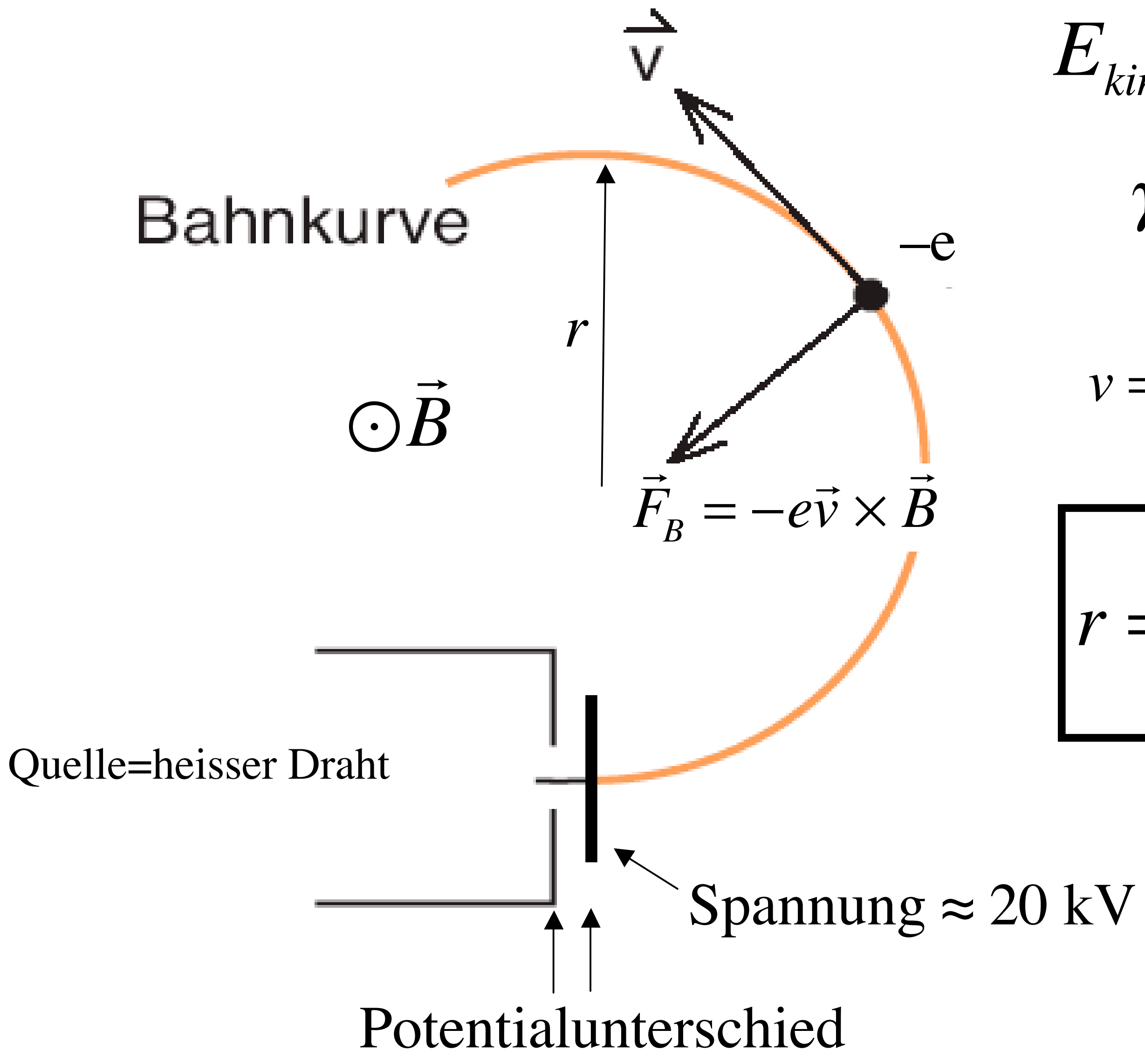


$$\left|\vec{F}_B\right| = qvB\sin\alpha = qvB$$

$$qvB = \frac{\gamma m_0 v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{\gamma m_0 v}{qB}$$

<u>Demonstrationsexperiment</u>: *Krümmung der Elektronenbahn im Magnetfeld*

Homogenes magnetisches Feld



$$E_{kin} \approx qV \approx 20\ KeV$$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \approx 1{,}04$$

$$v = \beta c = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\, c \approx 0{,}27c$$

$$\boxed{r = \frac{\gamma m_0 v}{qB} = \frac{\gamma m_0 c^2 \beta}{eBc}}$$

$$r(m) \approx \frac{4}{B(Gauss)}$$

B≈27 Gauss

r≈0.2 m

10.5 Elektrischer Strom

- Wenn eine bestimmte Menge elektrischer Ladung in einem gegebenen Zeitintervall durch eine Querschnittsfläche tritt, fliesst ein **elektrischer Strom** durch die Fläche.
- **Definition**: Stromstärke

$$\boxed{I(t) \equiv \frac{dQ}{dt}}$$

Einheit: SI-System: Das Ampère

$$1 \ A = 1 \ C/s$$

☞ Historische Konvention: die positive Stromrichtung folgt der Flussrichtung der positiven Ladungen

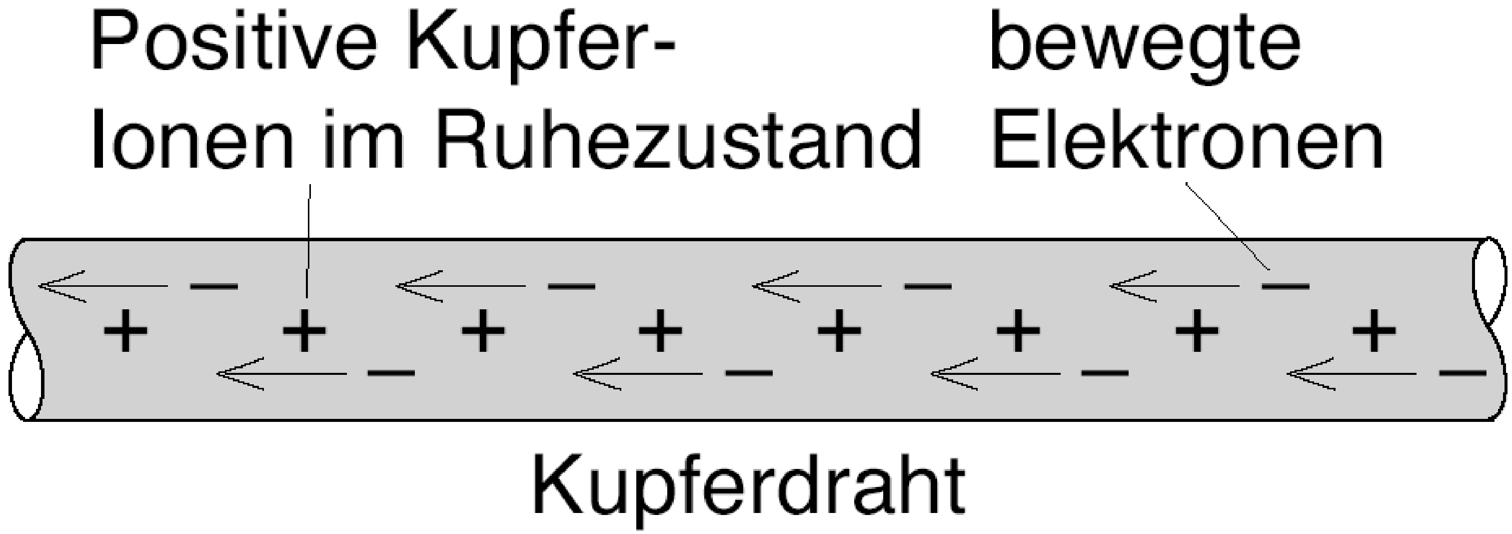
- **Definition:** Die Stromdichte j = Stromstärke pro Flächeneinheit

$$\boxed{Stromdichte: \quad j = \frac{I}{A}}$$

Einheit: $\frac{A}{m^2} = \frac{C}{s \cdot m^2}$

Mikroskopische Beschreibung

- Drude (1900): Die erste mikroskopische Beschreibung
  - ☞ Nach seinem klassischen Modell der elektrischen Leitung ist ein Leiter ein dreidimensionales Ionengitter, in dem sich Elektronen bewegen können
  - ☞ Wenn es kein äusseres elektrisches Feld gibt: die Elektronen verhalten sich wie die Moleküle eines Gases in einem Behälter. Die freien Elektronen sind mit den Gitterionen im thermodynamischen Gleichgewicht und tauschen durch Stösse Energie und Impuls mit ihnen aus.

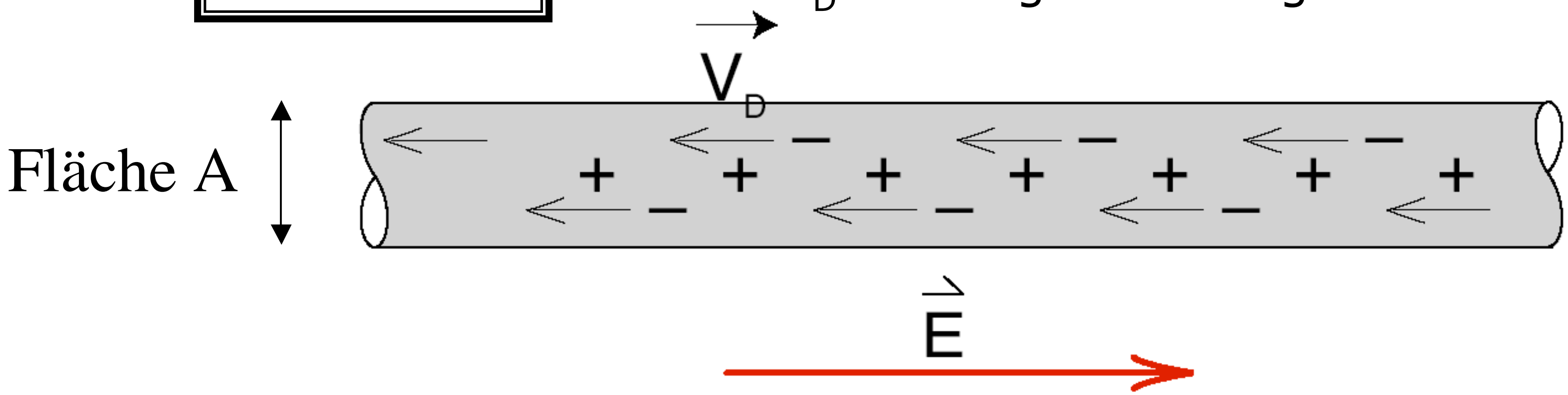


Driftgeschwindigkeit v_D

- Wenn ein äusseres elektrisches Feld erzeugt wird, werden die freien Elektronen beschleunigt. Das äussere elektrische Feld ist deshalb für die **Driftbewegung** verantwortlich

$$\boxed{\vec{v}_D = -\mu \vec{E}}$$

μ= Beweglichkeit der Elektronen
v_D = Driftgeschwindigkeit



- Dichte der beweglichen Ladungsträger = n
- Damit:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(-e)n\left(Av_D \Delta t\right)}{\Delta t} = -enAv_D$$

$$\Rightarrow \quad \vec{I} = -enA\vec{v}_D$$

Strom im Kupferdraht

- Wir betrachten einen Kupferdraht
  - ☞ Querschnittsfläche A = 1mm². Die Stromstärke I = 1 A.
  - ☞ Annahme: es gibt im Kupfer ein *freies* Elektron pro Atom. Die Dichte und molare Masse von Kupfer sind 8,93 g/cm³ und 63,5 g/mol.
  - ☞ Dichte der freien Elektronen

$$n = \frac{\left(8{,}93 g / cm^3\right)\left(6{,}02 \times 10^{23} / mol\right)}{63{,}5 g / mol} = 8{,}5 \times 10^{22}\, Elektronen / cm^3$$

  - ☞ Die Driftgeschwindigkeit

$$v_D = \frac{I}{qnA} = \frac{1A}{(1{,}602 \times 10^{-19} C)\left(8{,}5 \times 10^{22}\, Elektronen / cm^3\right)\left(1mm^2\right)}$$

$$\approx 7 \times 10^{-5} m / s = 0{,}07 mm / s$$

- Die freien Elektronen driften langsam! Sie kollidieren sehr oft mit den Ionen und dadurch wird die Richtung ihrer Bewegungen geändert.

Kraft auf einen elektrischen Strom

- Ein elektrischer Strom besteht aus einer Ansammlung sich bewegender Ladungen. Wir erwarten daher, dass ein Magnetfeld auch auf einen Leiter, durch den ein Strom fliesst, eine Ablenkungskraft ausübt.
- Auf ein einzelnes Elektron wirkt eine Kraft

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} = (-e)\vec{v}_D \times \vec{B}$$

- Gesamtkraft auf einen Leiter der Querschnittsfläche A, Länge L

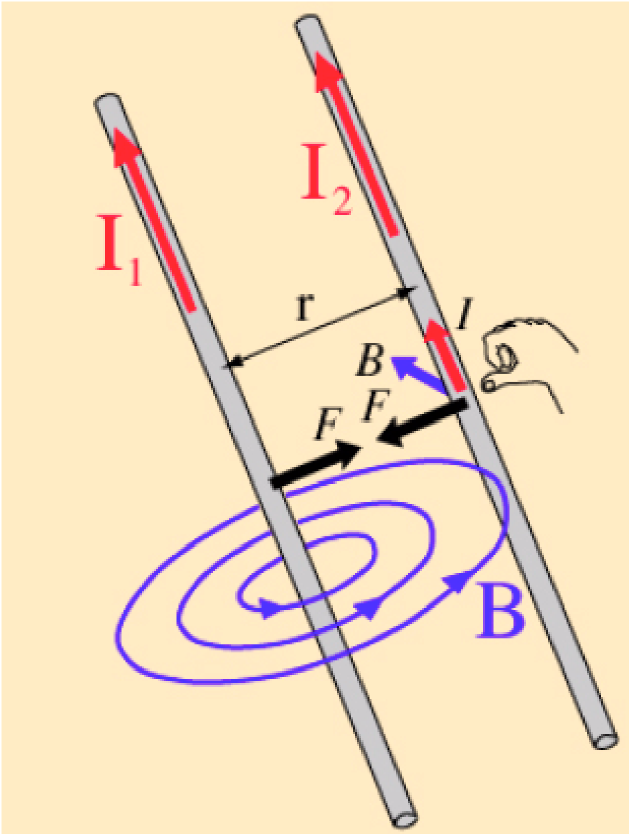
$$\vec{F} = ALn(-e)\vec{v}_D \times \vec{B} = L\left(-enA\vec{v}_D\right) \times \vec{B} = L\vec{I} \times \vec{B}$$

- Für ein differentielles Element:

$$d\vec{F} = Ld\vec{I} \times \vec{B} = Id\vec{L} \times \vec{B}$$

Kraft zwischen zwei parallelen Leitern (I)

- Zwei parallele Leiter A und B im Abstand *r* voneinander mit fliessenden Ströme I_1 und I_2



Das von I_1 erzeugte B-Feld zeigt am Ort von I_2 nach unten.

$$\vec{F} = L\vec{I} \times \vec{B}$$

Die Kraft, die auf den Leiter I_2 wirkt, liegt in der Ebene der Leiter und wirkt nach links.

In ähnlicher Weise wirkt eine Kraft auf den Leiter A. Sie liegt in der Ebene der Leiter und wirkt nach rechts.

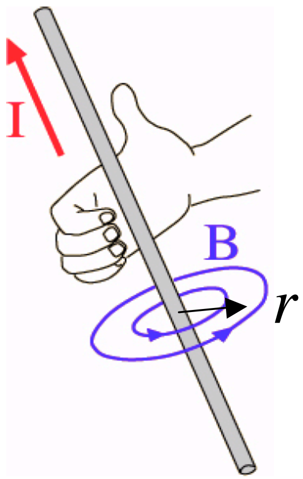
Kraft zwischen zwei parallelen Leitern (II)

- **<u>Demonstrationsexperiment</u>**: *Stromwaage*
  - ☞ Die Kraft ist zum Produkt der Stromstärken proportional.
  - ☞ Sie ist zum Inversen des Abstands proportional.
  - ☞ Sie ist zur Länge der parallelen Leiter proportional.

$$F \propto \frac{LI_1 I_2}{r}$$

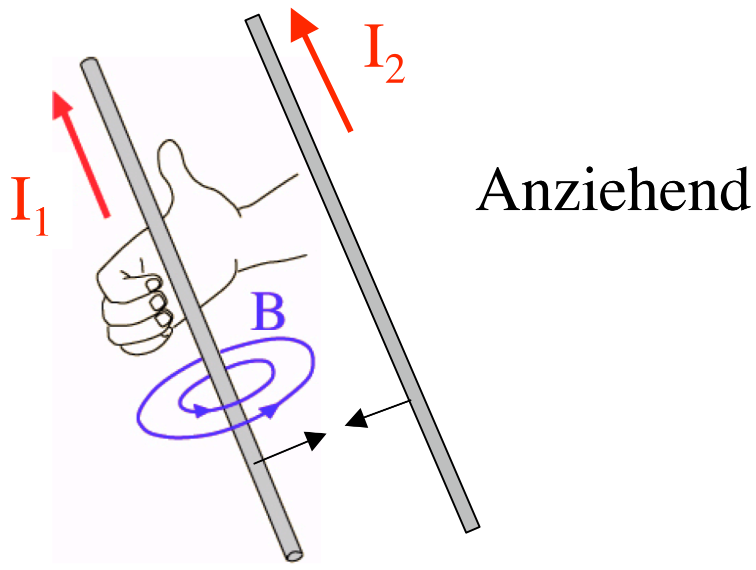
$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} F \propto \dfrac{LI_1 I_2}{r} \\ F = BLI_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad B(r) = \frac{F}{LI_2} \propto \frac{1}{LI_2}\frac{LI_1 I_2}{r} \propto \frac{I_1}{r}$$

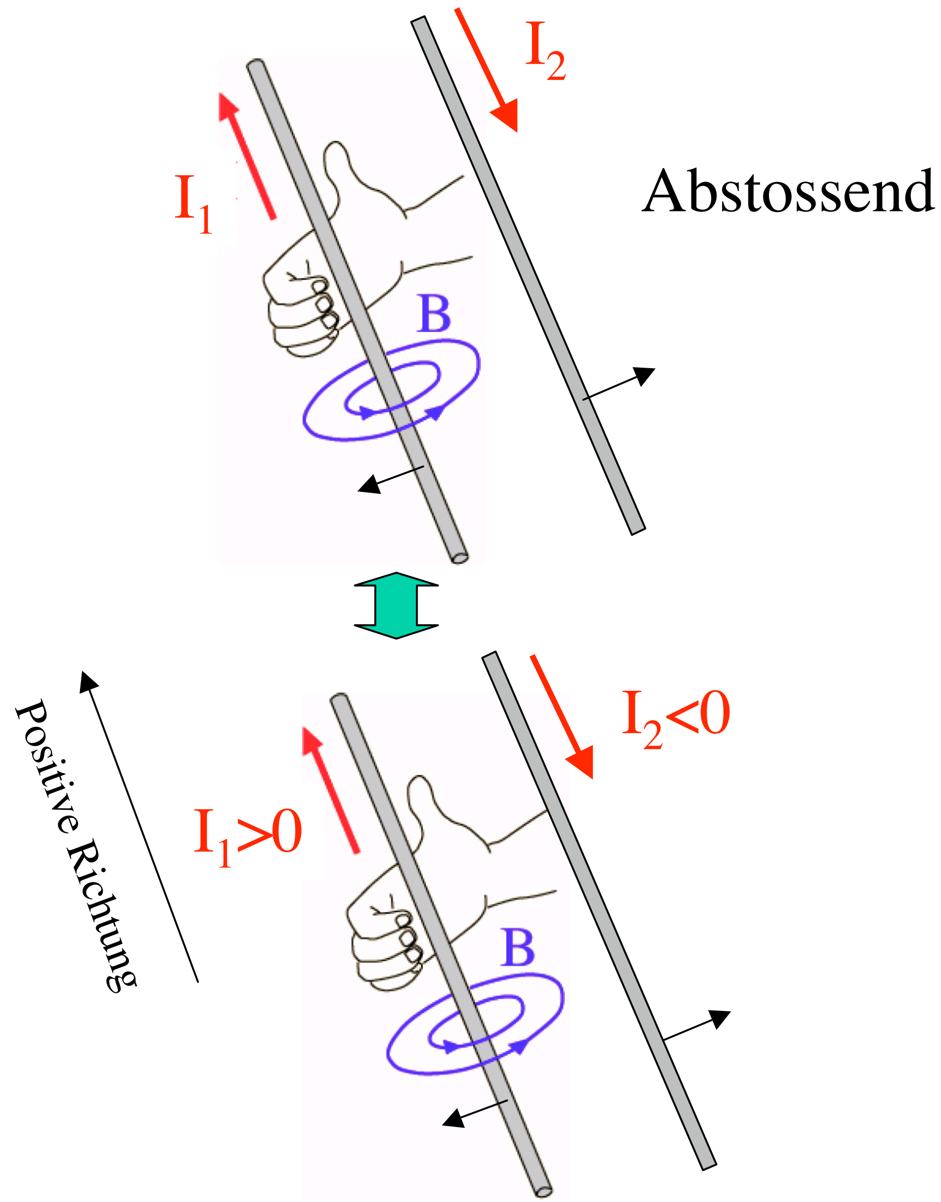
$\Rightarrow$



$$\boxed{B(r) \propto \frac{I}{r}}$$

Kraft zwischen zwei parallelen Leitern (III)





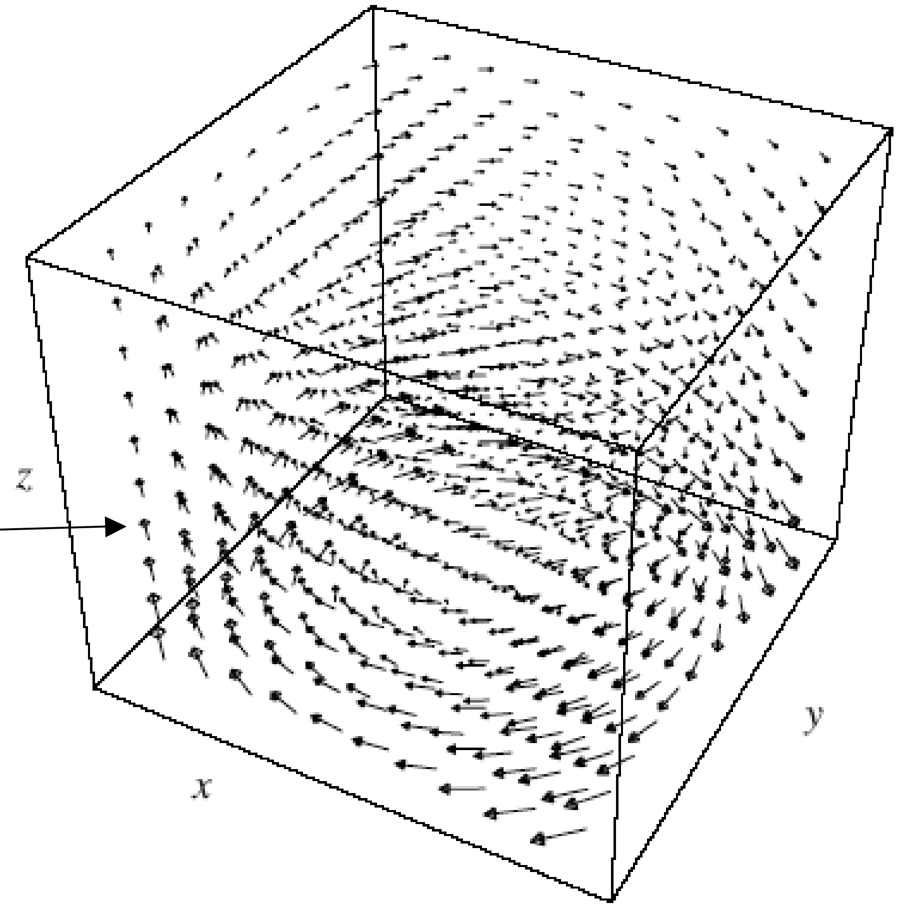
$$F \propto \frac{L I_1 I_2}{r}$$

Im Demonstrationsexperiment
wird die Abstossung gemessen

10.6 Mathematische Unterlagen

- **Definition**: Ein **Vektorfeld** definiert einen Vektor in jedem Punkt des Raumes.

Graphische Darstellung eines Vektorfelds



Die Pfeilen zeigen den Betrag und die Richtung der Vektoren in einigen Punkten des Raums

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, 0)$$

Der Nabla-Operator

- **Definition**: $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

- Der Nabla-Operator "wirkt auf etwas":

$$\textit{Gradient}\ \text{(Vektorgrösse):} \qquad \vec{G} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\textit{Divergenz}\ \text{(Skalargrösse):} \qquad d = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

$$\textit{Rotation}\ \ (\textit{Vektorgrösse}): \qquad \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x -$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Der Fluss des Feldes

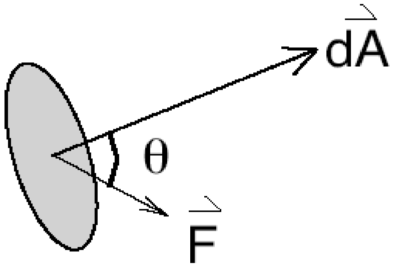
- **Definition**: Der Fluss ist eine charakteristische Skalargrösse, die man für alle Vektorfelder einführen kann. Der Fluss $d\phi$ eines Vektorfeldes F durch eine infinitesimale Fläche dA

$$d\phi \equiv \vec{F} \cdot d\vec{A} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{A}\right| \cos\theta$$

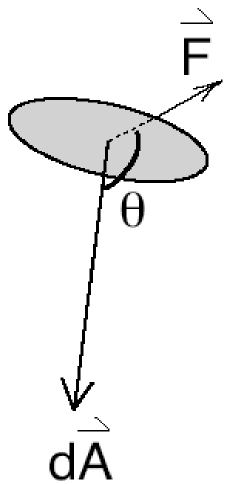
$\overrightarrow{dA}$ = Vektor, der das infinitesimale Flächenelement dA definiert.

Er steht senkrecht auf der Fläche dA.

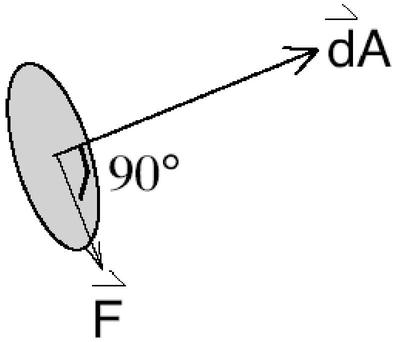
$\phi > 0$



$\phi < 0$



$\phi = 0$



Fluss durch endliche Fläche

- Für eine endliche Fläche von beliebiger Form wird der Fluss durch Integration der infinitesimalen ebenen Flächenelemente gewonnen. Der gesamte Fluss durch die Oberfläche A ist

$$\phi \equiv \iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

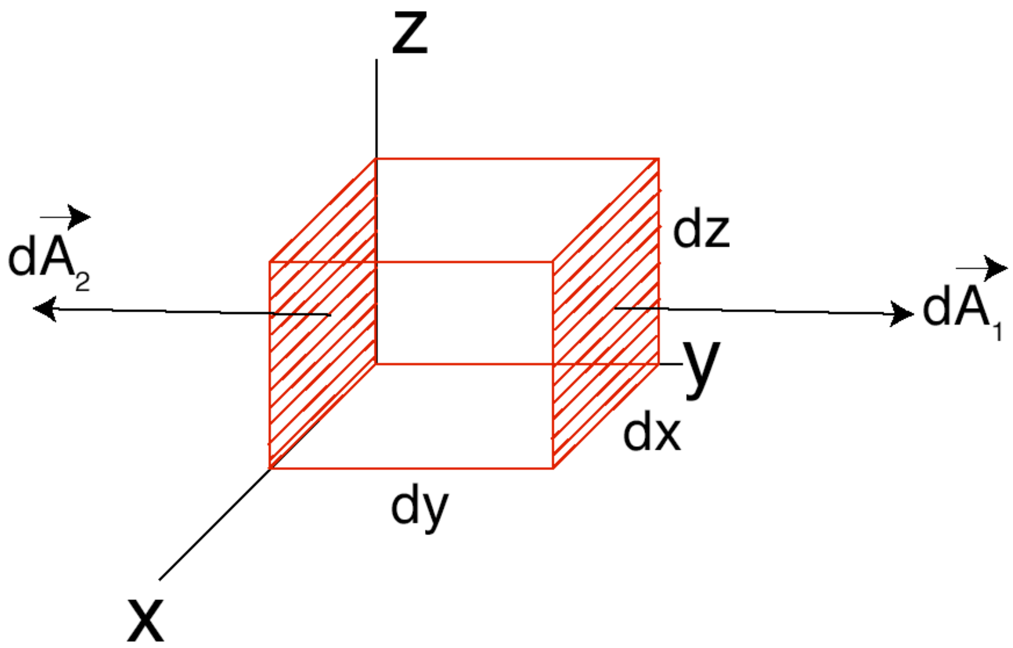
- Fluss durch eine **<u>geschlossene</u>** Oberfläche: Definitionsgemäss zeigen in diesem Fall die infinitesimalen Flächen *dA* an jedem Punkt der Oberfläche nach aussen. Das Integral wird so bezeichnet

$$\phi \equiv \oiint_{geschlossene \;\; A} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Das Theorem von Gauss (I)

- Der Fluss durch eine infinitesimale Fläche entspricht der "**Divergenz**" des Feldes

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$$



$$dV = dxdydz$$

Der Fluss durch die Fläche dA_1 $\quad d\phi_1 = F_y(x, y + dy, z)dxdz$

Der Fluss durch die Fläche dA_2 $\quad d\phi_2 = -F_y(x, y, z)\,dxdz$

Summe der Flüsse:

$$d\phi_1 + d\phi_2 = F_y(x, y + dy, z)\,dxdz - F_y(x, y, z)dxdz$$

$$= \left(F_y(x, y + dy, z) - F_y(x, y, z)\right)dxdz$$

$$= \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} dydxdz$$

In ähnlicher Weise für die zwei anderen Komponenten...
Der Gesamte Fluss ist damit

$$d\phi_{tot}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx\right)dydz + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} dy\right)dxdz + \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} dz\right)dxdy$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z}\right)}_{Divergenz\ \ von\ \ \vec{F}} dxdydz$$

Das Theorem von Gauss (II)

- Die Divergenz des Feldes in jedem Punkt (x,y,z) ist gleich dem Fluss, der das Volumenelement im Punkt (x,y,z) des Volumens *dxdydz* verlässt, pro Volumeneinheit:

$$\boxed{d\phi_{tot}(x,y,z) = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,y,z)\right)dxdydz}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}\right)}_{Divergenz\ \ von\ \ \vec{F}}$$

Das Theorem von Gauss (III)

- Zwei Volumenelemente dV_1 im Punkt (x_1,y_1,z_1) und dV_2 im Punkt (x_2,y_2,z_2) so neben einander legen, dass sie sich berühren.
  - ☞ *Der gesamte Fluss, der beide Volumenelemente verlässt, ist gleich?*
- Wir betrachten die Oberfläche, die beide Volumenelemente verbindet. Der Fluss, der durch diese Oberfläche das Volumenelement dV_1 verlässt, wird in das Volumenelement dV_2 eindringen. An dieser Grenzfläche werden die Flüsse, die dV_1 verlassen und in dV_2 eindringen, einander kompensieren.
  - ☞ **Der gesamte Fluss, der beide Volumenelemente verlässt, ist die Summe der Flüsse, die die einzelnen Volumenelemente verlassen**

$$\begin{aligned} d\phi_{tot} &= d\phi(x_1,y_1,z_1) + d\phi(x_2,y_2,z_2) \\ &= \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x_1,y_1,z_1)\right)dxdydz + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x_2,y_2,z_2)\right)dxdydz \end{aligned}$$

Das Theorem von Gauss (IV)

- Um dieses Ergebnis auf ein endliches, nicht-infinitesimales Volumen zu erweitern, addieren wir die Flüsse, die in jedem Punkt des ganzen Volumens die infinitesimalen Volumen dV verlassen

$$\phi_{tot} = \iiint_V d\phi = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z)\right) dxdydz = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV$$

Das Theorem von Gauss (V)

- Wir haben das Theorem von Gauss (oder Theorem der Divergenz) für den gesamten Fluss ϕ_{tot}, der ein Volumen V verlässt, hergeleitet:

$$\boxed{\phi_{tot} \equiv \underbrace{\oiint_{A=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flächenintegral}} = \underbrace{\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV}_{\text{Volumenintegral}}}$$

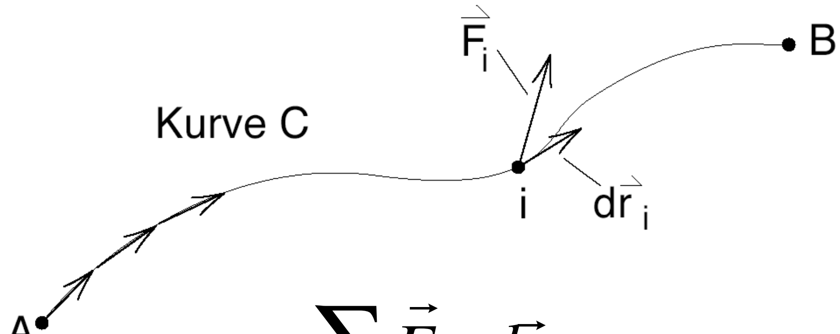
  A = Oberfläche, die das Volumen V umschliesst.

- Dieses Theorem stellt ein Flächenintegral mit einem Volumenintegral in Beziehung und gilt für beliebige Vektorfelder (ist eine mathematische Beziehung)

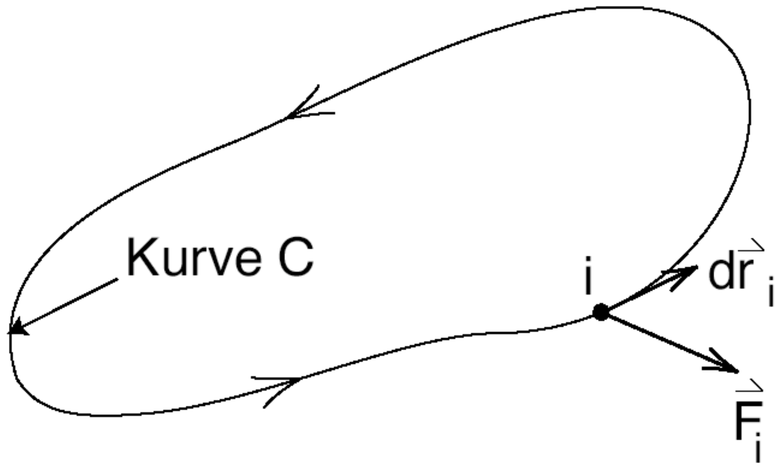
Das Theorem von Stokes (I)

- Linienintegral eines Feldes (elektrisch oder magnetisch) über eine bestimmte Kurve C von einem Punkt A zu einem Punkt B:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \qquad\qquad \oint_C \vec{F}.d\vec{r}$$

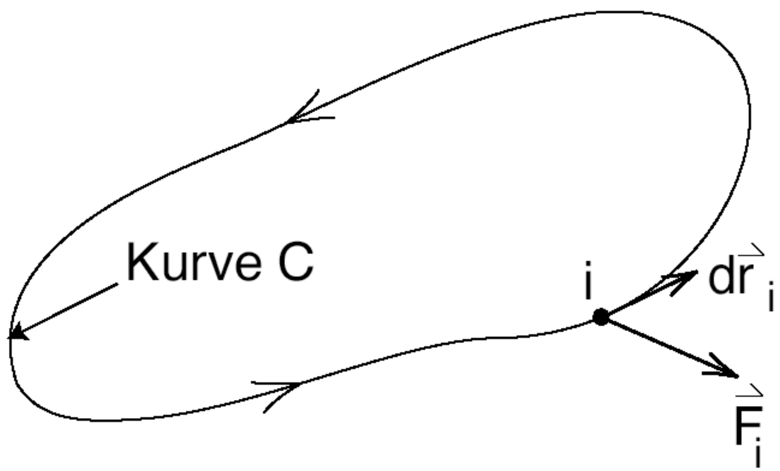


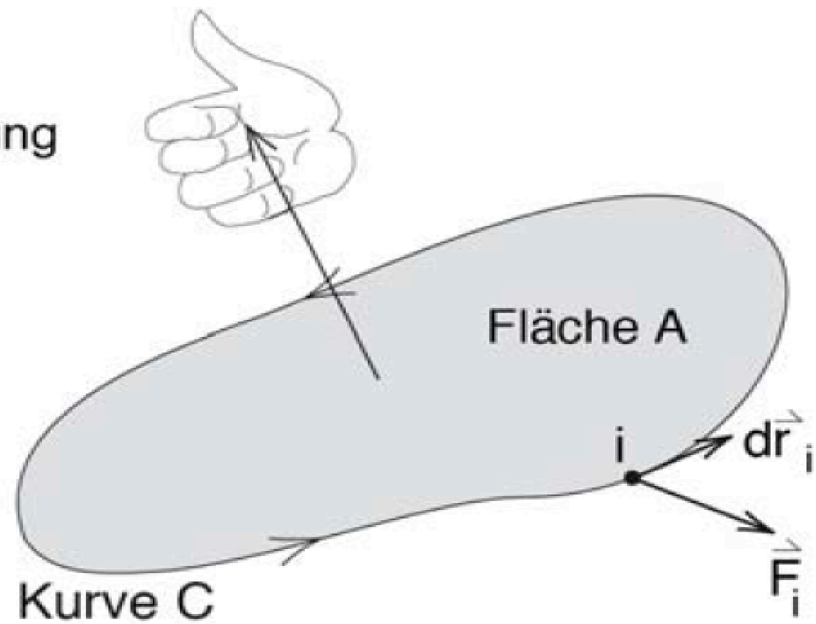
$$\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$



Kurve, die eine Fläche umschliesst

- Eine beliebige Fläche kann immer von einer <u>*geschlossenen*</u> Kurve eingeschlossen werden. Wir definieren die Richtung der Fläche mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel.





Theorem von Stokes

- Das Linienintegral eines Feldes über die geschlossene Kurve C, die die Fläche A einschliesst, ist gleich dem Flächenintegral der **Rotation** des Feldes über die Fläche A (mathematisches Resultat)

$$\oint_{C=\partial A} \vec{F}\,.d\vec{r} = \iint_A \underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)}_{\textit{Rotation des Feldes}} \cdot d\vec{A}$$

Rotation des Feldes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

10.7 Die Ladungs- und Stromdichte

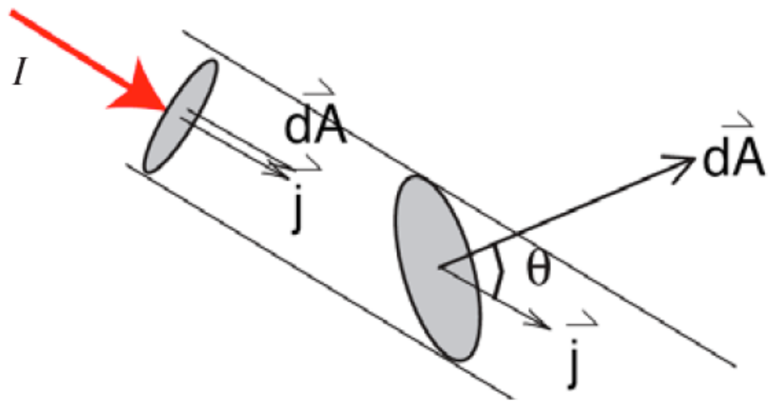
- Definition: **Raumladungsdichte**

$$\boxed{\rho(\vec{r}) \equiv \frac{dq}{dV}} \qquad Q \equiv \int dq = \iiint_V \rho(\vec{r})dV = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$(Integration \;\; über \;\; das \;\; gesamte \;\; Volumen \;\; V)$$

- Definition: **Vektorielle Stromdichte**

$$\boxed{\underbrace{I}_{\text{Strom durch die Oberfläche A}} \equiv \iint_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}}$$



Die Summe der Stromdichte über eine endliche Fläche A ist gleich der gesamten Stromstärke, die durch die Fläche A fliesst.

10.8 Die Maxwellschen Gleichungen

- Die Gleichungen setzen die Felder mit ihren Quellen in Beziehung

$$\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\rho \qquad \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Maxwellsche Gleichungen

Diese Gleichungen gelten in jedem Punkt des Raumes.

- Die Felder und ihre Quellen:
  $\vec{E}(x,y,z,t)=$ das elektrische Vektorfeld

  $\vec{B}(x,y,z,t)=$ das magnetische Vektorfeld

  $\rho(x,y,z,t)\ =$ die Ladungsdichte

  $\vec{j}(x,y,z,t)=$ die Stromdichte

- Die physikalischen Konstanten:

  Elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2}$

  Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ NA^{-2}$

- Beziehung mit der Relativitätstheorie liefert: $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$

Zeitunabhängige Gleichungen

- Die Zeitabhängigkeit verschwindet

$$\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\rho \qquad \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\cancel{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\cancel{\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Maxwellsche Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\rho \\ \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0\end{array}\right. & \textit{Gesetze von Gauss} & \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 & \textit{konservatives Feld} \quad \Rightarrow & \vec{E}=-\vec{\nabla}V \\
\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} & \textit{Gesetz von Ampère} &
\end{array}}$$

Zeitabhängige Gleichungen im Vakuum

- Keine Ladung und Ströme

$$\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\cancel{\rho} \qquad \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\cancel{\mu_0\vec{j}}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Maxwellsche Gleichungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left\{\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right.}$$

Ein zeitveränderliches magnetisches (bez. elektrisches) Feld erzeugt ein elektrisches (bez. magnetisches) Feld.

10.9 Das Gesetz von Gauss

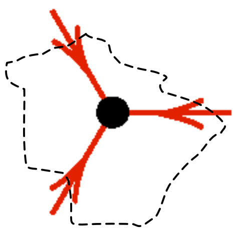
- **Definition**: Der elektrische Fluss durch eine Fläche A

$$\phi_E \equiv \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (Elektrischer\ \ Fluss)$$

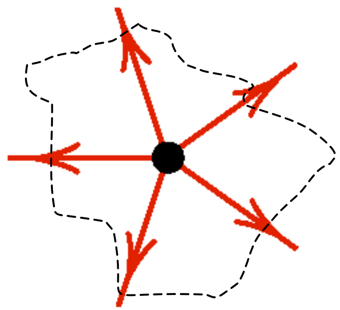
Mit Hilfe der Feldlinien:

1. *An Punkten der Oberfläche, an denen die elektrischen Feldlinien in die Oberfläche eindringen, zeigt das Feld E nach innen. Der Fluss ist dann negativ.*
2. *An Punkten der Oberfläche, an denen die elektrischen Feldlinien die Oberfläche verlassen, zeigt das Feld E ebenfalls nach aussen. Der Fluss ist dann positiv.*

Negativer Fluss



Q=–3

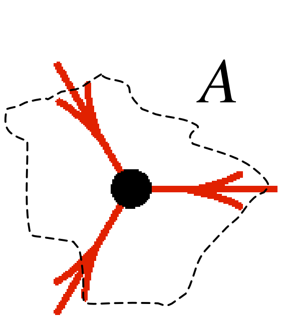


Positiver Fluss

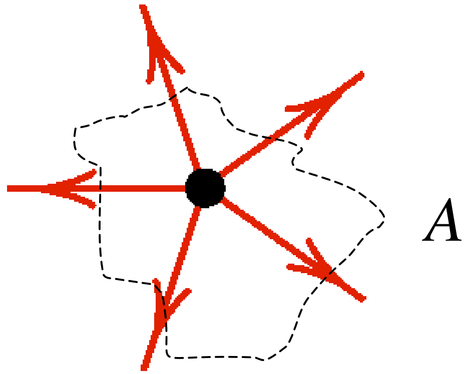
Q=+5

Das Gesetz von Gauss (II)

Feldlinien von pos. und neg. Punktladungen



Q=–3



Q=+5

- *Deshalb werden <u>positive Ladungen als Quelle</u> und <u>negative Ladungen als Senke</u> des elektrischen Flusses betrachtet. Positive Ladungen erzeugen elektrischen Fluss und negative Ladungen vernichten ihn.*

Das Gesetz von Gauss (III)

- Wir betrachten ein infinitesimales kugelförmiges Volumenelement dV in einem Punkt (x,y,z), das eine Ladung *dq* enthält. Die Ladung verhält sich wie eine Flussquelle (dq>0) oder eine Flusssenke (dq<0).
- Der Fluss, der das Volumenelement wegen der Anwesenheit der Ladung verlässt, ist

$$\varepsilon_0 d\phi = dq \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(x,y,z)\right)dV = \rho(x,y,z)dV$$

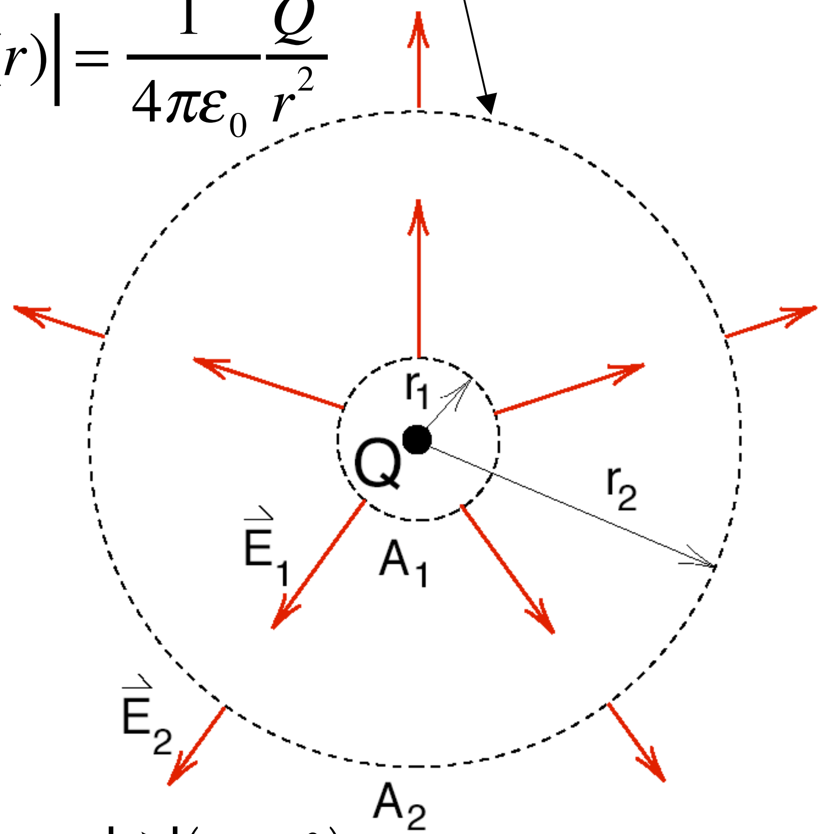
$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) = \rho(\vec{r})}$$

Diese Beziehung gilt im jedem Punkt des Raumes und entspricht einem ***fundamentalen*** *Gesetz des Elektomagnetismus.*

Elektrischer Fluss durch eine geschlossene Oberfläche, die eine Punktladung umfasst

- Wir betrachten die quantitative Bestimmung des Flusses durch zwei kugelförmige (geschlossene) Oberflächen, die als A_1 und A_2 bezeichnet werden, in deren Mittelpunkt eine Punktladung Q liegt.
- Wir bemerken: das elektrische Feld besitzt überall auf der Oberfläche denselben Betrag und es ist immer radial.

$$\left|\vec{E}(r)\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$



$$\phi_{A_1} \equiv \iint_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_{A_1} \left|\vec{E}_1\right|\left|d\vec{A}\right|\cos\theta = \left|\vec{E}_1\right|\iint_{A_1} dA = \left|\vec{E}_1\right|\left(4\pi R_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}\left(4\pi R_1^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{A_1} = \left|\vec{E}_1\right|\left(4\pi R_1^2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}\left(4\pi R_1^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_{A_2} = \left|\vec{E}_2\right|\left(4\pi R_2^2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2^2}\left(4\pi R_2^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

1. Der Fluss durch die Fläche A_1 ist gleich dem Fluss durch die Fläche A_2.
   - Es war zu erwarten, weil die Zahl von Feldlinien, die die beiden Oberflächen kreuzen, dieselbe ist (die Feldlinien sind radial, und jede Linie, die A_1 kreuzt, wird auch A_2 kreuzen!)

$$\boxed{\phi_{A_1} = \phi_{A_2}}$$

2. Der Fluss ist zur Punktladung Q, die von der Fläche eingeschlossen wird, proportional. Die Proportionalitätskonstante ist die elektrische Feldkonstante

$$\boxed{Q = \varepsilon_0 \phi_{A_1} = \varepsilon_0 \phi_{A_2}}$$

Beachte!

- Theorem von Gauss (mathematische Eigenschaft)

$$\phi_{tot} \equiv \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{A=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flächenintegral}} = \underbrace{\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV}_{\text{Volumenintegral}}$$

- Gesetz von Gauss (physikalische Bedeutung)

$$\varepsilon_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})\right) = \rho(\vec{r})$$

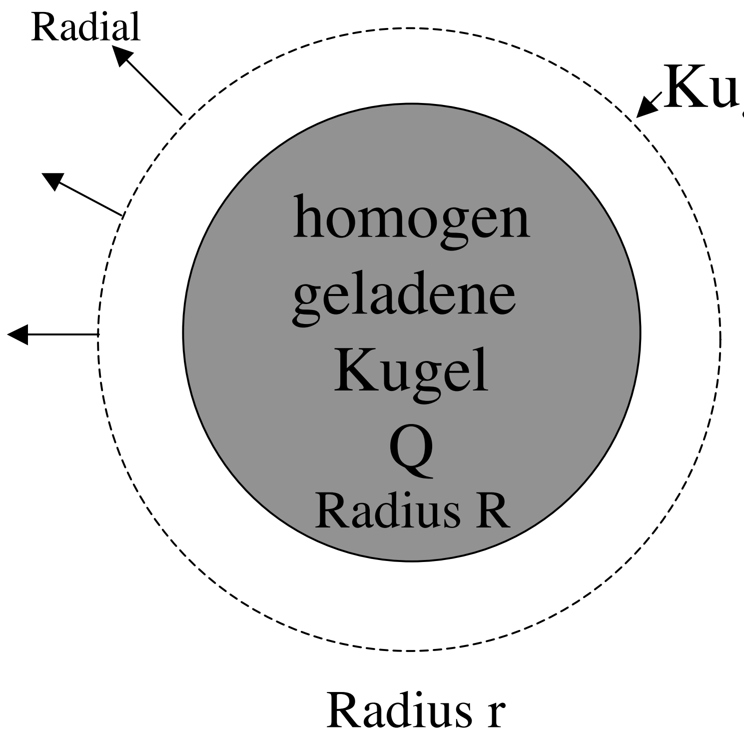
- Zusammen:

$$\boxed{\phi_{tot} \equiv \oint\!\!\!\oint_{A=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r})\, dV = \frac{Q_{innerhalb}}{\varepsilon_0}}$$

mathematische Eigenschaft

Elektrisches Feld einer geladenen Kugel mit Radius R und Ladung Q

- Wir beweisen, dass das elektrische Feld dasselbe ist, wie wenn die ganze Ladung im Zentrum der Kugel konzentriert wäre



Symmetrie der Anordnung:
Das Feld muss <u>radial</u> sein, und <u>der Betrag über die gesamte kugelförmige Oberfläche ist gleich.</u>

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\!\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right| \left(4\pi r^2\right)$$

Gesetz von Gauss: $$\varepsilon_0 \oiint_{A=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{innerhalb}$$

$$\varepsilon_0 \oiint_{A} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right| \left(4\pi r^2\right) = Q$$

$$\left|\vec{E}(r)\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad gilt \;\; für \quad r > R$$

Das elektrische Feld ist dasselbe, wie wenn die ganze Ladung im Zentrum der Kugel konzentriert wäre

Gesetz von Gauss + einfache Symmetrie der Anordnung
(z.B. geladene Kugel, unendliche Fläche, unendlich langer Stab, ...)

$\Downarrow$

Einfache Lösung des Problems

10.10 Divergenz des magnetischen Feldes

- Es gibt keine “magnetische” Ladung (sogenannte Monopole)
  - ☞ Der magnetische Fluss wird nie erzeugt oder vernichtet. Es gibt keine Punkte im Raum, an denen die magnetischen Feldlinien anfangen oder enden.
- Die Divergenz des magnetischen Feldes muss deshalb in jedem Punkt des Raumes gleich null sein:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0}$$

- Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist immer gleich null.
- Diese Bedingung gilt in jedem Punkt des Raumes und entspricht dem **zweiten** fundamentalen Gesetz des Elektromagnetismus.

10.11 Das Ampèresche Gesetz

- Das Gesetz basiert auf der vierten Maxwellschen Gleichung, wobei wir den zeitabhängigen Teil vernachlässigen

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)(\vec{r}) = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r}) \qquad \textit{Gesetz von Ampère für das magnetische Feld}}$$

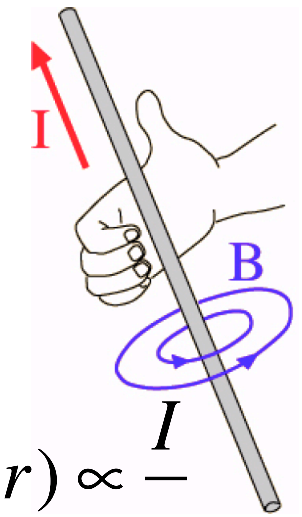
- Theorem von Stokes (für eine gegebene Fläche A)

$$\oint\limits_{C=\partial A} \vec{B}.d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \iint\limits_{A} \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{A} = \mu_0 I = \iint\limits_{A} \mu_0\,\vec{j}\cdot d\vec{A}$$

Das Linienintegral des Feldes entlang der geschlossenen Kurve C ist zur eingeschlossenen Stromstärke proportional.

B-Feld eines langen Drahts

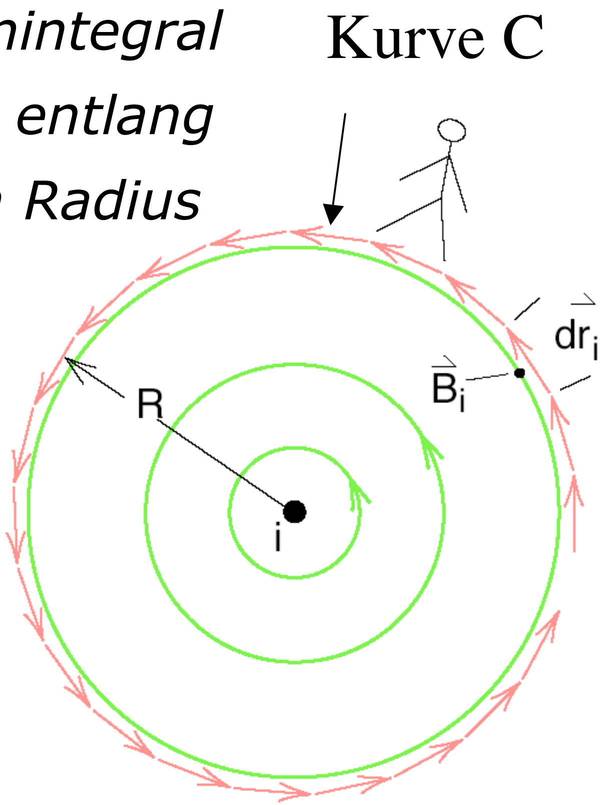
- Das magnetische Feld eines langen geraden Leiters.



$$\oint_{C=\partial A} \vec{B}.d\vec{r} = \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \iint_A \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I$$

$$B(r) \propto \frac{I}{r}$$

Wir bestimmen das Linienintegral des magnetischen Feldes entlang einer Kreiskurve mit dem Radius R um den Leiter.



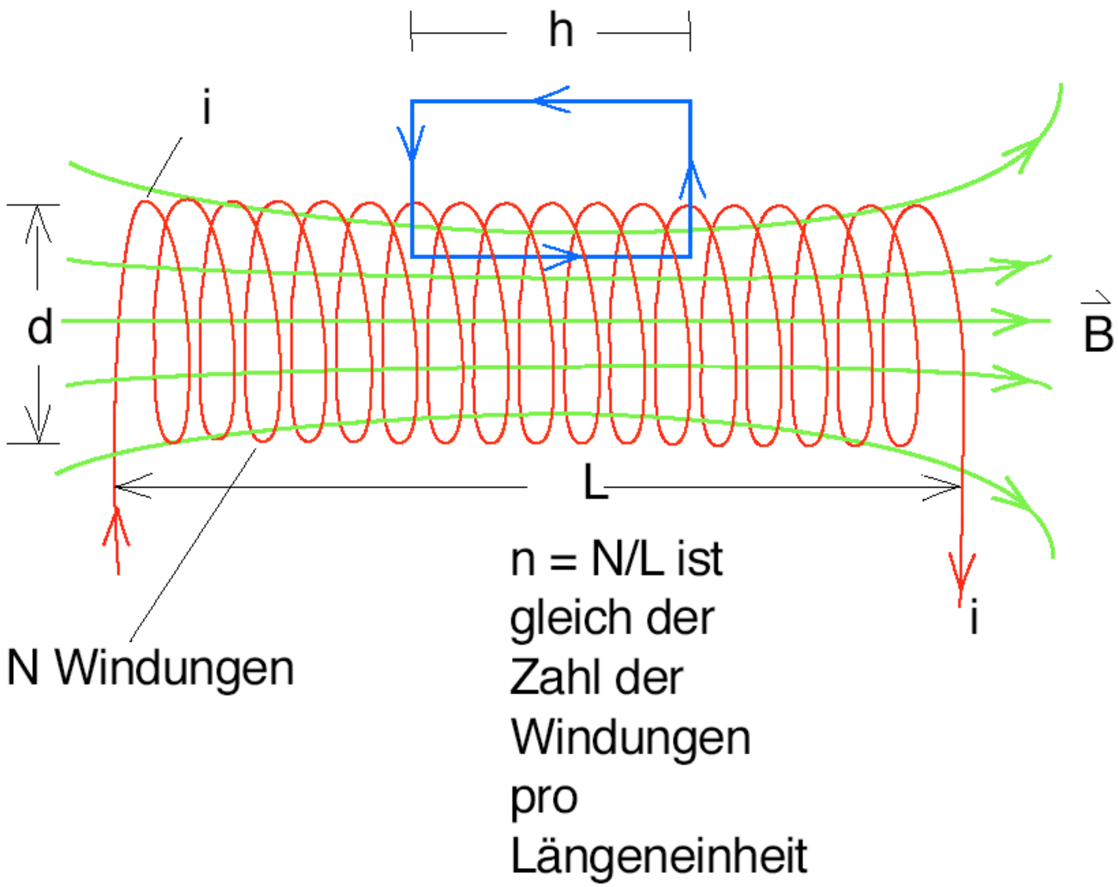
$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \oint_C B dr = B \oint_C dr = B\left(2\pi R\right) = \mu_0 I$$

Für beliebigen Radius r: $B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

B-Feld eines Solenoids

- Betrachte die blaue Kurve für die Integration

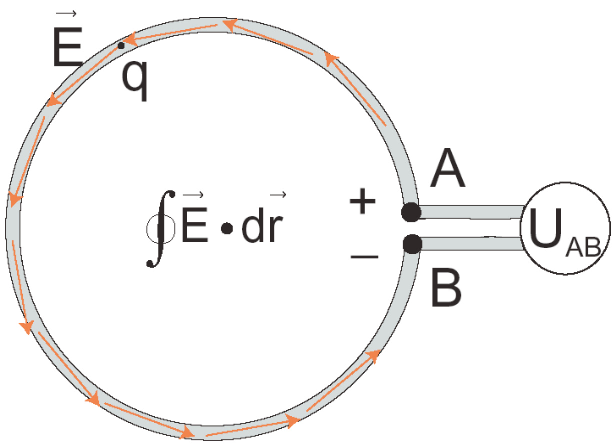
$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} \approx Bh = \mu_0 I \frac{Nh}{L} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{B}\right| \approx \mu_0 In$$



10.12 Gesetz von Faraday

- **Faraday und Henry (1830):** Beobachtung der Erzeugung einer elektrischen Spannung (Induktionsspannung) durch eine Änderung eines magnetischen Feldes durch eine Leiterschleife
- **Demonstrationsexperimente**:
  - ☞ *Drahtschleife und Stabmagnet*
  - ☞ *Induktion im Erdmagnetfeld*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Das Linienintegral des elektrischen Feldes über die geschlossene Schleife ist gleich der Induktionsspannung U_{AB}

$$\boxed{U_{induziert} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

$$U_{induziert} = \oint_{C=\partial A} \vec{E}\, d\vec{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{A} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Induktionsgesetz

- Die induzierte elektrische Spannung ist gleich

$$\boxed{U_{induziert} = \oint\limits_{C=\partial A} \vec{E}\,.d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint\limits_{A} \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\phi_B}{dt}}$$

wobei ϕ_B der magnetische Fluss durch die Fläche *A* ist, und *C* ist die Kurve, die die Fläche *A* einschliesst.

Zeitliche Änderung des Flusses durch die Fläche, die die Leiterschleife einschliesst

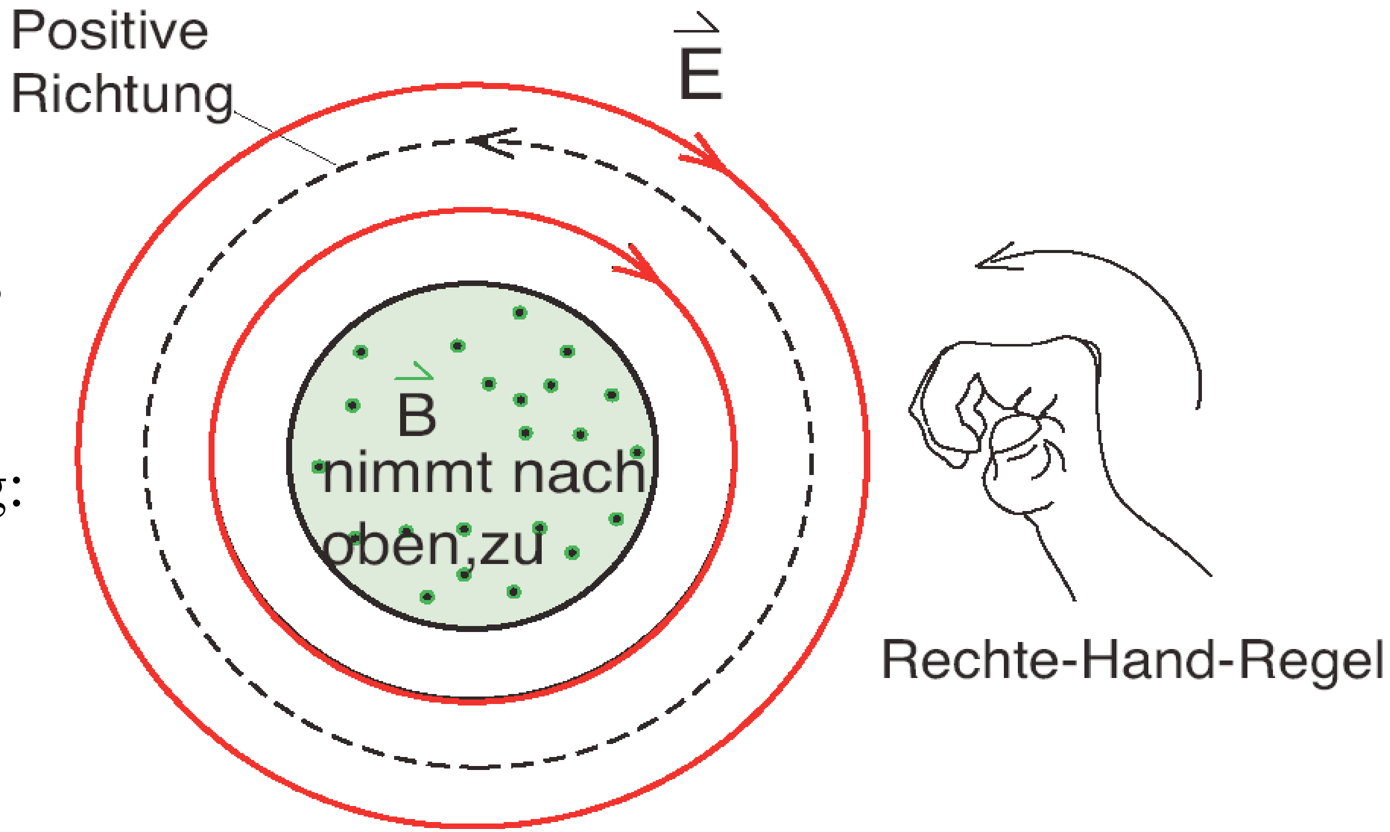
- Wenn wir eine Leiterschleife mit *N* Windungen betrachten, so wird in jeder der Windungen eine Spannung induziert, d.h.

$$U_{alle\ \ Schleifen} = NU_{eine\ \ Schleife} = -N\frac{d\phi_B}{dt}$$

Induktionsgesetz: Vorzeichen (I)

Feld: $\odot\vec{B}$

Zeitliche Änderung: $\odot\Delta\vec{B}$



Maxwellsche Gleichung: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Beachte!

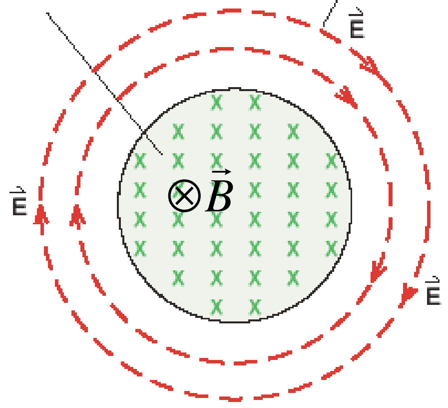
Induktionsgesetz: Vorzeichen (II)

nach unten gerichtetes magnetisches Feld, das mit der Zeit abnimmt (Die zeitliche Änderung zeigt nach oben)

induziertes elektrisches Feld

Feld: $\otimes\vec{B}$

Zeitliche Änderung: $\odot\Delta\vec{B}$

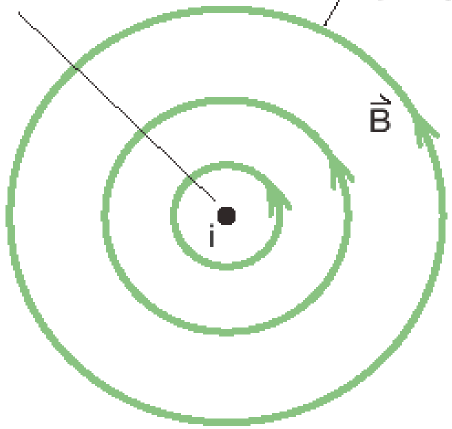


$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\boxed{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

nach oben gerichtet

nach oben gerichteter Strom

Magnetisches Feld um den Strom



$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

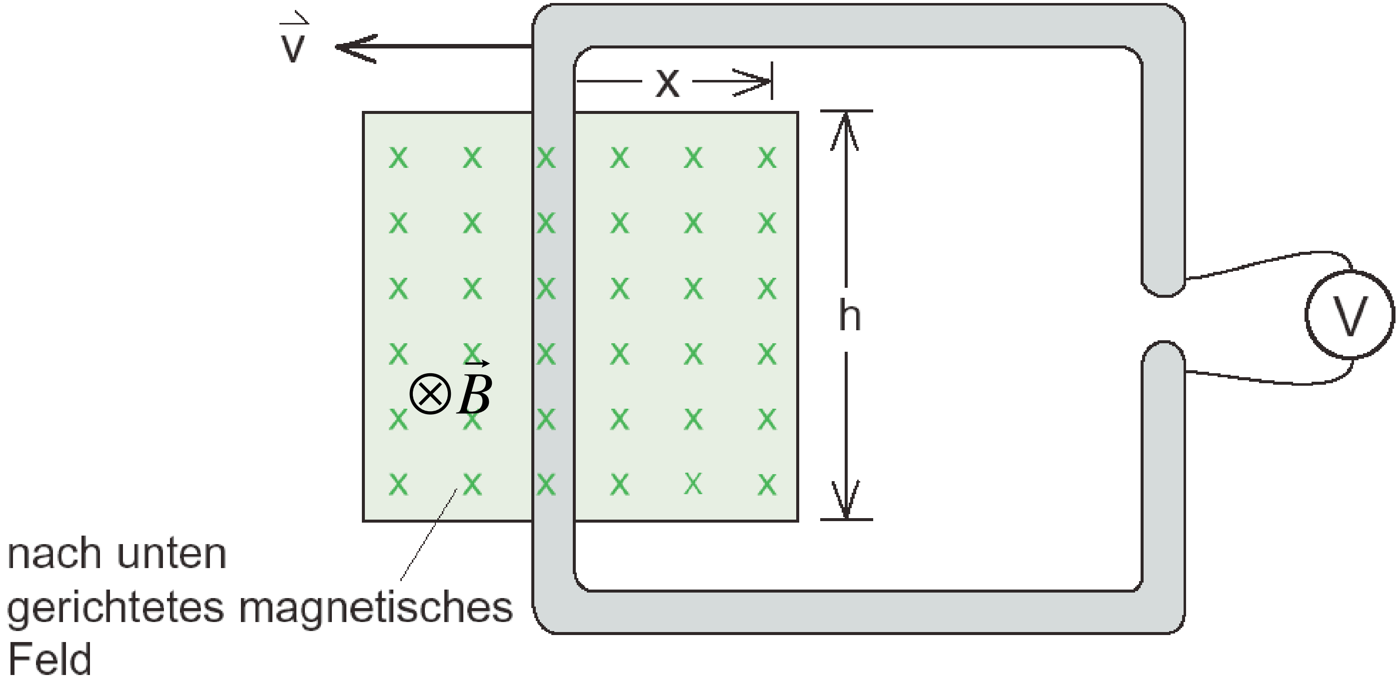
nach oben gerichtet

Induktion durch Bewegung

- **Demonstrationsexperiment**: *Induktion durch Verschiebung eines Drahtes im Magnetfeld*

$$\boxed{U_{induziert} = -Bhv}$$

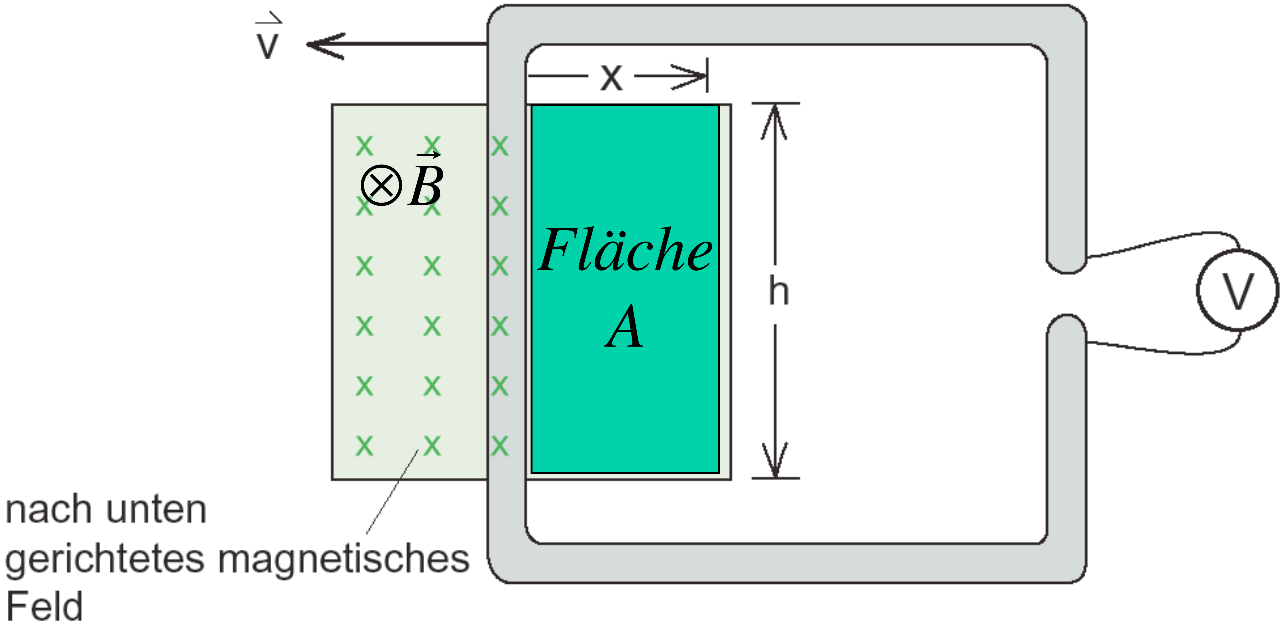
Geschwindigkeit = v



Wie kann die Induktionsspannung berechnet werden?

Der magnetische Fluss durch den geschlossenen Stromkreis:

$$\phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = Bhx$$



Die Schleife bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v. Die Fläche des Stromkreises nimmt mit der Zeit zu:

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} Bhx = Bh\frac{dx}{dt} = Bhv$$

10.13 Die elektromagnetischen Wellen

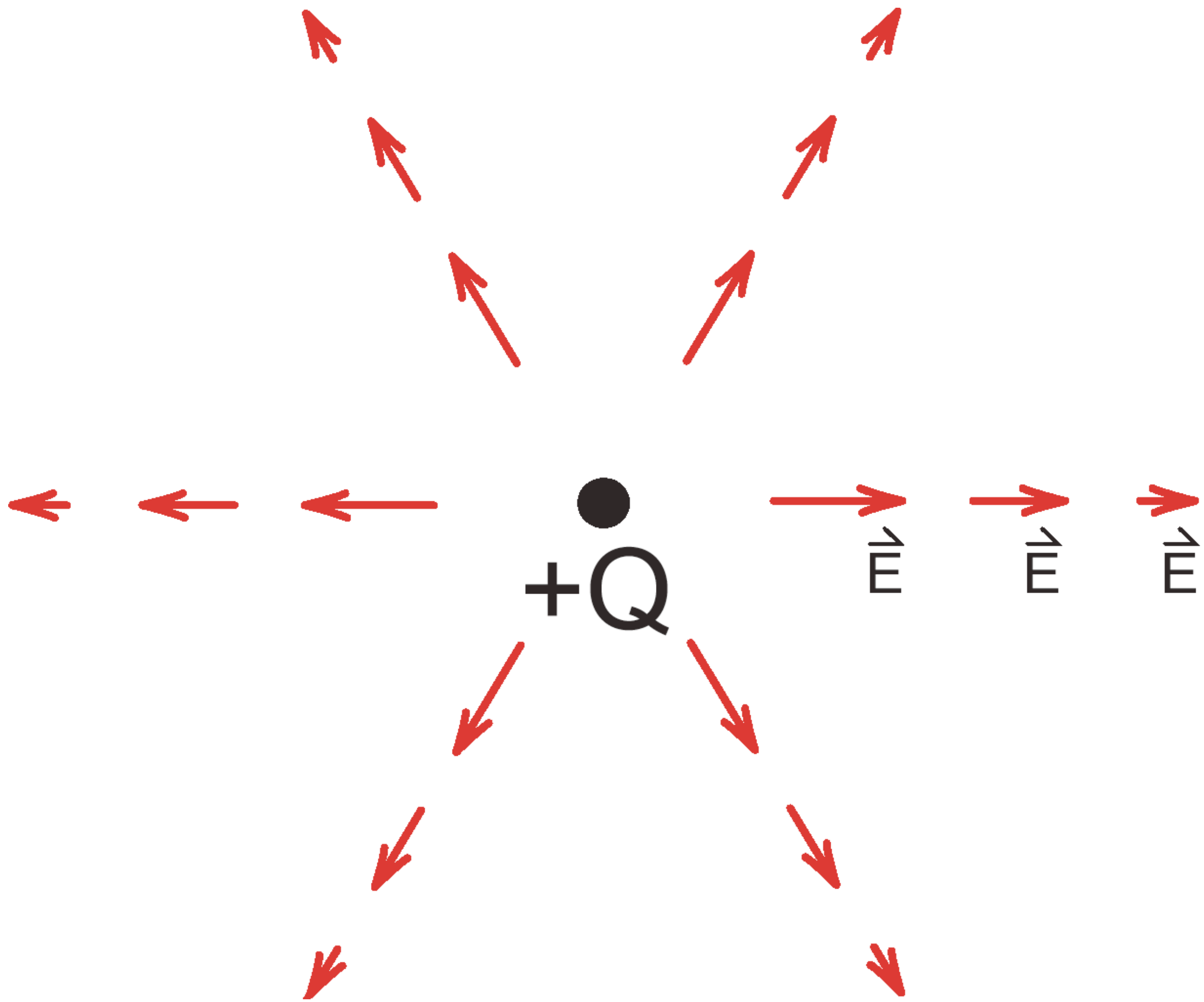
- **Maxwell (1865):** Die Maxwellschen Gleichungen sagen die Existenz der elektromagnetischen “Wellen” voraus.
- **Hertz (≈1885):** hat einen experimentellen Nachweis der elektromagnetischen Wellen erbracht.

- Im Allgemeinen werden **elektromagnetische Wellen** erzeugt, wenn geladene Teilchen *beschleunigt* werden (in ähnlicher Weise werden **Gravitationswellen** erzeugt, wenn massive Körper beschleunigt werden).

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen kann mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen bestimmt werden.

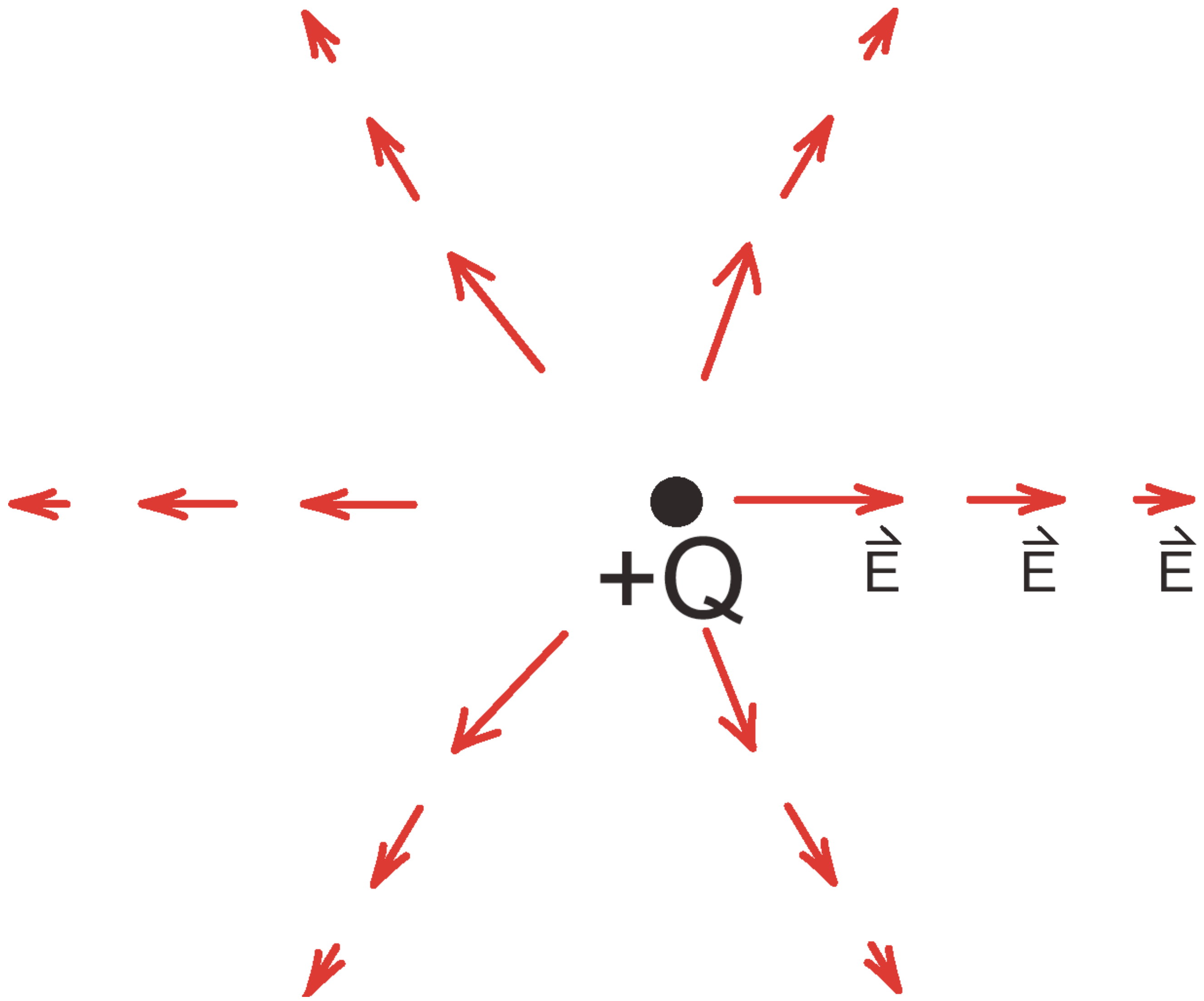
Feld einer Punktladung (I)

Zeit t=0



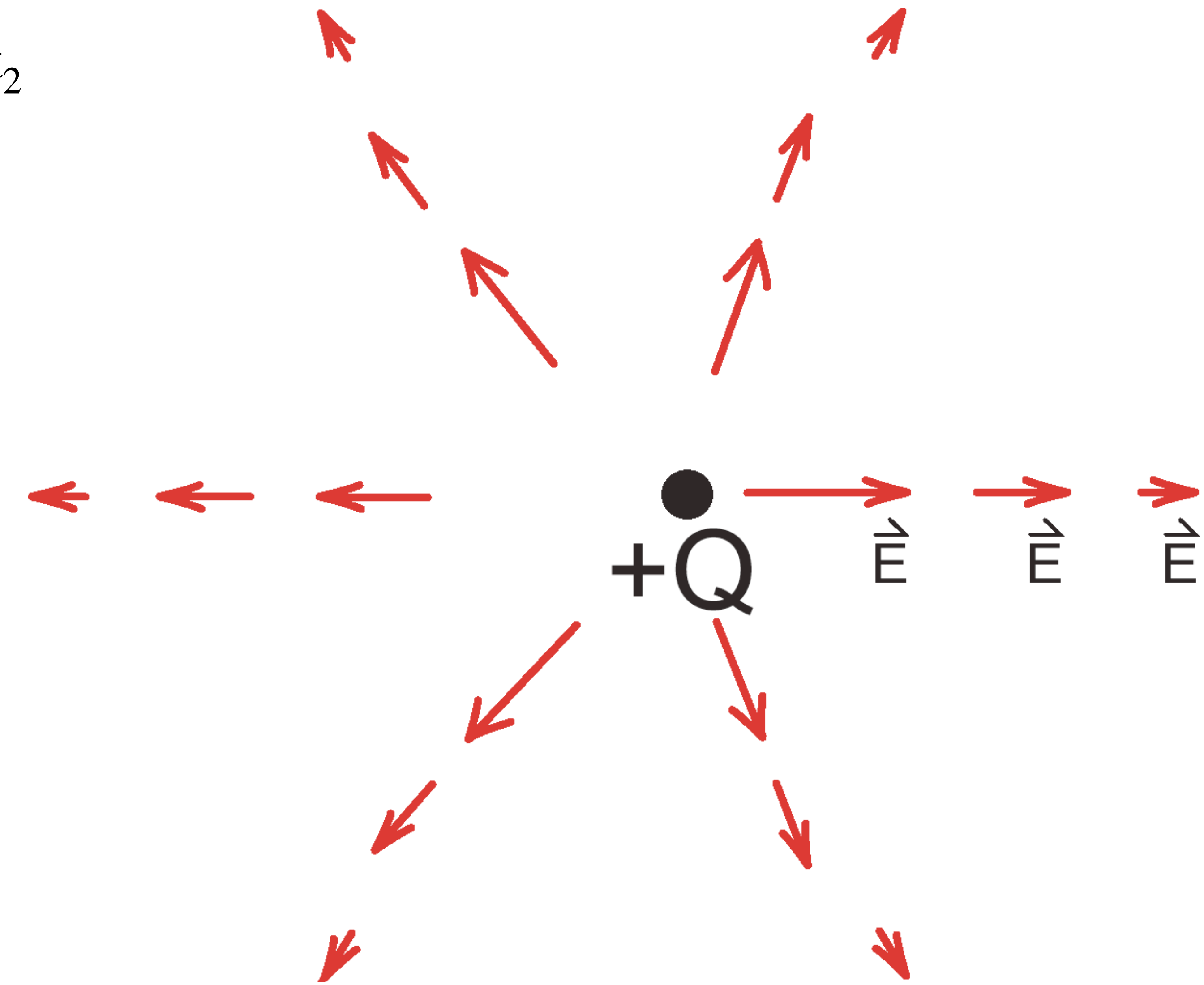
Feld einer Punktladung (II)

Zeit $t=t_1$



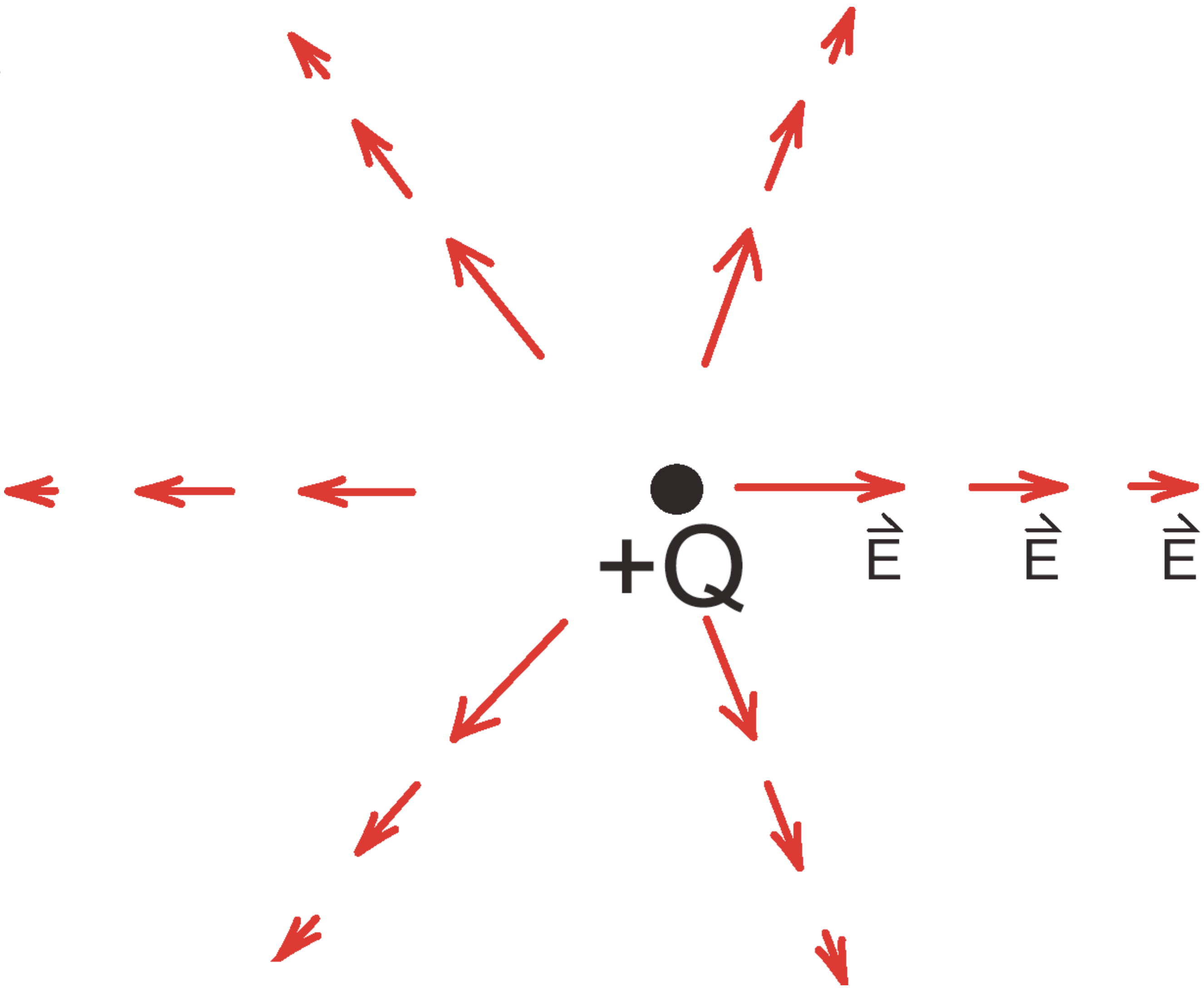
Feld einer Punktladung (III)

Zeit $t = t_2$



Feld einer Punktladung (IV)

Zeit $t = t_3$



„Das Feld wird retardiert“

Wellengleichung

- Maxwellsche Gleichungen im Vakuum (kein Medium wird gebraucht!)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad und \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Wir bilden die Rotation der beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \end{cases}$$

Was ist $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$ *?*

Laplace-Operator

- Es gilt für ein beliebiges Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{F}$$

Gradient der Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{Laplace} - \text{Operator}$$

Wellengleichung (I)

- Wir bilden die Rotation der beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \\[2ex] \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\Big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0}\Big) - \Big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}_{\vec{\nabla}^2}\Big)\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\[2ex] \vec{\nabla}\Big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0}\Big) - \Big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}_{\vec{\nabla}^2}\Big)B = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Wellengleichung (II)

- Wir erhalten die Wellengleichung der elektromagnetischen Wellen:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad und \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

- Ein System von 6 Gleichungen, eine für jede Komponente:

$$\vec{\nabla}^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \equiv \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

wobei $\xi(x,y,z,t)=E_x, E_y, E_z, B_x, B_y$ oder B_z

- Vergleich mit mechanischer Welle:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Aus der Wellengleichung kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen bestimmt werden.
- Es gilt:

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

- Damit können wir beweisen, dass sich die elektromagnetischen Wellen mit einer Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon_0} = c^2 \quad !!!$$

- Und:

$$\left|\vec{B}\right| = \left(\frac{v}{c^2}\right)\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{E}\right| \quad oder \quad \left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right|$$

für elektromagnetische Wellen

Harmonische ebene Welle

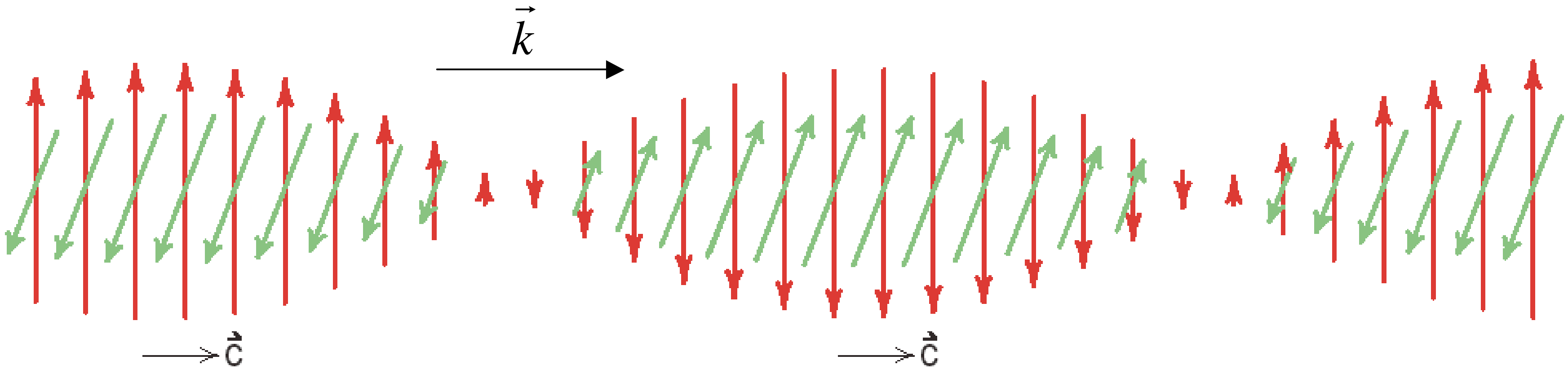
- Die ebenen Wellen breiten sich in einer Richtung aus, die immer senkrecht zu den elektrischen und magnetischen Feldern ist

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases}}$$

$$\vec{k} \equiv \left(k_x, k_y, k_z\right) = Wellenvektor$$

$$\vec{E}_0, \vec{B}_0 = Amplitudenvektoren$$

$$\omega = \left|\vec{k}\right| c \qquad oder \qquad c = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|}$$



Maxwellsche Gleichung:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \quad wobei \quad \vec{E} = \left(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}\right)\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$= \left(E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z\right)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$= \left(\vec{k}\cdot\vec{E}_0\right)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{k}\cdot\vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = 0$$

Daher:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\perp\vec{E}_0 \quad und \quad \vec{k}\perp\vec{B}_0$$

Die Felder müssen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sein

Maxwellsche Gleichung: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right) = \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

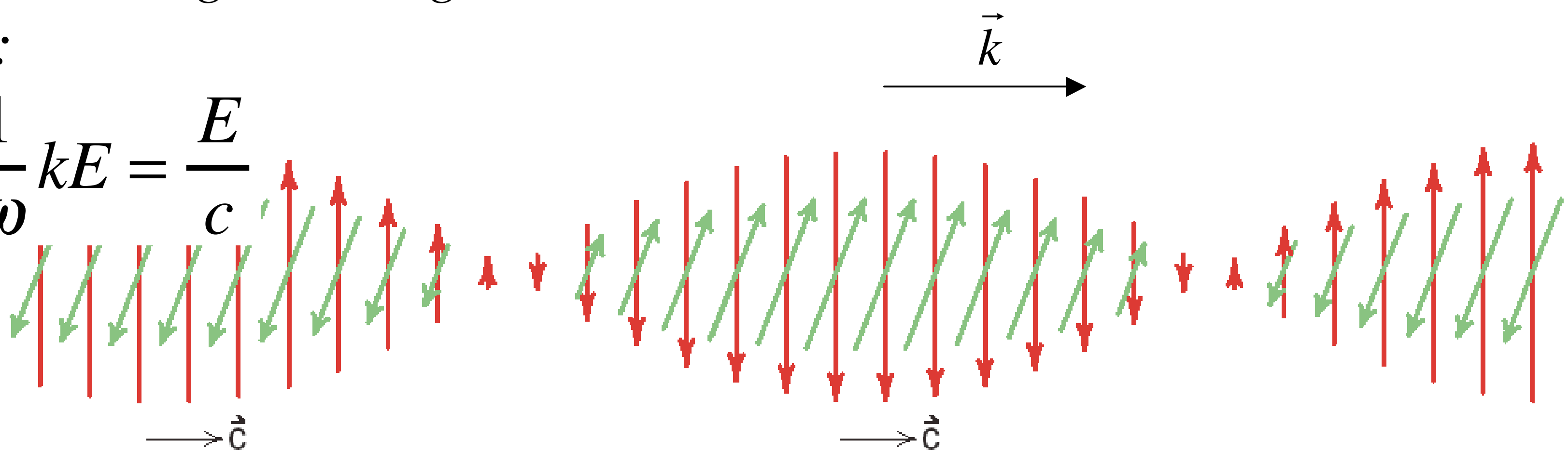
Daher:

$$\vec{B} = \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 \right) \frac{1}{\omega} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \frac{1}{\omega} \left(\underline{\vec{k} \times \vec{E}} \right)$$

Das magnetische Feld ist senkrecht zum elektrischen Feld und zur Ausbreitungsrichtung

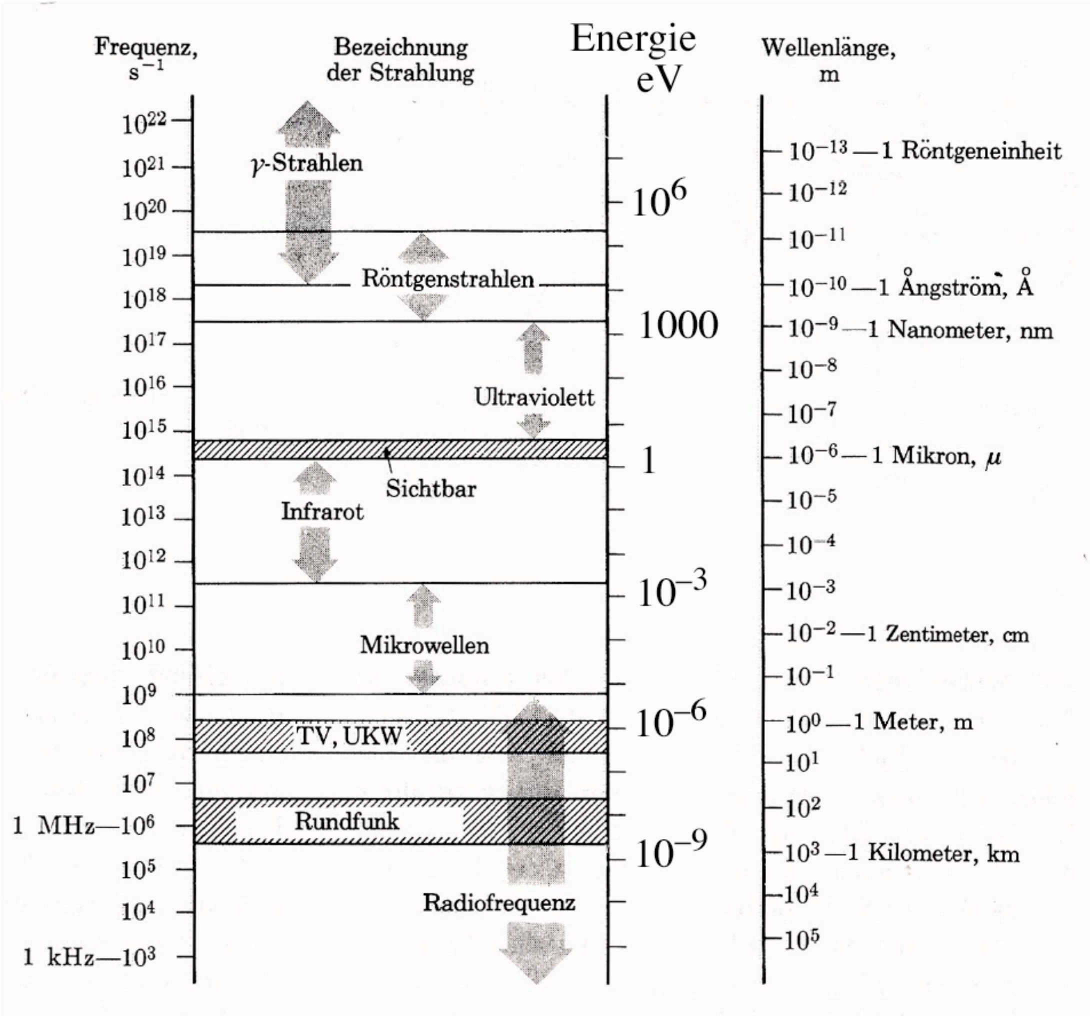
Es gilt:

$$B = \frac{1}{\omega} k E = \frac{E}{c}$$



Das elektromagnetische Spektrum

- Elektromagnetische Wellen überstreichen einen weiten Bereich verschiedener Frequenzen oder Wellenlängen



$$c = \lambda \nu$$

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \Leftrightarrow \quad E = h\nu$$

$$h \approx 6{,}626 \times 10^{-34} \quad Js$$

Das elektromagnetische Spektrum (I)

- Elektromagnetische Wellen treten auf in Form von:

1. **Radiowellen**: Sie werden im allgemeinen für Radio- und Fernsehübertragungssysteme verwendet. Sie werden von elektronischen Geräten erzeugt und zwar hauptsächlich von elektrischen Schwingkreisen.

2. **Mikrowellen**: sie werden z.B. für Radar und andere Kommunikationssysteme verwendet (wie z.B. GSM-Handys, die 900 MHz und 1800 MHz (oder 1900 MHz in den USA) verwenden). Sie werden ebenfalls von elektronischen Geräten erzeugt. Ihre Energie ist genügend, um bestimmte Bewegungsmoden von Molekülen und Atomen anzuregen. Mikrowellen werden z.B. von Wassermolekülen wirksam absorbiert. Dies erklärt das Prinzip des Mikrowellenofens. Die Energie der von den Wassermolekülen absorbierten Mikrowellen wird nach der Absorption in Wärmeenergie umgewandelt und wird die Temperatur des Wassers erhöhen.

Das elektromagnetische Spektrum (II)

- Elektromagnetische Wellen treten auf in Form von:

  3. Infrarotspektrum: Diese Wellen werden von Molekülen und heissen Körpern (Siehe Wärmestrahlung) erzeugt.

  4. Sichtbares Spektrum: Diese elektromagnetischen Wellen entsprechen einem schmalen Band, indem unsere Retina empfindlich ist und sie werden deshalb als sichtbares Licht bezeichnet. Die Farben hängen von der Frequenz ab.

  5. Ultraviolette Strahlen: Ihre Energie liegt in der Grössenordnung der Energie, die an vielen chemischen Reaktionen beteiligt ist, was die vielen chemischen Auswirkungen dieser Strahlung erklärt, wie z.B. die Photodissoziation, usw.

Das elektromagnetische Spektrum (III)

- Elektromagnetische Wellen treten auf in Form von:

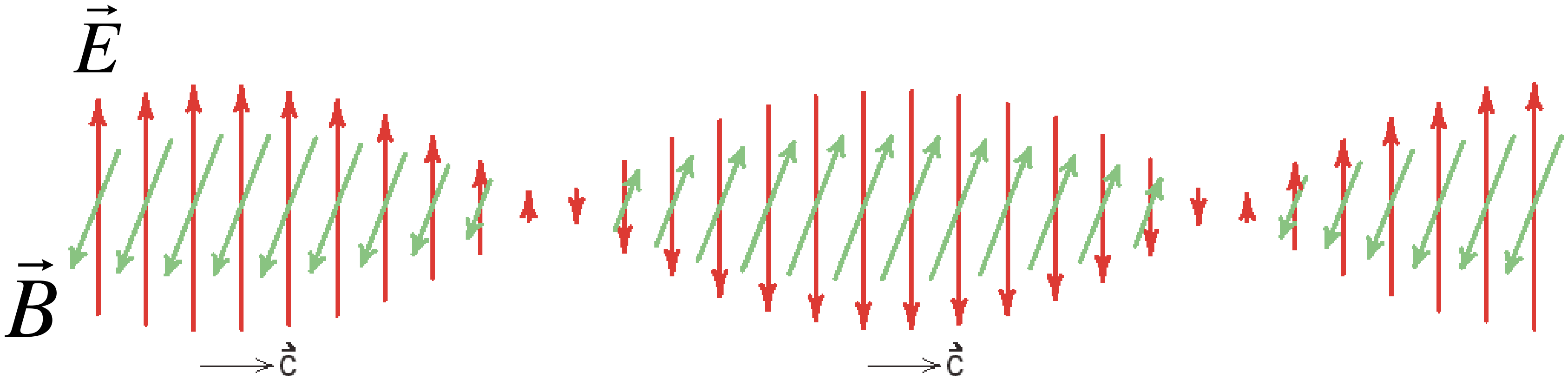
6. Röntgenstrahlen: Sie wurden 1895 vom Physiker W. Röntgen entdeckt. Röntgenstrahlen werden z.B. in der medizinischen Diagnose verwendet, da ihre stärkere Absorption durch Knochen im Vergleich zum Gewebe einen Schattenwurf auf einem photographischen Film ermöglicht. Als Folge der chemischen und atomaren Prozesse, die sie hervorrufen können, bewirken sie auch schwere Schäden in lebenden Organismen. Daher werden Röntgenstrahlen auch zur Behandlung von Krebs verwendet, um krankes Gewebe zu zerstören. Kleine Mengen von Röntgenstrahlen werden leider auch gesundes Gebewe zerstören. Grosse Mengen können Krankheit und Tod hervorrufen.

7. Gammastrahlen (γ-Strahlen): Sie haben ihren Ursprung im Kern und ihre Energie kann zu Kernveränderungen führen. Gammastrahlen werden von vielen radioaktiven Substanzen emittiert und sind in grosser Intensität in Kernreaktoren vorhanden. Sie werden von den Substanzen nicht leicht absorbiert; wenn sie jedoch von Organismen absorbiert werden, haben sie schwerwiegende Folgen. Die Handhabung von Gammastrahlen erfordert schwere Schutzschilder und extreme Vorsicht.

☞ Gammastrahlen mit höheren Frequenzen und Energien (grösser als $\approx$MeV) gibt es in der kosmischen Strahlung oder bei Teilchenphysikexperimenten (z.B. bei Hochenenergiebeschleunigern).

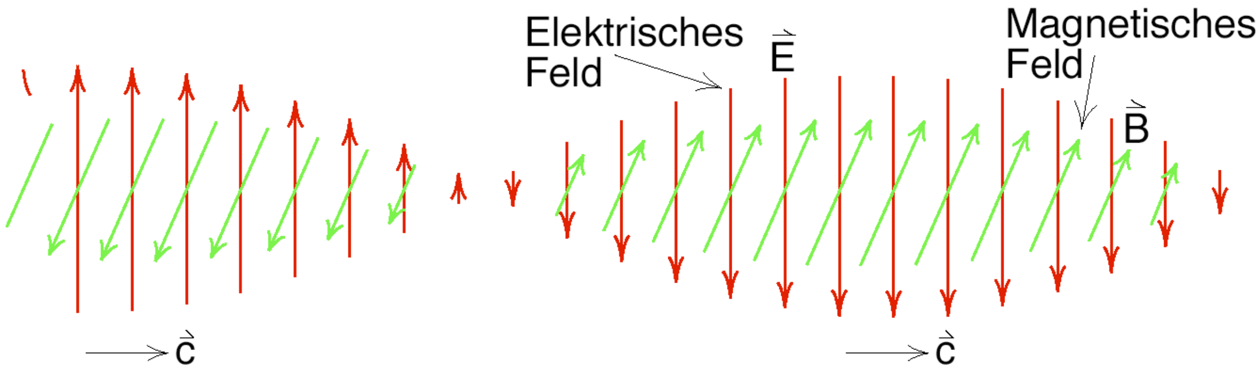
10.14 Die Polarisation

- Licht ist wie jede elektromagnetische Strahlung eine transversale Welle: in jedem Punkt sind die elektrischen und magnetischen Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. In einem beliebigen Punkt des Raums bilden das elektrische Feld und die Ausbreitungsrichtung eine Ebene, die sogenannte Schwingungsebene der elektromagnetischen Welle.
- **Definition**: die **Polarisation** der Welle ist die Richtung des elektrischen Feldes.

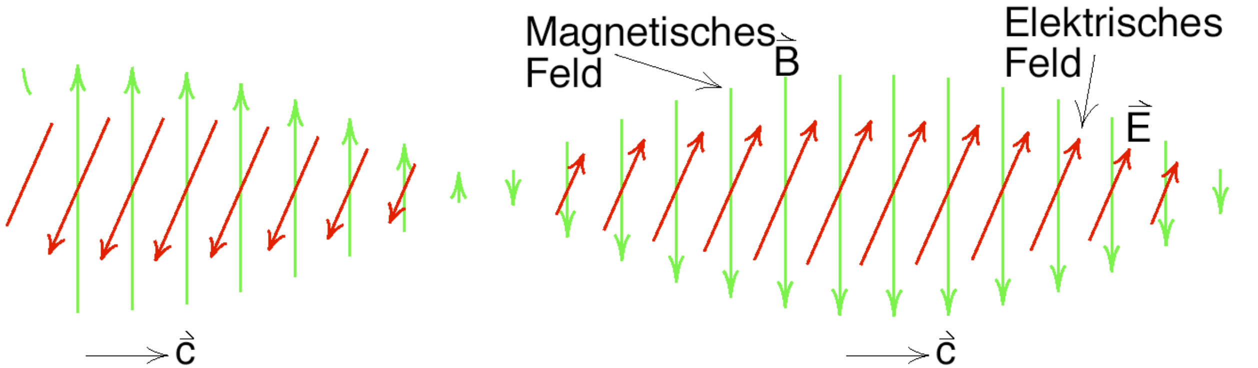


Polarisation

- **Definition**: Sind die Ebenen, die das elektrische Feld und die Ausbreitungsrichtung bilden, für alle Punkte der Welle parallel zueinander, so heisst die Welle **linear polarisiert**.



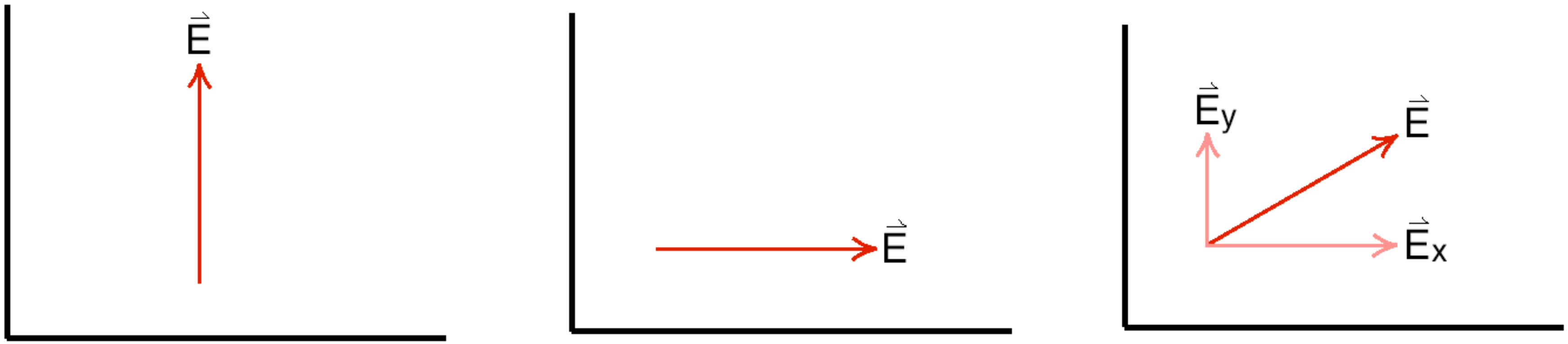
a) Vertikal polarisierte elektromagnetische Welle



b) Horizontal polarisierte elektromagnetische Welle

Zwei unabhängige Komponenten

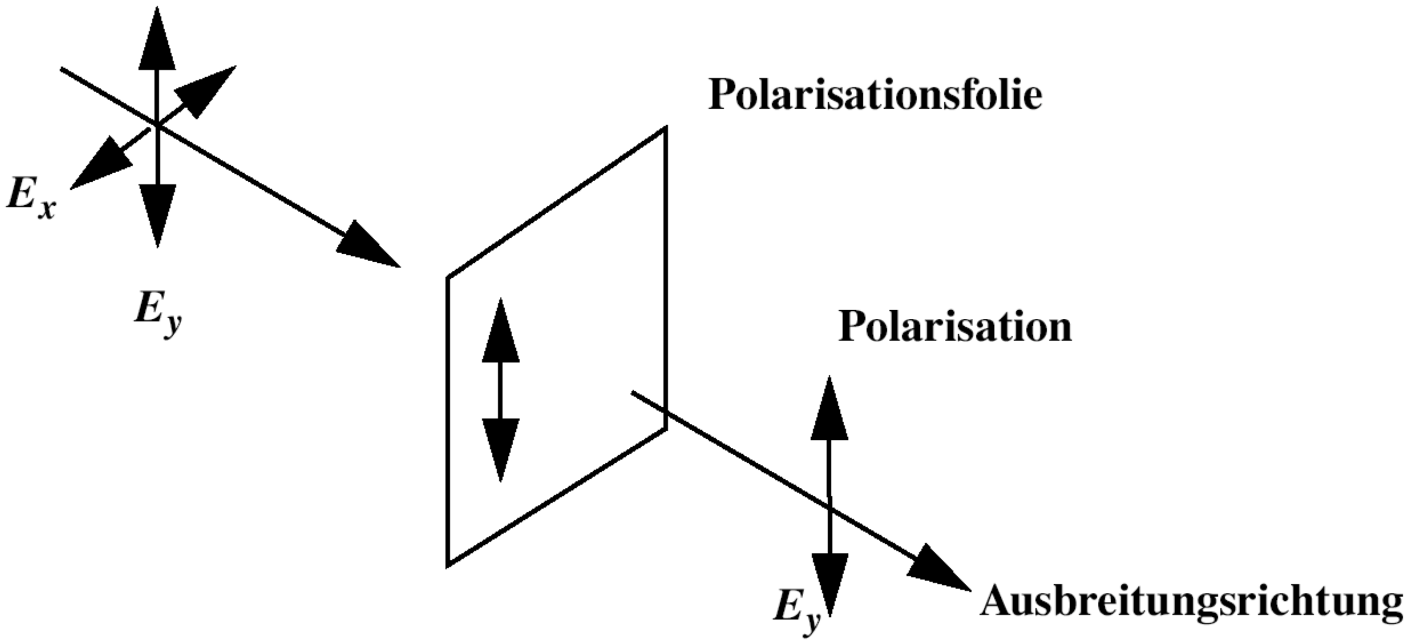
- Weil das elektrische Feld in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegen muss, gibt es nur zwei unabhängige Komponenten des elektrischen Feldes einer elektromagnetischen Welle.

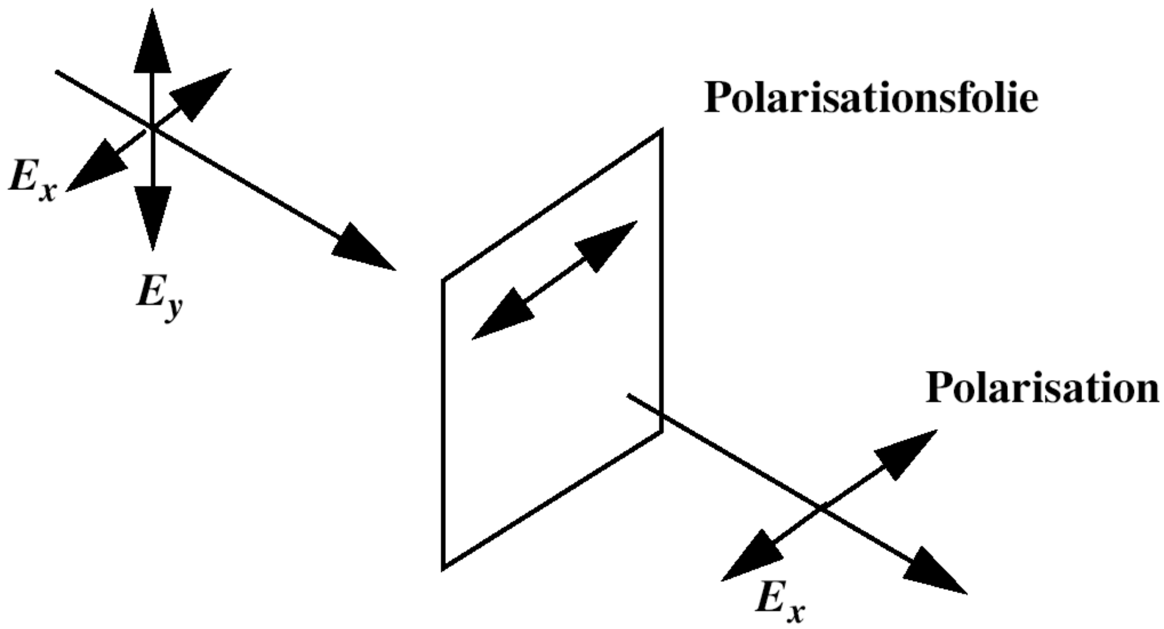


a) Vertikale Polarisation   b) Horizontale Polarisation   c) Kombination

Polarisationsfilter

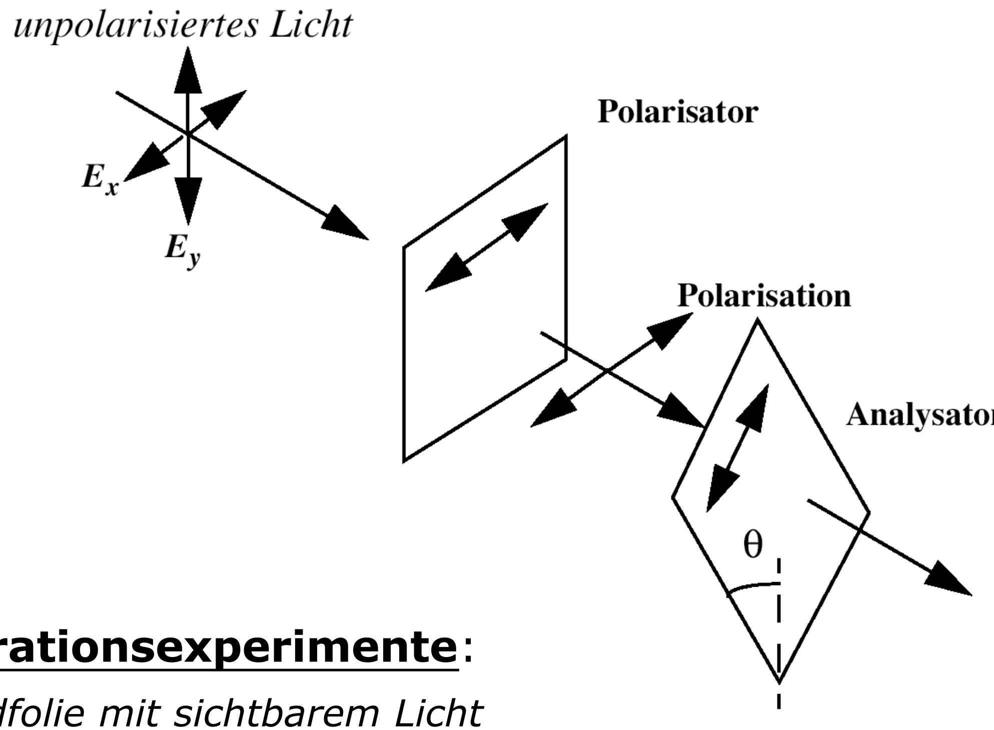
- **Der Polarisator**: es gibt bestimmte polarisierende Materialien, die nur die Wellen hindurchlassen, deren Polarisation parallel zu einer bestimmten Transmissionsrichtung sind. Die Wellen, die senkrecht zu dieser Richtung polarisiert sind, werden vom Material absorbiert.




Polarisationsfolie
E_x
E_y
Polarisation
E_x

Polarisator und Analysator

- Wir benutzen zwei Polarisationsfolien hintereinander. Die erste Folie wirkt als Polarisator und die zweite als Analysator.



- **<u>Demonstrationsexperimente</u>**:
  - ☞ *Polaroidfolie mit sichtbarem Licht*
  - ☞ *Gitter mit 3 cm elektromagnetischen Wellen*

Gesetz von Malus

- Wenn der Winkel zwischen den Transmissionsrichtungen gleich θ ist, ist die Intensität der durchgelassenen Welle

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$$

wobei I_0 das Maximum der hindurchgelassenen Intensität ist.

- Bemerkungen:
  - ☞ Wenn die beiden Transmissionsrichtungen senkrecht zueinander sind, gelangt keine Welle durch die Anordnung.
  - ☞ Wenn beide parallel zueinander sind, ist die Transmission maximal.
  - ☞ Die Amplitude des elektrischen Feldes, das durch den Polarisator hindurchgelassen wurde, und das durch den Analysator hindurchgelassen wird, ist zu $E\cos\theta$ proportional. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, ist die Intensität zum Quadrat des Kosinus des Winkels proportional.