Cambiamenti di base.

V spazio vettoriale di dimensione n, B, B' due basi di V:

$B = (\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\ldots\mathbf{v}_n)$ $\quad B' = (\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2\,\ldots\mathbf{v}'_n)$ matrici **riga** con elementi **vettori**.

Le componenti di un vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto alle due basi sono i coefficienti tali che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots x_n\mathbf{v}_n$ e rispettivamente $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{v}'_1 + \ldots x'_n\mathbf{v}'_n$.

Scriviamo le componenti come matrici **colonna** con elementi **numeri**:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ così che, usando il **prodotto righe per colonne** si abbia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\ldots\mathbf{v}_n)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2\,\ldots\mathbf{v}'_n)\cdot\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

In breve: $\mathbf{v} = BX = B'X'$.

(★) Possiamo scrivere i vettori di B' usando i vettori della base B. I coefficienti formano una matrice $n \times n$ che denotiamo $\quad P^{B,B'}$. Quindi:

$$\boxed{B \cdot P^{B,B'} = B'}$$

Allora: $\quad \mathbf{v} = B \cdot X \quad$ ma anche $\quad \mathbf{v} = B' \cdot X' = (B \cdot P^{B,B'}) \cdot X' = B \cdot (P^{B,B'} \cdot X')$.
Essendo B una base:

$$\boxed{P^{B,B'} \cdot X' = X}$$

Come scrivere $P^{B,B'}$?

In generale usando la definizione (★).

Se $V = \mathbb{R}^n$ (oppure $V = \mathbb{R}^{h,k}$) possiamo considerare la base canonica E.

1. È facile scrivere $P^{E,B}$: le colonne sono i vettori della base B.
2. Poi: $\quad P^{B,E} = (P^{E,B})^{-1}$.
3. Infine: $\quad P^{B,B'} = P^{B,E} \cdot P^{E,B'} = (P^{E,B})^{-1} \cdot P^{E,B'}$.

Matrici e applicazioni lineari.

V, W spazi vettoriali di dimensioni n e m con basi B e C.

Se $\mathbf{v} \in V$, le sue componenti rispetto a B sono date dal vettore colonna X tale che $\mathbf{v} = B \cdot X$.

Se $\mathbf{w} \in W$, le sue componenti rispetto a C sono date dal vettore colonna Y tale che $\mathbf{w} = C \cdot Y$.

Sia $f\colon V \to W$ una applicazione lineare.

(★★) Posso scrivere i vettori $(f(\mathbf{v}_1) \ldots, f(\mathbf{v}_n))$, (in breve $f(B)$) che sono vettori di W, mediante la base C.

I coefficienti formano una matrice $m \times n$, che denotiamo $M^{C,\,f(B)}$ ossia:

$$\boxed{C \cdot M^{C,\,f(B)} = f(B)}$$

Se $\mathbf{v} \in V$, posso scrivere $\mathbf{v} = B \cdot X$. La sua immagine è un vettore $\mathbf{w} \in W$: indichiamo con Y le componenti di $\mathbf{w}$ rispetto alla base C ossia $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = C \cdot Y$.

Posso anche calcolare l'immagine di $\mathbf{v}$ grazie alla linearità di f:

$$\boxed{f(\mathbf{v}) = f(B \cdot X) = f(B) \cdot X = C \cdot M^{C,\,f(B)} \cdot X}$$

Essendo C una base:

$$\boxed{Y = M^{C,\,f(B)} \cdot X}$$

Come scrivere $M^{C,\,f(B)}$?

In generale usando la definizione (★★).

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ (oppure sono spazi di matrici $\mathbb{R}^{h,k}$) posso considerare le basi canoniche E_V e E_W .

1. È facile scrivere $M^{E_W,\,f(E_V)}$: le colonne sono i vettori di $f(E_V)$.

2. Poi: se B e C sono altre basi di V e W:

$$M^{C,\,f(B)} = P^{C,E_W} \cdot M^{E_W,f(E_V)} \cdot P^{E_V,B} = \left(P^{E_W,C}\right)^{-1} \cdot M^{E_W,f(E_V)} \cdot P^{E_V,B}$$

In breve $A = M^{E_W,\,f(E_V)}$, $P = P^{E_V,B}$ e $Q = P^{E_W,C}$ sono le matrici che si scrivono facilmente e si ha:

$$\boxed{M^{C,\,f(B)} = Q^{-1} \cdot A \cdot P.}$$