Das Schottky Problem

Eberhard Freitag

Folien zu einem am 3.2.2006 in Marburg gehaltenen Vortrag im Rahmen eines Festkolloquiums anläßlich des 70. Todestages von F.H. Schottky.

Wer an einem vollständig elementaren Beweis des Jacobischen Umkehrtheorems interessiert ist, findet ihn in einem noch in Arbeit befindlichen Skript fk13.ps (Theorem 9.21) in

http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/skripten/FunktionentheorieII/

Algebraische Integrale

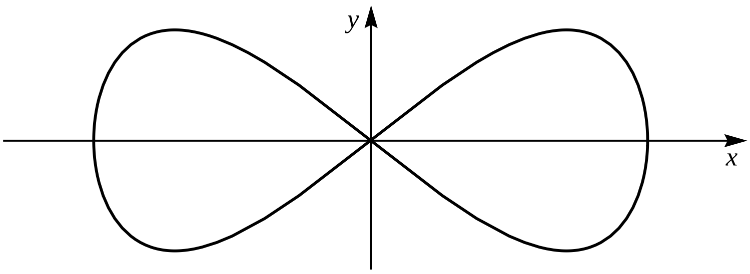
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Hyperelliptisches Integral}\\ y(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^{2g+2}}}\,dt \quad (g \geq 2)\end{array}}$$

Differentialgleichung der Umkehrfunktion:

$$f'^2 + f^{2g+2} = 1 \quad .$$

$g = 0$ (Kreisintegral): $f(x) = \sin(x)$. Periode ist Umfang der Einheitskreislinie.

$g = 1$ (elliptisches Integral): $f(x)$ hat ebenfalls offensichtliche Periode, nämlich Länge der Lemniskate (Fagnano, 1718).



Abel (1827): *Im Falle $g = 1$ besitzt f eine Fortsetzung als (eindeutige) meromorphe Funktion in die ganze komplexe Ebene. Sie hat eine zweite, komplexe Periode.*

Die Gesamtheit aller Perioden ist ein Gitter $L \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dazu gehört ein Torus $\mathbb{C}/L$.

Jacobi: Die Integrale „erster Gattung“

$$\int_0^x \frac{t^m}{\sqrt{1-t^{2g+2}}}\,dt, \quad 0 \le m < g,$$

sind gleichberechtigt.

Jacobi's Ansatz, weitere Variable einzuführen

$$\begin{aligned} y_1 = y_1(x_1,x_2) &= \int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}} \\ y_2 = y_2(x_1,x_2) &= \int_0^{x_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^{x_2} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^6}} \end{aligned}$$

Jacobisches Umkehrproblem: Bestimme Umkehrung

$$x_1 + x_2 = f(y_1,y_2), \quad x_1x_2 = g(y_1,y_2).$$

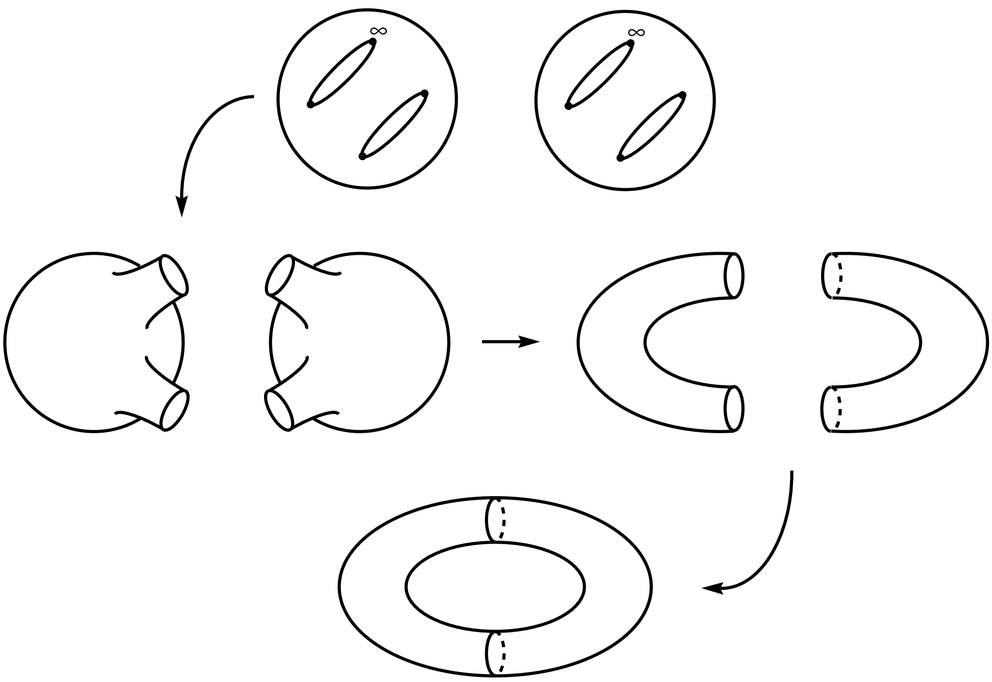
Umkehrtheorem. *Die Funktionen f, g lassen sich als (eindeutige) meromorphe Funktion auf den ganzen $\mathbb{C}^2$ fortsetzen. Sie haben 4 linear unabhängige (gemeinsame) Perioden.*

Die Gesamtheit der Perioden ist ein Gitter $L \cong \mathbb{Z}^4$. Dazu gehört ein Torus $\mathbb{C}^2/L$.

Bei beliebigem g nimmt man die elementar symmetrischen Funktionen und gelangt zu einem **komplexen Torus** $\mathbb{C}^g/L$.

Die Riemannsche Fläche

Die Idee der Riemannschen Fläche ist es, jeden Punkt der komplexen Ebene einschließlich des unendlich fernen Punktes durch zwei Punkte zu ersetzen mit Ausnahme der Nullstellen des Polynoms $z^{2g+2} - 1$. Man erhält so eine Fläche $X \to \bar{\mathbb{C}}$, welche über der Riemannschen Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ausgebreitet ist. Jeder Punkt mit Ausnahme der $2g + 2$ Nullstellen hat genau 2 Urbildpunkte. Die $2g + 2$ Ausnahmepunkte sind sogenannte Verzweigungspunkte. Die topologische Gestalt einer in $2g+2$ verzweigten zwei-blättrigen Überlagerung der Kugel kann mit Mitteln der Topologie bestimmt werden. Es handelt sich um eine (orientierte) Henkelfläche mit g Henkeln. Im Falle $g = 1$ ist dies ein Torus. Man kann diesen einigermaßen leicht visualisieren:



Allgemeines **hyperelliptisches Integral erster Gattung**

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{P(x)}}\, dx, \quad 0 \le m < \frac{\mathrm{Grad}(P)}{2} - 1.$$

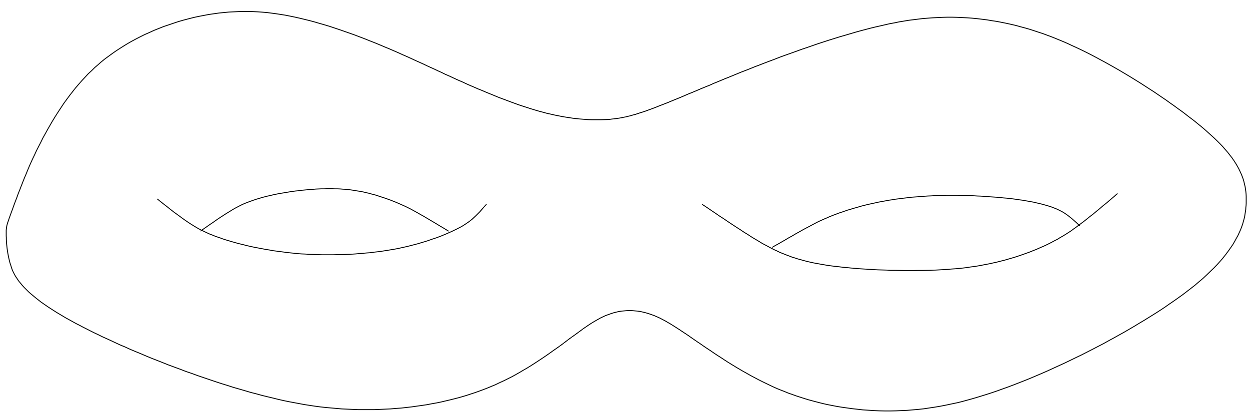
(P Polynom vom Grad ≥ 5 ohne mehrfache Nullstelle).

Allgemeines **algebraisches Integral erster Gattung**

$$\int R(f(x), x)dx, \quad A(x, f(x)) = 0, \quad (R \text{ rational}).$$

A irreduzibles Polynom zweier Variablen. Das Integral soll längs jeder Kurve in $\bar{\mathbb{C}}$ endlich sein.

Anders ausgedrückt. $R(f(z), z)dz$ ist ein überall holomorphes Differential auf der zugehörigen Riemannschen Fläche $X \to \bar{\mathbb{C}}$.



Kompakte Riemannsche Fläche:

Geschlossene orientierbare (Henkel-) Fläche mit zusätzlicher „holomopher“ Struktur.

Allgemeiner Satz: Der Vektorraum der überall holomorphen Differentiale hat die Dimension g (Zahl der Henkel).

Wähle Basis $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$.

Das (Kurvenintegral)

$$\int_a^x \omega \in \mathbb{C}^g$$

hängt von der Wahl der Verbindungskurve ab.

Periode: Integral längs einer geschlossenen Kurve.

Die Menge aller Perioden bildet das **Periodengitter** L.

Jacobische Varietät: $\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/L$.

Die Jacobische Abbildung (eine Kodierung der Integrale erster Gattung)

$$\Psi : X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

ist (nach Wahl eines Basispuntes $a \in X$) eine **Einbettung der Riemannschen Fläche in ihre Jacobische Varietät**.

Im Falle $g = 1$ ist dies eine Biholomorphie. Die Umkehrabbildung zusammen mit der Projektion $X \to \bar{\mathbb{C}}$ ist die Abelsche Umkehrfunktion des elliptischen Integrals.

Da die Jacobische Varietät eine Gruppe ist, kann man die Jacobische Abbildung ausdehnen zu Abbildungen

$$\begin{aligned}\Psi^m := X^m = X \times \cdots \times X &\longrightarrow \mathsf{Jac}(X),\\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto \Psi(x_1) + \cdots + \Psi(x_m)\ .\end{aligned}$$

Im Falle $m = g$ ist dies genau der Jacobische Ansatz. Genauer betrachtet Jacobi die elementarsymmetrischen Ausdrücke in den x_i, da es auf deren Reihenfolge nicht ankommt. Abstrakt kann man statt dessen einfach die symmetrische Gruppe S_m auf der linken Seite ausdividieren. Dies führt zur sogenannten symmetrischen Potenz

$$X^{(m)} := X^m / S_m$$

und die Jacobiabbildung wird nun

$$\Psi^{(g)} : X^{(g)} \longrightarrow \mathsf{Jac}(X).$$

Auf beiden Seiten steht nun etwas komplex g-dimensionales.

Jacobisches Umkehrtheorem. *Die Abbildung $\Psi^{(g)}$ ist bimeromorph.*

Bimeromorph ist etwas schwächer als biholomorph. Beispielsweise sind der projektive Raum $P^n(\mathbb{C})$ und $\bar{\mathbb{C}}^n$ beide Kompaktifizierungen des affinen Raumes $\mathbb{C}^n$ und daher bimeromorph.

Durch Umkehrung von $\Psi^{(g)}$ und nachfolgende Projektion auf die g Koordinaten

$$\mathsf{Jac}(X) \longrightarrow X^{(g)} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}^{(g)} = P^g(\mathbb{C}) \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

entdeckt man die g von Jacobi prognostizierten $2g$-fach periodischen Funktionen wieder.

Moduln algebraischer Integrale

Die Untersuchungen über algebraische Integrale waren von Anfang an mit der Frage nach den „Moduln“ verbunden. Moduln sollten Größen sein, welche man algebraischen Integralen zuordnen kann, so dass sie für im „wesentlichen gleiche“ Integrale übereinstimmen. Es gibt hierfür zwei Definitionen, die überraschenderweise auf dasselbe hinauslaufen.

Analytische Definition. *Die zugehörigen kompakten Riemannschen Flächen sind biholomorph.*

Algebraische Definition. *Die algebraischen Kurven* $\{(z,w);\ P(z,w)=0\}$ *sind birational.*

Modulmannigfaltigkeit der Riemannschen Flächen

$$\boxed{\mathcal{M}_g := \left\{ \begin{array}{l} \text{Biholomorphieklassen kompakter} \\[1ex] \text{Riemannscher Flächen vom Geschlecht } g \end{array} \right\}}$$

$$\text{Riemann:} \qquad \dim \mathcal{M}_g = 3g-3 \qquad (g>1)$$

Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts gelang es, saubere Definitionen von $\mathcal{M}_g$ als algebraische Mannigfaltigkeit zu geben. (Algebraische Mannigfaltigkeiten sind Teilmengen eines vielleicht hochdimensionalen projektiven Raumes, welche sich durch endlich viele Polynomgleichungen und Polynomungleichungen schreiben lassen.)

Moduln abelscher Varietäten

Bei den Jacobischen handelt es sich um ganz spezielle Tori. Eine Besonderheit, die bei den Jacobischen auffällt, ist, dass in ihnen eine Untervarietät der komplexen Dimension $g-1$ (ein sogenannter Divisor) $\Theta \subset \mathrm{Jac}(X)$ existiert, nämlich $\Theta = \Psi^{g-1}(X^{g-1})$. Die g-te Selbstschnittzahl dieses Divisors is $g!$. Ein Paar (A, Θ) bestehend aus einem komplexen Torus und einer Untervarietät der Kodimension 1 mit dieser Eigenschaft nennt man eine **hauptpolarisierte abelsche Varietät**. Man definiert die Modulmannigfaltigkeit der hauptpolarisierten abelschen Varitäten als

$$\boxed{\mathcal{A}_g := \Big\{ \text{Biholomorphieklassen hauptpolarisierter abelscher Varietäten } (A,\Theta) \text{ der Dimension } g \Big\}}$$

Auch diese Modulmannigfaltigkeit trägt eine geometrische Struktur (als algebraische Mannigfaltigkeit) und ihre komplexe Dimension ist

$$\dim \mathcal{A}_g = \frac{g(g+1)}{2} \qquad (\text{vergleiche} \quad \dim \mathcal{M}_g = 3g-3).$$

Die Konstruktion der Jacobischen Varietät gibt eine (algebraische) Abbildung $j : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$.

Satz von Torelli. *Die Abbildung j ist injektiv.*

Schottky-Problem. *Beschreibe das Bild von $\mathcal{M}_g$.*

Analytische Beschreibung der Modulmannigfaltigkeit der abelschen Varietäten

Sei Z eine symmetrische komplexe $g \times g$-Matrix mit positiv definitem Imaginärteil. Man kann dann das Gitter L_Z betrachten, welches von den Einheitsvektoren und von den Spalten von Z erzeugt wird. Der Torus $\mathbb{C}^g/L_Z$ trägt eine Polarisierung Θ als (Bild der) Nullstellenmenge der Thetafunktion

$$\vartheta(w) = \vartheta(Z; w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi \mathrm{i} \{n' Z n + 2n' w\}}.$$

Zwei Matrizen Z, W führen dann und nur dann zu isomorphen hauptpolarisierten abelschen Varietäten, wenn es eine ganze symplektische $2n \times 2n$-Matrix M mit der Eigenschaft

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

gibt. Die Menge aller Matrizen Z wird üblicherweise mit $\mathcal{H}_g$ bezeichnet und verallgemeinerte obere Halbebene genannt. Die Gruppe der ganzen symplektischen Matrizen Γ_g heißt (Siegelsche) Modulgruppe g-ten Grades. Diese Gruppe operiert also auf $\mathcal{H}_g$ und wir haben eine Identifikation

$$\mathcal{A}_g \cong \mathcal{H}_g / \Gamma_g.$$

Das Schottky-Problem (1888) lautet nun:

Welche Bedingungen muß eine Matrix aus $\mathcal{H}_g$ erfüllen, damit sie die Periodenmatrix einer kompakten Riemanschen Fläche ist?

Das Schottkyproblem hat noch eine Tücke, welche daher rührt, dass das Bild $j(\mathcal{M}_g)$ nicht abgeschlossen in $\mathcal{A}_g$ ist. Man schwächt das Schottky-Problem meist dahingehend ab, dass man nach einer Beschreibung für den Abschluss $\overline{j(\mathcal{M}_g)}$ in $\mathcal{A}_g$ sucht. Im Falle $g \leq 3$ gilt Gleichheit. Das Schottkyproblem beginnt also bei $g = 4$.

g	1	2	3	4	5	6
$\dim \mathcal{M}_g$	1	3	6	9	12	15
$\dim \mathcal{A}_g$	1	3	6	10	15	21

Am einfachsten wäre es natürlich, man könnte Polynomgleichungen in den Einträgen von Z finden. Dies ist mit ziemlicher Sicherheit i.a. falsch, es kann aber meines Wissens nur im Fall $g = 4$ bewiesen werden, dass es falsch ist. Die Gleichungen sind also erwartungsgemäß transzendenter Natur. Dabei sollte die eingeführte Thetafunktion und Verallgemeinerungen der Art

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (Z; w) := \sum_{n \in a/2 + \mathbb{Z}^g} e^{\pi \mathrm{i} \{n' Z n + 2n'(w + b/2)\}}.$$

auftreten. Hierbei sind a, b Spaltenvektoren mit den Einträgen $0, 1$. Insbesondere den Thetanullwerten

$$\textbf{Thetanullwerte} \quad \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (Z; 0)$$

sollte hier eine besondere Rolle zukommen. Sie sind nur dann von 0 verschieden, wenn $a'b$ gerade ist. Ihre Anzahl ist

$$N = 2^{g-1}(2^g + 1) \qquad = 3, \quad 10, \quad 36, \quad 136, \quad \ldots$$

Die Thetanullwerte für zwei Periodenmatrizen Z, W stimmen bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor genau dann überein, wenn sie unter einem gewissen Normalteiler von endlichem Index $\Gamma'_g \subset \Gamma_g$ der Siegelschen Modulgruppe äquivalent sind. Damit ein Tupel von Zahlen $(\dots X \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \dots)$ als Thetanullwerte zu einem Z auftritt, ist notwendig und —wenigstens generisch— auch hinreichend, dass dieses System von einem gewissen endlichen System homogener Polynome annulliert wird.

Dies heißt, dass man eine endliche Überlagerung $\mathcal{A}'_g \to \mathcal{A}_g$ zu betrachten hat, und für diese hat man eine Einbettung

$$\mathcal{A}'_g \cong \mathcal{H}_g/\Gamma'_g \hookrightarrow P^N(\mathbb{C}) \qquad (N = 2^{g-1}(2^g + 1)).$$

als algebraische Mannigfaltigkeit.

Leider kennt man die Gleichungen, die diese algebraische Mannigfaltigkeit definieren, nicht. Man hat in den sogenannten Riemannschen Thetarelationen ein System quartischer Polynome, welches die Thetanullwerte annulliert, aber es ist bis auf den heutigen Tage offen und vielleicht auch gar nicht richtig, dass die Riemannschen Thetarelationen alle Relationen erzeugen. Dennoch weiß man: In dieser Beschreibung erscheint der Abschluss von $\mathcal{M}_g$ als algebraische Untermannigfaltigkeit:

Es gibt für jedes g endlich viele homogene Polynome in den Thetanullwerten, welche in einem Punkt $Z \in \mathcal{H}_g$ genau dann verschwinden, wenn $(\mathbb{C}^g/L_Z, \Theta)$ in $\overline{j(\mathcal{M}_g)}$ enthalten ist.

Die Schottky–Jung–Relationen

Schottky und Jung beginnen mit einer Charakteristik von Geschlecht $g-1$:

$$m = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{2(g-1)} \ .$$

Diese werden auf zweierlei Weisen zu Charakteristiken von Geschlecht g aufgeblasen.

$$m^{(1)} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad m^{(2)} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Schottky und Jung beweisen, dass es zu jedem $Z \in \mathcal{H}_g$, welches zu einer Jacobischen gehört, ein $W \in \mathcal{H}_{g-1}$ gibt, so dass die Werte

$$\vartheta[m^{(1)}](Z;0)\,\vartheta[m^{(2)}](Z;0) \sim \vartheta[m](W;0)$$

proportional sind. Der Punkt W selbst gehört zu keiner Jacobischen, sondern zu einer sogenannten **Prymvarietät**. Diese erhält man aus einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g, indem man sie durch eine Riemannsche Fläche zweiblättrig und unverzweigt überlagert, $Y \to X$. Das Geschlecht von Y ist $2g-1$. Die Primvarietät ist definitionsgemäß der Kern des natürlichen Homomorpismus $\mathrm{Jac}(Y) \to \mathrm{Jac}(X)$. Dies ist eine (polarisierte) abelsche Varietät der Dimension $g-1$ $(= \dim Y - \dim X)$ gilt. Sie definiert W.

$Z \in \mathcal{H}_g$ „Jacobische“ von Geschlecht g,
$W \in \mathcal{H}_{g-1}$ zugehörige „Prymvarietät“,

$$\vartheta[m^{(1)}](Z;0)\,\vartheta[m^{(2)}](Z;0) \sim \vartheta[m](W;0)$$

Ist also $P(\vartheta[m]) = 0$ eine Thetarelation vom Geschlecht $g-1$ (beispielsweise eine Riemannsche), so ist

$$\boxed{P(\vartheta[m^{(1)}](Z;0)\,\vartheta[m^{(2)}](Z;0)) = 0}$$

eine Relation für Jacobische. Dies sind die **Schottky-Jung-Relationen** (1909). Man kann nun den Ort $\mathcal{SJ}_g$ aller Matrizen Z betrachten, welche dieser Relation genügen. Wir erhalten

$$\overline{j(\mathcal{M}_g)} \subset \mathcal{SJ}_g \qquad \text{(Schottky-Jung-Ort).}$$

Es ist bis heute offen, ob Gleichheit gilt. Van Geemen konnte 1984 immerhin beweisen, dass $\overline{j(\mathcal{M}_g)}$ eine irreduzible Komponente von $\mathcal{SJ}_g$ ist. Nur im niedrigsten Fall $g = 4$ konnte man Gleichheit beweisen. In diesem Fall reduzieren sich die Schottky-Jung-Relationen auf eine einzige Relation

$$\dim \mathcal{A}_4 = 10, \quad \dim \mathcal{M}_4 = 9,$$

die berühmte **Schottky-Relation**, ein von Schottky 1888 explizit angegebenes Polynom vom Grad 16 in den 136 Thetanullwerten.

Erst im Jahre 1981 konnte bewiesen werden (Igusa), dass diese Relation das Schottky-Problem löst:

$$\overline{j(\mathcal{M}_4)} = \mathcal{SJ}_4.$$

Schottky-Problem und Singularitäten des Thetadivisors

Man kann zeigen, dass für generische hauptpolarisierte abelsche Varitäten (A, Θ) der Thetadivisor immer eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Hingegen ist Θ für Jacobische singulär. Eine genaue Analyse dieses Phänomens führte **Andreotti und Mayer** dazu, folgenden Ort zu definieren,

$$\mathcal{AM}_g := \left\{\, (A, \Theta); \quad \text{dim Sing}\, \Theta \geq g - 4 \,\right\},$$

und folgenden Satz zu beweisen (1967).

Der Schottky-Ort $\overline{j(\mathcal{M}_g)}$ ist eine irreduzible Komponente des Andreotti-Mayer-Orts $\mathcal{AM}_g$.

Man weiß, dass keine Gleichheit gilt.

Alle Beispiele von Punkten des Andreotti-Mayer-Ortes, die nicht im Schottky-Ort liegen, haben die Eigenschaft, dass einer der Thetanullwerte verschwindet. Sollte dies allgemein richtig sind, so käme dies einer Lösung des Schotty-Problems sehr nahe.

Die Kadomtsev-Petvsiashvili Differentialgleichung und die Lösung des Schottky-Problems

Man betrachtet die Translate

$$\Theta_a := a + \Theta \qquad (a \in A)$$

des Thetadivisors einer hauptpolarisierten abelschen Varietät (A, Θ). Es ist sehr wahrscheinlich, dass der Durchschnitt $\Theta \cap \Theta_a$ für generische abelsche Varitäten irreduzibel ist. Hingegen kann dieser Durchschnitt für Jacobische in mehrere Komponenten zerfallen. Das hängt mit folgendem Phänomen zusammen. Ist (A, Θ) die Jacobische einer kompakten Riemannschen Fläche $X \subset A$, so gilt

$$\Theta \cap \Theta_{a-b} \subset \Theta_{a-c} \cup \Theta_{d-b} \quad \text{für alle } a, b, c, d \in X.$$

Wenn man in dieser Relation, die Punkte a, b, c, d zusammenlaufen läßt, so erhält man eine die berühmte K-P-Differentialgleichung:

Ist $Z \in \mathcal{H}_g$ die Periodenmatrix einer Jacobischen, so existieren drei Vektoren $a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}^g$ und eine Konstante λ, so dass die Thetafunktion

$$\vartheta(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi \mathrm{i} \, \{n'Zn + 2n'w\}}$$

der K-P-Differentialgleichung

$$\boxed{\begin{aligned}&\vartheta_{aaaa}\vartheta - 4\vartheta_{aaa}\vartheta_a + 3\vartheta_{aa}\vartheta_{aa} + \vartheta_a\vartheta_c - \\ &4\vartheta_{ac}\vartheta + 3\vartheta_{bb}\vartheta - 3\vartheta_b\vartheta_b + 8\lambda\vartheta^2 = 0\end{aligned}}$$

genügt.

(Die Indizes bedeuten „Richtungsableitung“.)

Als Lösung des Schottky-Problems wertet man den folgende Satz von Shiota, 1986, (algebraisiert und vereinfacht durch Arbarello und De Concini, 1984, geometrisiert duch Marini, 1998), durch welchen die sogenannte Novikov-Vermutung bewiesen wird.

Eine unzerlegbare hauptpolarisierte abelsche Varietät ist genau dann eine Jacobische, wenn ihre Thetafunktion der K-P-Differentialgleichung genügt.

(Unzerlegbar heißt, dass sie nicht kartesiches Produkt ist.)

Effektives (aber praktisch nicht durchführbares) Verfahren zur Elimination der Parameter a, b, c, λ und Verwandlung der Differentialgleichungen in Polynomleichungen beschreibt Grushevski, Princeton (2003, preprint).

Effektive Methode zur Entscheidung, ob eine Periodenmatrix von einer Jacobischen kommt

Sei $Z = X + \mathrm{i}Y \in \mathcal{H}_n$. Man kann dann

$$\delta(Z) = \min_{a \in L_Z,\, a \neq 0} \overline{a}' Y^{-1} a$$

betrachten. Diese Größe ist effektiv berechenbar. Nach **Buser-Sarnak** (1994) gilt:

$$\delta(Z) \leq \frac{3}{\pi} \log(4g+3) \qquad \text{für Jacobische,}$$

aber

$$\sup_{Z \text{ beliebig}} \delta(Z) \geq \left(\frac{\pi^g}{2g!}\right)^{-1/g} \sim \frac{g}{\pi e} \;.$$

Damit hat man für $g > 50$ gute Chancen, von einer vorgelegten abelschen Varietät zu entscheiden, dass sie keine Jacobische ist.