

---

# 4. Strumenti Analogici

## 4.1. Generalità

Tra tutte le classificazioni possibili, per gli strumenti analogici conviene fare riferimento a quella per tipo di conversione:

- magnetoelettrica;
- elettromagnetica;
- elettrodinamica;
- ad induzione;
- termica.

Negli strumenti analogici, la grandezza di uscita è generalmente la deviazione angolare di un indice solidale con un equipaggio che, per effetto della grandezza incognita, è forzato a ruotare intorno ad un asse.

L'equipaggio mobile è sottoposto ad una *coppia motrice*, funzione della grandezza sotto misura. Affinché lo strumento possa fornire una indicazione in condizioni di equilibrio statico, con l'indice fermo in una posizione univocamente corrispondente alla entità del misurando, sull'equipaggio mobile dovrà agire anche una *coppia antagonista*, funzione crescente della deviazione, di solito di natura elastica. Per smorzare le oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, sempre presenti con coppie antagoniste di tipo elastico, deve essere prevista una *coppia smorzante*, funzione della derivata della grandezza sotto misura, di solito di natura viscosa, che riduce la durata del transitorio meccanico. Purtroppo è presente anche una *coppia d'attrito* che si cerca di minimizzare poiché attribuisce insensibilità e imprecisione allo strumento.

*Portata* di uno strumento analogico è la grandezza che applicata ai suoi morsetti fa arrestare l'indice in fondo scala.

*Scala* di uno strumento analogico è la suddivisione dell'arco di cerchio che può essere percorso dall'indice. Essa è solitamente tracciata in divisioni e numerata in modo da consentire una facile lettura.

L'indice degli strumenti più pregiati è a coltello o a filo e sotto questi è previsto uno specchio che consente di ridurre l'errore di parallasse che si commette nella lettura (Figura 4.1).

Uno strumento può avere più di una portata e la lettura non corrisponde necessariamente alla ampiezza della grandezza sotto misura ma è a questa legata linearmente secondo una costante. *Costante* di uno strumento è il rapporto tra la grandezza di fondo scala e il numero di divisioni della scala. Nel caso di strumento a più portate si avranno tante costanti quante sono le portate.

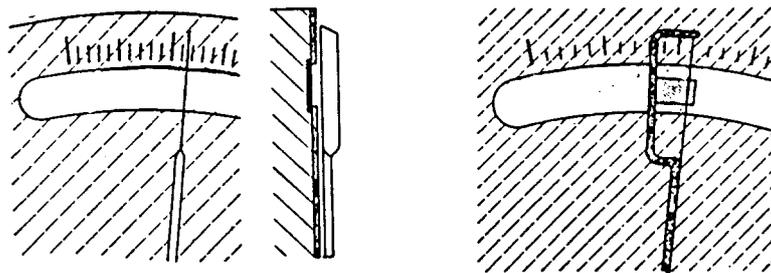


Fig. 4.1 *Indice degli strumenti analogici*

Per pervenire al valore della grandezza misurata la lettura fatta sulla scala deve essere moltiplicata per la costante.

## 4.2. Classe di Precisione

La precisione di uno strumento è definita dai limiti dell'errore espresso in percento di un valore convenzionale. Il valore convenzionale coincide quasi sempre con il valore di fondo scala, cioè con la portata. Per quanto riguarda la precisione, gli strumenti sono suddivisi in classi contraddistinte da un numero detto indice di classe. Le classi previste dalle Norme CEI sono:

- Classe 0.05, errore inferiore allo 0.05% del fondo scala;
- Classe 0.1, errore inferiore allo 0.1% del fondo scala;
- Classe 0.2, errore inferiore allo 0.2% del fondo scala;
- Classe 0.3, errore inferiore allo 0.3% del fondo scala;
- Classe 0.5, errore inferiore allo 0.5% del fondo scala;
- Classe 1, errore inferiore allo 1% del fondo scala;
- Classe 1.5, errore inferiore allo 1.5% del fondo scala;
- Classe 2.5, errore inferiore allo 2.5% del fondo scala;
- Classe 3, errore inferiore allo 3% del fondo scala.

Questi indici rappresentano i limiti di errore percentuale che uno strumento, appartenente ad una certa classe, non deve superare, al fondo scala, in determinate condizioni di riferimento, indicate dal costruttore oppure specificate dalle norme.

L'errore assoluto dello strumento, in qualunque punto della scala, non deve essere superiore a

$$\varepsilon = \frac{\text{Classe} \cdot \text{Portata}}{100} \quad (4.1)$$

Ad esempio, un amperometro di classe 0.2 portata 5 A, in qualunque punto della scala non deve avere un errore assoluto superiore a

$$\varepsilon = \frac{0.2}{100} 5 = \pm 0.01 \text{ A} \quad (4.2)$$

Le condizioni di riferimento riguardano la temperatura ambiente, la posizione dello strumento, il suo orientamento rispetto al campo terrestre, eventuali valori di induzione magnetica esterna, la frequenza della corrente in misura (se si tratta di c. a.) eccetera. Facendo variare queste condizioni entro i limiti indicati dalle norme, l'errore d'indicazione dello strumento non deve ulteriormente variare oltre il limite stabilito dalla classe. Ad esempio, nel caso dell'amperometro, sopra considerato, i limiti di variazione della temperatura ambiente sono di  $\pm 10$  °C intorno alla temperatura di riferimento di 20 °C: l'errore assoluto dello strumento, a 30 °C oppure a 10 °C, non dovrà perciò essere superiore a  $0.01 + 0.01 = \pm 0.02$  A.

L'incertezza tipo che possiamo attribuire a uno strumento di una data classe di precisione si ottiene assumendo una distribuzione rettangolare dell'errore delimitata dai limiti di classe e risulta

$$u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} = \frac{\text{Classe} \cdot \text{Portata}}{100\sqrt{3}} \quad (4.3)$$

### 4.3. Comportamento degli Strumenti in Regime Stazionario e in Transitorio

Quando ad uno strumento analogico viene applicata una coppia motrice costante, l'indice tende a porsi in movimento ed a raggiungere la condizione d'equilibrio stabile per cui si verifica la uguaglianza tra coppia motrice e coppia resistente (o antagonista).

Lo spostamento dell'indice è retto dalla seguente equazione del moto nella quale per semplicità si è trascurata la coppia di attrito:

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} + N \frac{d\delta}{dt} + M\delta = C_m \quad (4.4)$$

nella quale:

- $J$  è il momento di inerzia dell'equipaggio;
- $N$  è la costante della coppia di smorzamento;
- $M$  è la costante della coppia antagonista;
- $C_m$  è la coppia motrice supposta indipendente da  $\delta$ ;
- $\delta$  è la deviazione dell'indice dello strumento;
- $t$  è il tempo.

Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine che può essere risolta rispetto all'incognita  $\delta$  con il metodo della trasformata di Laplace, ricordando che  $\delta = 0$  a  $t = 0$ .

Si ottiene una espressione piuttosto complessa che è caratterizzata dalla pulsazione del sistema  $\omega_0$  che dipende dal valore che assume il coefficiente di smorzamento

$$\gamma = \frac{N}{2\sqrt{MJ}} \quad (4.5)$$

Si può a questo punto rilevare l'analogia con quanto esposto nel Capitolo 3.3. per quanto riguarda i sistemi del secondo ordine. Il sistema presenta quindi una funzione di trasferimento che lega la grandezza elettrica in entrata alla grandezza meccanica in uscita (deviazione dell'indice).

L'indice assumerà quindi la posizione di regime dopo un certo tempo e lo spostamento dell'indice potrà essere oscillante, smorzato o aperiodico a seconda del valore di  $\gamma$  (Figura 4.2).

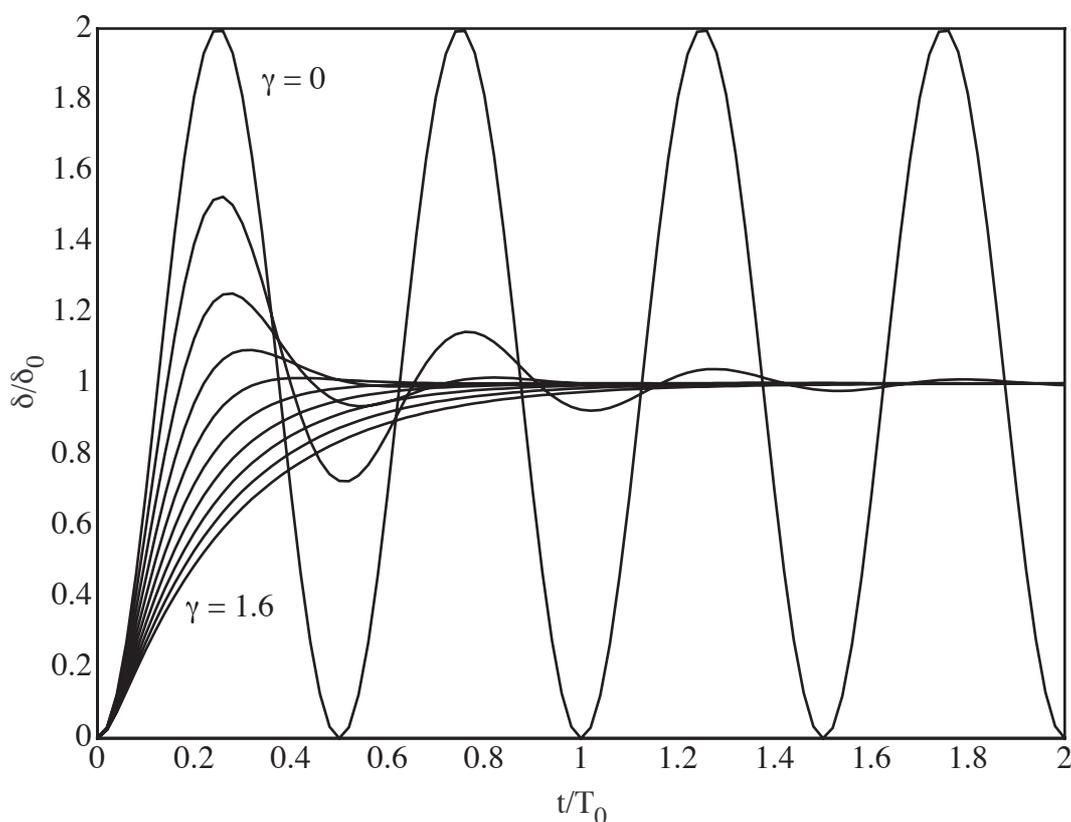


Fig. 4.2 Andamento temporale della posizione dell'indice in funzione del valore di  $\gamma$  da 0 a 1.6 con passi di 0.2

Negli strumenti analogici si fa in modo che sia  $\gamma = 0.7 \div 0.8$  per cui l'indice supera, sia pur di poco, la posizione di riposo oscillando brevemente intorno a questa.

Quanto è stato esposto assumendo per semplicità  $C_m = Costante$ , può essere facilmente esteso al caso di coppia motrice variabile nel tempo. Ad esempio, nel caso di coppia impressa sinusoidale di pulsazione  $\omega$ , se si fa in modo che sia  $M \gg \omega^2$ ,  $J \gg \omega N$  e  $M \gg \omega N$ , la deviazione dell'indice seguirà e riprodurrà senza inerzia la coppia motrice istantanea applicata finché  $\omega \ll \omega_0$  (registratori).

Nel caso invece che sia  $\omega \gg \omega_0$ , l'indice dello strumento non è in grado di seguire l'andamento della grandezza e rimane fermo sulla posizione di zero.

Se la coppia motrice fosse variabile con valore medio non nullo, l'indice devierebbe in ragione di detto valore medio.

## 4.4. Strumenti Magnetoelétrici

L'equipaggio mobile di uno strumento magnetoelétrico è costituito da una bobina rettangolare in filo di rame sottile, avvolta su un nucleo ferromagnetico di forma cilindrica immerso nel campo magnetico generato da un magnete permanente. Le espansioni polari del magnete sono sagomate in modo da avere traferro costante (Figura 4.3).

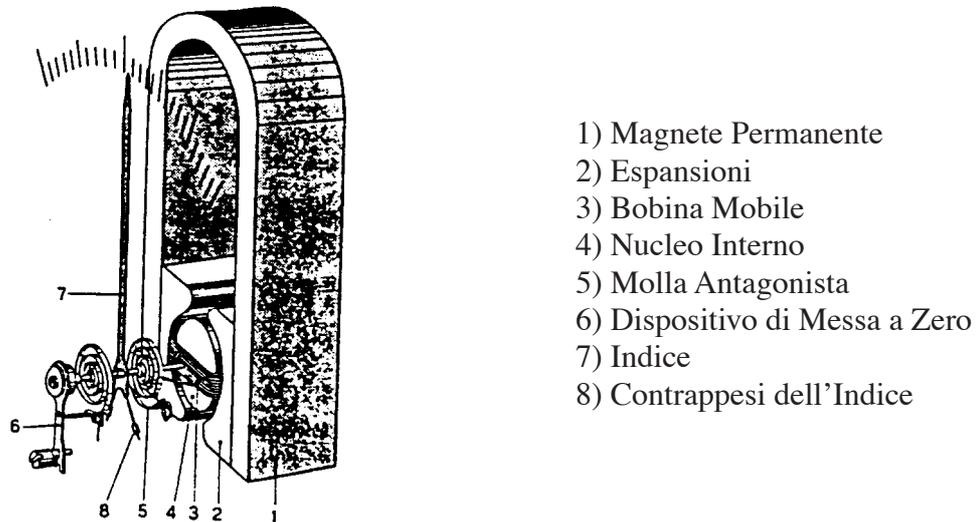


Fig. 4.3 Strumento magnetoelétrico

Se la bobina è percorsa da corrente  $I$ , sui suoi lati attivi si esercita una coppia motrice  $C_m$  data da

$$C_m = BndlI = kI \quad (4.6)$$

nella quale:

- $B$  è l'induzione magnetica;
- $n$  è il numero delle spire della bobina;
- $l$  è la lunghezza della bobina;
- $d$  è il diametro della bobina.

Tale coppia è contrastata da una coppia resistente  $C_r$  di natura elastica (una molla, o i fili stessi di adduzione della corrente alla bobina, tesi fra due vincoli) che vale

$$C_r = M\delta \quad (4.7)$$

dove:

- $\delta$  è l'angolo di rotazione della bobina;
- $M$  è la costante della molla.

In condizioni di equilibrio deve essere

$$C_m = C_r \quad (4.8)$$

da cui

$$\delta = \frac{Bndl}{M}I = k_a I \quad (4.9)$$

in cui  $k_a$  è detta costante amperometrica dello strumento. Come si vede, il legame fra  $\delta$  ed  $I$  è lineare per cui lineare è anche la scala di lettura. Per quanto detto al punto precedente, lo strumento magnetoelettrico fornisce una indicazione quando il valore medio delle grandezze non è nullo e quindi è tipico per le misure in corrente continua.

Nella fase transitoria del passaggio della posizione  $\delta = 0$  alla posizione  $\delta = k_a I$ , la bobina si muove con velocità angolare  $d\delta/dt$ .

Poiché i lati attivi si muovono con velocità  $(d/2)(d\delta/dt)$  entro il campo magnetico costante descritto dal vettore  $B$ , nella bobina viene indotta una forza elettromotrice

$$E = Bldn \frac{d\delta}{dt} \quad (4.10)$$

Se la bobina possiede una resistenza propria  $R_g$  ed è chiusa su un circuito di resistenza  $R$ , si determina una corrente

$$i = \frac{E}{R_g + R} \quad (4.11)$$

che si sovrappone a quella applicata e che dà luogo ad una coppia smorzante data da

$$C_s = Bldni = \frac{B^2 l^2 d^2 n^2}{R_g + R} \frac{d\delta}{dt} = N \frac{d\delta}{dt} \quad (4.12)$$

Tale coppia smorzante è nulla per  $R = \infty$  (strumento a circuito aperto) e massima per  $R = 0$  (strumento in corto circuito). Essa è nulla anche ad indice fermo.

Come esempio consideriamo un voltmetro magnetoelettrico. Esso è costituito da una struttura del tipo di quella illustrata in Figura 4.3, ma in serie alla bobina mobile viene posta una resistenza  $R$ , come mostrato in Figura 4.4.

La deviazione dell'indice è proporzionale alla corrente che circola nella bobina ed è quindi data da

$$\delta = k_a I = k_a \frac{V}{R} = k_v V \quad (4.13)$$

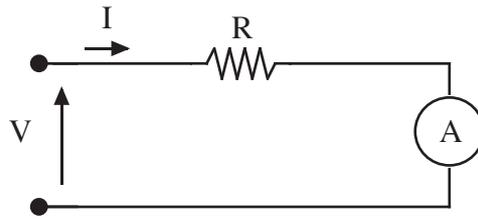


Fig. 4.4 Voltmetro magnetoelettrico

Variando il valore della resistenza  $R$  è possibile ottenere con lo stesso strumento diverse portate e diverse costanti  $k_v$ . Normalmente nei voltmetri magnetoelettrici sono presenti diversi morsetti per le diverse portate, come mostrato in Figura 4.5.

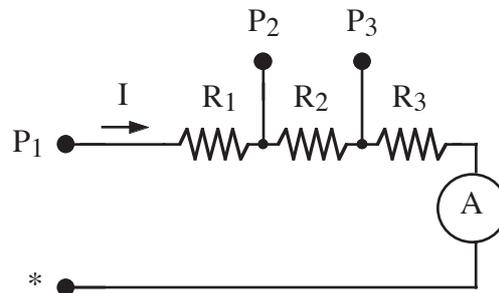


Fig. 4.5 Voltmetro magnetoelettrico con diverse portate

## 4.5. Strumenti Logometrici

Una particolare applicazione di quanto sopra esposto è rappresentata dagli strumenti logometrici (Figura 4.6).

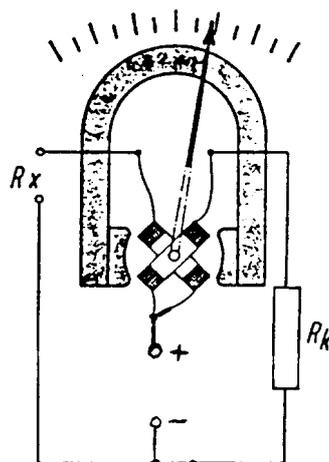


Fig. 4.6 Strumento logometrico

In questi strumenti la coppia di reazione elastica non è prevista in quanto l'equilibrio si ottiene facendo agire sull'equipaggio mobile due coppie motrici di verso opposto, che si uguagliano in dipendenza delle due correnti di alimentazione e della posizione angolare dell'equipaggio stesso. Essendo le bobine di solito identiche, si vuole che lo strumento si arresti in posizioni anche diverse dallo zero, come ogni strumento indicatore. Per fare questo, si sagoma il traferro con forme opportune del nucleo, che porta solidali le due bobine disposte a  $90^\circ$ .

Le coppie motrici sono date da

$$\begin{cases} C_{m1} = k_1 I_1 \cos(\delta) \\ C_{m2} = k_2 I_2 \sin(\delta) \end{cases} \quad (4.14)$$

Uguagliando le due coppie si ottiene

$$\tan(\delta) = k \frac{I_1}{I_2} \quad (4.15)$$

Come si vede l'indicazione dipende dal rapporto fra due grandezze elettriche. La sua naturale applicazione è dunque l'impiego come ohmetro.

Posto:

- $R_c$  = Resistenza Campione;
- $R_x$  = Resistenza Incognita;
- $n_1, n_2$  = Numero di Spire delle Bobine;

e trascurando le resistenze proprie delle bobine si ha che

$$\begin{cases} I_1 = \frac{E}{R_c} \\ I_2 = \frac{E}{R_x} \end{cases} \quad (4.16)$$

da cui

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1}{n_2} \tan(\delta) \quad (4.17)$$

Questi strumenti necessitano di notevoli coppie motrici e sono solitamente di precisione modesta.

## 4.6. Strumenti a Conversione Elettromagnetica

Negli strumenti a conversione elettromagnetica, detti anche a ferro mobile, il campo magnetico è generato da una bobina fissa entro la quale si muove un pezzo di ferro dolce, variamente sagomato, che determina la deviazione di un indice su una scala (Figura 4.7).

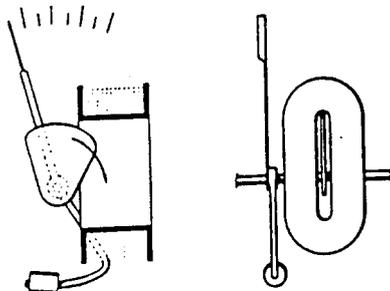


Fig. 4.7 Principio di funzionamento di uno strumento a conversione elettromagnetica

L'energia magnetica in gioco nel sistema fisico chiuso definito dai confini dello strumento è data da

$$W = \frac{1}{2}L(\delta)I^2 \quad (4.18)$$

dove  $L(\delta)$  è l'induttanza della bobina, che dipende dalla posizione del nucleo, cioè della deviazione  $\delta$ . Il nucleo viene attirato entro la bobina e in assenza di coppia antagonista raggiungerebbe la posizione per cui è massima l'energia magnetica immagazzinata del sistema.

La coppia motrice che insorge è data da

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\delta} I^2 \quad (4.19)$$

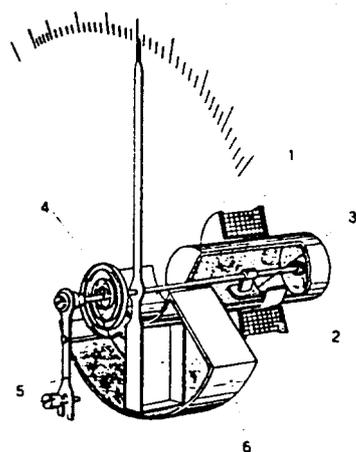
Poiché il fenomeno descritto avviene indipendentemente dalla legge di variazione nel tempo della corrente, questi strumenti possono funzionare tanto in continua che in alternata (entro certi limiti di frequenza).

La legge di variazione di  $L$  con  $\delta$  può essere predeterminata modellando opportunamente il pezzo di ferro dolce, per cui si può ottenere una scala di lettura prossima alla lineare anche se nella formula la corrente compare al quadrato.

Se la bobina è eccitata con corrente alternata, la coppia motrice risulta proporzionale al valore efficace, sia pure non rigorosamente.

Le parti mobili non sono interessate da corrente, per cui questi strumenti sono semplici e robusti; la precisione conseguibile è confrontabile con quella degli strumenti magnetoelettrici.

Una variante costruttiva di rilievo, praticamente la più usata, consiste nell'utilizzare come fonte di coppia motrice non più l'attrazione bensì la repulsione tra corpi magnetizzati per induzione (Figura 4.8).

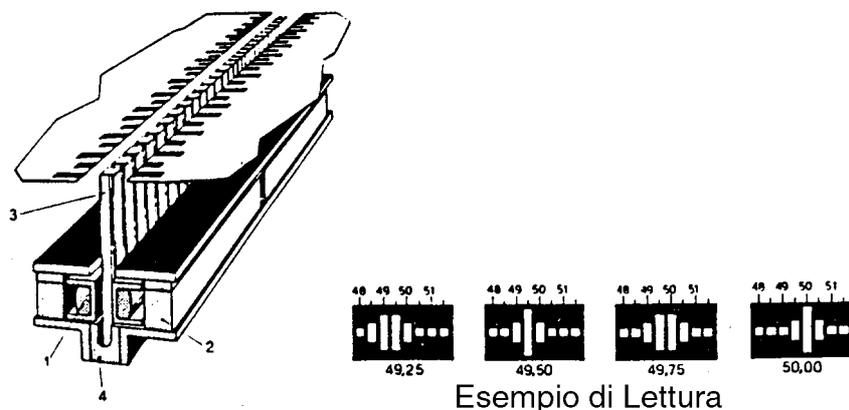


- 1) Bobina
- 2) Nucleo Fisso
- 3) Nucleo Mobile
- 4) Molla Antagonista
- 5) Dispositivo di Messa a Zero
- 6) Smorzatore ad Aria

Fig. 4.8 Strumento a conversione elettromagnetica

La massima induttanza si ha quando le due lamine (una mobile e l'altra fissa), magneticamente polarizzate in maniera omologa, si trovano alla massima distanza.

Un altro strumento elettromagnetico assai diffuso è il frequenzimetro a lamelle, impiegato spesso nei quadri di controllo. Esso è costituito da una serie di lamelle con frequenze proprie di risonanza meccanica poco diverse tra loro e note che vengono sottoposte a campo magnetico variabile (Figura 4.9).



Esempio di Lettura

- 1) Bobina (Estesa per Tutta la Lunghezza della Scala)
- 2) Nucleo in Materiale Ferromagnetico
- 3) Serie di Lamelle Vibranti le cui Estremità Sono Fissate sul Supporto
- 4) Supporto

Fig. 4.9 Frequenzimetro a lamelle

L'elettromagnete, eccitato dalla tensione di cui si vuole misurare la frequenza, determina la vibrazione di quella lamella che presenta frequenza propria uguale al doppio della frequenza di alimentazione (infatti  $Forza\ di\ Attrazione \propto B^2$ ).

Tali strumenti presentano al solito una ventina di lamelle, accordate di 0.5 Hz in 0.5 Hz intorno alla frequenza centrale (di solito 60 Hz o 50 Hz).

## 4.7. Strumenti a Conversione Elettrodinamica

Gli strumenti a conversione elettrodinamica sono costituiti da due bobine, l'una fissa, di solito sdoppiata, e l'altra mobile collegata all'indice (Figura 4.10).

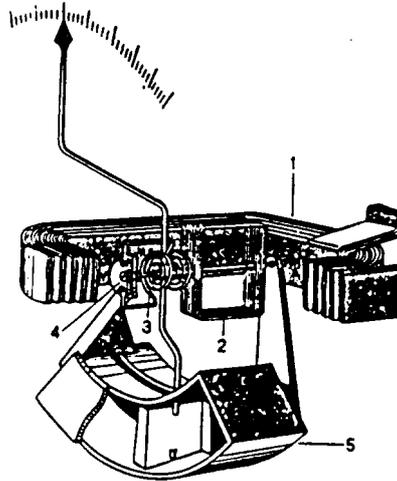


Fig. 4.10 Strumento a conversione elettrodinamica

L'energia magnetica in gioco vale

$$W = \frac{1}{2}L_f I_f^2 + \frac{1}{2}L_m I_m^2 + M(\delta)I_f I_m \quad (4.20)$$

dove  $L_f$ ,  $L_m$  e  $M$  sono rispettivamente i coefficienti di autoinduzione e mutua induzione delle bobine. Derivando rispetto a  $\delta$  si ottiene l'espressione della coppia motrice:

$$C_m(\delta) = I_f I_m \frac{dM}{d\delta} \quad (4.21)$$

L'andamento di  $M$  in funzione di  $\delta$  è sinusoidale, ma se le deviazioni non eccedono i  $45^\circ$  intorno alla posizione ove la coppia è massima (assi delle bobine ortogonali), si può ritenere che  $M$  vari linearmente con  $\delta$  per cui

$$\frac{dM}{d\delta} = k \quad (4.22)$$

e pertanto

$$C_m = k I_f I_m \quad (4.23)$$

Se la coppia antagonista è di natura elastica ( $C_r = m \delta$ ), all'equilibrio sarà  $C_m = C_r$  cioè  $k I_f I_m = m \delta$  da cui

$$\delta = \frac{k}{m} I_f I_m \quad (4.24)$$

Questa espressione è valida per i valori istantanei e, se le correnti sono continue, la deviazione risulta costante.

In regime sinusoidale, se  $I_f$  e  $I_m$  sono isofrequenziali e sfasate dell'angolo  $\varphi$ :

$$\begin{cases} I_f = I_{fM} \sin(\omega t) \\ I_m = I_{mM} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (4.25)$$

la coppia motrice è data da

$$C_m(t) = k \frac{I_{fM} I_{mM}}{2} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] \quad (4.26)$$

che nel tempo assume l'andamento indicato nella Figura 4.11.

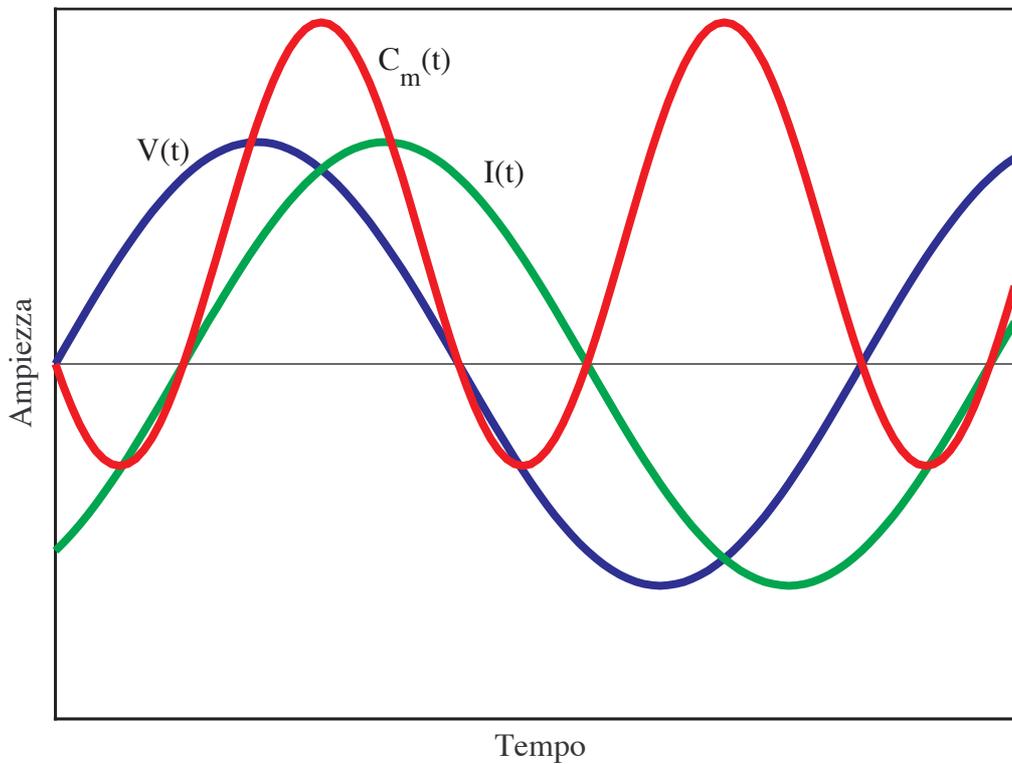


Fig. 4.11 Andamento temporale della coppia motrice in uno strumento a conversione elettrodinamica

La equazione (4.26) può essere dimostrata agevolmente procedendo a ritroso:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}[\cos(\beta) - \cos(2\alpha + \beta)] &= \frac{1}{2}[\cos(\beta) - \cos(2\alpha)\cos(\beta) + \sin(2\alpha)\sin(\beta)] = & (4.27) \\
 &= \frac{1}{2}\{[1 - \cos(2\alpha)]\cos(\beta) + \sin(2\alpha)\sin\beta\} = \\
 &= \frac{1}{2}\{[1 - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)]\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha)\} = \\
 &= \frac{1}{2}[2\cos(\beta)\sin^2(\alpha) + 2\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha)] = \\
 &= \sin(\alpha)[\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)] = \sin(\alpha)\sin(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

Dalla equazione (4.26) risulta che la coppia istantanea è costituita da un termine costante e da un termine sinusoidale di pulsazione doppia di quella delle grandezze impresse.

Introducendo per le correnti i valori efficaci al posto dei valori massimi si ottiene

$$C_m(t) = kI_f I_m [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] \quad (4.28)$$

Si può osservare che il valore medio di questa funzione è proporzionale al prodotto scalare delle due grandezze vettoriali  $I_f$  e  $I_m$

$$C_m = k\vec{I}_f \cdot \vec{I}_m \quad (4.29)$$

Si può agevolmente dimostrare che nel caso di correnti di frequenza diversa il valore medio risulta nullo.

Per grandezze periodiche non sinusoidali, il valore medio della coppia corrisponde alla somma dei valori medi dei prodotti relativi ad armoniche corrispondenti.

Uno strumento del tipo descritto è detto elettrodinometro e deve considerarsi uno strumento per corrente alternata adatto per diverse applicazioni.

Si deve osservare che in base a quanto è stato esposto nel Capitolo 3.3., le caratteristiche dell'equipaggio mobile in relazione alla frequenza delle correnti determinano il comportamento dello strumento ai transitori. Se la pulsazione della grandezza da misurare è molto piccola rispetto alla pulsazione meccanica propria dell'equipaggio, quest'ultimo è in grado di seguire l'andamento della coppia istantanea e potendosi ritenere la deviazione proporzionale alla coppia, la deviazione dell'indice risulta di tipo oscillatorio con asse di oscillazione sul valore medio. In caso contrario, la deviazione dell'indice risulta stabilmente posizionata sul valore medio.

Se si fa in modo che  $I_f$  corrisponda alla corrente di un circuito e  $I_m$  sia proporzionale e in fase con la tensione  $V$  del circuito stesso, la coppia media risulta

$$C_m = kVI \cos(\varphi) \quad (4.30)$$

La proporzionalità tra tensione  $V$  e  $I_m$  può essere molto semplicemente ottenuta ponendo in serie alla bobina mobile una resistenza di adeguato valore di tipo antiinduttivo.

Lo strumento assume allora il nome di wattmetro e lo schema di principio è quello riportato nella Figura 4.12.

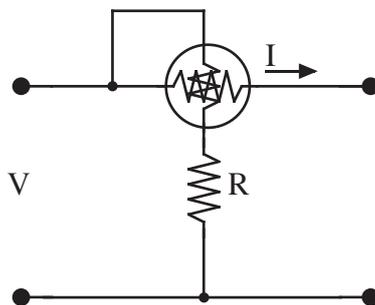


Fig. 4.12 Strumento elettrodinamico utilizzato come wattmetro

In tale applicazione, la bobina fissa è costituita con grosse spire di grande sezione, mentre la bobina mobile è realizzata con molte spire di filo sottile.

Si rimanda a quanto esposto più avanti per la definizione di potenze attiva, reattiva e apparente nei circuiti a corrente alternata.

In linea di principio qualunque wattmetro può essere trasformato in varmetro: basta che  $I_m$  sia in quadratura con  $V$ . In queste condizioni si avrebbe infatti una coppia motrice media data da

$$C_m = kVI \cos(\varphi - 90^\circ) = kVI \sin(\varphi) \quad (4.31)$$

Si può adottare lo schema indicato in Figura 4.13, per il quale

$$\begin{cases} I_V = \frac{V}{Z + \frac{Z_m R}{Z_m + R}} \\ I_m = I_V \frac{R}{Z_m + R} = V \frac{R}{ZZ_m + Z_m R + ZR} \end{cases} \quad (4.32)$$

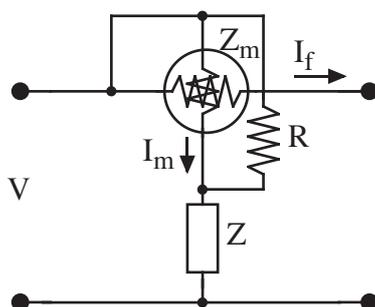


Fig. 4.13 Strumento elettrodinamico utilizzato come varmetro

Perché  $I_m$  sia in quadratura con  $V$ , basta che sia nulla la parte reale del coefficiente di  $V$  nell'ultima relazione, cioè

$$R = \frac{\text{Im}(Z)\text{Im}(Z_m) - \text{Re}(Z)\text{Re}(Z_m)}{\text{Re}(Z) + \text{Re}(Z_m)} \quad (4.33)$$

È stabilito così un legame che, rispettato, rende possibile la misura diretta di

$$Q = \vec{I}_m \cdot \vec{I}_f = \vec{V} \times \vec{I} \quad (4.34)$$

Si osserva che il comportamento di un varmetro così realizzato è corretto solo per una ben determinata frequenza.

Attualmente, meno frequente è l'impiego come amperometro, potendo la bobina fissa fungere da derivatore per la bobina mobile (Figura 4.14).

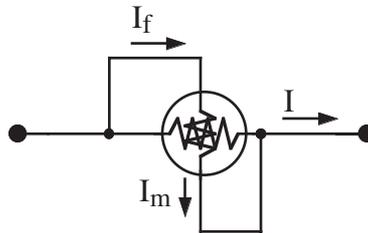


Fig. 4.14 Strumento elettrodinamico utilizzato come amperometro

Sarà dunque

$$\begin{cases} I_m = I \frac{Z_f}{Z_f + Z_m} \\ I_f = I \frac{Z_m}{Z_f + Z_m} \\ \delta = I_m \cdot I_f = \frac{Z_f Z_m}{(Z_f + Z_m)^2} I^2 = k_a I^2 \end{cases} \quad (4.35)$$

La scala di lettura risulta in tal caso quadratica.

Ancora da rilevare è l'influenza che può avere la frequenza sulla precisione dell'indicazione in quanto essa influisce sul valore delle impedenze.

Lo strumento elettrodinamico può anche essere usato come voltmetro (Figura 4.15).

Detta  $Z$  l'impedenza equivalente della serie (bobina fissa, bobina mobile, resistore addizionale) sarà:

$$\delta = \frac{1}{Z^2} V^2 = k_v V^2 \quad (4.36)$$

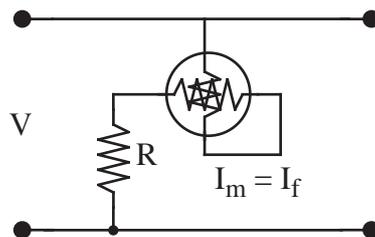


Fig. 4.15 Strumento elettrodinamico utilizzato come voltmetro

Se la impedenza  $Z$  è sostanzialmente resistiva, l'indicazione è, entro certi limiti, indipendente dalla frequenza. In questo caso anche la bobina fissa è realizzata con molte spire di filo sottile. La scala dello strumento è quadratica.

## 4.8. Strumenti ad Induzione

Gli strumenti ad induzione funzionano in base al fenomeno di induzione elettromagnetica e per questo motivo funzionano esclusivamente con correnti alternate.

Anche se in linea di principio si possono realizzare voltmetri, amperometri, la tipica applicazione è quella del contatore di energia che è un wattmetro integratore.

Il wattmetro è costituito da un disco di rame o di alluminio imperniato su due pietre dure, che porta la molla antagonista e l'indice.

Il disco può ruotare fra le espansioni polari di due elettromagneti i cui avvolgimenti sono percorsi rispettivamente dalla corrente di misura (Figura 4.16), e da una corrente proporzionale alla tensione del circuito.

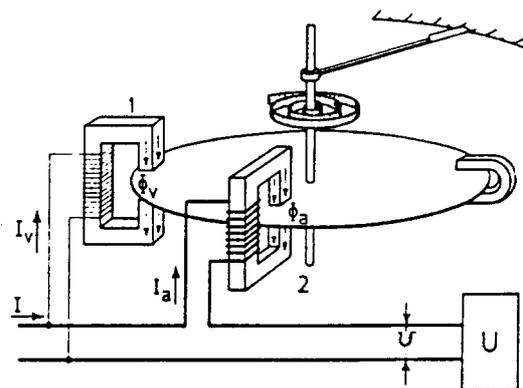


Fig. 4.16 Strumento a induzione

Il funzionamento può essere schematizzato come segue: l'elettromagnete 1 produce un flusso  $\Phi_v$  che attraversa il disco e vi genera una forza elettromotrice indotta che dà luogo a correnti parassite; altrettanto fa l'elettromagnete 2. Come è noto, fra un flusso magnetico ed una corrente elettrica si esercita una azione meccanica, ossia si generano delle forze. Orbene, l'azione sul disco si esercita per effetto del flusso  $\Phi_v$  sulla corrente  $I_2$  e del flusso  $\Phi_a$  sulla cor-

rente  $I_1$ . Poiché le correnti circolano nel disco ed i flussi emanano dai magneti che sono fissi, le forze che si generano sulle correnti agiscono anche sul disco che è sollecitato a muoversi, contrastato dalla molla antagonista. Lo schema di distribuzione dei flussi e delle correnti è indicato in Figura 4.17, dove ai flussi perpendicolari al piano del foglio corrispondono le correnti con andamento circolare intorno all'asse dei circuiti magnetici.

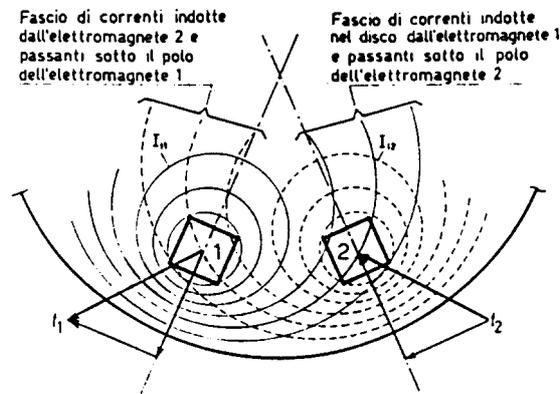


Fig. 4.17 Distribuzione dei flussi e delle correnti in uno strumento a induzione

Per rendersi più chiaramente conto del funzionamento del wattmetro ad induzione, conviene esaminare le grandezze in gioco in un istante qualsiasi, ad esempio mentre la corrente  $I_v$  è positiva e sta diminuendo e la  $I_a$  è pure positiva ma sta aumentando.

La corrente  $I_v$  che sta diminuendo induce sul disco una corrente  $I_1$  diretta nello stesso senso (per la legge di Lenz tende ad opporsi alla diminuzione del flusso). La corrente  $I_a$  che sta aumentando induce invece sul disco una corrente  $I_2$  diretta in senso contrario (che si oppone all'aumento del flusso). In base alle leggi delle azioni elettromeccaniche, la  $I_2$  reagisce con il flusso  $\Phi_v$  e da luogo ad una forza  $F_1$  che si può scindere in due componenti, una perpendicolare all'asse del disco ed una tangente ad esso. Questa ultima componente tende a far ruotare il disco e altrettanto avviene per la corrente indotta  $I_1$  e per il flusso  $\Phi_a$ .

L'azione totale delle due forze produce la rotazione del disco come indicato dalla freccia se le due correnti hanno andamento diverso (una crescente e l'altra decrescente). Se fossero entrambe crescenti o decrescenti, quindi in fase, le due forze generate sarebbero uguali e contrarie ed il disco non potrebbe muoversi (Figura 4.18).

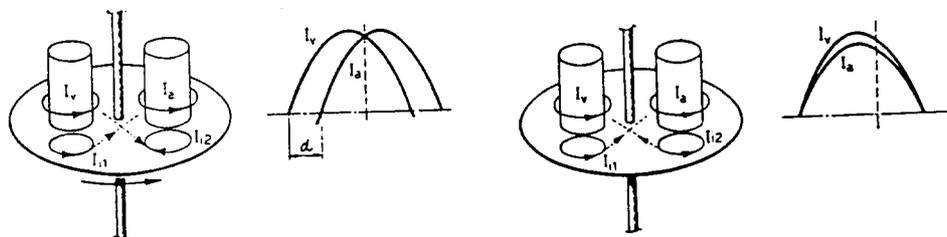


Fig. 4.18 Rotazione del disco di uno strumento a induzione

Si può quindi riassumere dicendo che la coppia  $C_m$  che si genera nel disco per effetto dell'interazione fra le due correnti  $I$  che percorrono gli elettromagneti e le componenti in quadratura

delle correnti indotte  $I_i$  sul disco stesso, è proporzionale al seno dell'angolo di sfasamento fra le correnti:

$$C_m = K_1 \Phi_v \Phi_a \sin(\delta) = K_2 I_v I_a \sin(\delta) \quad (4.37)$$

In uno dei due avvolgimenti, collegato in serie, può essere inviata direttamente la corrente del circuito, mentre l'altro, posto in parallelo può essere sottoposto alla tensione del circuito (il valore della corrente  $I_v$  sarà perciò  $I_v = V/Z$ ).

Poiché il circuito voltmetrico presenta induttanza elevata la corrente  $I_v$  è sfasata rispetto alla tensione  $V$  applicata di un angolo assai prossimo a un quarto di periodo. Se a sua volta si indica con  $\varphi$  lo sfasamento tra la tensione  $V$  e la corrente  $I_a$  impresse, sarà:

$$\delta = \alpha - \varphi \quad (4.38)$$

La equazione (4.38) si potrà quindi scrivere (Figura 4.19) come

$$C_m = K_2 I_a \frac{V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) = K_3 I_a V \sin(\alpha - \varphi) \quad (4.39)$$

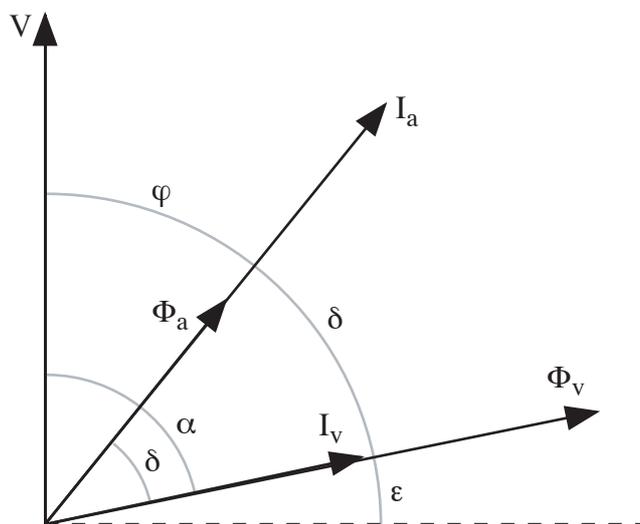


Fig. 4.19 Diagramma vettoriale in uno strumento a induzione

Se ora si fa in modo che sia  $\alpha = 90^\circ$  si ottiene

$$C_m = K_3 I_a V \sin(90^\circ - \varphi) = K_3 I_a V \cos(\varphi) = K_3 P \quad (4.40)$$

Uno strumento ad induzione del tipo descritto può quindi fornire una deviazione (angolo di rotazione del disco) proporzionale alla potenza attiva che transita nel circuito.

Non potendo essere la resistenza del circuito voltmetrico nulla, per ottenere lo sfasamento richiesto tra tensione e corrente nella bobina voltmetrica, si deve ricorrere ad artifici circuitali. Il sistema più usato è quello di collocare un anellino metallico in corto circuito attorno al magnete (Figura 4.20) ed inoltre di fare sporgere il nucleo rispetto al disco di modo che una parte del flusso si chiuda senza interessare il disco rotante.

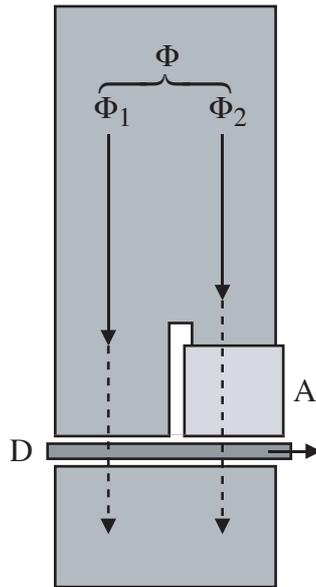


Fig. 4.20 *Correzione dello sfasamento in uno strumento a induzione*

Per effetto delle correnti indotte in questo anellino è possibile avere uno sfasamento del flusso relativo anche superiore ai  $90^\circ$ . Ciò permette, fra l'altro, di compensare anche lo sfasamento che si produce nell'avvolgimento amperometrico per effetto della sua induttanza e che altrimenti darebbe luogo ad un errore di fase. Negli strumenti più semplici l'anello viene sostituito da un dischetto metallico che viene applicato in posizione eccentrica al di sotto di una espansione polare: il comportamento è analogo a quello visto per l'anello.

Caratteristica peculiare degli strumenti a induzione è la stretta dipendenza dalla frequenza, in quanto dalla frequenza dipendono sia per i valori delle forze elettromotrici indotte, sia quelli delle impedenze.

Si tratta, tuttavia, di strumenti assai robusti, che possono sopportare forti sovraccarichi momentanei (la molla antagonista non è percorsa da corrente) e la loro scala si può sviluppare, a piacere per quasi tutta l'intera circonferenza.

Essi non sono caratterizzati da autosmorzamento delle oscillazioni, per cui sulla periferia del disco viene applicato anche un magnete permanente (Figura 4.16) che genera, durante il movimento, delle correnti indotte le quali hanno l'effetto smorzante desiderato.

## 4.9. Contatori ad Induzione

Il contatore ad induzione deriva direttamente dal wattmetro sopra descritto, ma esso è privo della molla antagonista, per cui il disco è libero di ruotare trascinando il numeratore (Figura 4.21).

Con il disco in rotazione, il magnete permanente provoca una coppia frenante proporzionale alla velocità angolare in quanto le correnti da esso indotte nel disco sono proporzionali alla velocità di rotazione.

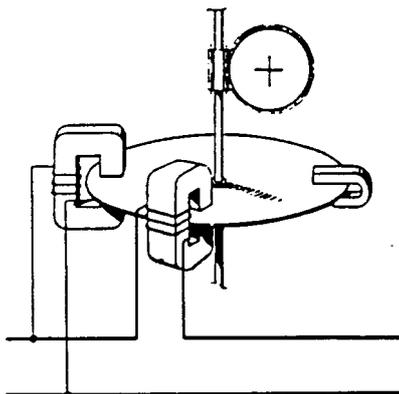


Fig. 4.21 Contatore a induzione

Poiché la potenza è proporzionale alla velocità angolare dello strumento, il numero di giri risulta proporzionale all'energia transitata. Si analizza ora in dettaglio la formazione della coppia motrice. Il diagramma vettoriale completo delle grandezze in gioco sul contatore è rappresentato nella Figura 4.22.

Nel circuito voltmetrico la corrente  $I_v$  è sfasata in ritardo rispetto alla tensione  $V$  di quasi un quarto di periodo. Questa corrente produce nel circuito magnetico di tensione un flusso  $\Phi_v$  ad essa proporzionale e sfasato in ritardo di un piccolo angolo  $\delta_v$ , a causa delle perdite nel circuito magnetico:

$$\Phi_v = k_1 V \quad (4.41)$$

Il flusso  $\Phi_v$  induce nel disco forze elettromotrici  $E_v$  proporzionali ad esso ed alla pulsazione  $\omega$  e quindi delle correnti indotte.

La corrente  $I$  del circuito di corrente, che supponiamo sfasata di un angolo  $\varphi$  rispetto alla tensione  $V$ , percorre la bobina di corrente e genera un flusso  $\Phi_i$  pari a

$$\Phi_i = k_2 I \quad (4.42)$$

sfasato in ritardo rispetto a  $I$  di un piccolo angolo  $\delta_i$  causa le perdite nel circuito magnetico. Questo flusso induce nel disco delle forze elettromotrici che a loro volta generano delle correnti, in analogia a quanto detto sopra.

La coppia motrice risultante delle due coppie parziali può essere espressa con una relazione del tipo

$$C_m = K_1 \Phi_v \Phi_a \sin(\alpha - \varphi) \quad (4.43)$$

Infine, facendo in modo che l'angolo  $\alpha$  fra la tensione  $V$  applicata alla bobina voltmetrica e la corrente  $I_v$  che la percorre sia di  $90^\circ$ , l'equazione (4.43) si trasforma in

$$C_m = K_1 \Phi_v \Phi_a \sin(90^\circ - \varphi) = K_1 \Phi_v \Phi_a \cos(\varphi) \quad (4.44)$$

La coppia motrice agente sull'equipaggio mobile del contatore è quindi proporzionale al prodotto dei flussi voltmetrico e amperometrico, secondo una costante empirica  $K_1$ .

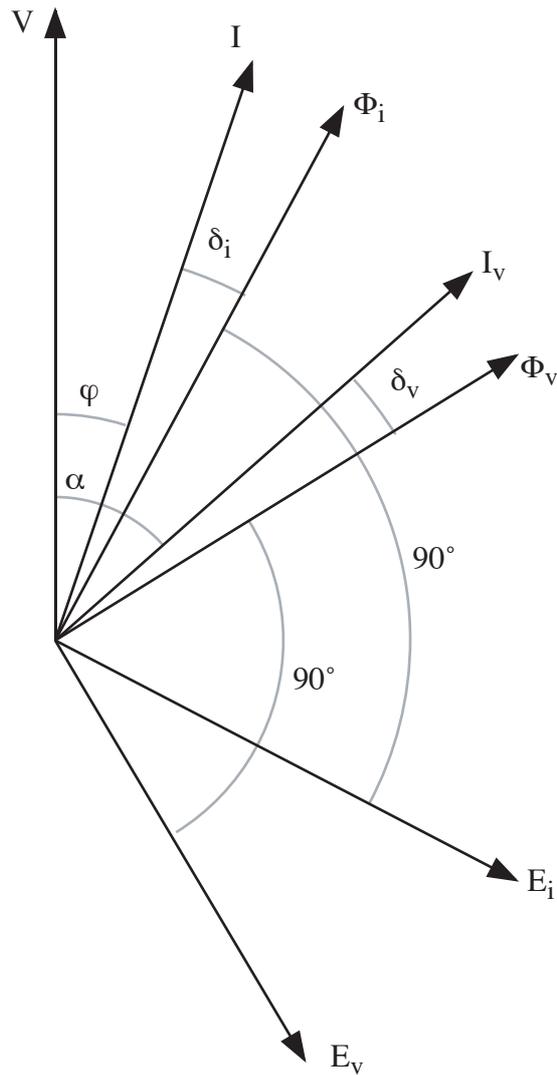


Fig. 4.22 Diagramma vettoriale in un contatore a induzione

Alla formazione della coppia antagonista concorrono più fenomeni.

Il disco in rotazione taglia il flusso costante esistente nel traferro del magnete permanente (magnete freno). In esso si inducono quindi delle forze elettromotrici proporzionali al valore del flusso costante  $\Phi_F$  tagliato ed alla velocità angolare  $\omega$  del disco.

Proporzionali alla forza elettromotrice e alla velocità angolare, sono anche le correnti indotte che reagendo col flusso daranno luogo ad una coppia frenante del tipo

$$C_F = k_3 \omega \Phi_F^2 \quad (4.45)$$

Le correnti indotte nel rotore dal flusso voltmetrico e dal flusso amperometrico danno luogo alla coppia motrice, ma reagendo coi flussi che le hanno provocate danno anche origine a due coppie frenanti che possono essere espresse con le relazioni

$$\begin{aligned} C_{Fv} &= k_4 \omega \Phi_v^2 \\ C_{Fi} &= k_5 \omega \Phi_i^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Non si deve poi dimenticare la presenza di una coppia di attrito meccanico ( $C_A$ ) che, salvo allo spunto, in prima approssimazione può considerarsi proporzionale alla velocità angolare del rotore:

$$C_A = k_6 \omega \quad (4.47)$$

La coppia antagonista globale sarà formata dalla somma di tutte quelle parziali sin qui nominate, e cioè

$$C_a = C_F + C_{Fv} + C_{Fi} + C_A \quad (4.48)$$

All'equilibrio fra coppia motrice e coppia antagoniste  $C_m = C_a$ , la velocità angolare dell'equipaggio mobile sarà

$$\omega = K_1 \Phi_v \Phi_a \cos(\varphi) - a_0 \quad (4.49)$$

Si verifica quindi per una ben determinata velocità angolare

$$\omega = NVI \cos(\varphi) = NP \quad (4.50)$$

nella quale  $N$  è una costante.

Introducendo il tempo  $t$  nei due termini della equazione (4.50), si ottiene

$$\omega t = NPt \quad (4.51)$$

Risolviendo rispetto a  $Pt$  che è l'energia  $W$  del circuito, si ottiene

$$W = \frac{n}{N} \quad (4.52)$$

L'energia misurata da un contatore è uguale al numero  $n$  di giri del disco, diviso per la sua costante  $N$ , quest'ultima solitamente espressa in giri / kWh.

Le principali cause di errore nei contatori a induzione sono:

- la non linearità dei circuiti voltmetrico e amperometrico;
- la coppia frenante dovuta ai flussi voltmetrico e amperometrico;
- la coppia di attrito;
- il fattore di potenza del circuito;
- la frequenza;
- la forma d'onda della tensione e corrente;

- la temperatura.

L'errore globale di un contatore in funzione del carico a tensione, frequenza e fattore di potenza costante assume l'andamento indicato in Figura 4.23.

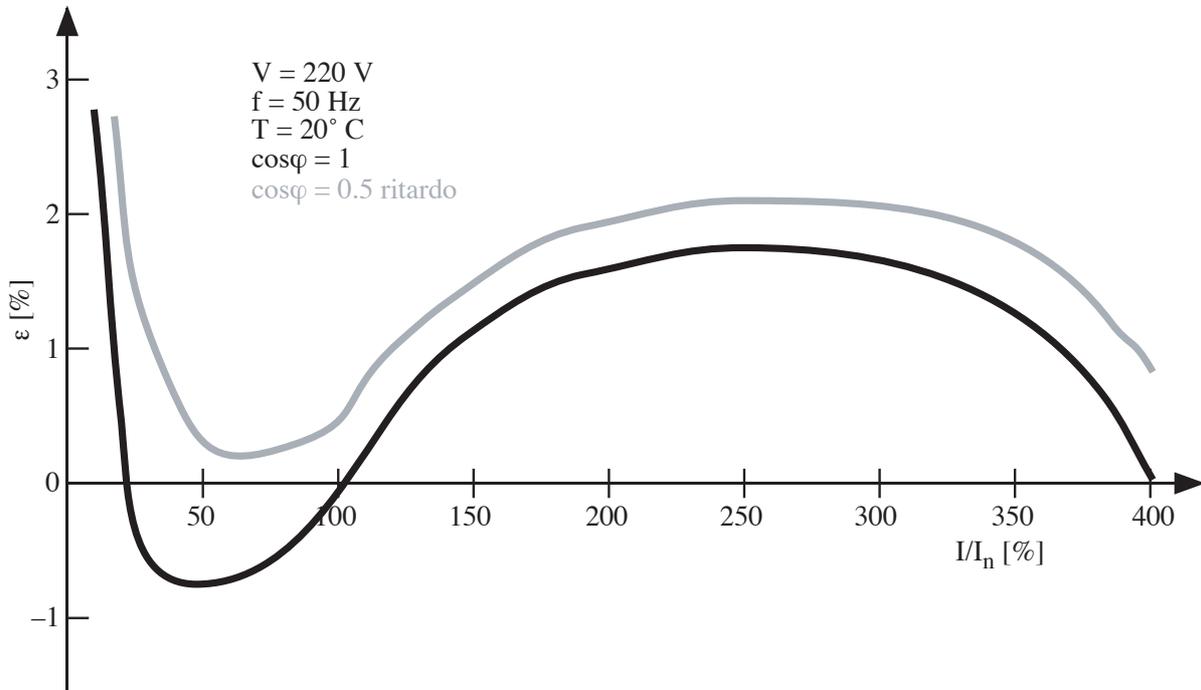
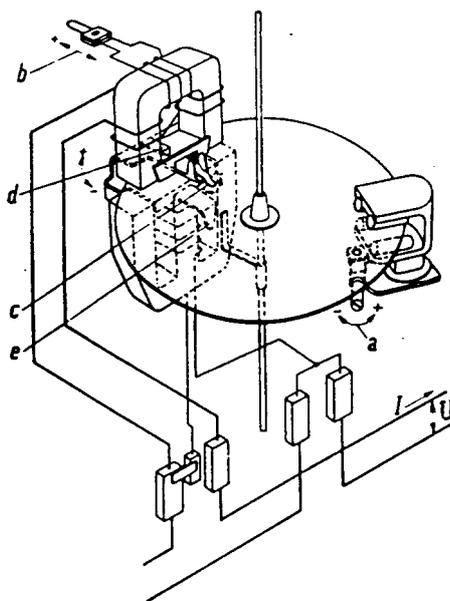


Fig. 4.23 Curva di errore di un contatore a induzione

Per correggere la curva d'errore e avvicinarla nel miglior modo possibile all'asse di zero, il contatore, dispone di particolari dispositivi (Figura 4.24).



- a) Regolazione Velocità Pieno Carico
- b) Regolazione di Fase
- c) Regolazione Velocità Piccolo Carico
- d) Regolazione Velocità Sovraccarico
- e) Fermo di Tensione

Fig. 4.24 Dispositivi di taratura in un contatore a induzione

L'aggiustamento delle velocità a pieno carico si effettua variando il flusso del magnete freno che attraversa il disco per mezzo di un sistema meccanico a vite (a). In alternativa si può anche ricorrere ad uno shunt magnetico.

Il dispositivo per la regolazione di fase può essere previsto sul circuito magnetico di corrente o sul circuito magnetico di tensione. Nel primo caso esso è costituito da un piccolo avvolgimento disposto sul ferro amperometrico, chiuso su una resistenza variabile, generalmente un filo doppio di nichel-cromo munito di un cursore (b). In questo avvolgimento si induce una corrente che tende a modificare la fase del flusso risultante amperometrico.

Il dispositivo di regolazione posto sul circuito magnetico di tensione può essere costituito da:

- un avvolgimento attraversato da tutto il flusso voltmetrico e funzionante in modo perfettamente analogo a quello descritto per il circuito di corrente;
- da lamine metalliche introdotte in traferri presenti sul circuito magnetico (c).

La compensazione della regolazione di velocità al piccolo carico è necessaria per compensare la coppia di attrito che non è più trascurabile rispetto alla coppia motrice. Il dispositivo di regolazione produce in effetti una piccola coppia motrice supplementare, facendo reagire col flusso voltmetrico le correnti indotte nel disco da un piccolo flusso voltmetrico derivato dal principale e sfasato rispetto ad esso (Figura 4.25).

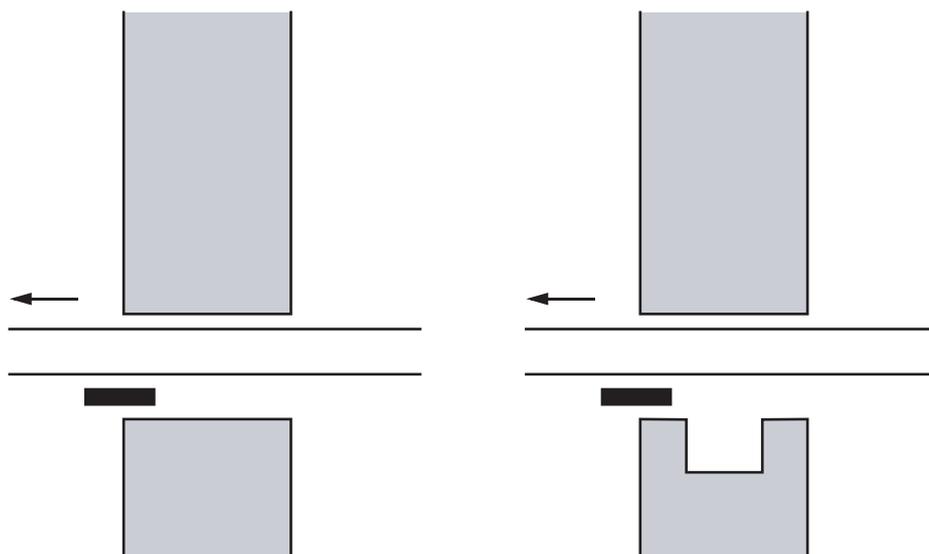


Fig. 4.25 *Compensazione della regolazione di velocità al piccolo carico in un contatore a induzione*

Il dispositivo per la regolazione di velocità in sovraccarico è necessario in quanto i moderni contatori sono sovraccaricabili sino a  $3 \div 4$  volte e più il valore nominale di targa. Esso è generalmente costituito da uno shunt magnetico saturabile derivato sul circuito magnetico della bobina di corrente e formato da due parti, una fissa ed una mobile (d).

Le variazioni della posizione reciproca fra parte fissa e parte mobile regolano l'intensità del flusso derivato e quindi la coppia del contatore nella zona di sovraccarico.

Il dispositivo di regolazione della velocità al piccolo carico serve anche per vincere la coppia d'attrito di primo distacco. Poiché il dispositivo di avviamento agisce sul flusso voltmetrico,

anche con carico nullo e il disco si metterebbe in rotazione anche in assenza di energia, i contatori sono muniti di un cosiddetto fermo di tensione costituito da due sottili linguette sporgenti una dall’albero del disco e una dal magnete voltmetrico, che quando vengono a trovarsi a distanza ravvicinata costituiscono un blocco (e).

## 4.10. Effetti dell’Inserzione degli Strumenti: Autoconsumi

L’inserzione di uno strumento di misura comporta sempre, in misura più o meno apprezzabile, una alterazione delle condizioni del circuito, per cui la grandezza sotto misura non è più esattamente quella preesistente. L’entità di questa perturbazione deve essere oggetto di attento esame in relazione alla scelta del metodo di misura e degli strumenti da utilizzare.

Si consideri ad esempio il caso della misura della forza elettromotrice di una pila (Figura 4.26).

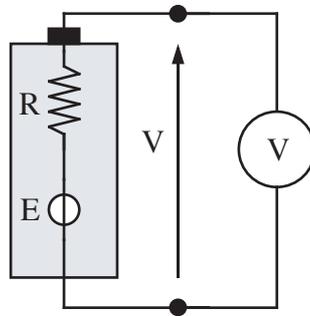


Fig. 4.26 Autoconsumi degli strumenti nella misura della forza elettromotrice di una pila

È agevole intuire che, in certe condizioni, l’inserimento del voltmetro può modificare la tensione ai morsetti che risulta

$$V = E \frac{r}{R + r} \quad (4.53)$$

Considerazioni analoghe possono essere svolte per la misura di una corrente.

Quando il risultato di una misura dipende dalle indicazioni di due strumenti è sovente necessario considerare gli errori sistematici connessi con il metodo di misura scelto. A titolo di esempio, si faccia riferimento allo schema di Figura 4.27 che rappresenta uno dei metodi utilizzabili per determinare la resistenza di un bipolo passivo.

Si può osservare che mentre il voltmetro misura esattamente la tensione applicata al bipolo, l’amperometro misura una corrente che è la somma di quella assorbita dal bipolo e di quella richiesta dal voltmetro. Di conseguenza il rapporto  $V_m / I_m$  non rappresenta esattamente il valore ( $R$ ) della grandezza incognita:

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_m}{I + I_v} = \frac{V_m}{I + \frac{V_m}{R_v}} < \frac{V_m}{I} = R \quad (4.54)$$

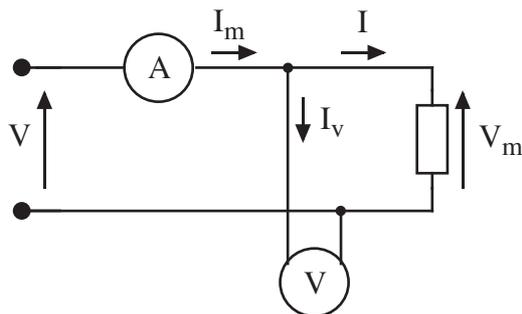


Fig. 4.27 Misura di resistenza con voltmetro a valle

Il metodo usato comporta quindi un errore sistematico in meno, attribuibile all'autoconsumo del voltmetro.

Si può assumere  $R_m = R$  solo nel caso in cui  $R_v \ll R$ .

Analogamente, se si esamina il circuito di Figura 4.28, si può concludere che il rapporto  $V_m / I_m$  fornisce un valore  $R_m$  in eccesso rispetto a  $R$ :

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V + R_a I_m}{I_m} > \frac{V}{I_m} = R \quad (4.55)$$

In questo caso è l'ammetero che misura esattamente la corrente che circola nel bipolo mentre il voltmetro misura una tensione che è la somma di quella ai morsetti del bipolo aumentata della caduta di tensione ai morsetti dell'ammetero. Si può assumere  $R_m = R$  solo nel caso in cui  $R_a \ll R$ .

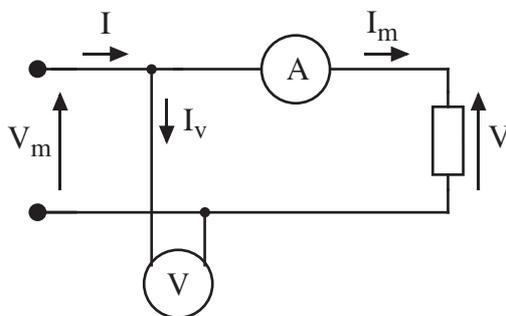


Fig. 4.28 Misura di resistenza con voltmetro a monte

Trattandosi di errori di tipo sistematico, conoscendo le caratteristiche di autoconsumo degli strumenti è possibile correggere i risultati della misura.

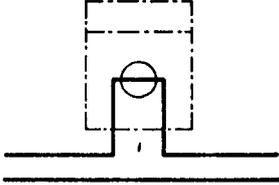
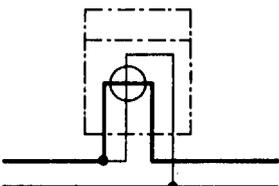
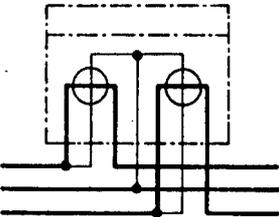
Ulteriori considerazioni nell'argomento verranno svolte nei prossimi paragrafi.

## Appendice A – Identificazione degli Strumenti

<b>IDENTIFICAZIONE DEGLI STRUMENTI</b>			
simboli riportati sul quadrante			
Strumento	Simbolo	Strumento	Simbolo
A magnete fisso e bobina mobile (magnetoelettrico)		A magnete fisso e bobina mobile come misuratore di rapporto (logometro)	
A ferro mobile		A ferro mobile come misuratore di rapporto o come strumento differenziale (logometro)	
Elettrodinamico		Elettrodinamico come misuratore di rapporto (logometro)	
Elettrodinamico con ferro (ferrodinamico)		Elettrodinamico con ferro come misuratore di rapporto (logometro)	
A induzione		A induzione come misuratore di rapporto o come strumento differenziale (logometro)	
Termico a filo caldo (ormai in disuso)		Termico a lamina bimetallica	
Elettrostatico		A lamelle vibranti	
A bobina mobile a termocoppia incorporata		A bobina mobile con radrizzatore incorporato	

<b>IDENTIFICAZIONE DEGLI STRUMENTI</b>			
simboli riportati sul quadrante			
<b>CIRCUITI NEI QUALI PUO' ESSERE INSERITO</b>			
Circuito	Simbolo	Circuito	Simbolo
A corrente continua		A corrente alternata tri-fase con 1 circuito di corrente ed 1 circuito di tensione	
A corrente alternata		A corrente alternata tri-fase con 2 circuiti di corrente e 2 circuiti di tensione	
A corrente continua ed alternata		A corrente alternata tri-fase con 3 circuiti di corrente e 3 circuiti di tensione	
<b>DISPOSIZIONE DELLO STRUMENTO</b>			
Disposizione	Simbolo	Disposizione	Simbolo
Strumento da usare con quadrante verticale		Strumento da usare con quadrante inclinato rispetto ad un piano orizzontale	
Strumento da usare con quadrante orizzontale		Angolo di inclinazione	
<b>TENSIONE DI PROVA</b>			
Tensione	Simbolo	Tensione	Simbolo
Tensione di prova 500 V		Tensione di prova 5000 V	
Tensione di prova 2000 V		Strumento dispensato dalla prova di tensione	

<b>SEGNI GRAFICI PER STRUMENTI INDICATORI E REGISTRATORI</b> (Norma CEI 3-10, III 1970, n. 264)			
Tipo di strumento	Indicatore	Registratore	Equipaggio dello strumento
Voltmetro			
Frequenziometro			
Amperometro			
Wattmetro			
Varmetro			
Ohmmetro			
Fasometro			
Sincronoscopio			
Indicatore del senso della corrente			

<b>SEGNI GRAFICI PER STRUMENTI INTEGRATORI</b> (CEI - fasc. 86)			
	Segno grafico		Schema interno di principio
Amperorametro			
Contatore di energia			
Contatore di energia attiva e reattiva trifase			 <i>Energia attiva</i>
<p>Negli strumenti per corrente continua sotto il simbolo indicante la grandezza da misurare si aggiunge un trattino (vedere i due esempi sopra riportati relativi all'amperorametro ed al contatore monofase).</p>			
<b>INDICAZIONI PARTICOLARI</b>			
a un solo senso di rotazione	con indicatore di massima		a doppia tariffa
			