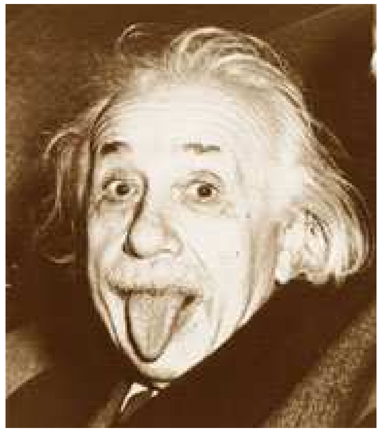


ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปและเอกภพวิทยา

100 ปีแห่งทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์

9 เมษายน พ.ศ. 2549

ณฤทธิ์ ปิฎกรัชต์

สารบัญ

คำนำ

กล่าวกันว่าแรงโน้มถ่วง (gravity) เป็นแรงที่มนุษย์ค้นพบก่อนแรงอื่น ๆ ใดในธรรมชาติ (คือก่อนแรงไฟฟ้าแม่เหล็ก แรงนิวเคลียร์อย่างอ่อนและแรงนิวเคลียร์อย่างแรง) แต่เป็นแรงสุดท้ายที่เรายังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ วิชาแรงโน้มถ่วงที่ใช้กันในปัจจุบันมีจุดเริ่มเริ่มต้นมาจากนิวตันราว 300 กว่าปีก่อนและถือว่าเป็นทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบคลาสสิกที่ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามมันมีข้อจำกัดเมื่อเราพิจารณาขนาดมวลที่ใหญ่ในระยะทางขนาดใหญ่และเมื่อเราต้องพิจารณาที่ความเร็วสูงมาก ๆ ปัญหานี้อาจจะไม่ใช่ปัญหาที่นิวตันคิดคำนึงในเวลานั้น แต่ราว 100 ปีก่อนนักฟิสิกส์ที่ชื่ออัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ (Albert Einstein) ได้เสนอทฤษฎีที่เปลี่ยนแนวความคิดและความเชื่อของนักฟิสิกส์ทันทีทันใดและตลอดไป (once and for all) โดยเขาเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษก่อนที่จะตามมาด้วยทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปซึ่งนิยมเรียกรวมกันว่า **ทฤษฎีสัมพัทธภาพ** (Relativity theory) ซึ่งทุกวันนี้ได้รับการพิสูจน์แล้วว่าเป็นทฤษฎีที่ถูกต้องและทฤษฎีของนิวตันเป็นเพียงส่วนหนึ่งของทฤษฎีของไอน์สไตน์ เรามิสามารถประเมินคุณค่าของการสร้างทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ออกมาเป็นเม็ดเงินได้เนื่องจากทฤษฎีนี้ได้ปฏิวัติโลกมนุษย์อย่างมหาศาล ไม่ว่าจะเป็นพลังงานนิวเคลียร์ การเข้าถึงโครงสร้างระดับอนุมูลของสสาร ฯลฯ ซึ่งเป็นผลการประยุกต์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ในขณะที่ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปทำให้เกิดการเดินทางสู่อวกาศเป็นรากฐานให้แก่เอกภพวิทยาและดาราศาสตร์ และการประยุกต์ใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปที่มีอยู่ในชีวิตประจำวันมากที่สุดทุกวันนี้ก็คือระบบนำร่องที่ใช้ได้ทั่วโลก (GPS หรือ Global Positioning System) ซึ่งถ้าเราไม่มีระบบนำร่องอันนี้การเดินทางข้ามทวีปจะไม่ใช่เรื่องง่ายเลย

จากประสบการณ์ของผู้เขียนพบว่ามีหนังสือที่เป็นภาษาไทยเกี่ยวกับทฤษฎีสัมพัทธภาพอยู่น้อยมากและไม่มีเล่มใดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่เป็นสากล และจากประสบการณ์การศึกษาวิจัยในสาขาทฤษฎีสัมพัทธภาพมาเป็นระยะเวลาหนึ่ง ผู้เขียนจึงเกิดแรงบันดาลใจที่จะเขียนหนังสือที่สามารถใช้ได้สำหรับผู้ที่สนใจทั่วไปที่มีความรู้ฟิสิกส์พื้นฐานมาแล้วสามารถใช้เป็นตำราศึกษา นักศึกษาฟิสิกส์ระดับอุดมศึกษาและนักฟิสิกส์สาขาใดก็ตาม ผู้เขียนพยายามครอบคลุมเนื้อหาที่เป็นมาตรฐานและทันสมัยกับวงการฟิสิกส์ในยุคปัจจุบันเพื่อให้ผู้อ่านสามารถใช้หนังสือเล่มนี้เป็นตำราหลักในการเรียนรู้ทฤษฎีสัมพัทธภาพไม่ว่าจะด้วยวัตถุประสงค์ใดก็ตาม

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปนิยมเรียกสั้น ๆ ว่า "สัมพัทธภาพทั่วไป" (General Relativity หรือที่เรียกว่า GR โดยนักฟิสิกส์ระดับสากล) เป็นสาขาวิชาหนึ่งในฟิสิกส์ที่ถือว่าสวยงามที่สุดในแง่ทฤษฎีก็ว่าได้เพราะเป็นทฤษฎีที่สามารถนำเอาคณิตศาสตร์มาบรรยายเรื่องของฟิสิกส์ได้อย่างมีหลักการที่แน่นอนโดยใช้เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์ที่รองรับแนวความคิด อย่างไรก็ตามมีการกล่าวกันว่ามันเป็นศาสตร์ที่ยากที่จะใช้งาน เนื่องจากคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากและไม่เป็นที่คุ้นเคยสำหรับนักศึกษาฟิสิกส์ส่วนใหญ่หรือแม้แต่นักฟิสิกส์ทั่วไป คณิตศาสตร์ที่เราใช้จะเป็นเทนเซอร์วิเคราะห์ (tensor analysis) และเรขาคณิตอนุพันธ์ (differential geometry) ค่อนข้างมากและก็มีการใช้

สัญลักษณ์จำนวนมากที่ไม่เป็นที่คุ้นเคยสำหรับผู้ที่เริ่มศึกษาศาสตร์อันนี้ GR คือศาสตร์ของแรงโน้มถ่วงที่รัดกุมเท่าที่เรามีอยู่และสามารถนำเอาไปใช้ได้ในวงกว้างมากพอสมควร[1] และถือว่าเป็นทฤษฎีของแรงโน้มถ่วงที่ถูกต้องที่สุดจนกว่าเราจะค้นพบ "ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงควอนตัม" (quantum theory of gravity) และเนื่องจากผู้เขียนไม่ต้องการให้ผู้อ่านสับสนกับการใช้ศัพท์ต่าง ๆ ผู้เขียนจะขอใช้คำศัพท์ภาษาอังกฤษดั้งเดิมเป็นหลักปะปนกับคำแปลเป็นภาษาไทยและคาดว่าผู้ที่จะเรียน GR ได้มีพื้นฐานฟิสิกส์ (โดยเฉพาะสัมพัทธภาพพิเศษและกลศาสตร์พื้นฐาน) และคณิตศาสตร์มาแล้วอย่างน้อยโดยประมาณ 2-3 ปีในระดับวิทยาลัยหรือมหาวิทยาลัย (คือได้ผ่านการเรียนแคลคูลัสและเวกเตอร์วิเคราะห์มาแล้ว) สำหรับผู้ที่มีพื้นฐานทางเทนเซอร์วิเคราะห์และเรขาคณิตอนุพันธ์มาบ้างแล้วน่าจะเข้าใจเนื้อหาตรงนี้ไม่ยากนัก ดังนั้นหนังสือเล่มนี้สามารถใช้เป็นตำราเรียนได้สำหรับนักศึกษาฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ประยุกต์หรือสาขาที่เกี่ยวข้องระดับปริญญาตรีตอนปลายและปริญญาโทแรกเริ่มในระยะเวลาหนึ่งภาคการศึกษา

GR เป็นวิชาว่าด้วยแรงโน้มถ่วงในแบบคลาสสิก นั่นคือไม่มีผลทางควอนตัมเกี่ยวข้องด้วย[2] และมีสมการไอน์สไตน์เป็นจุดศูนย์กลางของ GR อย่างที่สมการนิวตันคือจุดศูนย์กลางของกลศาสตร์นิวตัน ในหนังสือเล่มนี้เราจะใช้หน่วยฟิสิกส์ธรรมชาติ (natural units หรือบางครั้งเรียกว่าหน่วยแบบเรขาคณิตที่มาจากภาษาอังกฤษว่า geometrized units)[3] กล่าวคือ เราจะเขียน $G = c = 1$ ซึ่งจะช่วยให้ประหยัดเวลาในการเขียนสมการต่าง ๆ ได้ระดับหนึ่ง อย่างไรก็ตามเราจะใช้หน่วยเต็ม ๆ ในบางครั้งที่เห็นว่ามีความจำเป็นต้องใช้เพื่อความกระจ่างแจ้ง และจะมีการสอดแทรกทฤษฎีบทและแนวคิดต่าง ๆ หรือสิ่งที่ผู้อ่านควรจะทราบอยู่แล้วไว้ในตารางสี่เหลี่ยม และจะมีโจทย์ในตอนท้ายของทุกบทเพื่อที่ผู้อ่านจะได้มีโอกาสฝึกแก้ปัญหาเพื่อจะทำให้เกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ ไม่มีใครสามารถเข้าใจฟิสิกส์ได้โดยการอ่านเพียงอย่างเดียว และมีเฉลยสำหรับทุกปัญหาอยู่ตอนท้ายเล่ม

การนำเสนอในหนังสือนี้จะเป็นไปดังต่อไปนี้ ในบทแรกจะกล่าวถึงทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องรวมทั้งพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น การแปลงพิกัด แม่เหล็กไฟฟ้าเชิงสัมพัทธภาพ ฯลฯ ในบทที่ 2 จะนำเสนอเรื่องของความโค้งและคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการศึกษาความโค้งซึ่งก็คือเรขาคณิตอนุพันธ์นั่นเอง บทที่ 3 คือศูนย์กลางของเอกสารเล่มนี้กล่าวคือเราจะอธิบายสมการไอน์สไตน์และการปฏิบัติการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง บทที่ 4 คือเรื่องหลุมดำซึ่งเป็นเรื่องที่ผู้เขียนมีความคุ้นเคยจากการมีประสบการณ์ในการทำวิจัยพอสมควรจึงอยากจะขอแนะนำในรายละเอียดอย่างมีหลักการมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในปัจจุบันหลุมดำเป็นเรื่องที่นักฟิสิกส์ชั้นนำศึกษาและวิจัยอย่างจริงจังมากเนื่องจากหลุมดำเป็นวัตถุที่มีพฤติกรรมที่แสดงถึงแรงโน้มถ่วงแบบคลาสสิก (ซึ่งก็คือ GR นั่นเอง) และควอนตัม บทที่ 5 กล่าวถึงการทดสอบทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งจุดนี้จะไขข้องใจของผู้อ่านหลายท่านว่าเรารู้ได้อย่างไรว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปถูกต้องและเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใด บทที่ 6 เป็นเรื่องของคลื่นความโน้มถ่วง ซึ่งก็คือการทำนายของ GR ว่าจะต้องมีคลื่นความโน้มถ่วงอยู่เพียงแต่ว่าเรายังไม่สามารถตรวจพบได้ เราจะอธิบายในรายละเอียด บทที่ 7 เราจะศึกษาเอกภพวิทยายุคใหม่ที่มีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นรากฐานที่มั่นคง

---

[1] การประยุกต์ใช้ GR ถึงแม้ว่าจะไม่เข้าถึงอุตสาหกรรมเหมือนกับฟิสิกส์อีกหลาย ๆ สาขาเช่น ฟิสิกส์สถานะของแข็ง แต่เราก็ได้เรียนรู้เรื่องที่มีความจำเป็นต่อการเข้าใจเอกภพ เนื่องจาก GR เป็นรากฐานของเอกภพวิทยาและดาราศาสตร์ยุคใหม่ การประยุกต์เชิงอุตสาหกรรมของ GR ก็คงมีเพียงระบบนำร่อง GPS และได้เป็นที่พิสูจน์แล้วว่าถ้าไม่มีการนำผลการคำนวณจาก GR มาใช้เราจะได้ผลการวัดโดย GPS ที่ผิดพลาดมาก

[2] เราจะศึกษาความเป็นไปได้ในการศึกษาฟิสิกส์ของแรงโน้มถ่วงที่มีผลทางควอนตัมเข้ามาเกี่ยวข้องในบทที่ 8

[3] ณ จุดนี้ผู้อ่านพึงระลึกว่าเมื่อเราได้ใช้หน่วยฟิสิกส์ธรรมชาติแล้ว มิติ (dimension) ของปริมาณจะเปลี่ยนไป เช่น มวลจะเป็นปริมาณที่มีมิติเดียวกับพลังงาน เป็นต้น

สาขาวิชานี้ถือว่าเป็นสาขาที่มีความก้าวหน้าในการวิจัยมากที่สุดสาขาหนึ่งในฟิสิกส์แห่งโลกปัจจุบัน สำหรับบทที่ 8 เราจะศึกษาทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบต่าง ๆ ที่มีใช้อยู่ รวมทั้งทฤษฎีทางเลือกแบบต่าง ๆ ที่นักฟิสิกส์ได้เสนอเพื่อแก้ปัญหาบางประการที่ GR ได้สามารถให้คำตอบได้อย่างสมบูรณ์แบบ ในบทที่ 9 เราจะศึกษาทฤษฎีแรงโน้มถ่วงควอนตัมซึ่งเป็นสาขาวิชาที่ยังไม่มีการจัดตั้งอย่างเป็นทางการ เพราะไม่มีใครที่เข้าใจแรงโน้มถ่วงในระดับควอนตัมอย่างถูกต้องและกิจกรรมการศึกษาเรื่องนี้ยังเป็นไปอย่างเข้มข้นในวงการฟิสิกส์อาชีพทั่วโลก เราจะมีสรุปสูตรคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการศึกษา GR และจะมีบทสรุปของฟิสิกส์แรงโน้มถ่วงเพื่อให้ผู้ที่ใช้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้เป็นที่อ้างอิงได้อย่างรวดเร็วไม่ว่าจะเป็นการทำแบบฝึกหัดหรือหรือการทำงานวิจัย และท้ายสุดของเล่มก็จะมีบรรณานุกรมซึ่งเป็นหนังสือภาษาอังกฤษหรือวารสารต่าง ๆ ที่ผู้อ่านที่สนใจในรายละเอียดควรค้นหาเพิ่มเติม

ขอขอบคุณ ครอบครัวปิฎกรัชต์ที่รักของกระผมสำหรับการสนับสนุนในทุก ๆ ทาง ศาสตราจารย์ Ingemar Bengtsson ผู้ประสิทธิ์ประสาทความรู้วิชาแรงโน้มถ่วง ดร. บุรินทร์ กำจัดภัย ในฐานะเพื่อนร่วมงานและผู้มีอุดมการณ์เช่นเดียวกัน คุณเพชรอาภา บุญเสริม คุณสุรเชษฐ์ กาฬสินธุ์ สำหรับการพิสูจน์อักษร

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์และการศึกษาโดยรวมของประเทศไทย และผู้เขียนขอน้อมรับคำติชมและคำแนะนำต่าง ๆ เสมอ

ณฤทธิ์ ปิฎกรัชต์
กรุงสตอกโฮล์ม ประเทศสวีเดน
9 เมษายน พ.ศ. 2549

บทที่ 1

สัมพัทธภาพพิเศษ

สัมพัทธภาพพิเศษ (Special Relativity หรือที่นิยมเรียกว่า SR) โดยอัลเบิร์ต ไอน์สไตน์เกิดจากการที่เราสามารถพิจารณาความเร็วของแสงว่าเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงหรือที่เรียกว่า invariant ในกรอบอ้างอิงทุกกรอบ ซึ่งนี่คือสาเหตุที่ทำให้ไอน์สไตน์รวมเอามิติอวกาศ (หรือเรียกว่าปริภูมิในบางครั้ง) และเวลาเข้าด้วยกันเป็น *กาลอวกาศ* (spacetime) ดังนั้นเราสามารถสร้างปริมาณทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการที่เวลากับมิติอวกาศ 3 มิติมารวมกันได้ โดยเรานิยาม *เวกเตอร์-4* (4-vector ซึ่งอ่านว่า four-vector ซึ่งก็คือ position 4-vector ในกาลอวกาศ 4 มิติ) ดังต่อไปนี้[1]

$$\mathbf{x} = x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{1.1}$$

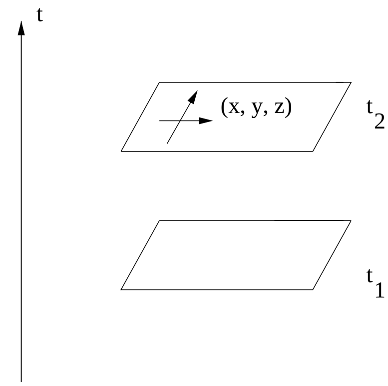
นับจากนี้ไปเราจะเขียนในใช้หน่วยธรรมชาติกล่าวคือ $c = 1$ ดังนั้นเรามี $x^\mu = (t, x, y, z)$ ในบางโอกาสเราจะเขียนมันในรูปของของเวกเตอร์คอลัมน์ซึ่งอยู่ในรูปที่สามารถทำให้ทำการกระทำต่าง ๆ ในแบบพีชคณิตเชิงเส้นได้ นั่นคือ

$$\mathbf{x} = x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

ซึ่งเป็นการเขียนในพิกัด Cartesian สังเกตว่าเรามีตัวอักษรกรีก μ โดยที่หมายถึง $\mu = 0, 1, 2, 3$ ซึ่งบอกเราว่านี่คือกาลอวกาศที่มีเวลารวมเข้าไปด้วยไม่เช่นนั้นเราก็จะมีเพียง $x^i,\ i = 1, 2, 3$ หรือจะใช้ตัวอักษรละตินอื่น ๆ ก็ได้ ในภาษาของเรขาคณิตอนุพันธ์เราจัดกาลอวกาศของ SR เป็น manifold (เราจะศึกษาเรื่องของ manifold ในรายละเอียดในบทที่ 2) ใน 4 มิติเพราะว่าเรามีเวลารวมเข้าไปกับมิติอวกาศ[2] และเราเรียกกาลอวกาศสำหรับ SR ว่ากาลอวกาศ Minkowski และเมื่อพูดถึงกาลอวกาศเราก็ต้องมีเหตุการณ์ (events) ที่เกิดขึ้น โดยที่ สำหรับเหตุการณ์หนึ่ง ๆ เราจะระบุจุดในกาลอวกาศที่ระบุโดยตำแหน่ง (space) และเวลา (time) หรือ $(\vec{x}, t)$ และเราก็มีเวกเตอร์กาลอวกาศหรือเวกเตอร์-4 ที่ชี้ไปที่เหตุการณ์ (จุด) นั้น และจากเรขาคณิตอนุพันธ์เรารู้ว่าเมื่อมี

[1]เราจะแยกเวกเตอร์-4 ออกจากเวกเตอร์ปกติใน 3 มิติอวกาศคือ เราจะใช้ตัวอักษรหนาสำหรับเวกเตอร์-4 นั่นคือ $\mathbf{x}$ ในขณะที่เราใช้ $\vec{x}$ สำหรับเวกเตอร์ปกติที่เราเรียกว่าเวกเตอร์-3

[2]เรามักเรียกกาลอวกาศ 4 มิติว่า กาลอวกาศ 3+1 (3+1 spacetime) เพื่อที่จะบอกว่านี่คือฟิสิกส์ โดยที่มีเวลาคือ 1 มิติรวมเข้าไปด้วย



รูปที่ 1.1: **แนวความคิดของไอน์สไตน์ก็คือการมองมิติอวกาศและเวลาเป็นสิ่งที่ต่อเนื่องด้วยกัน โดยที่ ณ เวลาหนึ่ง ๆ เราก็มีเหตุการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้นและเราไม่สามารถแยกเวลาออกจากเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้อีกต่อไป ซึ่งก็คือหลักของสัมพัทธภาพบอกเราว่าไม่มีเวลาที่เป็นสากล เหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นมีช่วงเวลาของมันเอง**

manifold แล้ว เราสามารถนิยามเมตริกได้ โดยที่เมตริกของกาลอวกาศ Minkowski คือ $\eta_{\mu\nu}$ ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

และ $\eta_{\mu\nu}$ เป็นเมตริกเทนเซอร์ที่สมมาตรในดัชนี ในจุดนี้ผู้อ่านบางท่านอาจจะสงสัยว่า $\eta_{\mu\nu}$ มาจากไหน จริง ๆ แล้วมันก็มาจากการที่เราหาผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์-4 เชิงอนุพันธ์ (differential 4-vector) ที่อยู่ในรูป $d\mathbf{x} = dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ และถ้าเราเขียนในภาษาของพีชคณิตเชิงเส้น การหาค่าสลับตำแหน่ง (transpose) ของ $d\mathbf{x}$ เราจะได้ $(d\mathbf{x})^{\mathbf{T}} = dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$ ซึ่งทำให้เราสามารถคำนวณหาระยะห่างบน manifold ที่เขียนแทนโดย ds^2 ของเมตริกเทนเซอร์ได้ นั่นคือ

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx^\mu dx_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

และเราใช้ข้อตกลงในการรวมของไอน์สไตน์ (Einstein summation convention) นั่นคือเราไม่จำเป็นต้องเขียนเครื่องหมาย Σ ถ้าเราเห็นตัวอักษรกรีกข้างล่างและข้างบนที่เหมือนกัน ซึ่งหมายถึงเราจะรวม (sum over) อักษรตัวนั้น ดังนั้นสำหรับ $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ เราจึงได้

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = (d\mathbf{x})^{\mathbf{T}} \eta d\mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.5}$$

manifold คืออะไร? manifold หรือในฟิสิกส์เราพูดถึง manifold ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ (differentiable manifold หรือที่เรียกบางครั้งว่า smooth manifold) คือ อวกาศ (ปริภูมิ) ที่สามารถมีความโค้งได้และมี topology ได้ในหลาย ๆ แบบ สิ่งที่สำคัญคือ ณ ตำบลท้องถิ่น manifold จะต้องมีลักษณะเหมือนกับ $\mathbb{R}^n$ ตัวอย่างง่ายที่สุดสำหรับ manifold คือพื้นผิวโลกที่เราเห็นว่าเป็นพื้นผิวที่โค้ง (curved surface) เพราะเราได้เห็นภาพถ่ายจากดาวเทียม แต่เมื่อเราอยู่บนพื้นผิวโลกเรากลับเห็นว่ามันเป็นพื้นราบ (flat surface) ดังนั้นพื้นผิวทรงกลมคือ manifold

เมตริกกับระยะทาง ในภาษาเรขาคณิตอนุพันธ์และ GR เราจะใช้คำว่าเมตริกในหลาย ๆ กรณีเพื่อกล่าวถึงระยะทางกำลังสองของเส้นหนึ่ง ๆ (line element squared) ที่เราเขียนแทนด้วย (ds^2) แทนที่จะหมายถึง g_{ij} ในสมการ $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นเมื่อเราพูดถึงระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใน manifold 2 มิติ ในพิกัด Cartesian เรามีเมตริกในรูป $dl^2 = dx^2 + dy^2$ (สำหรับใน D มิติคือ $dl^2 = \sum_{i=1}^{D}(dx^i)^2$) ถ้าเราจะเขียนให้รัดกุมก็คือ $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \delta_{ij}dx^i dx^j$ โดยที่ $i, j \in \{1, 2\}$ และ δ_{ij} เป็น Kronecker delta ซึ่งเมตริกแบบนี้ก็คืออวกาศยูคลิดนั่นเอง อาจกล่าวได้ว่าเมื่อไหร่ก็ตามที่เรามี $g_{ij} = \delta_{ij}$ เราอยู่ในอวกาศแบนราบ โดยปกติแล้วเมตริกใน 2 มิติจะเป็นเมตริกที่สามารถแปลงพิกัดให้อยู่ในรูป $dl^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$ ได้เสมอในทางทฤษฎี แต่ในทางปฏิบัติอาจจะยุ่งยากมาก ส่วนในมิติที่สูงกว่านั้นเราไม่มีทฤษฎีบทอย่างนั้น นอกจากการแปลงพิกัดแล้วการที่จะรู้ว่าเรามีอวกาศที่แบนราบหรือโค้งงอ เราต้องทำการคำนวณเทนเซอร์ความโค้ง (curvature tensor) ซึ่งเราจะกล่าวถึงในบทต่อไป นอกจากนี้ก็กล่าวได้ว่า เมตริกไม่ได้มีไว้เพื่อใช้อธิบายเรขาคณิตเพียงอย่างเดียว เราสามารถคำนวณความยาวระหว่างจุด 2 จุดบน manifold ใด ๆ ตราบเท่าที่เรามีเมตริกบน manifold นั้น ๆ กล่าวคือ ถ้ามีเมตริกในรูป $dl^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$ สูตรในการคำนวณความยาวก็คือ $L = \int_{P_1}^{P_2} dl$ โดยที่ $P_1 = x(\lambda_1)$ และ $P_2 = x(\lambda_2)$ ซึ่ง λ ก็คือตัวแปรที่กำหนดเส้นทางนั้น ๆ ดังนั้นความยาวระหว่างจุด 2 จุดคือ $L = \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} \sqrt{\delta_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda$ ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการคำนวณเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมี R ในอวกาศ (ยูคลิด) 2 มิติ โดยที่เรามีตัวแปรพิกัดดังนี้ $\{x^1 = R\cos\lambda, x^2 = R\sin\lambda\}$ ดังนั้น $dl^2 = \delta_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = R^2(\sin^2\lambda + \cos^2\lambda) = R^2$ ดังนั้นความยาวเส้นรอบวงคือ $L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\delta_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\, d\lambda = \int_0^{2\pi} R\, d\lambda = 2\pi R$ โปรดสังเกตว่าใน 2 มิติ เราจะได้ $\delta_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} \geq 0$ เสมอ ซึ่งเรียกเมตริกที่เป็นอย่างนั้นว่าเมตริกเป็นบวกตายตัว (positive-definite metric) ส่วนในมิติสูงกว่านั้นเราไม่มีความสัมพันธ์อย่างนั้นเสมอไป

การที่เรามีข้อตกลงในการรวมของไอน์สไตน์ช่วยทำให้เราประหยัดเวลาในการเขียนได้มาก และจะเห็นว่า $\eta_{\mu\nu}$ มีหน้าที่โยกตำแหน่งของตัวอักษรกรีกตัวหนึ่ง ๆ จากข้างล่างไปข้างบนหรือข้างบนลงล่าง เราเรียกเวกเตอร์แบบ x^μ ว่า *เวกเตอร์แปรต่อต้าน* (contravariant vector) และ x_μ ว่า *เวกเตอร์แปรตาม* (covariant vector)[3] กล่าวคือเรามี

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu \tag{1.6}$$

[3]ไม่มีกฎตายตัวว่าเราจะต้องใช้เวกเตอร์แบบใด แต่โดยส่วนใหญ่แล้วปริมาณทางพลศาสตร์ เช่น ความเร็ว โมเมนตัม ฯลฯ จะถูกนิยามโดย contravariant vector

และโปรดสังเกตว่าเราสามารถเขียน

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & 0 \\ 0 & \eta_{ij} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

<u>ว่าด้วยเมตริกเทนเซอร์</u>

เมตริกซ์เทนเซอร์ถือได้ว่าเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการคำนวณขนาดความยาวของเวกเตอร์ใด ๆ และก็เป็นเครื่องคำนวณผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์สองต้นใด ๆ กล่าวคือถ้าเรามีเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ซึ่งเขียนด้วยเวกเตอร์ฐาน (basis vector)

$$\mathbf{u} = u^0\hat{e}_0 + u^1\hat{e}_1 + u^2\hat{e}_2 + u^3\hat{e}_3 = u^\alpha\hat{e}_\alpha \tag{1.8}$$

และ

$$\mathbf{v} = v^0\hat{e}_0 + v^1\hat{e}_1 + v^2\hat{e}_2 + v^3\hat{e}_3 = v^\beta\hat{e}_\beta \tag{1.9}$$

เราจะนิยามเมตริกเทนเซอร์ดังต่อไปนี้

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \text{ผลคูณสเกลาร์ของ } \mathbf{u} \text{ และ } \mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \tag{1.10}$$

และ

$$g(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \text{ขนาดความยาวยกกำลังสองของเวกเตอร์ } \mathbf{u} = \mathbf{u}^2 = u^2 \tag{1.11}$$

และเรามีสัมบัติบางประการสำหรับ $g(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ดังต่อไปนี้

1. $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{u})$
2. $g(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\mathbf{w}) = g(\mathbf{w},\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha g(\mathbf{u},\mathbf{w}) + \beta g(\mathbf{v},\mathbf{w})$
3. $g(\hat{e}_\alpha,\hat{e}_\beta) = \hat{e}_\alpha\cdot\hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$
4. $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ เรามีเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{v}$

ดังนั้นเราเขียนได้ว่า

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = g(u^\alpha\hat{e}_\alpha, v^\beta\hat{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta g(\hat{e}_\alpha,\hat{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta\eta_{\alpha\beta} \tag{1.12}$$

ซึ่งถ้าเราใช้ $\eta_{\alpha\beta}$ แบบ spacelike เราจะได้ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^\alpha v^\beta\eta_{\alpha\beta} = -u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$

โดยที่ $\eta_{00} = -1$ และ $\eta_{0i} = \eta_{i0} = 0$ ซึ่งเราเรียกว่าส่วนที่อยู่นอกเส้นทะแยงมุม (off-diagonal element) และ $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ ซึ่งก็คือเดลต้าโครเน็กเกอร์ (Kronecker delta) ที่มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $i = j$ และมีค่าเป็น 0 เมื่อ $i \neq j$ การที่เราสามารถเขียน $\eta_{\mu\nu}$ โดยใช้ Kronecker delta ทำให้เราสามารถเขียน line element ในมิติกาลอวกาศใด ๆ ก็ได้[4] ดังต่อไปนี้ (ในที่นี้สำหรับกาลอวกาศแบนราบ)

$$ds^2 = \eta_{00}dt^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j = -dt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j \quad i,j = 1,\ldots,D \tag{1.13}$$

โดยที่ $D \in I^+$ สำหรับผลคูณสเกลาร์ในสมการ (1.5) เราเรียกว่า *ช่วงห่างของกาลอวกาศ* (spacetime interval) หรือ metric interval หรือ scalar invariant หรือ line element หรือเรียก

[4]ถึงแม้เราจะไม่เคยพบว่าโลกที่เราอยู่มีมากไปกว่า 4 มิติ (3 มิติอวกาศและ 1 มิติเวลา) แต่การที่เราสามารถเขียนแบบนี้ได้ก็จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ที่เราต้องสมมติฐานว่าเรามีมากกว่า 4 มิติเช่นในทฤษฎีเส้นเชือก (String theory) ซึ่งเป็นทฤษฎีหนึ่งที่กำลังมีการศึกษาและวิจัยอย่างจริงจังเพื่อเป็นทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่สามารถอธิบายแรงต่าง ๆ ได้จากหลักการเดียวกัน เป็นต้น

ง่าย ๆ ว่า "เมตริก" (metric) โดยมันให้ความหมายถึงระยะทาง (หรือช่วงห่าง) บน manifold เพื่อความเข้าใจเราสามารถพูดถึงกฎของ Pythagoras ในแง่เดียวกันได้คือ เพราะว่ากฎของ Pythagoras เป็นกฎบน manifold ยูคลิด (Euclidean manifold) ที่เขียนแทนด้วย $\mathbf{E}^3$ ซึ่งเป็น manifold 3 มิติที่มีนิยามของเวกเตอร์ ดังนั้นเมตริกบน $\mathbf{E}^3$ ก็คือ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ซึ่งก็คือช่วงห่างของมิติอวกาศ (ระยะจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่ง) นั่นเอง และนี่คือสาเหตุว่าทำไมนักสัมพัทธภาพ (Relativist) จึงเลือกเครื่องหมายหรือที่นิยมเรียกว่าสัญลักษณ์ (signature) ของเมตริกเป็น $(- + ++)$ เพราะเมื่อเราตัดเวลาออกไปเรายังคงไว้ (preserve) ซึ่งระยะทางของมิติอวกาศ (space interval) บน $\mathbf{E}^3$

หลักการพื้นฐานของสัมพัทธภาพพิเศษมีอยู่เพียง 2 ข้อคือ
(1) หลักของกาลิเลโอ ไม่มีการทดลองใด ๆ ที่สามารถวัดความเร็วสมบูรณ์ (absolute velocity) ของผู้สังเกต ผลการทดลองใด ๆ (ฟิสิกส์) ไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วของผู้สังเกตคนหนึ่งเทียบกับผู้สังเกตอีกคนหนึ่งที่ร่วมในการทดลองนั้น
(2) หลักของไอน์สไตน์ ว่าด้วยความเร็วแสงเป็นสิ่งที่คงในเอกภพ ไม่ว่าเส้นทางเดินของแสงจะอยู่ทิศทางใดของผู้สังเกตการณ์ ความเร็วของแสงในสุญญากาศที่เราวัดได้คือ 299,792.46 กิโลเมตรต่อวินาที หรือที่เราใช้โดยประมาณก็คือ 3×10^8 m/s

เมื่อเรามีเมตริกแล้ว เราก็สามารถจะทราบเรขาคณิตของกาลอวกาศได้ นั่นคือเราสามารถหาได้ว่ามันเป็น manifold ที่โค้งงอหรือแบนราบซึ่งการที่จะได้ข้อมูลดังกล่าวเราก็ต้องทำการคำนวณหรือวิเคราะห์โดยใช้วิธีการของเรขาคณิตอนุพันธ์หรือวิธีอื่น ๆ [5] เรามีนิยามสำหรับ ds^2 ดังต่อไปนี้

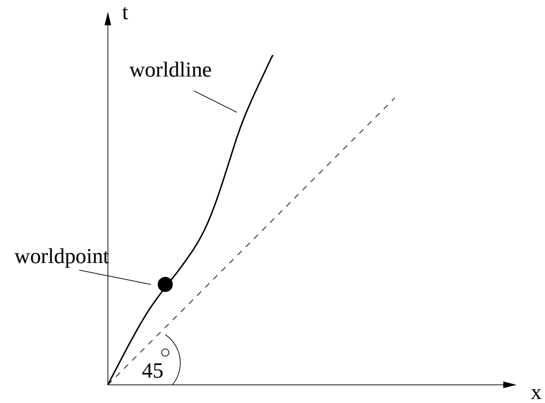
$$\begin{cases} ds^2 > 0 & \text{spacelike interval} \\ ds^2 = 0 & \text{lightlike (null) interval} \\ ds^2 < 0 & \text{timelike interval} \end{cases} \tag{1.14}$$

และก็มีความหมายดังต่อไปนี้ เมื่อเรามีอนุภาคหรือวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปในอนาคต เราจะได้ว่า $ds^2 < 0$ เพราะว่าพิกัดของช่วงห่างในอวกาศ (spatial coordinate) จะลดลงเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปในเวลาข้างหน้าในเวลา (move forward in time) และจุดนี้ทำให้เราสามารถนิยาม *เวลาแท้จริง* (proper time) ซึ่งเป็นเวลาที่วัดโดยนาฬิกาหรือเครื่องวัดเวลาที่เคลื่อนที่ไปกับอนุภาคนั้นตามเส้นทางเดินในกาลอวกาศ (trajectory in spacetime) หรือที่เราเรียกว่า *เส้นโลก*[6] (world line) และเวลาแท้จริงนี้จะต่างจากเวลาที่ผู้สังเกตคนอื่น ๆ ที่ตำแหน่งอื่น ๆ วัดได้ เราจะนิยามเวลาแท้จริงดังต่อไปนี้

ในสัมพัทธภาพหรือฟิสิกส์เราจะพูดถึง manifold ที่มีเครื่องหมายของเมตริกที่มีความต่างในเครื่องหมาย กล่าวคือมีเครื่องหมายลบหนึ่งอันและบวกอีกสาม นั่นคือ (- +++) ซึ่งในกรณีเราจะเรียกเมตริกว่าเป็น spacelike metric ซึ่งเป็นที่นิยมมากกว่าสำหรับนักสัมพัทธภาพ หรืออาจจะมีเครื่องหมายบวกหนึ่งอันและลบสามกันก็ได้ นั่นคือเรามี (+ - - -) เราจะเรียกเมตริกในกรณีนี้ว่า timelike metric และเราเรียก manifold ที่มีเครื่องหมายที่ต่างกันแบบนี้ว่า Lorentzian manifold ซึ่งจะต่างจาก Riemannian manifold ที่เครื่องหมายของเมตริกจะเหมือนกันทั้งหมด เราเรียก Lorentzian metric ว่า Pseudo-Riemannian manifold ในบางครั้ง

[5] ที่เราจะกล่าวถึงในหนังสือนี้ก็ได้แก่การทำการคำนวณเทนเซอร์ความโค้ง (curvature tensor) และสเกลาร์ความโค้ง (curvature scalar) เทนเซอร์ความโค้งที่เป็นที่รู้จักกันคือเทนเซอร์รีมันน์ (Riemann tensor) หรืออาจใช้วิธีอื่น ๆ ในการตรวจสอบว่า manifold ที่เราสนใจนั้นโค้งหรือแบนราบ เช่น การแปลงพิกัดหรือการวาดรูป

[6] การแปลเป็นภาษาไทยอาจจะไม่ให้ความหมายที่ดีทางฟิสิกส์ในบางครั้ง เส้นโลกในที่นี้ก็เหมือนกับเส้นทางชีวิต (เส้นชีวประวัติของสิ่งหนึ่ง ๆ) ของอนุภาคหรือวัตถุอันหนึ่งในกาลอวกาศ



รูปที่ 1.2: **ในทฤษฎีสัมพัทธภาพเราเขียนพิกัดที่รวมเวลาเข้าไปด้วย เราให้แสงเดินทางด้วยความเร็วคงที่ในกราฟนี้แสงเดินทางบนเส้นตรงที่ทำมุม 45° และเส้นทางเดินของอนุภาคซึ่งแสดงถึงประวัติศาสตร์หรือความเป็นไปของอนุภาคนั้น ๆ เรียกว่า เส้นโลก (world line) และจุดบนเส้นโลก เรียกว่า จุดโลก (world point)**

ถ้าให้ τ เป็นเวลาแท้จริงซึ่งสามารถคำนวณได้จาก $d\tau^2 = -ds^2$ โดยที่เป็น line element ของกาลอวกาศที่มี timelike interval ซึ่งหมายถึงเวลาอันแท้จริงของอนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วน้อยกว่าแสง ถ้าอนุภาคมีความเร็วเท่ากับความเร็วแสง ซึ่งได้แก่ โฟตอน เราจะได้ $ds^2 = 0$ ซึ่งหมายความว่าโฟตอนเป็นอนุภาคที่เดินทางบนกรวยแสง และถ้าเราจะขยายกรณีนี้สำหรับมิติใดเราจะได้ว่า $ds^2 = 0 \Leftrightarrow dt^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^D)^2$ ซึ่งเราเรียกว่า lightlike hypersurface หรือ null hypersurface ไม่เช่นนั้นเราก็จะได้ช่วงห่างของกาลอวกาศซึ่งเราไม่สามารถนิยามเวลาแท้จริงได้ ซึ่งที่กล่าวมานี้เป็นการมองกาลอวกาศเป็นโครงสร้างที่มีกรวยแสง[7] (light cone) ที่แสดงถึงในสมการ (1.14) ถ้าเราเขียน

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -ds^2 \\ &= -(-dt^2 + d\vec{r}\cdot d\vec{r}) \\ &= (dt^2 - d\vec{r}^{\,2}) = dt^2\left(1 - (dr/dt)^2\right) \\ &= dt^2(1 - v^2) \\ \Rightarrow d\tau &= dt\sqrt{1 - v^2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

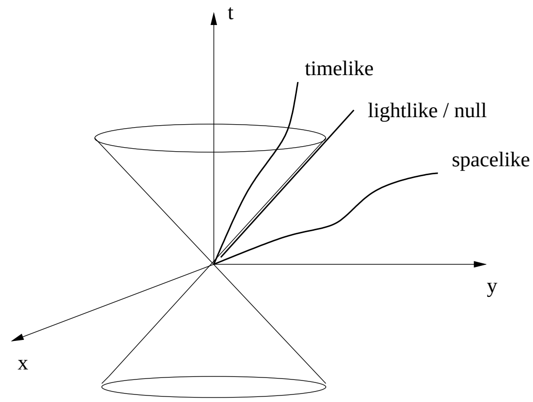
ดังนั้นเราได้ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาในพิกัดกับเวลาแท้จริง

$$\boxed{\tau = \int dt\sqrt{1 - v^2}} \tag{1.16}$$

เมื่อเรามีเวกเตอร์และจากแนวคิดของกาลอวกาศเราก็สามารถนิยามความเร็วของอนุภาคในกาลอวกาศได้โดยเรามีปริมาณที่เรียกว่า *ความเร็ว-4 (4-velocity)* ซึ่งเป็นความเร็วที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโลก โดยนิยามคือ

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{\sqrt{1 - v^2}dt} \tag{1.17}$$

[7] ในการวาด diagram เราไม่สามารถวาดมิติทั้ง 4 ได้ดังนั้นเราต้องลดมิติของอวกาศให้เหลือ 2 และ1 มิติสำหรับเวลาโดยให้เป็นแนวตั้งและเราให้แสงเดินทางที่มุม 45 องศากับแกนของมิติอวกาศ ดังนั้นเราจึงได้รูปออกมาเป็นกรวยแสง



รูปที่ 1.3: **กรวยแสงในกาลอวกาศ Minkowski เรามี 3 อาณาเขตตามที่สมการ (1.14) กล่าวไว้แสง (หรืออนุภาคใด ๆ ที่ไม่มีมวล) จะเดินทางบนกรวยแสงที่ทำมุม 45 องศากับแกนของมิติอวกาศ ไม่มีวัตถุใดที่สามารถเดินทางนอกกรวยแสงได้นอกเสียว่าอนุภาคนั้นจะเดินทางได้เร็วกว่าแสง ซึ่งไม่อนุภาคใดเท่าที่เราทราบสามารถเดินทางได้เร็วกว่าแสงเนื่องจากหลักของสัมพัทธภาพพิเศษได้ระบุไว้ว่าสิ่งใดก็ตามที่มีมวลถ้าจะเดินทางด้วยความเร็วเท่าแสงจะต้องมีมวลเป็นอนันต์ อย่างไรก็ตามเคยมีการเสนอว่าอนุภาคที่เร็วกว่าแสงจะต้องมีมวลเป็นจำนวนติดลบ (negative mass) และตั้งชื่อมันว่า เตคิออน (Tachyon) แต่ไม่เคยมีการค้นพบไม่ว่าจากการทดลองใด ดังนั้นเราสามารถระบุได้ว่าไม่มีมวลที่ติดลบและไม่มีอะไรที่มีมวลที่สามารถเดินทางนอกกรวยแสงได้**

ในกรอบนิ่ง (rest frame) จะได้ว่า $U^\mu = (1,0,0,0)$ และเมื่อพิจารณาในรายละเอียดแล้วเราจะพบว่าเส้นโลกนั้นจะต้องถูกกำหนดโดยตัวแปรบางอย่าง จากสมการของเวลาแท้จริงข้างต้นเรามี

$$\tau = \int \sqrt{-ds^2} = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\, d\tau \tag{1.18}$$

ดังนั้น τ คือตัวแปรกำหนด (parameter) ของเส้นโลกใน timelike interval โดยที่เวลาแท้จริงที่เราคำนวณก็คือจาก τ_1 ถึง τ_2 เพราะจริง ๆ แล้ว $x^\mu = x^\mu(\tau)$ และเพราะว่า $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ดังนั้นเราได้เงื่อนไขของการ normalize ดังนี้

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \tag{1.19}$$

นอกจากนี้เราสามารถนิยามโมเมนตัมได้ด้วย ซึ่งเป็นไปตามหลักการที่เรามีอยู่แล้วจากกลศาสตร์นิวตัน นั่นคือในที่นี้เรามี *โมเมนตัม-4* (4-momentum) ในบางครั้งเราเรียกว่า เวกเตอร์พลังงาน-โมเมนตัม (energy-momentum vector) ที่นิยามโดย

$$\mathbf{p} = p^\mu = m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = (p^0, p^1, p^2, p^3) \tag{1.20}$$

โดยที่พลังงานของอนุภาคก็คือตัวแปรในตำแหน่ง 0 หรือ $p^0 = mc^2$ ซึ่งก็คือมวลนิ่ง (rest mass) ในกรอบอ้างอิงนิ่ง (rest frame) นั่นเอง ความสัมพันธ์ที่เราได้จากการเขียนโมเมนตัม-4 คือพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ (relativistic energy) เพราะว่าเรามี[8]

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right) \quad \text{และ} \quad p_\mu = \left(-\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \tag{1.21}$$

[8]โปรดสังเกตว่าถ้าเราใช้เมตริกที่มีสัญลักษณ์ที่ต่างไปเราจะได้ $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

ซึ่งหมายความว่า

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = p^2 = p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} \tag{1.22}$$

และเมื่อใช้นิยาม $p^\mu = mU^\mu$ ซึ่งเราจะได้

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = p^2 = p^\mu p_\mu = -m^2c^2 \tag{1.23}$$

จากสมการ (1) และสมการ (1.23) เราจึงได้[9]

$$\boxed{-m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} \tag{1.24}$$

ดังนั้นเราได้

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \tag{1.25}$$

สำหรับโฟตอนซึ่งเป็นอนุภาคที่ไม่มีมวลและไม่กรอบอ้างอิงนิ่งใด ๆ (ซึ่งเรามี $ds^2 = 0$ และ $d\tau = 0$ ซึ่งหมายความว่าเราไม่สามารถนิยามความเร็ว-4 ได้) เราจะได้สมการ (1.23)

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = p^2 = p^\mu p_\mu = 0 \tag{1.26}$$

ดังนั้นพลังงานของโฟตอนก็คือ

$$E = pc \tag{1.27}$$

เพราะว่ามวลของอนุภาคที่อยู่นิ่งไม่คงที่ภายใต้การแปลงลอเรนซ์[10] ดังนั้นสำหรับกรอบที่เคลื่อนที่ (Moving frame) เราจะมีตัวประกอบลอเรนซ์ (Lorentz factor) เข้ามาเกี่ยวข้อง สำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่ในแกน x เราจะเขียนได้ว่า

$$p^\mu = (\gamma m, v\gamma m, 0, 0) \tag{1.28}$$

โดยที่ตัวประกอบลอเรนซ์ (หรือมักเรียกว่าตัวประกอบแกมม่า (gamma factor)) โดยที่ $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ สำหรับโฟตอนที่เคลื่อนที่ในแนวแกน x เราจะได้ ($p^x = E$)

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -E^2 + E^2 = 0 \tag{1.29}$$

จากฟิสิกส์ควอนตัมเราทราบว่า $E = h\nu$ โดยที่ h คือค่าคงที่ของพลั้งค์ (Planck's constant) ซึ่งมีค่า $h = 6.6256 \times 10^{-34}$ J/s และ ν คือความถี่ของโฟตอนหรือคลื่นแสง ดังนั้นถ้าเราทำการแปลง Lorentz กับโฟตอนเราจะได้ดังต่อไปนี้

สมมติว่าเรามีโฟตอนในกรอบอ้างอิง $\mathcal{O}$ ที่มีความถี่ ν และเคลื่อนที่บนแกน x สัมพัทธ์กับโฟตอนในกรอบ $\bar{\mathcal{O}}$ ที่มีความถี่ $\bar{\nu}$ จากสูตรการแปลง Lorentz เราจะได้พลังงาน

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \gamma(E - p^x v) \\
&= \gamma(h\nu - h\nu v) \\
&= \frac{h\nu}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{h\nu v}{\sqrt{1-v^2}} = h\bar{\nu}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

[9]เราจะไม่ใส่ใจกับพลังงานที่ติดลบในที่นี่ ดังนั้นเราจึงตัดเครื่องหมายลบ "−" ข้างหน้ารากที่สองในสมการ (1.25) ได้ อย่างไรก็ตามในทฤษฎีสนามควอนตัมจะมีการกล่าวถึงเรื่องนี้ในรายละเอียดภายใต้หัวข้อเรื่องปฏิอนุภาค

[10]การแปลงลอเรนซ์คือการแปลงพกัดในกาลอวกาศ ซึ่งเราจะกล่าวถึงในรายละเอียดภายหลัง

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\bar{\nu} &= \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v\nu}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{(1-v)\nu}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \tag{1.31}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}} \tag{1.32}$$

ซึ่งก็คือ Doppler shift ของโฟตอนนั่นเอง และเมื่อมีโมเมนตัมแล้วเราก็สามารถนิยามแรงได้ (แรงคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเทียบกับเวลา) โดยที่เราเรียกแรงนี้ว่า *แรง-4* (4-force) ซึ่งนิยามโดย

$$\mathbf{f} = f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = ma^\mu = m\mathbf{a} \tag{1.33}$$

โดยที่ $\mathbf{a} \equiv a^\mu$ คือ *ความเร่ง-4* (4-acceleration) สำหรับอนุภาคอิสระซึ่งเป็นอนุภาคที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ[11] (free particle) เราจะได้ว่า $f^\mu = 0$ ซึ่งก็คือกฎข้อที่หนึ่งของนิวตันนั่นเอง แต่เป็นการเขียนภายใต้หลักสัมพัทธภาพ นั่นคือ

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \tag{1.34}$$

และเมื่อถอดสมการจะได้

$$x^\mu = v_0^\mu \tau + x_0^\mu \tag{1.35}$$

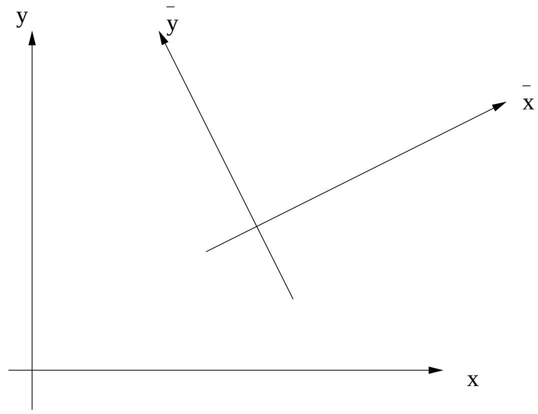
นั่นคืออนุภาคอิสระจะเดินทางเป็นเส้นตรงในกาลอวกาศ Minkowski

1.1 การแปลงพิกัดในกาลอวกาศ

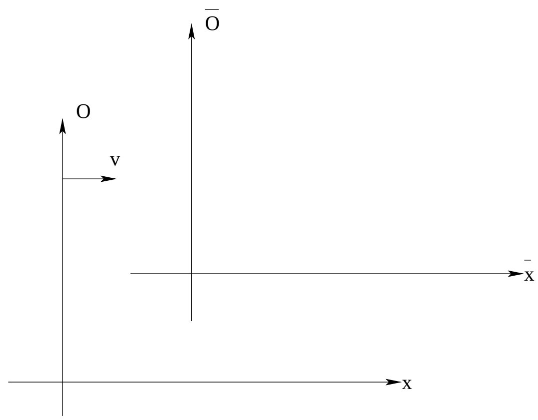
เราจะศึกษาการแปลงพิกัดที่เกิดขึ้นในกาลอวกาศ (transformations in spacetime) โดยจะแสดงให้เห็นว่าการแปลงพิกัดในกาลอวกาศ 3+1 มิติต่างไปจากการแปลงพิกัดในอวกาศ 3 มิติโดยจะมีหลักของสัมพัทธภาพเข้ามาเกี่ยวข้อง สำหรับการแปลงของอวกาศ 3 มิติและเวลาในกลศาสตร์ของนิวตันเรามีการแปลงที่เรียกว่าการแปลงแบบกาลิเลโอ (Galilean transformations) ซึ่งมีเวลาเป็นปริมาณสมบูรณ์ (คือไม่สัมพัทธ์กับเหตุการณ์ใด ๆ) ดังนั้นการแปลงพิกัดของ (x, y, z, t) ไปสู่ (x', y', z', t') ของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ เป็นไปดังนี้

$$\text{การแปลงพิกัดแบบกาลิเลโอ} \begin{cases} x = & \bar{x} + vt \\ y = & \bar{y} \\ z = & \bar{z} \\ t = & \bar{t} \end{cases} \tag{1.36}$$

[11] โปรดระลึกว่าถึงแม้ว่าจะไม่มีแรงกระทำไม่ได้หมายความว่าไม่มีแรงโน้มถ่วงอยู่ในบริเวณที่เราพิจารณา เพราะใน GR แรงโน้มถ่วงจะแสดงออกในรูปของความโค้งของกาลอวกาศ



รูปที่ 1.4: **เราสามารถมองการแปลงพิกัด 2 มิติว่าเป็นการหมุนซึ่งเรียกว่าการหมุนยูคลิด (Euclidean rotation)**



รูปที่ 1.5: **การแปลงแบบกาลิเลโอซึ่งเป็นไปตามสูตร (1.36)**

โดยที่ v คือความเร็วของระบบพิกัดที่แสดงเหตุการณ์ $\mathcal{O}$ ในแกน x เทียบกับพิกัดที่แสดงเหตุการณ์ $\bar{\mathcal{O}}$ จะเห็นว่าการแปลงแบบกาลิเลโอไม่มีข้อจำกัดของความเร็วในการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตการณ์ สำหรับการแปลงความเร็วเราได้

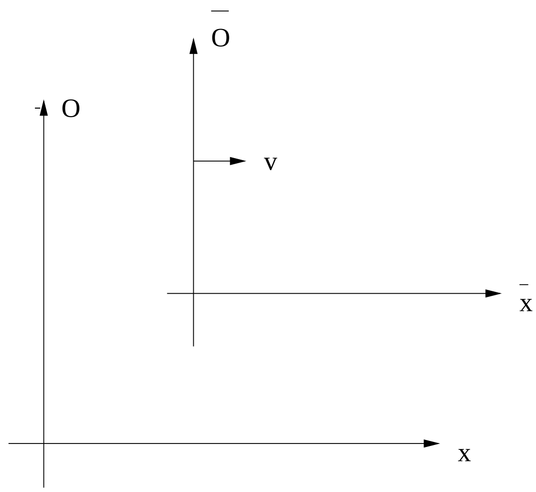
$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} + v \tag{1.37}$$

และการแปลงโมเมนตัมแบบกาลิเลโอก็มีรูปแบบที่ตรงไปตรงมา กล่าวคือ

$$\vec{p} = \vec{\bar{p}} + m\vec{v} \tag{1.38}$$

อย่างไรก็ตามเราทราบจากหลักสัมพัทธภาพว่าความเร็วแสงคือความเร็วสูงสุดที่เป็นไปได้ในเอกภพ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้การแปลงแบบกาลิเลโอได้อย่างเป็นสากลอย่างถูกต้อง สำหรับสัมพัทธภาพเราจะจึงต้องใช้การแปลงลอเรนซ์ (Lorentz transformation)[12] ซึ่งก็คือการแปลงพิกัดในกาลอวกาศซึ่งหมายความว่าเราเขียนพิกัดของเหตุการณ์หนึ่ง (ซึ่งเราแทนโดย $\bar{\mathcal{O}}$) ในพจน์ของพิกัดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง (ซึ่งเราแทนด้วย $\mathcal{O}$) กล่าวคือ ถ้าเรามีเหตุการณ์ $\mathcal{O}$ เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับ

[12] อาจมองการแปลงลอเรนซ์ว่าเป็นชุดของสูตรคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแปลงระบบในกาลอวกาศในกรอบเฉื่อยกรอบหนึ่งไปสู่อีกกรอบหนึ่งโดยยังคงไว้ซึ่งโครงสร้างคณิตศาสตร์ของกาลอวกาศ



รูปที่ 1.6: **การแปลงลอเรนซ์**

เหตุการณ์ $\bar{\mathcal{O}}$ ในแกน x เราจะได้ความเร็วของแกนที่ตั้งฉากกับแกน x ไม่เปลี่ยนแปลง (นั่นคือแกน y และแกน z) ซึ่งสูตรของการแปลงในสำหรับแกน x ก็คือ

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1.39}$$

$$\bar{x} = \frac{-vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1.40}$$

$$\bar{y} = y \tag{1.41}$$

$$\bar{z} = z \tag{1.42}$$

เราเรียกการแปลงของความเร็วในทิศทางแกน x ว่า boost ของความเร็วในแกน x ส่วนการแปลงผกผันเราจะได้

$$t = \frac{\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v\bar{x}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1.43}$$

$$x = \frac{v\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\bar{x}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1.44}$$

$$y = \bar{y} \tag{1.45}$$

$$z = \bar{z} \tag{1.46}$$

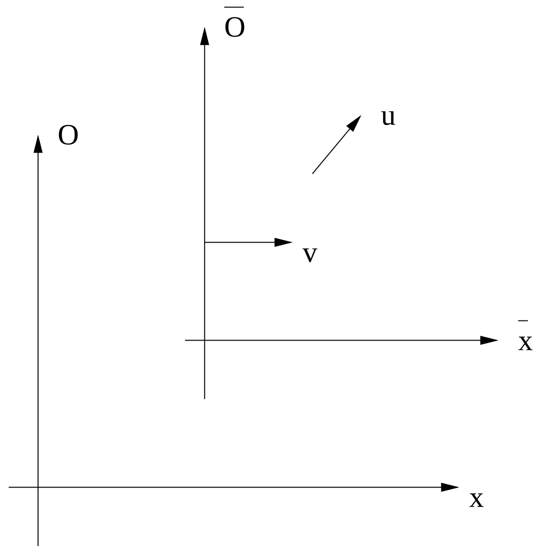
และถ้าเราทำการแปลงความเร็วในแบบการแปลงลอเรนซ์ระหว่าง 2 เหตุการณ์เมื่อเหตุการณ์ $\bar{\mathcal{O}}$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เทียบกับเหตุการณ์ $\mathcal{O}$ ในแกน x จะได้ว่า

$$u_x = \frac{\bar{u}_x + v}{1 + \bar{u}_x v/c^2}, \qquad \bar{u}_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \tag{1.47}$$

$$u_y = \frac{\bar{u}_y}{\gamma(1 + \bar{u}_x v/c^2)}, \quad \bar{u}_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \bar{u}_x v/c^2)} \tag{1.48}$$

$$u_z = \frac{\bar{u}_z}{\gamma(1 + \bar{u}_x v/c^2)}, \quad \bar{u}_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \bar{u}_x v/c^2)} \tag{1.49}$$

เราสามารถกล่าวถึงการแปลงในแบบทั่ว ๆ ไปได้โดยเปรียบเทียบกับการหมุน (rotation) เพราะเหมือนกับการที่เรามองเหตุการณ์หรือวัตถุหนึ่ง ๆ โดยที่เปลี่ยนมุมมองซึ่งอาจจะทำให้มองเห็นไม่



รูปที่ 1.7: **การแปลงความเร็วแบบลอเรนซ์**

เหมือนกับเหตุการณ์หรือวัตถุก่อนที่จะเปลี่ยนมุมมอง อย่างไรก็ตามเรารู้แน่ ๆ ว่าเรากำลังมองที่เหตุการณ์หรือวัตถุอันเดียวกัน เราสามารถแสดงให้เห็นทางคณิตศาสตร์ได้ โดยตัวอย่างที่ง่ายที่สุดได้แก่ การหมุนในอวกาศยูคลิด (Euclidean space) 2 มิติ สมมุติว่าเราต้องการแปลงพิกัด (x, y) ไปสู่ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

โดยที่ b_1 และ b_2 คือค่าคงที่เพื่อแสดงว่าพิกัดทั้งสองไม่จำเป็นต้องมีจุดกำเนิด (origin) ที่เดียวกัน เราสามารถขยายความได้ดังต่อไปนี้ ถ้าทำการคำนวณอนุพันธ์ของสมการ (1.50) เราจะกำจัดค่าคงที่ b_1 และ b_2 ออกไป ซึ่งหมายความว่าเรามีเสรีภาพในการเลือกที่วางตำแหน่งพิกัดที่ใดก็ได้โดยไม่ทำให้ค่าของเมตริกในสมการ (1.50) เปลี่ยนไป เราเรียกเสรีภาพนี้ว่าเสรีภาพในความคงที่ของภายใต้การแปลง (freedom of transformation invariance) ถ้าเราคำนวณขนาดความยาวโดยใช้กฎของ Pythagoras ของพิกัดก่อนและหลังแปลงเราจะได้ว่ามันมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1.51}$$

ซึ่งหมายความว่าเราได้

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \tag{1.52}$$

และ

$$a_{11}a_{12} = -a_{21}a_{22} \tag{1.53}$$

สังเกตว่าเรามี 3 สมการแต่มี 4 ตัวแปร ดังนั้นเราไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นแบบเดียว (unique solution) ได้ เราสามารถเลือกคำตอบให้เป็น

$$a_{11} = a_{22} = \cos\theta \tag{1.54}$$

$$a_{12} = a_{21} = \sin\theta \tag{1.55}$$

ซึ่งเป็นตัวแปรที่บรรยายการหมุนด้วยมุม θ หรืออาจจะเลือก

$$a_{11} = -a_{22} = \cos\theta \tag{1.56}$$

$$a_{12} = a_{21} = \sin\theta \tag{1.57}$$

ซึ่งหมายถึงการสะท้อน (reflection) รอบแกนด้วยมุม θ สำหรับสมการ (1.54) และเมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้กลับลงในสมการ (1.50) จะได้

$$\tilde{x} = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{1.58}$$

$$\tilde{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta \tag{1.59}$$

การแปลงในสมการ (1.58) และ (1.50) คือการหมุนของระบบพิกัดมุมฉาก (rectangular) ด้วยมุม θ รอบจุดกำเนิด $x = y = 0$

สมมุติว่าเรามีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ที่ชี้ไปที่วัตถุหรือเหตุการณ์ $\mathcal{O}$ ในกาลอวกาศยูคลิด สำหรับระบบพิกัด (x, y) เราจะได้

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \tag{1.60}$$

สำหรับเหตุการณ์ $\bar{\mathcal{O}}$ เราจะได้เวกเตอร์ระบุตำแหน่งเป็น

$$\vec{\bar{r}} = \bar{x}\hat{e}_{\bar{x}} + \bar{y}\hat{e}_{\bar{y}} \tag{1.61}$$

ทำให้เราได้การแปลงพิกัดของเวกเตอร์ฐาน (basis vector) ดังนี้

$$\hat{e}_{\bar{x}} = \hat{e}_x\cos\theta + \hat{e}_y\sin\theta \tag{1.62}$$

$$\hat{e}_{\bar{y}} = -\hat{e}_x\sin\theta + \hat{e}_y\cos\theta \tag{1.63}$$

เราได้การแปลงการหมุนเขียนแบบเมตริกซ์ในรูป

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

โดยที่ค่าผกผัน (inverse) ของเมตริกซ์นี้คือ

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta) \tag{1.65}$$

นอกจากนี้เราพบว่า $R(\theta)$ มีสมบัติ

$$\det(R) = 1 \tag{1.66}$$

$$R^T I R = I \quad \text{โดยที่ } I \text{ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)} \tag{1.67}$$

นอกจากนี้ R มีสมบัติการแปลงเชิงเส้นพิเศษ (special linear transformation) และเป็นเมตริกซ์มุมฉาก (orthogonal) ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถจัดกลุ่มของการแปลงเชิงเส้นใน 2 มิติ โดย

เราเรียก $R(\theta)$ ว่าเป็นกลุ่ม SO(2) ซึ่งมาจากคำว่า Special Orthogonal ใน 2 มิติ เราสามารถทำการแปลงเชิงเส้นพิเศษในมิติจำนวนใด ๆ ก็ได้ เช่น ใน 4 มิติ เราจะได้ SO(4) ส่วนในมิติ D ใด ๆ เราเขียนว่า SO(D) แน่นอนว่ารูปแบบของเมตริกซ์จะเปลี่ยนไปจากเมตริกซ์ของ SO(2)

ในอวกาศ 3 มิติถ้าเราทำการหมุนระบบหนึ่ง (ในที่นี้หมายถึงระบบพิกัดหนึ่ง ๆ) กล่าวคือพิกัดของเราที่แทนโดยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ เปลี่ยนไปเป็น $\vec{r}\,'$ หรือ $\vec{r} \to \vec{r}\,'$ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{r}\,' = \mathbb{R}\vec{r} \tag{1.68}$$

โดยที่ $\mathbb{R}$ คือเมตริกซ์ของการหมุน (rotation matrix) ซึ่งสำหรับการหมุนโดยทั่วไปเมตริกซ์นี้จะเป็นเมตริกซ์ 3 มิติหรือเรียกว่าเมตริกซ์ 3×3 เราเรียกสมการ (1.68) ว่าเป็นการแปลงแบบมุมฉาก (orthogonal transformation) ถ้าเราทำการหมุนรอบแกน z ด้วยมุม θ จะได้เมตริกซ์ $\mathbb{R}$ ในรูป

$$\mathbb{R}(z;\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

การแปลงนี้ไม่ทำให้ระยะทาง ds^2 บนระนาบยูคลิดเปลี่ยนค่า (ระยะทางบนระนาบยูคลิดคือ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) หรือกล่าวว่าระยะทาง ds^2 บนระนาบยูคลิด invariant ภายใต้การแปลงแบบมุมฉาก สมบัติอย่างหนึ่งของเมตริกซ์นี้ก็ค่าผลผันเท่ากับค่าสลับตำแหน่ง (transpose) ของเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\mathbb{R}^{-1} = \mathbb{R}^T \tag{1.70}$$

สำหรับกาลอวกาศ 3+1 มิติ เราจะได้การหมุนที่แตกต่างไปแต่เรียกว่าการหมุนในกาลอวกาศ (spacetime rotation) ซึ่งจริงแล้วก็คือการแปลงลอเรนซ์ (Lorentz transformation หรืออาจเรียกว่า Lorentz boost ก็ได้) ซึ่งเป็นการแปลงพิกัดจากระบบหนึ่งไปสู่ระบบหนึ่งในกาลอวกาศ สมมุติว่าสำหรับกาลอวกาศหนึ่ง ๆ เรามีระบบหนึ่งอยู่คงที่และอีกระบบหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวแกน x เทียบกับระบบแรกจะได้ว่า

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x} \tag{1.71}$$

หรือถ้าเขียนแบบมีค่าพิกัดด้วยจะได้

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.72}$$

โดยที่ $\Lambda^\mu{}_\nu$ คือเมตริกซ์ลอเรนซ์ (Lorentz matrix) ซึ่งมีค่า

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

ซึ่ง $\beta = v/c$ และ $\gamma = (1-\beta^2)^{-1}$ นิยมเรียก γ ว่าตัวประกอบลอเรนซ์ (Lorentz factor) และเรามีความสัมพันธ์สำหรับ β และ γ ดังนี้ (ค่าของตัวแปรทั้งสองอยู่ในห้วงดังนี้ $0 \leq \beta \leq 1$ และ $1 \leq \gamma \leq \infty$)

$$\beta = \tanh\omega \tag{1.74}$$

$$\gamma = \cosh\omega \tag{1.75}$$

$$\beta\gamma = \sinh\omega \tag{1.76}$$

เราเรียก ω ว่า ความรวดเร็ว (rapidity) หรือตัวแปรกระตุ้น (boost parameter) นั่นคือเราสามารถคำนวณค่าความรวดเร็วจากค่า β ได้ นั่นคือ

$$\omega = \tanh^{-1}\beta \tag{1.77}$$

เราเรียก β ว่า เบต้าสัมพัทธภาพ (Relativistic beta) ซึ่งเป็นตัวแปรที่บ่งบอกความเป็นสัมพัทธภาพของระบบหนึ่ง ๆ เช่น โฟตอนจะมี $\beta = 1$ และเมื่อใช้ตัวแปรเหล่านี้ทำให้สามารถเขียนการแปลงลอเรนซ์ใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{t} = t\cosh\omega - x\sinh\omega \tag{1.78}$$

$$\bar{x} = -x\sinh\omega + x\cosh\omega \tag{1.79}$$

$$\bar{y} = y \tag{1.80}$$

$$\bar{z} = z \tag{1.81}$$

ดังนั้นเมตริกซ์ลอเรนซ์ที่เขียนในพจน์ของความรวดเร็วจะอยู่ในรูป

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.82}$$

การแปลงลอเรนซ์คือการแปลงพิกัดที่ไม่ทำให้ปริมาณ $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}\cdot d\vec{x} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ เปลี่ยนแปลง เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \;\; \text{หรือ} \;\; \Lambda^\rho{}_\mu\eta_{\rho\sigma}\Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{1.83}$$

และเราได้ว่าค่า determinant ของเมตริกซ์ลอเรนซ์เป็นได้สองค่า นั่นคือ $\det(\Lambda) = \pm 1$ โดยที่ค่า $\det(\Lambda) = 1$ หมายถึงเรามีการแปลงลอเรนซ์บริสุทธิ์ (pure Lorentz transformation) ถ้า $\det(\Lambda) = -1$ เราจะเรียกว่าตัวกระทำสะท้อน (reflection operator หรือ parity operator) โดยที่ก่อให้เกิดการแปลง $x^\mu \to x^\mu = (x^0, -x^i)$ และ $\Lambda^2 = 1$ ดังนั้น ตัวกระทำสะท้อนเป็นตัวกระทำหน่วย (unit operator)

ผลจากการแปลงลอเรนซ์ทำได้เราค้นพบปรากฏการณ์ที่สำคัญ 2 ปรากฏการณ์คือ การหดของระยะทางหรือความยาว (length contraction หรือเรียกในบางครั้งว่า Lorentz contraction) และการยืดขยายของเวลา (time dilation)

1.1.1 สัมพัทธภาพแห่งความพร้อมเพรียง

สัมพัทธภาพแห่งความพร้อมเพรียง (Relativity of simultaneity) กล่าวไว้ว่า **เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ใด ๆ ที่เกิดขึ้น ณ เวลาเดียวกันแต่ในที่ ๆ ต่างกันในกาลอวกาศสังเกตโดยผู้สังเกตการณ์คน (กลุ่ม) หนึ่ง ไม่ได้เกิด ณ เวลาเดียวกันซึ่งวัดโดยผู้สังเกตการณ์อีกคนหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอสัมพัทธ์กับผู้สังเกตการณ์คน (กลุ่ม) แรก**

สรุปเป็นสูตรได้ว่า สำหรับเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ในกรอบพิกัด $\tilde{S}$ ซึ่งเป็นไปตาม $\Delta\tilde{t}$ และ $\Delta\tilde{x} \neq 0$ จะเป็นจริงในกรอบ S ใด ๆ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ (คงที่) เทียบกับ $\tilde{S}$ ซึ่งมี

$\Delta\tilde{\tau} \neq 0$ จากหลักการ invariance ที่เราทราบจะได้

$$-\Delta\tau^2 + \Delta x^2 = -\Delta\tilde{\tau}^2 + \Delta\tilde{x}^2 \tag{1.84}$$

โปรดระลึกว่า Δx^2 หมายถึง $(\Delta x)^2$ ฯลฯ ดังนั้นถ้า $\Delta\tilde{\tau} = 0$ และ $\Delta\tilde{x} \neq 0$ จะได้ว่า

$$\Delta\tau^2 = \Delta x^2 - \Delta\tilde{x}^2 \tag{1.85}$$

ปริมาณนี้มีค่าเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ $\Delta x^2 = \Delta\tilde{x}^2$ แต่เพราะว่าการที่ปริมาณนี้จะเป็นศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อค่า β ในการแปลงลอเรนซ์จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่เกิด ณ เวลาเดียวกันในกรอบ $\tilde{S}$ จะไม่เกิดพร้อมกันเมื่อสังเกตการณ์โดยผู้สังเกตในกรอบ S ซึ่งมี $\beta \neq 0$ สัมพัทธ์กับกรอบ $\tilde{S}$

เมื่อพิจารณาการแปลงลอเรนซ์ระหว่าง S และ $\tilde{S}$ จะได้

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \gamma\Delta\tilde{\tau} + \gamma\beta\Delta\tilde{x}\\ \Delta x &= \gamma\Delta\tilde{x} + \gamma\beta\Delta\tilde{\tau}\end{aligned} \tag{1.86}$$

สำหรับ $\Delta\tilde{\tau} = 0$ เราจะได้

$$\Delta\tau = \gamma\beta\Delta\tilde{x} \tag{1.87}$$

โดยที่ $\Delta\tilde{x}$ ก็คือความยาวแท้จริง (proper length)

> ทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ตอกย้ำความขัดแย้งกับกับความคิดแบบจิตใต้สำนึกของมนุษย์ในเรื่องการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ ในกาลอวกาศ **เราเลิกที่จะเชื่อว่าทุกสิ่งทุกอย่างอยู่อย่างสัมบูรณ์** การวัดอวกาศและเวลาจะไม่ให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกันสำหรับผู้สังเกตุการณ์ทุกคนอีกต่อไป ทฤษฎีสัมพัทธภาพบอกเราว่า ผู้สังเกตุการณ์ที่เคลื่อนที่สัมพัทธกันจะมีการหยั่งรู้ที่ต่างกันของอวกาศและเวลา ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากการมีอยู่ของกาลอวกาศคือ
>
> - นาฬิกาที่เคลื่อนที่จะเดินช้าลง (เวลาของเดินช้าลงสำหรับสิ่งที่มีการเคลื่อนที่)
> - วัตถุที่เคลื่อนที่จะดูหดสั้นลง
>
> เราสามารถเห็นการเกิดปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางทฤษฎีจากการแปลงลอเรนซ์ (การแปลงในกาลอวกาศ) สำหรับการแปลงกาลิเลี่ยน (การแปลงในอวกาศ) ในกลศาสตร์นิวตัน เราจะไม่เห็นปรากฏการณ์นี้เด็ดขาด

1.1.2 การหดตัวของความยาว

การหดตัวของความยาว (length contraction) คือการที่วัตถุที่มีขนาดลดขนาด (สั้นลง) เมื่อเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลมาจากการแปลงลอเรนซ์ พิจารณาวัตถุที่เป็นแท่ง ๆ หนึ่ง

1.1.3 การยืดออกของเวลา

1.2 เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม

โมเมนตัม p^μ ทำให้เราสามารถทราบข้อมูลของพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคได้ อย่างไรก็ตามในโลกแห่งความเป็นจริงเรามิได้มีเพียงอนุภาคจุด (point particle) เท่านั้น นั่นคือเรามีวัตถุที่มี

ขนาด (extended body) ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้ p^μ ในการอธิบายได้ เราต้องใช้ปริมาณเทนเซอร์ในการคำนวณและเทนเซอร์ที่ว่าก็คือ *เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม* (energy-momentum tensor หรือเทนเซอร์การบีบคั้นที่เรียกในภาษาอังกฤษว่า stress-energy tensor) ที่เขียนแทนโดย $T^{\mu\nu}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์ระดับ 2 เช่นเดียวกับเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ และเป็นเทนเซอร์ที่สมมาตร กล่าวคือ $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ เทนเซอร์พลังงานให้ข้อมูลเกี่ยวกับลักษณะเชิงพลังงาน (energy-like aspects) ของระบบ เช่น ความหนาแน่นของพลังงาน (energy density) และความดันหรือแรงกด (pressure) เป็นต้น ส่วนนิยามที่อาจจะชัดเจนและรัดกุมมากขึ้นก็คือ $T^{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์ที่แสดงถึงอัตราการไหลผ่าน (flux) ของโมเมนตัม-4 ที่ผ่านพื้นผิวที่ x^ν คงที่

ตัวอย่างที่ดีในการใช้เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม ก็คือของไหล (fluid) ซึ่งเป็นสถานะที่ต่อเนื่องของสสารที่สามารถอธิบายได้ด้วยปริมาณที่สัมผัสได้ (macroscopic quantity) ได้แก่ อุณหภูมิ ความดัน เอนโทรปี ความหนืด (viscosity) ฯลฯ สำหรับ GR โดยเฉพาะในแง่ดาราฟิสิกส์ (astrophysical aspect) แล้วระบบที่น่าสนใจก็คือของไหลก็เพราะว่าเราสามารถจำลองในการประมาณขั้นแรก (first-order approximation) ระบบแรงโน้มถ่วงได้เป็น *ของไหลสมบูรณ์* (perfect fluid) ซึ่งเป็นของไหลที่ไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ ระหว่างโมเลกุล ไม่มีความหนืด (viscosity) และไม่มีการนำความร้อน (heat conduction) เช่น ก๊าซในอุดมคติ (ideal gas) เป็นต้น ทำให้เราตัดทิ้งความยุ่งยากในการที่จะต้องใส่ใจกับโครงสร้างภายในระบบ (internal structure) นั่นคือเมื่อเราพิจารณาแรงโน้มถ่วงที่ทะเลสาบสร้างขึ้น เราไม่สนใจว่าโมเลกุลของมันจะเป็นอย่างไร เราสนใจเพียงความหนาแน่นหรือมวลโดยรวม (อย่างเฉลี่ย) แต่แน่นอนว่าความหนาแน่นของน้ำในทะเลสาบที่พื้นผิวไม่เหมือนกับกับที่ระดับลึกลงไป ความหมายของของไหลนั้นครอบคลุมทั้งของเหลว และของแข็ง เราถือว่าก้อนหินเป็นของไหล คือมันสามารถไหลได้ถ้าอยู่ภายใต้ความดันที่มากเพียงพอ

<u>ความหนืดคืออะไร</u>

ความหนืดก็คือแรงที่ขนานกับการเชื่อมต่อกันระหว่างอนุภาค (interface between particles) การไม่มีความหนืดหมายความว่าแรงจะตั้งฉากกับการเชื่อมต่อกันระหว่างอนุภาคเสมอ ซึ่งแปลว่า $T^{ij} = 0$ ยกเว้นเมื่อ $i = j$ ดังนั้นเราจะได้ว่า T^{ij} ต้องเป็นเมตริกซ์แนวทะแยง ซึ่งแรงที่ว่านี้เมื่อคิดต่อหน่วยพื้นที่แล้วก็คือความดันนั่นเอง ซึ่งจะนิยามเหมือนกันในทุกทิศทาง ซึ่งทำให้เราเขียนโดยใช้ Kronecker delta ได้ว่า $T^{ij} = p\delta^{ij}$ ซึ่งทำให้การศึกษาระบบที่ไม่มีความหนืดง่ายลงมาก เพราะเมตริกซ์มีเพียง 3 ตัวแปรในแนวทะแยงมุมเท่านั้น

เราสามารถบรรยายความเป็นของไหลเชิงสัมพัทธภาพได้ดังนี้ เราจะนิยามให้ *ฝุ่นละออง* (dust) ซึ่งเป็นกลุ่มของอนุภาคที่อยู่นิ่งหรือคือของไหลสมบูรณ์ที่ไม่มีแรงกดซึ่งกันและกันระหว่างอนุภาคที่เป็นส่วนประกอบ และอนุภาคทุกตัวก็จะมีความเร็วเท่ากันในกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังนั้นเราสามารถใช้ความเร็ว-4 U^μ ได้ทั่วทั้งกาลอวกาศที่ฝุ่นละอองนี้มีอยู่ เราสามารถนิยามความเร็ว-4 ของตัวเลขอัตราการไหลผ่าน (number-flux 4-velocity) ได้คือ

$$N^\mu = nU^\mu = (N^0, N^i) = (N^0, N^1, N^2, N^3) \tag{1.88}$$

โดยที่ n คือเลขความหนาแน่น (number density) ของอนุภาคที่วัดในกรอบอ้างอิงเฉื่อย N^0 คือเลขความหนาแน่นของอนุภาคที่วัดได้ในกรอบอ้างอิงอื่น ขณะที่ N^i คืออัตราการไหลผ่านของอนุภาคในทิศทาง x^i ถ้าเราสมมติว่าอนุภาคแต่ละตัวมีมวล m ดังนั้นในกรอบอ้างอิงนิ่งความหนาแน่นพลังงานของฝุ่นละอองก็คือ

$$\rho = nm \tag{1.89}$$

โดยนิยามแล้วความหนาแน่นพลังงานบ่งบอกทุกอย่างเกี่ยวกับฝุ่นละออง แต่ ρ คือ ความหนาแน่นพลังงานในกรอบนิ่งเท่านั้น โปรดสังเกตว่าทั้ง n และ m ก็คือพิกัดตำแหน่ง 0 ของเวกเตอร์-4 ในกรอบอ้างอิงนิ่งกล่าวคือเรามี $N^\mu = (n,0,0,0)$ และ $p^\mu = (m,0,0,0)$ ดังนั้น ρ ในพิกัดตำแหน่ง 0 ของเทนเซอร์ $p^\mu N^\nu$ ในกรอบอ้างอิงนิ่งนั่นเอง ดังนั้นเราสามารถเขียนเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมสำหรับฝุ่นละอองได้ดังนี้

$$T^{\mu\nu}_{\text{ฝุ่นละออง}} = p^\mu N^\nu = nmU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu \tag{1.90}$$

โดยที่ ρ คือความหนาแน่นพลังงานในกรอบนิ่ง สำหรับของไหลสมบูรณ์ก็ไม่ซับซ้อนไปมากกว่านี้นัก คำว่า "สมบูรณ์" ในที่นี้เราหมายถึง ความเหมือนกันในทุก ๆ ด้านในกรอบนิ่ง (isotropic in the rest frame) ซึ่งในภาษาคณิตศาสตร์ก็คือ เทนเซอร์ $T^{\mu\nu}$ เป็นเทนเซอร์แนวทะแยง (diagonal) นั่นคือไม่มีโมเมนตัมในทิศทางที่ตั้งฉากหรือกล่าวง่าย ๆ คือ $T^{ij} = 0 \Leftrightarrow T^{0i} = T^{12} = T^{13} = T^{23} = 0$ และเราจะเรียก T^{00} ว่าเป็นความหนาแน่นพลังงาน ρ ดังนั้นเราได้เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในกรอบอ้างอิงนิ่ง

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1.91}$$

อย่างไรก็ตามที่เราต้องการคือเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในกรอบอ้างอิงใด ๆ เรารู้ว่าสำหรับฝุ่นละอองเรามี $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$ ดังนั้นเราคิดว่าเราจะได้ $(\rho+p)U^\mu U^\nu$ ซึ่งหมายความว่าเราจะได้

$$\begin{pmatrix} \rho+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.92}$$

สำหรับเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในกรอบใด ๆ แต่เพราะว่าเราต้องการได้ $T^{\mu\nu}$ เหมือนในสมการ (1.91) ดังนั้นเราจึงต้องลบสมการ (1.92) ออกด้วยปริมาณ p ในแนวทะแยงมุม ซึ่งก็คือปริมาณ

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1.93}$$

นั่นคือ $p\eta^{\mu\nu}$ ดังนั้นสำหรับเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของของไหลสมบูรณ์ในกรอบอ้างอิงใด ๆ เราได้ว่า

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (\rho+p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}} \tag{1.94}$$

เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมเป็นเทนเซอร์ที่เป็นปริมาณอนุรักษ์ (conserved quantity) กล่าวคือมันเป็นไปตามความสัมพันธ์[13]

$$\boxed{\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0} \tag{1.95}$$

[13]อย่างไรก็ตามในสภาวะที่มีแรงโน้มถ่วงเราจะได้ความสัมพันธ์สำหรับเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมที่ต่างกันออกไป เราจะกล่าวถึงภายใต้ข้อหัวข้อสัมพัทธภาพทั่วไป

ซึ่งเราเรียกความสัมพันธ์นี่ว่าเป็นเทนเซอร์การที่ปราศจาก divergence หรือที่เรียกว่า divergence-free ซึ่งถ้าเราเขียน (1.95) ออกมาเป็นสมการความต่อเนื่อง (continuity equation) เราจะได้

$$\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial x^i} = 0 \tag{1.96}$$

สมการ (1.94) เป็นสมการที่สำคัญมาก ๆ ในการศึกษาโครงสร้างของดวงดาวและเอกภพวิทยา เราจะศึกษาในละเอียดอีกครั้งเมื่อเราศึกษาสมการไอน์สไตน์และเอกภพวิทยา

1.3 แม่เหล็กไฟฟ้าเชิงสัมพัทธภาพ

เราจะจบเรื่องของสัมพัทธภาพพิเศษ (SR) ด้วยการแสดงให้เห็นว่าเราสามารถสร้างสูตร (formulate) แม่เหล็กไฟฟ้า (Electrodynamics)[14] โดยการรวมเอา SR เข้าด้วยทำให้เราได้แม่เหล็กไฟฟ้าเชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Electrodynamics) จาก SR เรามีหลักของสัมพัทธภาพอยู่ว่ากฎของฟิสิกส์จะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้กรอบอ้างอิงเฉื่อยทั้งหมด (Physical laws are invariant in all inertial frames) ดังนั้นถ้าเราสามารถสร้างสูตรฟิสิกส์โดยใช้เวกเตอร์-4 และเทนเซอร์เราจะได้กฎที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงพิกัดอย่างประจักษ์แจ้งแบบลอเรนซ์ (manifestly Lorentz invariant) เราเริ่มต้นที่การหาเวกเตอร์ เทนเซอร์และสเกลาร์ สำหรับในไฟฟ้าแม่เหล็กเรามีเวกเตอร์-4 แห่งความต่างศักย์ที่เรียกว่า *ความต่างศักย์-4* (4-potential)[15]

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = (\phi, A^i) = (\phi, A^x, A^y, A^z) \tag{1.97}$$

โดยที่ ϕ คือความต่างศักย์ไฟฟ้าสถิต (electrostatic potential) และ $\vec{A}$ คือ ความต่างศักย์เวกเตอร์-3 (3-vector potential) ความมหัศจรรย์ของการที่เราสามารถเขียนกฎแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปแบบที่เป็น Lorentz invariant ทำให้เราได้เทนเซอร์ที่รวมเอาทั้ง สนามแม่เหล็ก ($\vec{B}$) และสนามไฟฟ้า ($\vec{E}$) ซึ่งเทนเซอร์ที่ว่านั้นเป็นเทนเซอร์ที่ไม่สมมาตรในดัชนีซึ่งนิยามในแบบ contravariant โดย

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu} \tag{1.98}$$

สำหรับในแบบ covariant เราสามารถคำนวณได้โดยใช้การหดต่อของเทนเซอร์นั่นคือ

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\nu\beta} \tag{1.99}$$

โดยที่ $\eta_{\mu\alpha}$ ก็คือเมตริก Minkowski นั่นคือเราได้ (โปรดสังเกตว่าเครื่องหมายต่างกันเฉพาะที่สนามไฟฟ้าเท่านั้น)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu} \tag{1.100}$$

[14]จริง ๆ แล้วคำว่าแม่เหล็กไฟฟ้าคือ Electromagnetism ในภาษาอังกฤษแต่เราจะใช้คำว่าแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับ Electrodynamics เพราะในที่นี้เราต้องศึกษาสมการแมกซ์เวลล์

[15]ในตำราบางเล่มเราอาจเห็นความต่างศักย์-4 นิยามในแบบที่ต่างไป เช่น $A^\mu = (\frac{i\phi}{c}, \vec{A})$

ซึ่งเทนเซอร์ $F^{\mu\nu}$ และ $F_{\mu\nu}$ เรียกว่า*เทนเซอร์แม่เหล็กไฟฟ้า* (electromagnetic tensor) หรือนักฟิสิกส์บางคนเรียกว่าเทนเซอร์ความแรงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic field strength tensor) หรือจะเรียกว่าเทนเซอร์แมกซ์เวลล์ก็ได้ (Maxwell tensor)[16] ส่วนตัวอักษร F มาจากชื่อสกุลของ Michael Faraday เพื่อเป็นการให้เกียรติแก่เขา $F^{\mu\nu}$ มาจากนิยาม[17]

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \tag{1.101}$$

โดยที่เครื่องหมาย ∂^μ (ซึ่งก็คืออนุพันธ์ย่อยนั่นเอง) หมายถึง $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^t, \nabla) = (\partial^t, \partial^i) = (\partial^t, \partial^x, \partial^y, \partial^z)$ ขณะที่ ∂_μ หมายถึง $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla) = (-\partial^t, \nabla)$ เราเรียกอันแรกว่า เกรเดียน-4 แบบคอนทราวาเรียน (contravariant 4-gradient) และอันที่ 2 เรียกว่า เกรเดียน-4 แบบโควาเรียน (covariant 4-gradient โดยที่ 4-gradient) ทั้งสองจะให้เครื่องหมายที่ต่างกันเมื่อกระทำไปแล้ว ซึ่งใน SR และ GR รวมทั้งฟิสิกส์ทฤษฎีสนาม (field theory) และฟิสิกส์ทฤษฎีที่ใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงเราจำเป็นต้องหาวิธีการเขียนที่รัดกุมและประหยัดเนื้อที่ให้มากที่สุด จริง ๆ แล้วเราสามารถเขียนให้สั้นมาก ๆ ได้ดังนี้ (โดยที่เราจะใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ด้วยเครื่องหมายจุลภาค (comma) " , " หรือที่เรียกกันว่าอนุพันธ์จุลภาค (comma derivative)[18]) ดังนั้นเราได้

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} \tag{1.102}$$

ซึ่งอาจจะไม่เป็นที่คุ้นตาของผู้อ่านบางท่าน เพื่อความชัดเจนจะขอยกตัวอย่างดังนี้

$$V^\alpha_{\ ,\beta} = \partial_\beta V^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\alpha \tag{1.103}$$

โดยที่ $\alpha, \beta = 0, \ldots, 3$ สำหรับกาลอวกาศ Minkowski ปริมาณที่สำคัญจากเทนเซอร์แมกซ์เวลล์ (ซึ่งจะนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวางในทฤษฎีสนาม ฯลฯ) ก็คือการที่เราคำนวณค่า scalar invariant หรือ F^2

$$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^iB^i - E^iE^i) = 2(F^{ij}F^{ij} - F^{0i}F^{0i}) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \tag{1.104}$$

ซึ่งได้มาจากคำนวณ trace นั่นเอง เราสามารถที่จะตรวจสอบค่าของเทนเซอร์แมกซ์เวลล์ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \ \text{ และ } \ \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi \tag{1.105}$$

นั่นคือเราจะได้ เช่น

$$\begin{aligned}
F^{11} &= \partial^1 A^1 - \partial^1 A^1 = 0 = F^{00} = F^{22} = F^{33} \\
F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \partial^t A^x - \partial^x A^t = -\partial_t A_x - \partial_x \phi = E_x = -F^{10} \\
F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \partial^x A^y - \partial^y A^x = B_z = -F^{21} \\
F^{23} &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = \partial^y A^z - \partial^z A^y = B_x = -F^{32} \quad \text{เป็นต้น}
\end{aligned} \tag{1.106}$$

[16] โปรดสังเกตว่าค่าของเทนเซอร์แม่เหล็กไฟฟ้าจะไม่อยู่ในรูปแบบนี้ถ้าเราใช้นิยามของเวกเตอร์-4 ที่ต่างไป

[17] ถ้านิยามแบบ covariant เราจะได้ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

[18] เราจะใช้การเขียนอนุพันธ์แบบนี้มากเมื่อเราเข้าเรื่องของความโค้งและสัมพัทธภาพทั่วไป ดังนั้นถ้าผู้อ่านที่ไม่เคยชินกับสัญลักษณ์แบบนี้สามารถสร้างความคุ้นเคยได้ ณ จุดนี้จะเป็นประโยชน์มาก

จะเห็นได้อย่างประจักษ์แจ้งว่า $F^{\mu\nu}$ เป็นเทนเซอร์ที่ไม่สมมาตรในดัชนี และเพราะว่าเรามีกระแสไฟฟ้า ซึ่งในแบบสัมพัทธภาพ (relativistic form) อยู่ในรูป

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}) = (c\rho, \vec{j}) \tag{1.107}$$

เราเรียก j^μ ว่า *กระแส-4* (4-current) โดยที่เรามี ρ เป็นความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าสถิต (electrostatic charge density) และ $\vec{j}$ เป็น กระแส-3 (3-current) และเมื่อเรามีปริมาณเหล่านี้เราสามารถเขียนสมการแมกซ์เวลล์ขึ้นมาใหม่ได้จากสมการสี่สมการเดิมที่อยู่ได้รูป[19]

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho && (1.108)\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\partial_t\vec{B} && (1.109)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 && (1.110)\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \partial_t\vec{E} + 4\pi\vec{j} && (1.111)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\vec{A}$ คือ ความต่างศักย์เวกเตอร์ (vector potential) เราเหลือเพียงสองสมการที่อยู่ในรูปแบบคงที่ลอเรนซ์ (Lorentz invariant form)

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu} \tag{1.112}$$

ซึ่งสมการนี้สามารถเขียนออกมาได้เป็น

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{3}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03}\\
&= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 4\pi j^0 = 4\pi\rho\\
\text{นั่นคือเราได้}\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho \quad \text{ซึ่งเป็นหนึ่งในสมการของแมกซ์เวลล์} && (1.113)
\end{aligned}$$

และสมการนี้ก็เขียนออกมาได้เป็น $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \partial_t\vec{E} + 4\pi\vec{j}$ ส่วนอีกสองสมการที่เหลือสามารถเขียนรวมเป็นหนึ่งสมการได้ดังนี้

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0} \tag{1.114}$$

เราจะแสดงการเขียนสมการ (1.114) ออกมาในรูปแบบของสมการแมกซ์เวลล์ เพื่อให้เห็นกระจ่างได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0\\
\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0\\
\partial^x B^x + \partial^y B^y + \partial^z B^z &= 0\\
\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z &= 0\\
\text{ดังนั้น}\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & && (1.115)
\end{aligned}$$

[19]โปรดสังเกตว่าในที่นี้เราเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในระบบ Gaussian ถ้าเขียนในระบบ SI เราจะได้ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ และ $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \mu_0\vec{j}$ เป็นต้น

ซึ่งก็คือสมการหนึ่งในสี่ของสมการแมกซ์เวลล์ ส่วนอีกสมการหนึ่งที่สามารถเขียนแทนด้วยสมการนี้ก็คือ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ เป็นที่สังเกตได้ว่าในกรณีที่ไม่มีประจุ (source free) เราจะได้ว่า $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ จากสมการ (1.112) โดยความไม่สมมาตรของเทนเซอร์ $F^{\mu\nu}$ เราได้สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) ของกระแส

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \tag{1.116}$$

เราสามารถสังเกตได้ว่าเวกเตอร์แม่เหล็กไฟฟ้า A^μ มีสมบัติการแปลงเกจ (Gauge transformation) กล่าวคือสามารถเขียนได้ว่า

$$A^\mu \to \bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \psi(\vec{r}, t) \tag{1.117}$$

โดยที่ $\psi(\vec{r}, t)$ เป็นฟังก์ชั่นสเกลาร์ใด ๆ ที่เราเรียกว่าตัวแปรเกจ[20] (Gauge parameter) ถ้าเราหาเทนเซอร์แม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้ $\bar{A}^\mu$ จะพบว่าค่า $F^{\mu\nu}$ ไม่เปลี่ยนแปลงจากการที่ใช้ A^μ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\bar{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \bar{A}^\nu - \partial^\nu \bar{A}^\mu \\
&= \partial^\mu \left(A^\nu + \partial^\nu \psi\right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \partial^\mu \psi\right) \\
&= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \psi \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \partial^\mu \psi}_{=0} \\
\text{ดังนั้น}\ \ \bar{F}^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.118}$$

การแปลงเกจมีอยู่หลายประเภท[21] ยกตัวอย่างเช่น

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{1.119}$$

ซึ่งเรียกว่าเกจลอเรนซ์ (Lorentz gauge) และ

$$\partial_i A^i = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{1.120}$$

ซึ่งเรียกว่าเกจคูลอมบ์ (Coulomb gauge) หรือเกจการแผ่รังสี (radiation gauge) นั่นคือในกรณีที่เราไม่มีประจุเกจลอเรนซ์ก็เป็นเพียงเกจคูลอมบ์ และจากสมการ (1.101) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\partial^\mu A^\nu = \partial^\nu A^\mu + F^{\mu\nu} \tag{1.121}$$

และถ้าเราหาอนุพันธ์ของสมการ (1.121) จะได้

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + \partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{1.122}$$

ดังนั้นจากเกจลอเรนซ์ในสมการ (1.119) เราได้ว่า

$$\Box A^\nu = 4\pi j^\nu \tag{1.123}$$

[20]ทฤษฎีเกจคือทฤษฎีที่ว่าด้วยการที่เราสามารถใช้ตัวแปรมากกว่า 1 ตัวในการแสดงสมการฟิสิกส์หนึ่ง ๆ

[21]เรายังมีเกจอีกประเภทที่เรียกว่าเกจแนวแกน (axial gauge) ซึ่งก็คือเกจคูลอมบ์ในกรณีที่ไม่มีประจุหรือนั่นคือ $A^0 = \phi = 0$ ซึ่งเราจะไม่กล่าวถึงในรายละเอียดใน ณ ที่นี้

ในกรณีที่ไม่มีแหล่งประจุ (คืออยู่ในสุญญากาศ) โดยทั่วไปเราได้

$$\Box A^{\mu} = 0 \tag{1.124}$$

โดยที่ $\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2 = \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu}$ ซึ่งเราเรียกว่าตัวกระทำกล่อง (Box operator) หรือลาปลาเซี่ยนแห่งกาลอวกาศ (Spacetime Laplacian) หรือมีชื่อเต็ม ๆ ว่า ตัวกระทำเดอลองแบร์เซี่ยน (d' Alembertian operator)[22] ซึ่งเป็นตัวกระทำฟังก์ชั่นคลื่น (wave operator หรือในภาษาของสมการอนุพันธ์เรียกว่า hyperbolic operator) เพราะสมการ (1.124) ก็คือสมการคลื่นเชิงสัมพัทธภาพซึ่งมีความเร็วของคลื่นเท่ากับความเร็วแสง ผลลัพธ์ของสมการ (1.124) คือ

$$A^{\mu}(\vec{r},t) = \varepsilon^{\mu}e^{\pm i(-\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r})} = \varepsilon^{\mu}e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.125}$$

โดยที่ ε^{μ} คือเวกเตอร์โพลาไรซ์ (polarization vector) $\mathbf{k}$ คือเวกเตอร์คลื่น (wave vector) ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่บ่งบอกทิศทางการคลื่นที่ของคลื่น ซึ่งมีนิยามว่า $k^{\mu} = (\omega, k^i)$ ถ้าเราแทนสมการ (1.125) ลงในสมการ (1.124) จะได้

$$k^{\mu}k_{\mu} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0 \tag{1.126}$$

ซึ่งเป็นเงื่อนไขของอนุภาคที่ไม่มีมวลหรือในที่นี้คือโฟตอน นอกจากนี้เรามีความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์คลื่นกับเวกเตอร์โพลาไรซ์

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = k_{\mu}\varepsilon^{\mu} = 0 \tag{1.127}$$

ซึ่งหมายความว่าเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ของคลื่นจะตั้งฉากกับเวกเตอร์โพลาไรซ์เสมอ โดยสรุปจะเห็นว่าการที่โฟตอนหรืออนุภาคที่เคลื่อนที่ได้ที่ความเร็วแสงเป็นอนุภาคที่ไม่มีมวลเป็นผลจากที่เรามีเสรีภาพในการเลือกตัวแปรเกจหรือที่มักเรียกว่าสมมาตรเกจ (gauge symmetry) ของทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแมกซ์เวลล์ สมมาตรเกจเป็นเรื่องที่สำคัญมากในการศึกษาทฤษฎีสนาม (field theory)

โจทย์

1. ในการแปลงผกผันลอเรนซ์ (inverse Lorentz transformation) เราสามารถเขียนการแปลงลอเรนซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.128}$$

   จงคำนวณการแปลงผกผันลอเรนซ์ หรือกล่าวคือ จงหาพิกัด (t, x, y, z) ในพจน์ของ (t', x', y', z')

2. จงแสดงว่าสมการแมกซ์เวลล์ต่อไปนี้ invariant ภายใต้การแปลงลอเรนซ์

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \text{ และ } \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \tag{1.129}$$

[22] อาจจะเห็นว่าในบางที่เราเขียนตัวกระทำเดอลองแบร์เซี่ยนที่ต่างออกไป กล่าวคือ $\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2$ ซึ่งเป็นเพราะเครื่องหมายของกาลอวกาศซึ่งเป็นเป็นแบบ timelike

3. จงแสดงการคำนวณค่า F^2 ในสมการ (1.104) โดยใช้เทนเซอร์แมกซ์เวลล์ในสมการ (1.98) และสมการ (1.100)

4. จงแสดงว่าเราสามารถได้สมการความต่อเนื่อง (1.116) โดยใช้ความไม่สมมาตรของเทนเซอร์ $F^{\mu\nu}$

5. จงพิสูจน์สมการ (1.126)

บทที่ 2

ความโค้ง

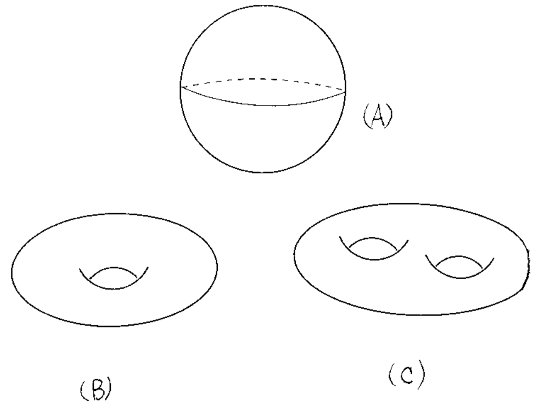
ความโค้ง (Curvature) คือแนวความคิดที่ไอน์สไตน์นำเอามาเปลี่ยนฟิสิกส์จากหน้ามือเป็นหลังมือ คือหลังจากที่ไอน์สไตน์ได้สร้าง SR ขึ้นมาแล้วเขาก็พยายามหาทางใช้ SR ไปอธิบายแรงโน้มถ่วง แต่ก็พบว่าทำอย่างไรก็ไม่สำเร็จจนกว่าเขาได้เปลี่ยนกาลอวกาศ Minkowski หรือ $\eta_{\mu\nu}$ ซึ่งเป็นกาลอวกาศแบนราบ (flat spacetime) เป็นกาลอวกาศโค้งงอ[1] (curved spacetime) ที่เราเขียนโดย $g_{\mu\nu}$ นั่นคือระยะห่างในกาลอวกาศจะเป็น $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ และเราสามารถมองว่ากาลอวกาศที่แบนราบคือกาลอวกาศโค้ง ณ ตำบลท้องถิ่น ซึ่งนี่คือหลักของสัมพัทธภาพทั่วไปที่เราจะศึกษารายละเอียดในที่นี้

เรามองเห็นว่าโลกแบนก็เพราะว่าเราเห็นเพียงส่วนเล็ก ๆ ส่วนหนึ่งของมันเท่านั้น ทั้งที่จริงแล้วโลกกลม (ไม่ใช่เพราะว่าเราได้ออกไปนอกโลกแล้วเห็นเท่านั้น มีวิธีการอื่น ๆ ที่ชี้ว่าโลกกลม เช่น การที่เราไม่สามารถมองเห็นเสากระโดงเรือเมื่อเรือได้ผ่านพ้นเส้นขอบฟ้าไปแล้ว) ในที่นี้เราจะใช้เรื่องของ manifold เข้ามาเป็นคำศัพท์ในการกล่าวถึงความโค้ง นั่นคือ manifold สามารถมองได้ว่าเป็นอวกาศหรือปริภูมิที่โค้งแต่จะแบนราบ ณ ตำบลท้องถิ่น (locally flat) ดังนั้นพื้นผิวโลกก็คือ manifold นั่นเอง! สิ่งที่สำคัญสำหรับความเป็น manifold ก็คือมันจะต้องมีความเป็นมิติหนึ่ง ๆ ตลอดการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิว ดังนั้นถ้าเราเอาเชือกมาต่อติดกับแผ่นกระดาษผลลัพธ์ที่ได้จะไม่ใช่ manifold เพราะว่าส่วนหนึ่งเป็น 2 มิติ ส่วนหนึ่ง 1 มิติ ตัวอย่างที่เด่นชัดที่สุดสำหรับ manifold ก็คือปริภูมิ n มิติ (n-dimensional space) หรือที่เรียกว่า $\mathbb{R}^n$ ในภาษาเรขาคณิตอนุพันธ์ และอีกตัวอย่างที่มีความสำคัญไม่แพ้กันก็คือทรงกลม n มิติ หรือที่เรียกว่า $\mathbb{S}^n$ ดังนั้น $\mathbb{R}^1$ หมายถึงเส้นจำนวนจริง (real line) $\mathbb{R}^2$ หมายถึงระนาบ (plane) ซึ่งมี 2 มิติ ในขณะที่ $\mathbb{S}^1$ หมายถึงวงกลม และ $\mathbb{S}^2$ ก็คือทรงกลม-2 ซึ่งก็คือพื้นผิวของทรงกลมปกติ (ซึ่งต้องเป็นวัตถุใน 3 มิติ) ส่วนจุด (ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่มีขนาดตามนิยามในคณิตศาสตร์) นั้นเราแทนด้วย $\mathbb{S}^0$ สำหรับ manifold $\mathbb{S}^2$ พิกัดที่เราใช้ในที่นี้ก็คือ θ และ ϕ ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกของ $\mathbb{S}^2$ ได้ดังนี้

$$ds^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) = r^2 d\Omega^2 \tag{2.1}$$

โดยที่ r คือรัศมีของทรงกลม-2 $d\Omega$ คือมุมตัน (solid angle) และถ้าเราเขียนเมตริก Minkowski

[1]ซึ่งเราไม่สามารถใช้เรขาคณิตของยูคลิด (Euclidean geometry) ได้อีกต่อไป เราต้องใช้เรขาคณิตที่ไม่ใช่ยูคลิด (Non-Euclidean geometry) ซึ่งในที่นี้ก็คือเรขาคณิตรีมันน์ (Riemannian geometry)



รูปที่ 2.1: **ตัวอย่างของ manifold ชนิดต่างๆ (A) ทรงกลม (B) Torus ที่มี 1 genus (C) Torus ที่มี 2 geni**

ในรูปแบบที่ต่างไปจากพิกัด Cartesian คือในพิกัดทรงกลมเราจะได้เราจะได้

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = -dt^2 + dr^2 + dS^2 \tag{2.2}$$

โดยเราเรียก dS^2 ว่าเมตริกของทรงกลม-2 และเป็นที่เข้าใจกันว่า manifold ที่ใช้ใน GR คือ differential manifold[2] และขอย้ำว่านี่คือ concept ที่สำคัญมากในฟิสิกส์ระดับสูงโดยเฉพาะทางทฤษฎี เพราะการที่เราได้ศึกษาเรื่องของ manifold จะทำให้เราแก้ปัญหาฟิสิกส์ที่มีเรขาคณิตหรือ topology ที่ซับซ้อนได้ และเมื่อเรามีแนวคิดของ manifold เราสามารถกล่าวถึงวัตถุอันหนึ่งที่มีความสำคัญมาก ๆ ที่สำหรับอวกาศโค้งงอและสัมพัทธภาพทั่วไปนั่นคือ เมตริกเทนเซอร์ (หรือเรียกสั้น ๆ ว่าเมตริก) ที่เราได้เอ่ยถึงไปก่อนหน้านี้โดยไม่ได้ชี้แจงรายละเอียด นั้นคือเมตริกเทนเซอร์เป็นเทนเซอร์ที่สามารถนิยามได้บน manifold และมันบ่งบอกถึงสมบัติต่าง ๆ ที่ผ่านเราเขียนเมตริกเทนเซอร์ของกาลอวกาศแบนราบ 4 มิติหรือกาลอวกาศ Minkowski ด้วย $\eta_{\mu\nu} = \texttt{diag}(-1,1,1,1)$ แต่โดยปกติแล้วมันจะอยู่ในรูปแบบใด ๆ ก็ได้และไม่จำเป็นต้องทะแยงมุม (รูปแบบทะแยงมุมเป็นรูปแบบที่สามารถทำการกระทำทางคณิตศาสตร์ได้ง่ายที่สุด) สำหรับ manifold โดยทั่ว ๆ ไปแล้วจะมีเมตริกที่เขียนโดย $g_{\mu\nu}$ และในสัมพัทธภาพทั่วไปหรือในฟิสิกส์เราจะสนใจเฉพาะเมตริกที่เป็น non-degenertate กล่าวคือเป็นเมตริกที่มี determinant ที่ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ $g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$ และทำให้เรานิยามค่าผกผัน (inverse) ของมันได้จาก

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \tag{2.3}$$

และในที่นี้ $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ เพราะว่า $g_{\mu\nu}$ เป็นเมตริกที่สมมาตร ณ จุดนี้ท่านผู้อ่านอาจสงสัยว่าทำไมเราถึงพูดถึงเรื่องของเมตริกอีกทั้งที่เราได้ใช้มันไปแล้วภายใต้หัวข้อสัมพัทธภาพพิเศษโดยไม่ได้อธิบายที่มา เหตุผลก็คือกาลอวกาศพิเศษเป็นเพียงกรณีพิเศษของกาลอวกาศโค้ง ดังนั้นเราจึงต้องศึกษา

[2]ในที่นี้คือในทฤษฎีสัมพัทธภาพเราสนใจใน manifold ที่สามารถนิยามอนุพันธ์และต่อเนื่อง (differentiable and continuous) กล่าวคือเราสามารถนิยามปริมาณสเกลาร์ φ ณ จุดต่าง ๆ บน manifold และเราสามารถหาอนุพันธ์ของมันได้ ตัวอย่างก็คือ บนพื้นผิวของทรงกลมเราสามารถนิยามอนุพันธ์ของ φ ได้ทุกที่ ในขณะที่กรวยเราก็หาอนุพันธ์ของ φ ได้เช่นกันยกเว้นที่ปลาย (apex) ของกรวย

ในแง่มุมที่กว้างกว่า ที่เราเรียกว่าสัมพัทธภาพพิเศษก็เพราะมันเป็นเพียงกรณีพิเศษของสัมพัทธภาพทั่วไปนั่นเอง

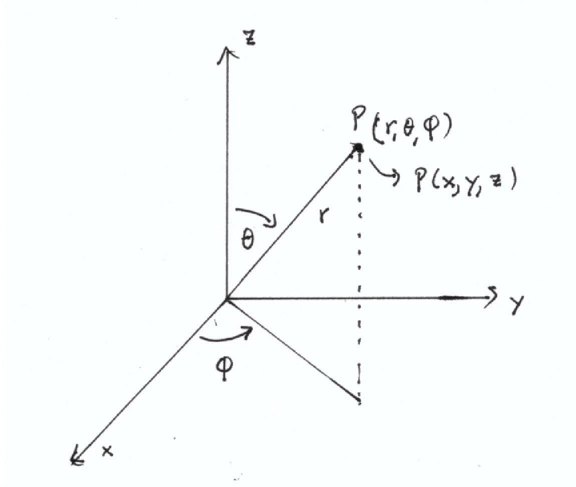
<u>เรขาคณิตยูคลิดใน 50 วินาที</u>
"สัจพจน์ของยูคลิด"
(1) สามารถเขียนส่วนของเส้นตรง (straight line segment) ผ่านจุดใด ๆ สองจุด
(2) ส่วนของเส้นตรงใด ๆ สามารถเขียนต่อออกไปได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุดในแบบของเส้นตรง
(3) เมื่อมีส่วนของเส้นตรงใด ๆ สามารถเขียนวงกลมได้โดนมีส่วนของเส้นตรงนั้นและจุดปลายจุดซึ่งเป็นศูนย์กลางของวงกลม
(4) มุมตรง (right angle) ทั้งปวงสามารถต่อกันได้อย่างลงรอย
(5) ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัด (intersect) กับเส้นตรงที่สามโดยที่มุมใน (inner angle) ของด้านหนึ่งมีขนาดเล็กกว่ามุมตรงสองมุมรวมกัน จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองเส้นจะต้องตัดกันที่ใดที่หนึ่งเมื่อเขียนส่วนของเส้นตรงนั้นต่อไป เราเรียกสัจพจน์นี้ว่า สัจพจน์ขนาน (Parallel Postulate)

ประโยชน์ของเมตริกมีดังต่อไปนี้

1. เมตริกทำให้เราสามารถสร้างความนึกคิด (notion) ของอดีตและอนาคตได้
2. เมตริกทำให้เราสามารถคำนวณระยะทางเดิน (path length) และเวลาที่แท้จริง (proper time) ได้
3. เมตริกทำให้เราสามารถหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบน manifold (หรือเส้น geodesic นั่นเอง) ซึ่งเป็นเส้นทางที่อนุภาคทดสอบ (test particle) เดินทางในกาลอวกาศ
4. เมตริกเปรียบเสมือนสนามโน้มถ่วง (φ) ในทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของนิวตันที่เป็นไปตาม $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$
5. เมตริกทำให้เราสร้างมโนภาพของกรอบอ้างอิงเฉื่อยท้องถิ่น (locally inertial frame) ได้
6. เมตริกทำให้เรามีวิธีคิดเกี่ยวกับความเป็นเหตุเป็นผล (causality) ของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้ โดยที่เรามีความเร็วแสงเป็นความเร็วที่สูงสุดของสิ่งต่าง ๆ และเป็นความเร็วในการเดินทางของข้อมูล
7. เมตริกทำให้เราสามารถสร้างผลคูณสเกลาร์ของอวกาศที่โค้งได้ นั่นคือ $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$

จะเห็นว่าเมตริก Minkowski ซึ่งเป็นเมตริกแบนราบ เราสามารถเขียนได้ในหลายรูปแบบ (นี่คือความสวยงามของสัมพัทธภาพที่เราสามารถเลือกที่จะเขียนได้ในหลาย ๆ รูปแบบแต่ฟิสิกส์ไม่เปลี่ยนแปลง!) ที่มาของสมการ (2.2) สามารถเข้าใจได้ง่าย ๆ ก็คือเราใช้พิกัดทรงกลม (spherical coordinates)

$$t = t \tag{2.4}$$
$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{2.5}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{2.6}$$
$$z = r\cos\theta \tag{2.7}$$



รูปที่ 2.2: **พิกัดทรงกลม (Spherical coordinates) เป็นระบบพิกัดหนึ่งที่ใช้มากที่สุดในฟิสิกส์ ในระบบพิกัดนี้เราระบุตำแหน่งหนึ่งด้วยตัวแปร** (r, θ, ϕ) **แทนที่จะเป็น** (x, y, z) **อย่างในระบบพิกัด Cartesian ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในพิกัดทรงกลมและพิกัด Cartesian เป็นไปตามสมการ (2.4) ระยะทางระหว่างจุดกำเนิดถึงจุดพิกัด** P **คือระยะทาง** $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **ส่วนมุมทั้งสองคือ** $\theta = \arccos(z/r)$ **และ** $\phi = \arctan(y/x)$ **และในระบบพิกัดนี้เราสามารถนิยามมุมตัน** $d\Omega$ **ได้คืออัตราส่วน** $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi$ **โดยที่** $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ **และเมื่ออินทิเกรตเราจะได้** $\int d\Omega = 4\pi$ **และเราได้ปริมาตร** $V = \int r^2 dr d\Omega$

แทนที่ลงไปในสมการของเมตริก Minkowski นั่นคือ $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ การทำอย่างนี้เราเรียกว่าการแปลงพิกัด (coordinate transformation) และสังเกตว่าสมการ (2.2) ให้ความหมายของกาลอวกาศที่แบนราบ เราจะแสดงให้เห็นในภายหลังว่าเรามีวิธีวัดว่าเมตริกไหนแบนราบ เมตริกอันไหนโค้ง และเพราะเราได้แปลงพิกัดจากเมตริก Minkowski แล้วเราจะเขียนสมการ (2.2) ว่า $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ โดยที่ $g_{\mu\nu}$ คือ

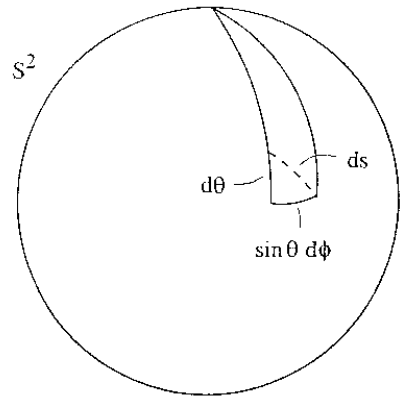
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \neq g^{\mu\nu} \tag{2.8}$$

เราหา $g^{\mu\nu}$ ได้จากการหาค่าผกผัน (inverse) ของสมการ (2.8) นั่นคือ

$$\boxed{g^{\mu\nu} = \frac{\text{co-factor ของ } g_{\mu\nu}}{\text{determinant ของ } g_{\mu\nu}}} \tag{2.9}$$

และเรามีความสัมพันธ์ที่สำคัญคือ

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$



รูปที่ 2.3: **ทรงกลม-2 ซึ่งเราต้องใช้ตัวแปร θ และ ϕ ในการอธิบายลักษณะของมัน สมการของทรงกลม-2 ก็คือสมการ (2.1) เส้นประที่เห็นก็คือเส้น geodesic หรือเส้นที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวของ manifold หรือทรงกลม-2 ในที่นี้**

โดยที่ δ^μ_λ คือ Kronecker delta และเรามี

$$\boxed{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4} \tag{2.11}$$

การกระทำในสมการ (2.10) และสมการ (2.11) เราเรียกว่าการหดต่อของเทนเซอร์ (tensor contraction) โดยที่คือการ take trace ในภาษาของพีชคณิตเชิงเส้น และนอกจากนี้เราสามารถหาค่าต่าง ๆ จากเมตริกที่มีอยู่ได้ดังต่อไปนี้ เราจะกำหนดให้ g เป็น determinant ของเมตริก $g^{\mu\nu}$ หรือเขียนแทนโดย

$$g \equiv |g_{\mu\nu}| = \det(g_{\mu\nu}) \tag{2.12}$$

ปริมาณหนึ่งที่น่าสนใจที่ได้จากที่เราหา g ก็คือปริมาตรของกาลอวกาศที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการแปลง (invariant volume) ซึ่งมีสูตรอยู่ว่า

$$\boxed{V = \int_{\text{vol}} d^4x\,\sqrt{-g}} \tag{2.13}$$

โดยที่ d^4x เป็น volume element ซึ่ง $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = dt\,dx\,dy\,dz$ ดังนั้นปริมาตรของกาลอวกาศ Minkowski ในพิกัด Cartesian อยู่ในรูป

$$V = \int dt\,dx\,dy\,dz\,\sqrt{1} = \int dt\,dx\,dy\,dz \tag{2.14}$$

ขณะที่ในพิกัดทรงกลมเรามี $g = -r^4\sin^2\theta$ ดังนั้น

$$V = \int dt\,dr\,r^2\,d\theta\sin\theta\,d\phi \tag{2.15}$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเรามี $\int dV\sqrt{-g} = \int dV'\sqrt{-g'}$ หรือนั่นคือ $\int dt\,dx\,dy\,dz = \int dt\,dr\,r^2\,d\theta\sin\theta\,d\phi$ โดยที่เราให้ขอบเขตของการอินติเกรตเป็นไปอย่างสอดคล้อง และโปรดสังเกตว่า $dt\,dx\,dy\,dz \neq$

$dt\, dr\, r^2\, d\theta \sin\theta\, d\phi$ จนกว่าจะมีการระบุขอบเขตของการอินติเกรตอย่างถูกต้อง และโดยทั่วไปในการอินติเกรตฟังก์ชั่นในกาลอวกาศเราจะได้ในรูป $\int d^4x\sqrt{-g}f(x^\mu)$ โดยที่ว่าฟังก์ชั่น $f(x^\mu)$ ในที่นี้จะต้องเป็นปริมาณสเกลาร์ นอกจากนี้เราก็สามารถหาความยาวของเส้นโค้งได้จากการที่เรามีเมตริกนั่นคือ ให้ $d\vec{x}$ เป็นส่วนย่อยของเส้นโค้งเส้นหนึ่งซึ่งมีเมตริก $g_{\mu\nu}$ ในสมการ $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ดังนั้นเราจะได้

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \tag{2.16}$$

ซึ่งทำให้เราสามารถอินติเกรตหาค่าความยาว l ได้

$$\boxed{l = \int_{\text{ตามเส้นโค้ง}} \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda} \tag{2.17}$$

โดยที่ λ คือตัวแปรที่กำหนดลักษณะของเส้นโค้งที่เราพิจารณาที่มีจุดปลายที่ตำแหน่ง λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ เราจะจบเรื่องของ manifold โดยบอกผู้อ่านว่าสำหรับ manifold ที่เราสนใจในที่นี้จะให้ค่าเมตริกใด ๆ $g_{\mu\nu}$ เป็น $\eta_{\mu\nu}$ ณ ตำบลท้องถิ่น นั่นคือถ้าเราเลือกจุดใด ๆ เช่นจุด $\mathcal{P}$ บน manifold ซึ่งเมื่อทำการกระจายแบบเทย์เลอร์ (Taylor expansion) กล่าวคือ เราได้

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left((x^\mu)^2\right) \tag{2.18}$$

ดังนั้นเราได้ว่า

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{สำหรับ } \mu\, \nu \text{ ทั้งหมด} \tag{2.19}$$

นั่นคือเราจะได้ว่าพิกัด x^μ ที่เป็นไปตามสมการ (2.19) เป็นพิกัดในกรอบอ้างอิง Lorentz ท้องถิ่น (local Lorentz frame) หรือเรียกว่ากรอบอ้างอิงเฉื่อยท้องถิ่น (local internal frame) ในบางครั้ง และสอดคล้องกับนิยามของ manifold ที่เราจะใช้สัมพัทธภาพทั่วไปกล่าวคือ ณ จุดหนึ่ง ๆ ณ ตำบลท้องถิ่นเราจะมีฟิสิกส์ในกาลอวกาศแบนราบ นั่นคือเราไม่สามารถทำการทดลองบนผิวโลกเพื่อแสดงว่าโลกกลมได้ นอกจากนี้เราก็มีความสัมพันธ์

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{สำหรับ } \alpha\, \mu\, \nu \text{ ใด ๆ} \tag{2.20}$$

ซึ่งหมายความว่าเมตริกของ manifold ใด ๆ จะเหมือนกับเมตริกของ manifold ที่แบนราบที่ตำบลท้องถิ่น อย่างไรก็ตามสำหรับอนุพันธ์อันดับสองเราจะได้ไม่ได้ค่าที่เป็นศูนย์กล่าวคือ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) \neq 0 \quad \text{สำหรับบางค่าของ } \alpha\, \beta\, \mu\, \nu \tag{2.21}$$

การที่เรามีกรอบอ้างอิงเฉื่อยท้องถิ่นหมายความว่ากาลอวกาศที่โค้งที่เราพิจารณามีกาลอวกาศแบนราบสัมผัสผิวอยู่ ณ ตำแหน่งใด ๆ (เหมือนแผ่นแบนราบที่เรียกว่าอวกาศสัมผัสหรือ tangent s-pace) นั่นคือการที่เราไม่มีอนุพันธ์อันดับแรกของเมตริกในกาลอวกาศที่โค้งอย่างในสมการ (2.20) ก็คือการที่เรามีอนุภาคอิสระ (free particle) ที่กำลังเคลื่อนที่บนเส้นทางที่เป็นเส้นตรงในพิกัดนั้น ๆ หรือกล่าวได้ว่าฟิสิกส์ในกาลอวกาศแบนราบในกาลอวกาศโค้งงอที่เป็นไปตามสมการ (2.20) จะเป็นเหมือนฟิสิกส์ในกาลอวกาศแบนราบ นักสัมพัทธภาพมักจะชอบกล่าวว่า "locally physics is simple" ซึ่งก็หมายความว่าฟิสิกส์ไม่ยากหรอกถ้าทำการศึกษากันแค่ในห้องทดลอง (นั่นคือเมื่อไม่ต้องรวมความโค้งของกาลอวกาศเข้าไปด้วย)

ความโค้งของพื้นผิวมีได้ 2 แบบคือ

1. ความโค้งที่เป็นบวก
2. ความโค้งที่เป็นลบ

2.1 เส้น Geodesic

Geodesic ในความหมายอย่างคร่าว ๆ คือเส้นที่ลากบนผิวโค้ง ในภาษาคณิตศาสตร์เส้น geodesic คือเส้นโค้งที่สั้นที่สุด นั่นคือถ้าเราลากเส้นใด ๆ บนพื้นผิวทรงกลมจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เส้นโค้งนั้นถือว่าเป็นเส้น geodesic ซึ่งเป็นวิธีการลากเส้นเพื่อคำนวณหาระยะทางบนผิวโลกในทางภูมิศาสตร์ อย่างไรก็ตามเราจะใช้คำว่า geodesic ในที่นี้ว่าเป็นเส้นโค้งที่มีระยะทางสั้นที่สุด (shortest curve) และเราสามารถกำหนดตัวแปรของพิกัดเพื่อแสดงถึง geodesic ได้ดังนี้ $x^\alpha(\sigma)$ โดยที่ σ คือตัวแปรกำหนดซึ่งกำหนดความเป็นไปของเส้นโค้งนั้น ๆ

เราทราบว่าระยะทางบน manifold คือ

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} \tag{2.22}$$

และเมื่อจะหาระยะทาง จะได้

$$s = \int ds = \int \frac{ds}{d\sigma}d\sigma = \int \sqrt{\frac{ds^2}{d\sigma^2}}\, d\sigma = \int L d\sigma \tag{2.23}$$

ถ้าเราให้ L เป็นลากรางเจี่ยน ซึ่งมีค่า

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}} = L(x, \dot{x}) \tag{2.24}$$

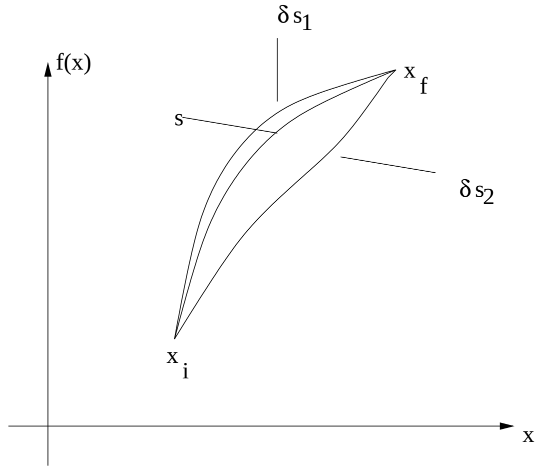
โดยที่เราให้ $\dot{x} = \dfrac{dx}{d\sigma}$ และจากหลักการของ Hamilton ในแคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variations) เราหาสามารถคำนวณระยะทางที่สุด (extremum) ได้จากการแปร

$$\delta s = \delta \int L(x, \dot{x})\, d\sigma = 0 \tag{2.25}$$

ผู้เขียนไม่คิดว่าผู้อ่านทุกท่านจะคุ้นเคยกับแคลคูลัสของการแปรผัน ดังนั้นจะขอทบทวนการ extremize ระยะทาง ดังต่อไปนี้ เรามี

$$\delta L(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \tag{2.26}$$

ผู้อ่านโปรดนึกถึงเส้นทางระหว่างจุด 2 จุดในอวกาศแบบใด ๆ ก็ได้ แต่ในที่เราจำทำการ extremize ใน 1 มิติ ที่ปลายจุดทั้งสอง (จุดเริ่มต้นให้เป็นจุดที่มีตัวแปร σ_i เป็นตัวกำหนด ส่วนจุด



รูปที่ 2.4: **การ extremize ระยะทางตามหลักแคลคูลัสการแปรผัน δs ที่จุดปลาย x_i และ x_f การแปรผันจะเป็นศูนย์**

ปลายให้เป็น σ_f) เราไม่มีการแปรผัน ดังนั้น $\delta x(\sigma_i) = \delta x(\sigma_f) = 0$ การคำนวณเป็นไปดังนี้

$$\begin{aligned}
0 = \delta s &= \delta \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} L(x,\dot{x})\, d\sigma \\
&= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \right) d\sigma \\
&= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\, d\sigma + \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\, d\sigma \\
\text{(อินติเกรต by parts ในพจน์ที่ 2)} \quad &= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\, d\sigma + \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{d\sigma}\delta x\, d\sigma \\
&= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\, d\sigma + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{\sigma_i}^{\sigma_f}}_{=0} - \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\, d\sigma \\
\Rightarrow 0 &= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right](\delta x)\, d\sigma
\end{aligned} \tag{2.27}$$

จะเห็นว่า δs จะต้องเป็นศูนย์สำหรับการแปรผันของ $\delta x(\sigma)$ ใด ๆ ดังนั้นพจน์ในวงเล็บในสมการ (2.27) จะต้องเป็นศูนย์ เราเรียกสมการ $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ ว่าสมการ Euler-Lagrange ดังนั้น ถ้าเรามี $L(x,\dot{x}) = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 2g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta \quad \text{และ} \quad \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\gamma \dot{x}^\delta \tag{2.28}$$

โปรดสังเกตว่าเมตริก $g_{\alpha\beta}$ ขึ้นอยู่กับ x เท่านั้น เมื่อเราแทนค่า (2.28) ลงในสมการ Euler-Lagrange จะได้สมการที่เราเรียกว่า *สมการ Geodesic* ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{d}{d\sigma} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\gamma \dot{x}^\delta = 0 \tag{2.29}$$

สมการนี้เป็นสมการที่ใช้คำนวณหาเส้นทางโคจรของเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (trajectory of the shortest curve)

2.2 คณิตศาสตร์บนผิวโค้ง

ในบทย่อยนี้เราจะกล่าวถึงการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการศึกษาฟิสิกส์บนอวกาศโค้งงอเราจะกล่าวถึงเส้นโค้ง (curve) และเวกเตอร์ (vector) แคลคูลัสในบนพื้นผิวโค้ง เช่นการหาอนุพันธ์ และตัวกระทำต่าง ๆ เช่น ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) และ ลาปลาเซี่ยน (Laplacian) สัญลักษณ์คริสโตฟเฟล

2.2.1 เส้นโค้งและเวกเตอร์

ความหมายของเส้นโค้งก็คือการที่มีอนุกรมของจุด (ซึ่งหมายความว่ามันต่อกันอย่างต่อเนื่อง) บนระนาบซึ่งเรียกว่าเส้นทางเดิน (path) เราสามารถนิยามเส้นโค้งได้ว่าเป็น mapping ของช่วงห่างของเส้นจำนวนจริงไปสู่เส้นทางเดินบนระนาบ ซึ่งหมายความว่าเส้นโค้งคือเส้นทางเดินที่มีจำนวนจริงมาเกี่ยวข้องกับจุด ๆ หนึ่งบนเส้นทางเดินนั้น เราแทนจำนวนนั้นด้วย s ซึ่งเป็นตัวแปรกำหนดนิยามของเส้นโค้งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\boxed{\text{เส้นโค้ง} \equiv \{\xi = f(s), \eta = g(s), a \leq s \leq b\}} \tag{2.30}$$

ดังนั้นเมื่อเรากล่าวถึงเส้นโค้งเส้นอื่นเราจะได้

$$\{\xi = f'(s'), \eta = g'(s'), a' \leq s' \leq b'\} \tag{2.31}$$

แม้ว่าเส้นโค้งสองเส้นหรือมากกว่าจะผ่านจุดเดียวกันบนระนาบเราก็ไม่สามารถบอกได้ว่ามันเป็นเส้นโค้งเดียวกัน ซึ่งในความเป็นจริงแล้วมีเส้นโค้งจำนวนอนันต์ที่สามารถมีเส้นทางเดินเดียวกันได้ เราจะเห็นภาพนี้ได้ชัดเมื่อเราได้นำเสนอมุมมองของเวกเตอร์สัมผัสดังต่อไปนี้

สมมติว่าเรามีสนามสเกลาร์ ϕ อยู่ตามเส้นโค้งหนึ่ง เราสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ $\dfrac{d\phi}{ds}$ ได้โดยที่มันจะมีขึ้นอยู่กับ s นั่นคือเราสามารถมอง $\dfrac{d}{ds}$ ว่าเป็นเวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของเส้นโค้ง (นี่ไม่ใช่นิยามของเวกเตอร์สัมผัสอย่างสากล ในที่เรานิยามตามแบบของ [11]) ตัวประกอบของเวกเตอร์นี้คือ $\vec{V} = \left(\dfrac{d\xi}{ds}, \dfrac{d\eta}{ds}\right)$ และสังเกตว่าเส้นทางเดินบนระนาบ ณ จุด ๆ หนึ่งสามารถมีเส้นสัมผัสได้ไม่จำกัดจำนวน กล่าวคือเส้นสัมผัสเหล่านั้นขนานกันได้แต่มีขนาดที่ไม่เท่ากัน

เราถือว่าเส้นโค้งมีเส้นสัมผัสที่ไม่เป็นหนึ่งเดียว เพราะว่าเส้นทางและตัวแปรเป็นสิ่งที่เรากำหนดขึ้นมา กล่าวคือเส้นโค้งที่มีเส้นสัมผัสเหมือนกัน ณ จุดหนึ่ง อาจจะไม่เหมือนกันที่จุดอื่น ๆ ดังนั้นถ้าเราใช้การแปลงพิกัดจะพบว่า s ไม่เปลี่ยนแปลง (เพราะว่านิยามของ s ไม่เกี่ยวกับพิกัดเลย) แต่องค์ประกอบ (components) ของ $\vec{V}$ มีส่วนเกี่ยวข้องกันโดยกฎลูกโซ่ (chain rule)

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi}{ds} \\ \frac{d\eta}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

ณ จุดนี้เราสามารถสรุปเรื่องของเวกเตอร์ได้ว่า เวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์ใด ๆ คือเส้นสัมผัสของเส้นโค้งหนึ่ง ๆ และเป็นฟังก์ชั่นซึ่งให้ค่า $\frac{d\phi}{ds}$

2.2.2 สัญลักษณ์คริสโตฟเฟล

เพราะว่าเรามีเวกเตอร์ฐาน (basis vector) ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\hat{e}_\alpha = \Lambda^{\beta}_{\alpha'}\hat{e}_\beta \tag{2.33}$$

สำหรับพิกัดขั้ว (r, θ) เรามี

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \Lambda^x_r \hat{e}_x + \Lambda^y_r \hat{e}_y \\ &= \frac{\partial x}{\partial r}\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\hat{e}_y \\ &= \cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y \end{aligned} \tag{2.34}$$

และ

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\hat{e}_y \\ &= -r\sin\theta \hat{e}_x + r\cos\theta \hat{e}_y \end{aligned} \tag{2.35}$$

โปรดสังเกตว่าเราเลือก $\Lambda^x_r = \frac{\partial x}{\partial r}$ ดังนั้น $\Lambda^r_x = \frac{\partial r}{\partial x}$ และผู้อ่านควรสังเกตด้วยว่าเวกเตอร์ฐานจะเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งนอกจากนี้ขนาดความยาวของเวกเตอร์ฐานก็ไม่ใช่ปริมาณคงที่ด้วย ยกตัวอย่างเช่น

$$|\hat{e}_\theta|^2 = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 \tag{2.36}$$

ซึ่งหมายความว่าค่า $\hat{e}_\theta$ เพิ่มขนาดเมื่อห่างจากจุดกำเนิดออกไป สำหรับพิกัด Cartesian เราพบว่า

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y = 1 \;\; \text{แต่} \;\; \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0 \tag{2.37}$$

หรือเขียนอย่างกระชับได้ว่า

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.38}$$

สำหรับองค์ประกอบของ g มีค่าเปลี่ยนไปตามระบบพิกัดที่เลือกใช้ กล่าวคือ

$$g_{\alpha'\beta'} = g(\hat{e}_{\alpha'}, \hat{e}_{\beta'}) = \hat{e}_{\alpha'} \cdot \hat{e}_{\beta'} \tag{2.39}$$

ยกตัวอย่างเช่น ในพิกัดขั้ว เราได้ว่า

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \tag{2.40}$$

ถ้าเขียนในแบบเมตริกซ์เราจะได้

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{ขั้ว}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

ดังนั้นเมื่อเขียน line element ในระบบพิกัดขั้วเราจะได้

$$ds^2 = d\vec{l} \cdot d\vec{l} = ds^2 \left|dr\hat{e}_r + d\theta\hat{e}_\theta\right|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{2.42}$$

ค่าผกผันของเมตริกคือ

$$\left(g^{-1}_{\alpha\beta}\right)_{\text{ขั้ว}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

แคลคูลัสในพิกัดขั้ว

การที่เวกเตอร์ฐานของพิกัดขั้วไม่คงที่ทำให้เกิดปัญหาเมื่อจะทำการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฐานในพิกัดขั้ว ในขณะที่ในระบบพิกัด Cartesian เรามี $\hat{e}_x$ เป็นเวกเตอร์ที่คงที่ทุกตำแหน่ง แต่ในพิกัดขั้วมันมีค่า

$$\hat{e}_x \to (\Lambda^r_x, \Lambda^\theta_x) = \left(\cos\theta, -\frac{\sin\theta}{r}\right) \tag{2.44}$$

ซึ่งแปรผันตามค่าของมุม θ ด้วยเหตุผลที่ไม่ซับซ้อน กล่าวคือ $\hat{e}_x$ ในพิกัดขั้วเป็นองค์ประกอบของฐานที่ไม่คงที่ ถ้าเราต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับ θ เราจะไม่ได้ค่า $\dfrac{\partial\hat{e}_x}{\partial\theta}$ โดยตรงอย่างที่คาดไว้ (คือคาดไว้ว่าจะมีค่าเป็นศูนย์) ดังนั้นเราจะพบว่าการที่เราหาอนุพันธ์ขององค์ประกอบของเวกเตอร์ไม่จำเป็นจะต้องได้อนุพันธ์ของเวกเตอร์เสมอไป ดังนั้นเราต้องหาวิธีการใหม่เพื่อที่จะได้อนุพันธ์ที่ถูกต้อง ดังต่อไปนี้

เพราะว่า $\hat{e}_x$ และ $\hat{e}_y$ คงที่ เราพบว่า

$$\begin{aligned} \partial_r\hat{e}_r &= \partial_r(\cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y) = 0 \\ \partial_\theta\hat{e}_r &= \partial_\theta(\cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y) = \frac{1}{r}\hat{e}_\theta \end{aligned} \tag{2.45}$$

ในทำนองเดียวกันเราพบว่า

$$\begin{aligned} \partial_r\hat{e}_\theta &= \partial_r(-r\sin\theta\hat{e}_x + r\cos\theta\hat{e}_y) = \frac{1}{r}\hat{e}_\theta \\ \partial_\theta\hat{e}_\theta &= r\cos\theta\hat{e}_x = r\sin\theta\hat{e}_y = -r\hat{e}_r \end{aligned} \tag{2.46}$$

และเพราะว่า $\hat{e}_x = \cos\theta\hat{e}_r - \dfrac{1}{r}\sin\theta\hat{e}_\theta$ ดังนั้น $\partial_\theta\hat{e}_x = 0$

ดังนั้นอย่างที่เราคาดการณ์ไว้ สำหรับเวกเตอร์ใด ๆ (V^r, V^θ) ที่เขียนในเวกเตอร์พิกัดขั้ว (polar basis) เราจะได้

$$\begin{aligned} \partial_r\vec{V} &= \partial_r\left(V^r\hat{e}_r + V^\theta\hat{e}_\theta\right) \\ &= \partial_r V^r\hat{e}_r + V^r\partial_r\hat{e}_r + \partial_r V^\theta\hat{e}_\theta + V^\theta\partial_r\hat{e}_r \end{aligned} \tag{2.47}$$

และ

$$\begin{aligned} \partial_\theta\vec{V} &= \partial_\theta\left(V^r\hat{e}_r + V^\theta\hat{e}_\theta\right) \\ &= \partial_\theta V^r\hat{e}_r + V^r\partial_\theta\hat{e}_r + \partial_\theta V^\theta\hat{e}_\theta + V^\theta\partial_\theta\hat{e}_r \end{aligned} \tag{2.48}$$

ถ้าเราเขียนในแบบดัชนีจะได้

$$\partial_r \vec{V} = \partial_r \left(V^\alpha \hat{e}_\alpha \right) = \partial_r V^\alpha \hat{e}_\alpha + V^\alpha \partial_r \hat{e}_r \tag{2.49}$$

โดยที่ $\alpha = r, \theta$ ดังนั้นจากที่ได้แสดงการคำนวณให้เห็น ผู้อ่านคงได้เห็นอย่างประจักษ์แล้วว่า อนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{V}$ ไม่เป็นเพียงอนุพันธ์ขององค์ประกอบของ V^α เท่านั้น ถ้าเราต้องการเขียนในลักษณะทั่วไป (คือมีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว) จะได้

$$\boxed{\partial_\beta \vec{V} = \partial_\beta V^\alpha \hat{e}_\alpha + V^\alpha \partial_\beta \hat{e}_\alpha} \tag{2.50}$$

โดยที่ $\alpha, \beta = r, \theta$ ในกรณีของพิกัดขั้วหรือตัวแปรใด ๆ ที่เราต้องการหาอนุพันธ์ โปรดสังเกตว่าพจน์ที่สองในสมการ (2.50) มีความสำคัญมาก กล่าวคือ เพราะว่า $\partial_\beta \hat{e}_\alpha$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งรวมเวกเตอร์ฐานในแบบเชิงเส้น เราเลือกที่จะเขียนพจน์ที่สองใหม่ได้เป็น

$$\partial_\beta \hat{e}_\alpha = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu \tag{2.51}$$

เราถือว่า $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu$ เป็นองค์ประกอบที่ μ ของ $\partial_\beta \hat{e}_\alpha$ เราเรียก $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu$ ว่า *สัญลักษณ์คริสโตฟเฟล* (Christoffel symbol) ยกตัวอย่างเช่น ในพิกัดขั้วเรามี

$$\begin{cases} \partial_r \hat{e}_r = 0 \quad \Rightarrow \Gamma^r{}_{rr} = 0 \\ \partial_\theta \hat{e}_r = \dfrac{1}{r} \hat{e}_\theta \quad \Rightarrow \Gamma^r{}_{r\theta} = 0 \,; \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \dfrac{1}{r} \\ \partial_r \hat{e}_\theta = \dfrac{1}{r} \hat{e}_\theta \quad \Rightarrow \Gamma^r{}_{r\theta} = 0 \,; \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \dfrac{1}{r} \\ \partial_\theta \hat{e}_\theta = -r \hat{e}_\theta \quad \Rightarrow \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \,; \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

โปรดระลึกว่าในสมการ

$$\partial_\beta \hat{e}_\alpha = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu \tag{2.53}$$

ดัชนีทั้งหมดจะต้องแสดงถึงพิกัดในระบบเดียวกัน เราจะกล่าวถึงและใช้สัญลักษณ์ในส่วนต่อไปและในหลาย ๆ บทของหนังสือเล่มนี้

2.2.3 อนุพันธ์ covariant

อนุพันธ์ covariant (covariant derivative) คือ อนุพันธ์ที่เรานิยามขึ้นสำหรับการกระทำทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ บนผิวโค้งหรือ manifold ความหมายของการหาอนุพันธ์โดยปกติเมื่อเรามี manifold ก็คือการที่เราคำนวณค่าอนุพันธ์ของสนามเวกเตอร์ (vector field) ของเวกเตอร์ระหว่างจุดสองจุด สำหรับอวกาศที่โค้งงอการที่เราจะทำการคำนวณแบบนั้นเราต้องทำด้วยความระมัดระวังเพราะว่าระหว่างจุดสองจุดอวกาศไม่ได้แบนราบ ดังนั้นเราจึงไม่ได้คำตอบที่ถูกต้องเพราะเราไม่สามารถนิยามว่าเวกเตอร์ทั้งสองชี้ไปที่จุดเดียวกัน (ก็เพราะอวกาศโค้ง) อย่างไรก็ตามการที่เรามีความแบนราบท้องถิ่น (local flatness) ใน manifold รีมันน์ทำให้เราสามารถสร้างแนวคิดและวิธีการคำนวณค่าอนุพันธ์บนอวกาศโค้งได้ เราเพียงหาค่าของมันในขอบเขตเล็ก ๆ คือเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองอยู่ใกล้กันมาก ๆ ดังนั้นเราสามารถสร้างระบบพิกัด ณ ตำแหน่งใด ๆ ที่แบนราบตามที่เราต้องการ นั่นคืออาณาบริเวณย่อยที่เราเห็นว่า manifold แบนราบ ซึ่งที่ตำแหน่งนั้นอนุพันธ์ของเวกเตอร์ซึ่งมี

องค์ประกอบ (components) เป็นค่าคงที่จะเป็นศูนย์ เราจะศึกษาโครงสร้างและที่มาของอนุพันธ์ covariant ในรายละเอียดดังต่อไปนี้

โดยนิยามของสัญญลักษณ์คริสโตฟเฟล เราเขียนอนุพันธ์ของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\partial_\beta \vec{V} = \partial_\beta V^\alpha \hat{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu \tag{2.54}$$

เราสามารถจัดดัชนีใหม่เพื่อลดความสับสนได้ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \partial_\beta \vec{V} &= \partial_\beta V^\alpha \hat{e}_\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \hat{e}_\alpha \\ &= \left(\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right) \hat{e}_\alpha \end{aligned} \tag{2.55}$$

นั่นคือองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\partial_\beta \vec{V}$ คือ

$$\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนโดยใช้สัญญลักษณ์ใหม่ได้ว่า

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{2.56}$$

โดยที่

$$V^\alpha_{;\beta} \text{ คือค่าอนุพันธ์ที่มีสัญญลักษณ์คริสโตฟเฟล เรียกว่า } \textbf{อนุพันธ์ covariant} \tag{2.57}$$

$$V^\alpha_{\beta} = \partial_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \text{ ซึ่งก็คืออนุพันธ์แบบธรรมดา (ordinary derivative)} \tag{2.58}$$

ดังนั้นในพิกัดทั่ว ๆ ไปใด ๆ เราได้ว่า

$$\partial_\beta \vec{V} = V^\alpha_{;\beta} \hat{e}_\alpha \tag{2.59}$$

ถ้าเรามี β เป็นจำนวนคงที่ ∂_β จะถือว่าเป็นสนามเวกเตอร์ได้ อย่างไรก็ตาม เราก็สามารถคิดว่ามันเป็นสนามเวกเตอร์ก็ได้ โดยที่หมายความว่าเรามี mapping ของเวกเตอร์จาก $\hat{e}_\beta$ ไปสู่ ∂_β เราเรียนสนามเทนเซอร์นี้ว่า อนุพันธ์ covariant ของเวกเตอร์ V ซึ่งเขียนแสดงด้วย $\nabla \vec{V}$

$$(\nabla \vec{V})^\alpha_\beta = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V^\alpha_{;\beta} \tag{2.60}$$

ในระบบคาร์ทีเซี่ยน เรามีเพียง $V^\alpha_{;\beta}$ โดยที่ $\alpha, \beta = t, x, y, z$ มาถึงจุดนี้ผู้อ่านอาจจะตั้งคำถามต่อตัวเองว่า *เอ ... แล้วถ้าเราจะหาอนุพันธ์ covariant ของปริมาณสเกลาร์ ผลลัพธ์จะออกมาเป็นอย่างไร?* เพราะเรารู้ว่าอนุพันธ์ covariant แตกต่างจากอนุพันธ์แบบธรรมดาตรงที่พิกัดมีฐานที่แปรเปลี่ยนได้ แต่เพราะสเกลาร์ไม่ขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ฐานใด ๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นอนุพันธ์ covariant ของสเกลาร์ ก็เป็นเพียงอนุพันธ์แบบธรรมดา ของสเกลาร์นั่นเอง ซึ่งเราเรียกว่า *เกรเดียนท์*

$$\nabla_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \tag{2.61}$$

ตัวอย่างของการคำนวณ: divergence ของเวกเตอร์ในพิกัดขั้ว

เพราะว่า $V^{\alpha}_{;\alpha} = \partial_\alpha V^\alpha + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} V^\mu$ เราได้

$$\begin{cases} \Gamma^{\alpha}{}_{r\alpha} = \Gamma^{r}{}_{rr} + \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^{\alpha}{}_{\theta\alpha} = \Gamma^{r}{}_{\theta r} + \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = 0 \end{cases} \tag{2.62}$$

ดังนั้น

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = \nabla_\alpha V^\alpha = \partial_r V^r + \partial_\theta V^\theta + \frac{1}{r} V^r = \frac{1}{r}\partial_r (r V^r) + \partial_\theta V^\theta \tag{2.63}$$

ซึ่งก็คือเราได้ divergence ของเวกเตอร์ V ในพิกัดขั้วนั่นเอง และถ้าเราคำนวณหา divergence ของเกรเดี่ยนท์ จะได้

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \varphi = \frac{1}{r}\partial_r \left(r \partial_r \varphi \right) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 \varphi \tag{2.64}$$

ซึ่งเรียกว่า ตัวกระทำลาปลาเซี่ยน (Laplacian) ในพิกัดขั้ว

สัญลักษณ์คริสโตฟเฟลจากเมตริก

ในแบบฉบับการคำนวณหาสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลที่ผ่านมาเราไม่ได้ใช้สมบัติใด ๆ ของเทนเซอร์เมตริกในการหาอนุพันธ์ covariant แต่ *เมตริกจะต้องมีส่วนเกี่ยวข้องด้วยแน่ ๆ เพราะอนุพันธ์ covariant จะอย่างไรก็ตามก็เป็นการกระทำทางคณิตศาสตร์ในกาลอวกาศ* เราพบว่า

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}_{;\beta} \tag{2.65}$$

เพื่อที่จะให้ผู้อ่านเห็นอย่างกระจ่าง เราจะอธิบายที่มาของสมการข้างบนได้ดังต่อไปนี้

$$\text{เพราะว่า} \quad V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'} \quad \text{ในพิกัดใด ๆ} \tag{2.66}$$

สำหรับในพิกัดคาร์ทีเซี่ยน

$$g_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu} \ \ \text{และ} \ \ V^\alpha = V_\alpha \tag{2.67}$$

และเพราะว่าสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลในพิกัดนี้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} \ \ \text{และ} \ \ V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} \tag{2.68}$$

เพราะฉะนั้นเราได้

$$V_{\alpha;\beta} = V^{\alpha}{}_{;\beta} \ \ \text{สำหรับพิกัดคาร์ทีเซี่ยน} \tag{2.69}$$

ถ้าเราต้องการทำให้สมการ (2.2.3) ใช้ได้ในกรณีใด ๆ จะต้องเขียนดังต่อไปนี้

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \tag{2.70}$$

และ

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \tag{2.71}$$

จากสมการ (2.66) ถ้าเราหาอนุพันธ์ covariant จะได้

$$V_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}{}_{;\beta'} \tag{2.72}$$

เมื่อเทียบกับสมการ () เราจะต้องมี

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} = 0 \text{ ในพิกัดใด ๆ} \tag{2.73}$$

สำหรับพิกัดคาร์ทีเซี่ยน

$$g_{\alpha\mu;\beta} = g_{\alpha\mu,\beta} = \delta_{\alpha\mu,\beta} = 0 \tag{2.74}$$

ถ้าต้องการตรวจสอบเอกลักษณ์ในพิกัดอื่น ๆ เราต้องใช้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T^{\alpha}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \tag{2.75}$$

ดังนั้นสำหรับเทนเซอร์เมตริก เราได้

$$g_{\alpha\beta\,;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu} \tag{2.76}$$

ในพิกัดขั้วเราสำหรับ มี $\alpha = r, \beta = r, \mu = r$

$$\begin{aligned} g_{rr;r} &= g_{rr,r} - \Gamma^{r}{}_{rr} g_{rr} - \Gamma^{\nu}{}_{rr} g_{r\nu} \\ &= 0 - 0 \times g_{rr} - 0 \times g_{r\nu} = 0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

สำหรับ $\alpha = \theta, \beta = \theta, \mu = r$ เราได้

$$g_{\theta\theta;r} = g_{\theta\theta,r} - \Gamma^{r}{}_{\theta r} g_{r\theta} - \Gamma^{\nu}{}_{\theta r} g_{\theta r} = 0 \tag{2.78}$$

โดยที่ $g_{\theta\theta;r} = r^2, \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \dfrac{1}{r}$ และ $\Gamma^{r}{}_{\theta r} = 0$ ดังนั้นเราเห็นได้ว่า

$$g_{\theta\theta;r} = (r^2)_{,r} - \frac{1}{r} \times r^2 - \frac{1}{r} \times r^2 = 0 \tag{2.79}$$

เราจะพบว่าการศึกษาความคู่ขนาน (parallelism) ในพิกัดใด ๆ บนผิวราบจะง่ายกว่าบนผิวโค้งมากเพราะว่าเราสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลบนผิวราบมีค่าเป็นศูนย์ ต่อจากนี้ไปเราเราจะหาสูตรของสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลจากเมตริกใด ๆ

เพราะว่า

$$g_{\alpha\mu;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} g_{\nu\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} = 0 \tag{2.80}$$

ดังนั้นเราสามารถที่จะหา $g_{\alpha\beta,\mu}$ ในพจน์ของ $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ ได้ และก็ยังสามารถหา $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ ในพจน์ของ $g_{\alpha\beta,\mu}$ ได้ด้วย จากจุดนี้ทำให้เราสามารถสร้างนิยามของสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลในพจน์ของอนุพันธ์ของเมตริกได้อย่างตรงไปตรงมา เราพบว่ามีสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของสัญลักษณ์คริสโตฟเฟล กล่าวคือ

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \tag{2.81}$$

พิสูจน์

ถ้าเรามีสเกลาร์ใด ๆ กล่าวคือ φ และคำนวณหาอนุพันธ์อันดับสอง จะได้

$$\varphi_{,\beta,\alpha} \equiv \partial_\alpha \partial_\beta \varphi = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\varphi \tag{2.82}$$

และเพราะว่า

$$\varphi_{,\beta,\alpha} = \varphi_{,\alpha,\beta} \tag{2.83}$$

และพบด้วยว่า

$$\begin{aligned} \varphi_{,\beta;\alpha} &= \nabla_\alpha \partial_\beta \varphi \\ &= \nabla_\beta \partial_\alpha \varphi \\ &= \varphi_{,\alpha;\beta} \end{aligned} \tag{2.84}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \varphi_{,\beta,\alpha} - \varphi_{,\mu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha} &= \varphi_{,\alpha,\beta} - \varphi_{,\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \\ \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu} &= \Gamma^\mu_{\beta\alpha}\varphi_{,\mu} \\ \text{ดังนั้น}\quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \Gamma^\mu_{\beta\alpha} \quad \text{ในพิกัดใด ๆ} \end{aligned} \tag{2.85}$$

จาก (2.80) โดยการสลับที่ดัชนี เราสามารถเขียนได้ใน 3 รูปแบบ คือ

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \tag{2.86}$$

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \tag{2.87}$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \tag{2.88}$$

เมื่อรวมทั้ง 3 สมการเข้าด้วยกันจะได้

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} \\ &\quad = (\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}) g_{\nu\beta} + (\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}) g_{\nu\mu} + (\Gamma^\nu{}_{\beta\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta}) g_{\alpha\nu} \end{aligned} \tag{2.89}$$

เพราะว่าสองพจน์แรกตัดกันเนื่องจากสมมาตร ดังนั้น

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2 g_{\alpha\nu} \Gamma^\nu{}_{\beta\nu} \tag{2.90}$$

เนื่องจาก $g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\nu} = \delta^\gamma_\nu$ เพราะฉะนั้นเมื่อทำการหดต่อสมการ (2.90) ด้วย $g^{\alpha\gamma}$ และหารด้วย 2 เราจะได้สูตรของสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลในพจน์ของเมตริก

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha}) \tag{2.91}$$

2.3 การลำเลียงขนาน

2.4 เทนเซอร์ความโค้ง

บทที่ 3

สัมพัทธภาพทั่วไป

อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์เป็นที่รู้จักในฐานะที่เขามีส่วนร่วมในการสร้างระเบิดปรมาณู และหนึ่งในสมการที่ไอน์สไตน์สร้างขึ้นที่มีชื่อเสียงมากคือสมการความสมมูลของพลังงานและมวลหรือ $E = mc^2$ แต่ในวงการฟิสิกส์แล้วไอน์สไตน์คือบิดาของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั้งปวงเพราะเขาเป็นผู้สร้างขึ้นด้วยความอัจฉริยภาพของเขาเอง อย่างไรก็ตามผลงานของไอน์สไตน์ที่ทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบลในปี 1921 ไม่เกี่ยวกับเรื่องของระเบิดปรมาณูและทฤษฎีสัมพัทธภาพเลย ไอน์สไตน์ได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์จากการที่เขาสามารถสร้างทฤษฎีอธิบายปรากฏการณ์การเปล่งแสงเชิงไฟฟ้า (Photoelectric effect) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เมื่อแสงตกกระทบบนแผ่นโลหะแล้วทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ซึ่งทำให้เกิดกระแสไฟฟ้า ไอน์สไตน์ได้สร้างทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษขึ้นมาในปี 1905 (ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปสร้างขึ้นหลังจากนั้นประมาณ 10 ปี) ขณะที่เขาทำงานที่สำนักงานจดลิขสิทธิ์แห่งหนึ่งในประเทศสวิสเซอร์แลนด์ ซึ่งทฤษฎีนั้นได้ทำให้วงการฟิสิกส์ทั่วโลกในเวลานั้นตกตะลึงไปตาม ๆ กันไม่ใช่เพราะว่าการที่เขาเป็นเพียงเสมียนธรรมดาแต่สามารถสร้างทฤษฎีฟิสิกส์ขึ้นมาได้ แต่เป็นเพราะนับตั้งแต่นั้นมาเรามีแนวความคิดเกี่ยวกับโลกและเอกภพที่เปลี่ยนไปจากยุคของนิวตันและกาลิเลโอ และเราก็ไม่สามารถย้อนกลับไปได้อีก

สัมพัทธภาพพิเศษ (SR) คือฟิสิกส์ที่ใช้กับปรากฏการณ์ที่วัตถุใด ๆ มีความเร็วสูงเทียบเท่าความเร็วแสงเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งการที่เรานำ SR มาประสานกับทฤษฎีควอนตัมทำให้เราได้ทฤษฎีสนามควอนตัม (quantum field theory)[1] ซึ่งเป็นทฤษฎีหนึ่งในฟิสิกส์ที่สามารถใช้พยากรณ์ได้อย่างแม่นนำอย่างที่ใช้ในการศึกษาในฟิสิกส์อนุภาค โครงสร้างอย่างละเอียดของอะตอม (atomic fine structure) เป็นต้น แต่ข้อจำกัดของมันก็คือมันไม่สามารถใช้อธิบายแรงโน้มถ่วงได้ ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงที่เรามีใช้ในปัจจุบันก็คือทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของไอน์สไตน์หรือทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (GR) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายแรงโน้มถ่วงได้อย่างแม่นยำที่สุดในระดับที่มีระยะทางและขนาดค่อนข้างใหญ่ เช่น ในทางดาราศาสตร์และเอกภพวิทยา เป็นต้น อย่างไรก็ตามทฤษฎีนี้ไม่สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์แรงโน้มถ่วงบางชนิดได้เนื่องจากว่ามันไม่ได้รวมความเป็นควอนตัมเข้าไปด้วย ปรากฏการณ์ที่อาจจะต้องใช้ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงที่มีผลทางควอนตัมรวมเข้าไปคือปรากฏการณ์บางอย่างที่เกี่ยวกับหลุมดำ และเราอาจเรียกทฤษฎีแบบนั้นว่าทฤษฎีแรงโน้มถ่วงควอนตัม (quan-

[1]ทฤษฎีควอนตัมคือทฤษฎีที่ว่าด้วยความไม่ต่อเนื่องของระดับพลังงานเมื่อพิจารณาในระยะทางเล็กมาก ๆ ซึ่งเรียกว่าขนาดพลั้ง (Planck scale) หรือประมาณ 10^{-35} เมตรซึ่งก็คือในระยะทางที่พลังงานจะไม่อยู่อย่างต่อเนื่องแต่จะเป็นก้อนพลังงานที่ความถี่หนึ่ง ๆ โดยเรามีความสัมพันธ์ว่า $E = h\nu$ โดยที่ คือ h คือค่าคงที่ของพลั้ง ส่วน ν คือความถี่ของคลื่นของพลังงานหรืออนุภาค ในระดับความตัมอนุภาคจะประพฤติตัวได้เป็นคลื่นและคลื่นก็สามารถแสดงความเป็นอนุภาคได้

tum theory of gravity) ซึ่งยังไม่มีการจัดตั้งทฤษฎีนี้อย่างเป็นทางการและเป็นฟิสิกส์ที่มีการค้นคว้าและวิจัยอย่างต่อเนื่องและอยู่ในขั้นแนวหน้า (frontier) โดยนักฟิสิกส์ทั่วโลก เราจะกล่าวถึงความเป็นไปได้ในการค้นหาทฤษฎีนี้ในบทที่ 8

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงฟิสิกส์ของแรงโน้มถ่วงโดยการใช้หลักเรขาคณิตดังนั้นผู้อ่านควรมีความรู้ทางเรขาคณิตที่เพียงพอ โดยสามารถศึกษาได้จากบทที่ 1 และบทที่ 2

3.1 หลักแห่งความสมมูล

3.2 มวลกับความโค้ง

3.3 สมการไอน์สไตน์

สมการไอน์สไตน์ (Einstein's equation หรือในบางทีเขียนว่า Einstein equation) คือสมการสนาม (field equation) ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งของกาลอวกาศและมวลหรือสสาร สมการไอน์สไตน์เป็นสมการเทนเซอร์ที่ยากต่อการถอดรากถึงแม้ว่าจะเขียนได้สั้นมาก นั่นคือมันอยู่ในรูป

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

โดยที่ $G_{\mu\nu}$ เรียกว่า เทนเซอร์ไอน์สไตน์ (Einstein tensor) ซึ่งเป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงความโน้มถ่วง ในขณะที่ $T_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม (energy-momentum tensor) ซึ่งเป็นปริมาณของพลังงานหรือสสารที่ก่อให้เกิดแรงโน้มถ่วง สมการไอน์สไตน์เป็นสมการสนามที่ไม่เชิงเส้น (non-linear) ซึ่งทำให้แยกแก่การถอดสมการ เหตุผลที่สมการสนามไอน์สไตน์เป็นสมการไม่เชิงเส้นก็เพราะว่าสนามโน้มถ่วงมีพลังงานและสสารอยู่ด้วย ทำให้ทั้งสองมีอันตรกิริยาต่อกันตลอด ซึ่งต่างจากในกรณีสมการสนามแม็กซ์เวลล์ในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งมีสมการสนามที่ไม่รวมประจุ (ซึ่งเป็นสิ่งที่ก่อให้เกิดสนาม) อยู่ด้วย

เราจะแสดงการได้มาซึ่งสมการไอน์สไตน์ในรายละเอียด (โดยจะตามแบบใน [2]) เพราะนั่นคือสิ่งที่ไอน์สไตน์ได้ใช้อัจฉริยภาพของเขาในการเสาะหาความจริงในธรรมชาติ

จากความคิดของไอน์สไตน์ เราจะมองว่าเหตุการณ์ต่อไปนี้เกิดขึ้น (i) สนามโน้มถ่วงมีอิทธิพลต่อสสาร (พลังงาน) อย่างไร (ii) สสาร (พลังงาน) ก่อให้เกิดสนามโน้มถ่วงได้อย่างไรบ้าง ในทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของนิวตัน เรามีสมการ 2 สมการที่ใช้ในการพรรณาถึงแรงโน้มถ่วงและวัตถุในสนามโน้มถ่วง กล่าวคือ เรามีพลังงานศักย์โน้มถ่วง Φ ซึ่งก่อให้เกิดความเร่ง $\vec{a}$

$$\vec{a} = -\nabla\Phi \tag{3.2}$$

และสมการโพส์ซอง (Poisson equation) สำหรับพลังงานศักย์ในพจน์ของความหนาแน่นสสาร ρ และค่าคงที่แรงโน้มถ่วงนิวตัน (G)

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{3.3}$$

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป เราต้องการหาสมการที่ใช้พรรณาความโค้งของกาลอวกาศว่าเป็นผลมาจากการมีอยู่ของสสารพลังงาน โดยที่ความโค้งของกาลอวกาศก็คือแรงโน้มถ่วงนั่นเอง นอกจากนี้สมการดังกล่าวก็ต้องพรรณาว่าพลังงานและสสารก่อให้เกิดความโค้งได้อย่างไร **เราจะเริ่มต้นการ**

ค้นหาสมการนี้โดยการวางรากฐานแนวคิดบนหลักแห่งแห่งความสมมูล ซึ่งกล่าวว่า ในอาณาเขตที่มีขนาดย่อมในกาลอวกาศ กฎฟิสิกส์จะเป็นกฎที่ควบคุมโดยสัมพัทธภาพพิเศษ ซึ่งหมายความว่าเราไม่สามารถตรวจวัดความโน้มถ่วงได้ไม่ว่าจะวิธีใด ๆ ในภาษาคณิตศาสตร์คือ(อย่างที่ได้กล่าวถึงแล้วในบทที่ 2)

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} \text{ และ } \partial_\gamma g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = 0 \tag{3.4}$$

ถ้าเราเขียนหลักการเหล่านี้ออกมาเป็นข้อๆ ก็จะได้สูตรในการสร้างสมการฟิสิกส์ในพื้นหลังที่เป็นอวกาศโค้ง (หรือกล่าวง่าย ๆ ได้ว่าการเขียนสูตรฟิสิกส์ในอิทธิพลของแรงโน้มถ่วง) ซึ่งเรียกว่า **หลักการเชื่อมต่อน้อยที่สุด** (minimal-coupling principle) ดังต่อไปนี้

1. เอาสูตรฟิสิกส์ใด ๆ มาสูตรหนึ่ง ๆ ที่ใช้ได้ในพิกัดเฉื่อยในกาลอวกาศแบนราบ
2. เขียนมันออกมาในรูปแบบเทนเซอร์ (คือแบบที่ไม่ติดกับพิกัดใด ๆ)
3. จากข้อสอง เราต้องบีบบังคับให้กฎที่ว่านั้นใช้ได้ในพื้นหลังที่เป็นอวกาศโค้งงอ

ท่านผู้อ่านอาจจะนึกว่าสูตรการสร้างสมการฟิสิกส์ในพื้นหลังที่เป็นอวกาศโค้งงอข้างบน น่าจะยุ่งยาก และสับสน แต่จริง ๆ แล้วไม่ได้ยากอย่างที่คิด ถ้าเรามีสมการใด ๆ ที่มีเมตริก Minkowski ก็เพียงแต่แทนมันด้วยเมตริกทั่วไป $g_{\mu\nu}$ กล่าวคือเราแปลง $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ และเขียนอนุพันธ์ปกติให้เป็นอนุพันธ์ covariant กล่าวคือ $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ เรามีชื่อเรียกเล่น ๆ สำหรับการแปลงแบบนี้ว่า "Comma-Goes-to-Semicolon Rule" เพราะว่าเราสามารถแทนอนุพันธ์ปกติและอนุพันธ์ covariant ได้ด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) และอัฒภาค (;) ตามลำดับ

เราสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่อย่างตกอิสระของอนุภาคหนึ่ง ๆ ในกาลอวกาศแบนราบอนุภาคนั้นจะเดินทางเป็นเส้นตรง ในเส้นทางที่กำหนดโดย x^μ เราเขียนได้ว่า

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \tag{3.5}$$

สมการข้างบนนี้ไม่ใช่สมการในแบบเทนเซอร์ (tensorial equation) ถึงแม้ว่า $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ จะเป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ที่มีนิยามตายตัว แต่อนุพันธ์อันดับสอง $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}$ ไม่ใช่ไม่ว่าจะเขียนในพิกัดใด ๆ อย่างไรก็ตาม เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปเพื่อที่จะเขียนในแบบเทนเซอร์สำหรับการทำให้สมการนี้ใช้ได้ในพื้นหลังกาลอวกาศโค้งงอ

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda}\partial_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{3.6}$$

และจากนี้ไปถ้าเราทำการเปลี่ยนจากอนุพันธ์แบบธรรมดาเป็นอนุพันธ์ covariant เราจะได้

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda}\partial_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda} \to \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \tag{3.7}$$

สมการที่เราได้ก็คือสมการ geodesic นั่นเอง

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{3.8}$$

ซึ่งเราสรุปอีกครั้งได้ว่า ในสัมพัทธภาพทั่วไป อนุภาคอิสระเคลื่อนที่ตามเส้น geodesic นอกจากการศึกษาการได้มาซึ่งสมการ geodesic แล้ว การที่จะสร้างสมการแรงโน้มถ่วงของไอน์สไตน์ เราก็

ต้องสนใจเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมด้วย สมบัติง่าย ๆ ประการหนึ่งที่เราได้นำเสนอไปก่อนหน้านี้แล้วคือ

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.9}$$

ถ้าเราเขียนในพื้นหลังกาลอวกาศโค้งงอ จะได้ว่า

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.10}$$

ซึ่งผู้อ่านคงเห็นแล้วว่าไม่ใช่เรื่องยากเลยที่จะปรับให้สูตรฟิสิกส์ใช้ได้ในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วงมาเกี่ยวข้อง อย่างไรก็ตามเพื่อที่จะตรวจสอบว่าสูตรที่เราได้มาสามารถนำไปใช้ได้จริง ๆ กับแรงโน้มถ่วง เราต้องสามารถพิสูจน์ได้ว่ามันใช้ได้ในทุกกรณี นั่นคือมันต้องสามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์โรงโน้มถ่วงแบบนิวตันได้ด้วย กล่าวคือ เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่อย่างช้า เมื่อเทียบกับความเร็วแสง เมื่อสนามโน้มถ่วงเป็นแบบอ่อนแรง (ซึ่งก็คิดได้ว่าเราอยู่พื้นหลังแบนราบ โดยการทำ perturbation ของเมตริก) และสนามโน้มถ่วงเป็นสนามสถิต (ไม่แปลเปลี่ยนไปตามเวลาที่ผ่านไป) ถ้าเราต้องการจะบอกว่าอนุภาคหนึ่ง ๆ เคลื่อนที่ช้า เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \tag{3.11}$$

โดยที่ τ คือเวลาแท้จริง ดังนั้นเราจะได้สมการ geodesic

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{3.12}$$

และเพราะว่าสนามโน้มถ่วงเป็นสนามสถิต เราได้ $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ และได้สัญลักษณ์คริสโตฟเฟลดังนี้

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00} \tag{3.13}$$

และเพราะว่าความอ่อนแรงโน้มถ่วงทำให้เราสามารถแตก (decompose) เมตริกเป็น 2 ส่วน กล่าวคือ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{3.14}$$

นั่นคือเรากำลังทำการคำนวณในพิกัดของเมตริก Minkowski โดยที่มี $h_{\mu\nu}$ เป็นพจน์ก่อกวนเมตริก (metric perturbation term) ซึ่งเราไม่ถือว่ามันเป็นเมตริกในพิกัดใด ๆ ในตัวมันเอง จากนิยามของเมตริกผกผัน $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\sigma$ เราได้ว่า

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{3.15}$$

โดยที่ $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ ก็เพราะว่าเราสามารถใช้เมตริก Minkowski เพื่อทำการขยับดัชนีขึ้น-ลง โดยไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของ h ณ จุดนี้เราสามารถมองว่า $h_{\mu\nu}$ เป็นสนามเทนเซอร์สมมาตรที่แพร่กระจายไปในอวกาศ Minkowski ได้ โดยที่สนามนี้จะทำอันตรกิริยากับสนามอื่น ๆ ด้วย

เมื่อเราแทนค่า g_{00} ลงใน (3.13) เราได้

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} \tag{3.16}$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ geodesic ในรูป

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{3.17}$$

เมื่อใช้ $\partial_0 h_{00} = 0$ เราได้สำหรับ $\mu = 0$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \tag{3.18}$$

ซึ่งหมายความว่า $\dfrac{dt}{d\tau}$ เป็นปริมาณคงที่ เราสามารถตรวจสอบองค์ประกอบของสมการ geodesic ได้ กล่าวคือ ส่วน spacelike ของ $\eta^{\mu\nu}$ ก็คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ 3×3 ดังนั้นเราจึงได้

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \tag{3.19}$$

ซึ่งสมการนี้ทำให้เรานึกทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของนิวตัน ซึ่งมีกฎข้อที่สองที่กล่าวว่า

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi \tag{3.20}$$

ดังนั้นถ้าเราเปรียบเทียบ (3.20) กับ (3.20) จะได้

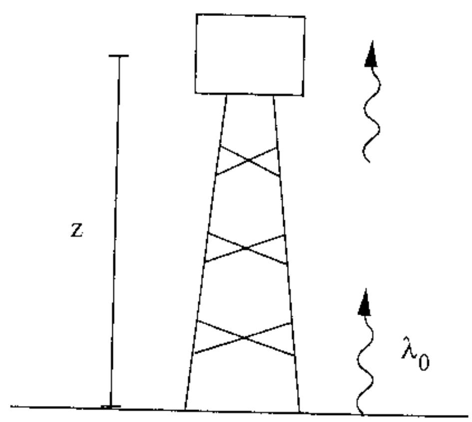
$$h_{00} = -2\varphi \tag{3.21}$$

หรือ

$$g_{00} = -(1 + 2\varphi) \tag{3.22}$$

นั่นคือ เราได้แสดงให้เห็นว่า ความโค้งของกาลอวกาศสามารถใช้พรรณนาแรงโน้มถ่วงในแบบทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของนิวตันได้ ตราบเท่าที่เมตริกอยู่ในรูป (3.22) สำหรับวัตถุโดดเดี่ยวใด ๆ ในสนามโน้มถ่วง เราจะได้พลังงานศักย์ในสมการ (3.22) เป็น

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \tag{3.23}$$



รูปที่ 3.1: **การทดลองวัดการเดินช้าลงของเวลาที่หอคอยของมหาวิทยาลัย Harvard**

บทที่ 4

หลุมดำ

หลุมดำนับได้ว่าเป็นวัตถุ[1]ที่สร้างความประหลาดใจให้กับวงการฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์เป็นอย่างมาก เพราะว่ามันเป็นสิ่งที่อยู่เหนือความคาดหมาย คำนิยามของหลุมดำอย่างหลวมก็คือ *บริเวณ ๆ หนึ่งในกาลอวกาศที่มีแรงดึงดูดอย่างมหาศาลซึ่งแม้แต่แสงก็ไม่สามารถเล็ดลอดออกมาได้ และหลุมดำก็จะมีขอบเขตที่ล้อมโดยขอบฟ้าเหตุการณ์*

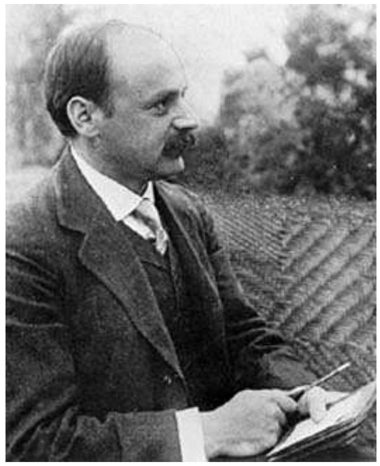
ผู้ที่ให้ชื่อหลุมดำเป็นคนแรกก็คือ John A. Wheeler ผู้ร่วมแต่งตำราสัมพัทธภาพทั่วไปที่เป็นที่ยอมรับว่าเป็นคัมภีร์ทางด้านนี้ โดยที่ Wheeler ได้ประกาศใช้คำนี้อย่างเป็นทางการในปี 1967 ตอนนี้เขาไปแสดงปาฐกถาที่มหาวิทยาลัยเมือง New York นับแต่นั้นมาการศึกษาฟิสิกส์ของหลุมดำก็เป็นเรื่องที่ไม่ถือว่าเป็นนิยายทางวิทยาศาสตร์อีกต่อไป ความมีชื่อเสียงของนักฟิสิกส์ระดับโลกหลายคนก็มาจากการที่พวกเขาได้สร้างแนวคิดและค้นพบความจริงและข้อมูลใหม่ ๆ เกี่ยวกับหลุมดำ หนึ่งในนั้นคือ Stephen Hawking ผู้ที่พบว่า *แท้จริงแล้วหลุมดำไม่ได้ดำเลย* ซึ่งหมายความจริง ๆ แล้วมีเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับหลุมดำนอกจากการที่มันสามารถดูดวัตถุต่าง ๆ ลงไปได้ กล่าวคือหลุมดำสามารถแผ่รังสีได้ และการแผ่รังสีก็เป็นเพราะจริงแล้วหลุมดำเป็นวัตถุเชิงควอนตัม รังสีที่แผ่ออกมาไม่เกี่ยวกับสิ่งที่ได้ตกลงไปในหลุมดำกล่าวคือถ้าท่านตกลงไปในหลุมดำหรือแมวตัวน้อยหรือรถยนต์กันกระสุนตกลงไปในหลุมดำ รังสีที่แผ่ออกมาจากหลุมดำก็จะเหมือนกัน ในแง่นี้เรากล่าวว่า *ข้อขัดแย้งในการสูญหายของข้อมูล* (information loss paradox) นั่นคือเมื่อหลุมดำได้แผ่รังสีออกมาหมด ก็จะไม่มีอะไรหลงเหลืออยู่ อย่างไรก็ตาม 30 กว่าปีหลังจากการค้นพบครั้งนั้น Hawking ก็ตระหนักว่าสิ่งที่เขาคิดไว้ก็อาจจะไม่ถูกกล่าวคือ จริง ๆ แล้วคือสิ่งที่ออกมาในรูปของรังสีก็คือข้อมูลเกี่ยวกับหลุมดำและสิ่งที่ได้ตกลงไป Hawking ได้ป่าวประกาศอย่างเป็นทางการที่การประชุมนานาชาติที่เรียกว่า GR meeting ณ กรุง Dublin ประเทศ Ireland ในเดือนกรกฎาคม 2004

ถ้าเราทำการถอดสมการไอน์สไตน์ในสุญญากาศ ของวัตถุทรงกลมที่มีมวล M กล่าวคือ เราถอดสมการ

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{4.1}$$

ในพิกัดทรงกลมที่มีสมมาตรทรงกลมถึงแม้ว่ามวลสารจะไม่คงที่ เราจะได้ผลเฉลยที่รู้จักกันในนามของ *ผลเฉลยชว๊าซชิลด์* (Schwarzschild solution) ซึ่งค้นพบโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันที่ชื่อว่า Karl Schwarzschild ในปี 1916 ซึ่งทำให้ไอน์สไตน์ประหลาดใจเป็นอย่างมากเพราะว่าเขาไม่คิด

[1]หรือจะพูดอย่างหลวม ๆ ว่าแนวความคิดก็ได้



รูปที่ 4.1: **Karl Schwarzschild บิดาแห่งฟิสิกส์ของหลุมดำ ผู้ค้นพบผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ในปี 1916**

ว่าจะมีใครสามารถแก้สมการไอน์สไตน์ได้รวดเร็วอย่างนั้น ผลเฉลยชว๊าซชิลด์มี line element ในพิกัดทรงกลมดังนี้

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad (4.2)$$

จะเห็นว่าเมื่อค่า $r = 2M$ ผลเฉลยชว๊าซชิลด์จะเกิดสภาวะเอกฐาน (singularity) นั่นคือความหมายของเวลาและอวกาศจะสลับที่กัน จุดนี้คือการทำนายการค้นพบหลุมดำโดยสมการไอน์สไตน์ เราเรียกหลุมดำแบบนี้ว่า "หลุมดำชว๊าซชิลด์" ซึ่งเป็นหลุมดำที่อยู่แบบสถิต (static) และคงตัว (stationary) คือไม่มีการหมุนหรือเคลื่อนที่ใด ๆ ได้ และไม่มีประจุไฟฟ้า อย่างไรก็ตาม ณ จุดที่เรามี $r = 2M$ จะเป็นภาวะเอกฐานในแง่พิกัดเท่านั้นเพราะสามารถทำการแปลงพิกัดได้ให้ metric ขางต้นมีภาวะเอกซานที่ $r = 0$ เท่านั้น เราจะกล่าวถึงภายหลังในเรื่องของพิกัด Kruskal

ผลเฉลยชว๊าซชิลด์นั้นถือเป็นผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียวในแง่ที่ว่าไม่มีผลเฉลยอื่น ๆ ที่เป็นผลเฉลยที่มีสมมาตรทรงกลม ผู้ที่พิสูจน์เป็นคนแรกคือ J. T. Jebsen ซึ่งเป็นชาวนอร์เวย์ในปี 1920 ซึ่งเขาได้ตีพิมพ์ในวารสารฟิสิกส์ของสวีเดนซึ่งไม่เป็นที่รู้จักมาก ทำให้เป็นที่เชื่อกันว่าผู้ที่พิสูจน์คือ Birkhoff โดยที่บทพิสูจน์นั้นรู้จักกันในชื่อของ *ทฤษฎีบทเบิร์กคอฟฟ์* (Birkhoff's theorem) ซึ่งความจริงได้รับการเปิดเผยมาเมื่อในไม่นานนี้เอง โดยการตีพิมพ์ของนักฟิสิกส์และนักคณิตสาสตร์ชาวนอร์เวย์ในปี 2005

4.0.1 พิกัดแบบอื่น ๆ สำหรับหลุมดำชว๊าซชิลด์

ปัญหาของภาวะเอกฐานของพิกัดในเมตริกของหลุมดำสามารถแก้ไขได้โดยการสรรหาหรือสร้างพิกัดใหม่ขึ้นมา เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงไม่ให้เกิดภาวะเอกฐาน ณ ตำแหน่ง $r = 2M$ โดยในปี 1960 Kruskal และ Szekeres ได้สร้างพิกัดขึ้นมาที่เราเรียกกันวันนี้ว่า พิกัด Kruskal - Szekeres นั่นคือเรามี

$$u = t - r^* \quad \text{เรียกกว่า retarded time} \qquad (4.3)$$

$$v = t + r^* \quad \text{เรียกกว่า advanced time} \tag{4.4}$$

โดยที่

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - 2M/r} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \tag{4.5}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการเมตริกชว๊าซชิลด์เราได้

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.6}$$

โดยที่ r ไม่ใช่พิกัดแต่เป็นฟังก์ชั่นของ u และ v และตามนิยามเราได้ว่า

$$r^* = \frac{1}{2}(v - u) \tag{4.7}$$

โดยที่ $r = 2M$ จะปรากฏเมื่อ $v - u = -\infty$ หรือนั่นคือ

$$\frac{r}{2M} \approx 1 \pm e^{r^+/2M} = 1 \pm e^{(v-u)/4M} \tag{4.8}$$

เราได้

$$ds^2 = \mp \left(e^{-u/4M} du\right) \left(e^{v/4M} dv\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{4.9}$$

ถ้าให้

$$U = \mp e^{-u/4M} \quad \text{และ} \tag{4.10}$$

$$V = \mp e^{v/4M} \tag{4.11}$$

นั่นคือเมื่อ $r = 2M$ เราจะได้ $e^{r^*/2M} = e^{(v-u)/4M} = \mp UV$ ซึ่งก็คือ

$$e^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) = -UV \tag{4.12}$$

เราเรียก U, V ว่า พิกัด null Kruskal ดังนั้นเราได้เมตริกของหลุมดำชว๊าซชิลด์ในพิกัด Kruskal - Szekeres

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2 \tag{4.13}$$

4.0.2 การยุบตัวเนื่องจากแรงโน้มถ่วง

4.1 หลุมดำชนิดอื่น ๆ

บทที่ 5

การทดสอบทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

5.1 การเลี้ยวเบนของแสง

5.2 การเกิด red shift จากแรงโน้มถ่วง

5.3 วงโคจรของดาวพุธ

บทที่ 6

คลื่นแห่งความโน้มถ่วง

6.1 การเกิดคลื่นแรงโน้มถ่วง

6.2 การตรวจวัดคลื่นแรงโน้มถ่วง

6.3 การกระจายของคลื่นแรงโน้มถ่วง

บทที่ 7

เอกภพวิทยายุคใหม่

7.1 เอกภพที่เรารับรู้ได้

7.1.1 เมตริก Robertson-Walker

เมตริกสำหรับอวกาศ 3 มิติที่โค้งอย่างคงที่

เพราะว่าเราสามารถเขียนเมตริกของกาลอวกาศได้ว่าเป็น

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

โดยที่ $g_{ij} = \delta_{ij}$ คือเมตริกของอวกาศ 3 มิติ ถ้าเราจะเขียนเมตริกในแบบระยะห่างจะได้ว่า

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \equiv -dt^2 + dl^2 \tag{7.2}$$

จากหลักการแห่งเอกภพ เราไม่มีทิศทางและตำแหน่งที่เป็นพิเศษในเอกภพ ดังนั้นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับเวลาใน g_{ij} จะต้องเป็น scale factor ซึ่งเขียนได้ว่า

$$dl^2 = R^2(t)d\tilde{l}^2 \tag{7.3}$$

7.2 ทฤษฎีการระเบิดครั้งยิ่งใหญ่

7.3 เอกภพที่เร่งขยาย

7.4 สสารมืด

7.5 ค่าคงที่แห่งเอกภพ

7.6 เอกภพวิทยาเชิงควอนตัม

บทที่ 8

ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบต่าง ๆ

ในฟิสิกส์ชั้นสูงเรามักกล่าวว่าทฤษฎีฟิสิกส์ใด ๆ จะต้อง derive ได้จากหลักการลากรางเจี่ยน (Lagrangian) ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของฟังก์ชั่นของกาลอวกาศ และเพราะว่าทฤษฎีแรงโน้มถ่วงคือหนึ่งในทฤษฎีสนามแบบคลาสสิก (Classical field theory) ดังนั้นเราจำต้องสามารถเขียนต้นกำเนิดของทฤษฎีแรงโน้มถ่วง (ในที่นี่คือทฤษฎีสัมพัทธภาพ) ได้ในรูปแบบลากรางเจี่ยน

8.1 รูปแบบลากรางเจี่ยนของทฤษฎีสัมพัทธภาพ

เรามีแอค์ชั่นของแรงโน้มถ่วงที่เรียกว่าแอค์ชั่น Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\lambda) + S_m \tag{8.1}$$

8.2 ทฤษฎีทางเลือก

ทฤษฎีทางเลือกอื่น ๆ หรือที่เรียกว่า Alternative theories ในภาษาอังกฤษ

บทที่ 9

เส้นทางสู่แรงโน้มถ่วงควอนตัม

นับตั้งแต่ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของ เซอร์ไอแซค นิวตัน ได้ถือกำเนิดมา มนุษยชาติเรามีความเข้าใจเรื่องแรงโน้มถ่วงมากขึ้นอย่างต่อเนื่องและสามารถนำความรู้และหลักการไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง แต่เราพบว่าทฤษฎีแรงโน้มถ่วงที่เรามีอยู่ (ทฤษฎีสัมพัทธภาพ) ไม่ตั้งอยู่บนหลักการเดียวกันกับทฤษฎีแรงอื่น ๆ และไม่เป็นทฤษฎีแบบควอนตัม ทุกวันนี้เรารู้ว่าแรงพื้นฐาน[1] ในเอกภพนี้มีอยู่ 4 แรง กล่าวคือ

- <u>แรงโน้มถ่วง</u> ซึ่งเป็นแรงดึงดูดเท่านั้น แรงนี้มีอยู่ทั่วไปทุกหนแห่งในเอกภพ
- <u>แรงแม่เหล็กไฟฟ้า</u> แรงชนิดนี้มาจากการที่มีประจุไฟฟ้า สามารถเป็นแรงดึงดูดหรือแรงผลักก็ได้
- <u>แรงนิวเคลียร์อย่างอ่อน</u> แรงนี้เป็นแรงที่ก่อให้เกิด beta decay
- <u>แรงนิวเคลียร์อย่างแรง</u> แรงนี้เป็นแรงที่ยึดอนุภาคพื้นฐานในอะตอม เป็นแรงที่รับผิดชอบต่อการเกิดปฏิกิริยานิวเคลียร์

ในแต่ปี 1865 ที่ James Clerk Maxwell สามารถสร้างสมการแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้นมาได้

9.1 ทำไมต้องมีแรงโน้มถ่วงควอนตัม

9.2 การควอนไทซ์แรงโน้มถ่วง

9.3 ทฤษฎีเชือก

[1]คำว่าแรงสามารถเรียกได้ด้วยว่าอันตรกิริยา (interaction)

สรุปคณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ของแรงโน้มถ่วง

สรุปฟิสิกส์ของแรงโน้มถ่วง

1. สัมพัทธภาพพิเศษ

สัมพัทธภาพพิเศษตั้งอยู่บนสัจพจน์ 2 ข้อ กล่าวคือ

สัจพจน์ข้อแรก (กาลิเลโอ) กฎแห่งฟิสิกส์สามารถใช้กับผู้สังเกตการณ์ 2 คนใด ๆ ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย (inertial frame) ที่สัมพัทธ์กัน ผู้สังเกตทั้ง 2 คนไม่สามารถวัดความเร็วสัมบูรณ์ (absolute velocity) ของกันและกันได้

สัจพจน์ข้อสอง (ไอน์สไตน์) ผู้สังเกตทั้งปวง ไม่ว่าจะอยู่ในกรอบอ้างอิงใด ๆ จะสามารถความเร็วแสง (c) ได้เป็นปริมาณคงที่ โดยมีค่าประมาณเท่ากับ 299,792.46 กิโลเมตรต่อวินาทีในสุญญากาศ

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพเรามองเอกภพว่าประกอบไปด้วยเวลาและอวกาศที่รวมอยู่ในพิกัดเดียวกัน เปรียบเช่นสายน้ำที่ไหลอย่างเป็นอิสระ นั่นคือเวลาไม่ได้อยู่อย่างสมบูรณ์มันอยู่อย่างสัมพัทธ์กับสรรพสิ่ง ดังนั้นเราจึงมีแนวคิดของอวกาศและเวลาเป็นความต่อเนื่อง (continuum) แบบเดียวกัน และเราใช้เวกเตอร์-4 (4-vector) ในการอธิบายระยะทางในกาลอวกาศ ถ้าเขียนในแบบ contravariant (นั่นคือให้ตัวแปรอยู่ข้างบน) $\mathbf{x} = x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^i)$ โดยที่ $i = 1, 2, 3$ หรือในพิกัด Cartesian เขียนว่า

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

แต่เรานิยมใช้หน่วยธรรมชาติ (Natural units) กล่าวคือ $G = h = c = 1$ ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

ถ้าเขียนแบบ covariant (คือตัวแปรอยู่ข้างล่าง) จะได้

$$\mathbf{x}^T = x_\mu = (x_0, \vec{x}) = (-x^0, \vec{x}) = (-t, x, y, z)$$

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพเรามีการแปลงที่เรียกว่าการแปลงลอเรนซ์ (Lorentz transformation) ซึ่งเป็นการแปลงพิกัดจากกรอบอ้างอิงหนึ่ง (เช่น S’) ไปสู่อีกกรอบอ้างอิงหนึ่ง (เช่น S) สำหรับ

เวกเตอร์-4 เราได้

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

โดยที่ γ คือตัวประกอบลอเรนซ์ (Lorentz factor) ซึ่งมีค่า $\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$ และ β เรียกว่าเบต้าสัมพัทธภาพ (Relativistic beta) ซึ่งมีค่า $\beta = v/c$ เราสามารถเขียนการแปลงพิกัดลอเรนซ์ให้สั้นลงได้โดยใช้เมตริกซ์นั่นคือ

$$x'^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

ในขั้นตอนสุดท้ายของสมการข้างบนเราใช้ข้อตกลงในการรวมของไอน์สไตน์ (Einstein summation convention) ณ จุดนี้ ผู้อ่านที่ไม่ชำนาญในการใช้สัญลักษณ์สัมพัทธภาพต้องเข้าใจว่าสมการการแปลงข้างบนนั้นเราหมายถึง

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3 \\ x'^1 &= \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 \\ x'^2 &= \Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 \\ x'^3 &= \Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 \end{aligned}$$

เราสามารถเขียนองค์ประกอบของการแปลงในแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

สำหรับระยะทางในอวกาศ (Line element) ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการแปลงพิกัดที่เรียกว่า invariance สำหรับกาลอวกาศในสัมพัทธภาพพิเศษเราเรียกว่า Minkowski line element อยู่ในรูป

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

เรียก $\eta_{\mu\nu}$ ว่าเมตริกเทนเซอร์ (metric tensor) ซึ่งก็คือเมตริกซ์ที่มีค่า

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ และเราสามารถใช้เมตริกเทนเซอร์อันนี้ในการโยกตัวแปรหรือการแปลงจากเวกเตอร์ covariant ไปสู่เวกเตอร์แบบ contravariant ได้ $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ หรือถ้าเรามีค่าผกผันของ $\eta_{\mu\nu}$ ซึ่งสำหรับสัมพัทธภาพพิเศษจะมีค่าเหมือนเดิม นั่นคือ $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ เราจึงได้การแปลง $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu$ นอกจากนี้เราก็ใช้เมตริกเทนเซอร์ในการเขียนผลคูณสเกลาร์ใด ๆ เช่น เรามี $\mathbf{a} = a^\mu$ และ $\mathbf{b} = b^\mu$ จะได้ผลคูณระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองว่า

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

ถ้าเราคำนวณค่าอนุพันธ์ (differential) ของเวกเตอร์-4 ในกาลอวกาศเราจะได้ line element กล่าวคือ

$$ds^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = dx^\mu dx_\mu = -dt^2 + dx^i dx^i = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ค่าของ ds^2 เป็นไปได้ในสามรูปแบบกล่าวคือ

1. $ds^2 > 0$ เราจะได้ว่าระยะทางบนกาลอวกาศเป็นแบบ spacelike หรือกล่าวคือเวกเตอร์-4 ของเราอยู่นอกกรวยแสงซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับสรรพสิ่งใด ๆ ในเอกภพที่จะเดินทางด้วยความเร็วมากกว่าความเร็วแสง

2. $ds^2 = 0$ กรณีนี้เราเรียกระยะทางบนกาลอวกาศว่าเป็นแบบ lightlike หรือ null ซึ่งสิ่งใด ๆ ที่มีความเร็วเท่ากับความเร็วแสงจะมีค่า line element อย่างนี้เสมอ

3. $ds^2 < 0$ เราเรียกระยะทางบนกาลอวกาศแบบนี้ว่า timelike ซึ่งเป็นเวกเตอร์-4 ของสรรพสิ่งต่าง ๆ ในกรวยแสงซึ่งเคลื่อนที่ที่ความเร็วน้อยกว่าแสง

สัมพัทธภาพพิเศษตั้งอยู่บนสัจพจน์ 2 ข้อ กล่าวคือ สัจพจน์ของกาลิเลโอที่ว่าด้วยความคงที่ของกฎของฟิสิกส์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงในกรอบอ้างอิงเฉื่อย และสัจพจน์ของไอน์สไตน์ที่ว่าด้วยความคงที่ของความเร็วแสงในเอกภพ

เราสามารถนำหลักการสัมพัทธภาพไปรวมกับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าได้ โดยการที่มีนิยามของความต่างศักย์-4 ซึ่งถือเป็นปริมาณพื้นฐานสำหรับทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า นั่นคือ

$$\mathbf{A} = (\phi, \vec{A}) \text{ โดยที่ } \phi \text{ คือความต่างศักย์ไฟฟ้าสถิตและ } \vec{A} \text{ คือความต่างศักย์เวกเตอร์}$$

เราสามารถสร้างเทนเซอร์ความแรงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้จากสูตร

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

และโปรดสังเกตว่าค่าของเทนเซอร์อันนี้จะต่างไปถ้าเราใช้ signature ของเมตริกเทนเซอร์แบบ timelike และจากสมการนี้ทำให้เราเขียนสมการแมกซ์เวลล์ขึ้นมาใหม่ได้คือ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

และ

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

โดยที่ $\mathbf{j} = j^\mu = (\rho, \vec{j})$ ซึ่ง ρ คือความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าสถิตและ $\vec{j}$ คือ กระแส-3

2. สัมพัทธภาพทั่วไป

สัมพัทธภาพทั่วไปวางอยู่บนหลักความสมมูลอย่างแรง (strong equivalence principle) ซึ่งกล่าวว่าไม่มีการทดลองท้องถิ่นใด ๆ ที่สามารถแยกความแตกต่างของกรอบอ้างอิงที่อยู่สภาพตกอย่างอิสระ (free fall) ได้ซึ่งก็คือกรอบอ้างอิงที่ไม่มีสนามโน้มถ่วง สัมพัทธภาพทั่วไปคือทฤษฎีของฟิสิกส์ที่ใช้เรขาคณิตอนุพันธ์และถือว่าความโค้งของกาลอวกาศอยู่ในสภาพเรขาคณิตแบบใดก็ได้ (ต่างกับสัมพัทธภาพพิเศษที่เราศึกษากาลอวกาศแบนราบ (flat spacetime) เท่านั้น) สำหรับกาลอวกาศโค้งงอ (curved spacetime) เราจำเป็นต้องใช้เทนเซอร์อันดับ-4 นั่นคือเทนเซอร์รีมันน์ซึ่งเป็นเทนเซอร์ที่บ่งบอกถึงความโค้งของกาลอวกาศ (curved spacetime) ที่เราสนใจ ดังนั้นโดยทั่วไปเราจะเขียน line element ในสัมพัทธภาพทั่วไปว่า

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\nu$$

โดยที่ $g_{\mu\nu}$ คือเมตริกเทนเซอร์ (metric tensor) ซึ่งเป็นเทนเซอร์ที่บ่งบอกถึงระยะทางบน manifold หนึ่ง ๆ ในสัมพัทธภาพทั่วไปค่าของ $g_{\mu\nu}$ มีค่าเป็นอะไรก็ได้ขึ้นอยู่กับเรขาคณิตของกาลอวกาศซึ่งก็ขึ้นอยู่กับการมีอยู่ของมวลสารหรือพลังงาน เราจะกล่าวเพิ่มเติมในความเชื่อมโยงนี้ในส่วนของสมการไอน์สไตน์อีกครั้ง

จากหลักแห่งความสมมูล เราจะสามารถหาจุด P ในตำบลท้องถิ่นที่มีพิกัด $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ได้เสมอ และ line element อยู่ในรูป

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$$

โดยที่

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \;\; \text{และ} \;\; \partial_\rho g_{\mu\nu}(P) = 0$$

เราเรียกกรอบอ้างอิงแบบนี้ว่า *กรอบอ้างอิงตกอิสระ* (free-fall frame) ณ จุด P สำหรับสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ (เช่น อนุภาคโฟตอน เป็นต้น) ที่เคลื่อนที่แบบตกอิสระจะมีสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0$$

เราสามารถเขียนสมการ line element ของการเคลื่อนที่แบบตกอิสระได้

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$$

แต่ถ้าเราต้องการเขียนสมการเคลื่อนที่แบบตกอิสระสำหรับพิกัดใด ๆ ก็ตามเราจะต้องใช้สมการ geodesic ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

เราเรียก ${\Gamma^\sigma}_{\mu\nu}$ ว่า *ตัวเชื่อมเมตริก* (metric connection) หรือ *สัญลักษณ์คริสโตฟเฟล* (Christoffel symbol) ซึ่งอยู่ในรูป

$${\Gamma^\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu} \right)$$

โดยที่ $g^{\rho\sigma}$ คือค่าผกผันของ $g_{\rho\sigma}$ โดยเรามีความสัมพันธ์

$$g_{\rho\mu} g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\rho$$

นอกจากในสมการ geodesic แล้ว การใช้สัญลักษณ์คริสโตฟเฟลจะปรากฏในการทำการคำนวณอนุพันธ์ covariant กล่าวคือ

$$V^\mu{}_{;\nu} \equiv \nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + {\Gamma^\mu}_{\nu\rho} V^\rho$$

ซึ่งอนุพันธ์ covariant จะมีค่าเท่ากับอนุพันธ์แบบธรรมดาเมื่อเราทำการคำนวณบน manifold แบนราบ

$$\nabla_\nu V^\mu \to \partial_\nu V^\mu \quad \text{เมื่อ manifold แบนราบ}$$

เราสามารถเขียนค่าอนุพันธ์ covariant ออกมาได้ในอีกรูปแบบ คือ

$$V^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)$$

โดยที่ $g = \det g$

สมการไอน์สไตน์

สมการไอน์สไตน์หรือสมการสนามไอน์สไตน์เป็นสมการเทนเซอร์ที่อยู่ในรูป

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$$

โดยที่ $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ เราเรียกว่า $R^{\mu\nu}$ เทนเซอร์ริคชี่ (Ricci tensor) และ $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ซึ่งเป็นค่าสเกลาร์ของเทนเซอร์ริคชี่ที่เรียกว่าสเกลาร์ริคชี่ (Ricci scalar) หรือเรียกว่าสเกลาร์ความโค้ง (Curvature scalar)

3. หลุมดำ

ผลเฉลยชว๊าซชิลด์—หลุมดำชว๊าซชิลด์

เราเรียกผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ของสนามภายนอกวัตถุทรงกลมที่มีมวล M ว่าผลเฉลยชว๊าซชิลด์ (Schwarzschild solution) ซึ่งค้นพบโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันที่ชื่อว่า Karl Schwarzschild ในปี 1916 ซึ่งทำให้ไอน์สไตน์ประหลาดใจเป็นอย่างมากเพราะว่าเขาไม่คิดว่าจะมีใครสามารถแก้สมการไอน์สไตน์ได้รวดเร็วอย่างนั้น ผลเฉลยชว๊าซชิลด์มี line element ในพิกัดทรงกลมดังนี้

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

จะเห็นว่าเมื่อค่า $r = 2M$ ผลเฉลยชว๊าซชิลด์จะเกิดสภาวะเอกฐาน (singularity) นั่นคือความหมายของเวลาและอวกาศจะสลับที่กัน จุดนี้คือการทำนายการค้นพบหลุมดำโดยสมการไอน์สไตน์ เราเรียกหลุมดำแบบนี้ว่า "หลุมดำชว๊าซชิลด์" ซึ่งเป็นหลุมดำที่อยู่แบบสถิต (static) และคงตัว (stationary) คือไม่มีการหมุนหรือเคลื่อนที่ใด ๆ ได้ และไม่มีประจุไฟฟ้า

ผลเฉลยชว๊าซชิลด์นั้นถือเป็นผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียวในแง่ที่ว่าไม่มีผลเฉลยอื่น ๆ ที่เป็นผลเฉลยที่มีสมมาตรทรงกลม ผู้ที่พิสูจน์เป็นคนแรกคือ J. T. Jebsen ซึ่งเป็นชาวนอร์เวย์ในปี 1920 ซึ่งเขาได้ตีพิมพ์ในวารสารฟิสิกส์ของสวีเดนซึ่งไม่เป็นที่รู้จักมาก ทำให้เป็นที่เชื่อกันว่าผู้ที่พิสูจน์คือ Birkhoff โดยที่บทพิสูจน์นั้นรู้จักกันในชื่อของ *ทฤษฎีบทเบิร์กคอฟฟ์* (Birkhoff's theorem) ซึ่งความจริงได้รับการเปิดเผยมาเมื่อในไม่นานนี้เอง โดยการตีพิมพ์ของนักฟิสิกส์และนักคณิตสาสตร์ชาวนอร์เวย์ในปี 2005

หลุมดำอื่น ๆ

นอกจากหลุมดำชว๊าซชิลด์ซึ่งเป็นหลุมดำแบบที่ง่ายที่สุดแล้ว ยังมีหลุมดำแบบอื่นซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์แบบแน่นอน (exact solutions to Einstein equation) ซึ่งจะความซับซ้อนมากกว่าหลุมดำชว๊าซชิลด์ ได้แก่ หลุมดำที่หมุนได้ (Rotating black hole) ได้แก่หลุมดำเคอร์ (Kerr) และหลุมดำเคอร์-นิวแมน (Kerr-Newman) โดยที่หลุมดำเคอร์-นิวแมนนอกจากจะมีการหมุนซึ่งเราแสดงโดยตัวแปร J แล้วก็มีประจุ Q ด้วย นั่นคือมันเป็นหลุมดำที่ต้องใช้ตัวแปรฟิสิกส์ 3 ตัวในการอธิบายนั่นคือสามารถเขียนฟิสิกส์ของหลุมดำชนิดนี้ให้เป็นฟังก์ชั่นของ (M, J, Q) ได้ ในขณะที่หลุมดำเคอร์ใช้ตัวแปร 2 ตัว กล่าวคือเป็นฟังก์ชั่นของ (M, J) ส่วนหลุมดำที่มีประจุและอยู่สถิตและคงตัวเราเรียกว่าหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริม (Reissner-Nordström) ซึ่งเป็นหลุมดำที่ใช้ตัวแปร (M, Q) ในการอธิบายทางฟิสิกส์ของมัน

หลุมดำเคอร์มีเรขาคณิต (ซึ่งหมายถึงสนามแรงโน้มถ่วงรอบตัวมันนั่นเอง) ที่ซับซ้อน เราสามารถเขียน line element ของหลุมดำเคอร์ในพิกัดแบบโบเยอร์-ลินด์ควิสต์ (Boyer-Lindquist coordinates) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma})dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma}d\phi^2 \end{aligned}$$

โดยที่

$$a = J/M \quad \text{ซึ่งเรียกว่า spin-mass ratio}$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr - a^2$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$$

เส้นขอบฟ้าเหตุการณ์ของหลุมดำเคอร์มี 2 ค่าคือ

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

สำหรับหลุมดำไรส์เนอร์-นอร์ดสเตริมจะมีรูปแบบเดียวกับหลุมดำชว๊าซชิลด์แต่จะมีประจุรวมอยู่ด้วยใน line element นั่นคือ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

โดยที่ Q คือประจุที่วัดได้โดยผู้สังเกตที่อยู่ไกลออกไป

เฉลยโจทย์

บทที่ 1

1. เพราะว่า $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ และเรามี

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

และ

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \sum_{\mu\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{00}F^{00} + F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} \\ &+ F_{10}F^{10} + F_{11}F^{11} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} \\ &+ F_{20}F^{20} + F_{21}F^{21} + F_{22}F^{22} + F_{23}F^{23} \\ &+ F_{30}F^{30} + F_{31}F^{31} + F_{32}F^{32} + F_{33}F^{33} \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าจากเทนเซอร์ทั้งสองลงไปเราได้ (โดยเราสามารถเขียนได้ว่า $B^i = F^{ij}$ และ $E^i = F^{0i}$)

$$F^2 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) = 2(B^iB^i - E^iE^i) = 2(F^{ij}F^{ij} - F^{0i}F^{0i})$$

ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ที่ invariant ■

2. เราต้องการแสดงว่า $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$ เพื่อที่จะได้ j^μ เราต้องเขียนว่า $\partial_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi j^\mu$

นั่นคือเราได้ $4\pi\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}$ และเพราะว่าสามารถเขียนได้ว่า $F^{\nu\mu} = \frac{1}{2}(F^{\nu\mu} + F^{\nu\mu})$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
4\pi\partial_\mu j^\mu &= \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu(F^{\nu\mu} + F^{\nu\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} + \partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} - \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}) \\
\text{ดังนั้นเราได้}\ \ \partial_\mu j^\mu &= 0
\end{aligned}
$$

โปรดสังเกตว่าในสามขั้นตอนสุดท้ายเราใช้สมบัติความไม่สมมาตรของเทนเซอร์ $F^{\mu\nu}$ และทำการเปลี่ยนชื่อของตัวแปรในขณะที่ $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ ■

3. เราต้องการแสดงว่า $k^\mu k_\mu = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0$ โดยทำการแทนค่า A^μ ลงในสมการ (1.124) ซึ่งการแสดงก็จะตรงไปตรงมา เพราะว่า $A^\mu = \varepsilon^\mu e^{\pm i(-\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r})} = \varepsilon^\mu e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \varepsilon^\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu}$ และแทนค่า A^μ ลงในสมการ $\Box A^\mu = 0$ เราได้

$$
\begin{aligned}
0 = \Box A^\mu &= \partial_\mu\partial^\mu A^\mu = \partial_\mu\partial^\mu\varepsilon^\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon^\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
(\text{เพราะว่า}\ \ \partial^\mu = -\partial_\mu) \quad &= -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
&= -\varepsilon^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}k_\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
&= -\varepsilon^\mu k_\mu k_\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
(\text{เพราะว่า}\ \ k_\mu = -k^\mu) \quad &= \varepsilon^\mu k_\mu k^\mu e^{\pm ik_\mu x^\mu} \\
&= \varepsilon^\mu\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
\text{ดังนั้น}\ \ \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k_\mu k^\mu = 0 &
\end{aligned}
$$

การคำนวณในข้อนี้คือการแสดงว่าโฟตอนหรืออนุภาคใด ๆ ที่สามารถเดินทางได้ด้วยความเร็วแสงจะต้องมีมวลเป็นศูนย์ ■

บทที่ 2

บรรณานุกรม

[1] Bergström. L, Goobar, A., *Cosmology and Particle Astrophysics*, Springer (Germany 2004).

[2] Carroll, S. M., *SPACETIME and GEOMETRY—An introduction to General Relativity*, Addison-Wesley (USA 2004).

[3] Cheng, T-P., *Relativity, Gravitation and Cosmology*, Oxford University Press (UK 2005).

[4] d' Inverno, R.A., *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press (Malta 1995).

[5] Frolov, V.P., Novikov, D., *Black Hole Physics*, Kluwer Academic Publishers (the Netherlands 1998).

[6] Jackson, J.D., *Classical Electrodyanmics*, John Wiley & Sons (USA 1999).

[7] Mandl. F, Shaw, G., *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons (UK 2001).

[8] Misner. C.W., et al, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company (USA 1973).

[9] Mould, R.A., *Basic Relativity*, Springer (USA 1996).

[10] Pidokrajt, N., *Black Hole Thermodynamics*, Master's thesis at Stockholm University (Sweden 2003).

[11] Schutz B.F., *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (UK 2000).

[12] Schwarz. P.M. and Schwarz. J.H., *Special Relativity—from Einstein to Strings*, Cambridge University Press (UK 2004).

[13] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons (USA 1972).

[14] Woan, G., *The Cambridge Handbook of Physics Formulas*, Cambridge University Press (USA 1996).